



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
جامعة الشهيد حمّـة لخضر الوادي

Université Echahid Hamma Lakhdar d'El Oued

Faculté de Technologie

Département d'Hydraulique & de Génie Civil

كلية التكنولوجيا

قسم الري والهندسة المدنية

# Cours de Résistance des Matériaux

Réalisé par

**Dr. LABIODH Bachir**

**Maître de conférence à l'université d'Eloued**

# Avant-propos

Le présent polycopié est un cours de résistance des matériaux qui s'adresse essentiellement aux étudiants de deuxième année *LMD* en Génie Civil, Hydraulique et Travaux publics.

Ce support de cours est élaboré conformément au programme pédagogique fixé par le ministère de l'enseignement supérieur afin de permettre aux étudiants de cette classe de maîtriser les notions de base de la RDM ainsi que les méthodes de calculs et de dimensionnement des structures soumises aux différents types de sollicitations ( traction / compression, flexion simple ...etc), il est rédigé de manière simplifiée et beaucoup d'exemples sont introduits après avoir donné des notions afin que l'étudiant puisse assimiler le contenu du cours et ait une vision claire de son application, et à la fin de chaque chapitre de nombreux exercices, tous avec réponse permettront aux étudiants de tester l'avancement de leurs connaissances.

Cet ouvrage contient six chapitres, le premier chapitre concerne une introduction générale à la RDM (le but et les hypothèses considérées, les différents types de charges et d'appuis). Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des caractéristiques géométriques des sections planes. Le troisième chapitre concerne l'étude de la traction et la compression simple où sont déterminés les efforts axiaux ainsi que les contraintes normales et les allongements. Dans le quatrième chapitre, est étudiée la flexion simple, phénomène concernant les barres horizontales (ou les poutres), dans cette partie, sont déterminés les efforts intérieurs dus à la flexion, à savoir : le moment fléchissant et l'effort tranchant, ainsi que les contraintes normales et tangentielles. Le cinquième chapitre concerne l'étude des sollicitations dues au cisaillement. Pour finir, le dernier chapitre est dédié à l'étude des sollicitations dues au phénomène de torsion.

# Table des matières

## Avant propos

### Chapitre I : Introduction et généralités

|   |   |
|---|---|
| 1. Définition .....                     | 1 |
| 2. Différents types de chargement ..... | 1 |
| 3. Types d'appuis .....                 | 2 |
| 3.1 Appui simple .....                  | 2 |
| 3.2 Appuis double .....                 | 3 |
| 3.3 Encastrement .....                  | 3 |
| 4. Principe général d'équilibre .....   | 3 |
| 5. Méthode des sections .....           | 4 |

### Chapitre II : Caractéristiques géométriques des sections droites

|  |    |
|--|----|
| Introduction .....   | 5  |
| 1. Moment statique et centre de gravité .....                    | 5  |
| 2. Moment d'inertie .....  | 8  |
| 3. Moment d'inertie polaire .....                                | 9  |
| 4. Produit d'inertie (moment centrifuge) .....                   | 11 |
| 5. Rayon de giration .....                                       | 11 |
| 6. Module de résistance .....                                    | 11 |
| 7. Variation des moments par rapport à des axes parallèles ..... | 13 |
| 8. Rotations des axes .....                                      | 14 |
| 9. Axes d'inertie et moments d'inertie principaux .....          | 15 |
| Exercices .....  | 17 |

### Chapitre III : Traction simple et compression simple

|  |    |
|--|----|
| 1. Définition .....                        | 25 |
| 1.1 Traction .....                         | 25 |
| 1.2 Compression .....                      | 25 |
| 2. Effort normal .....                     | 26 |
| 3. Contrainte normale .....                | 28 |
| 4. Condition de résistance .....           | 28 |
| 5. Les déformations .....                  | 29 |
| 6. Relation déformations-contraintes ..... | 30 |
| Exercices .....                            | 32 |

### Chapitre IV : Flexion simple

|   |    |
|---|----|
| 1. Hypothèses et définition .....                 | 36 |
| 1.1 Hypothèses .....                              | 36 |
| 1.2 Définition .....                              | 36 |
| 2. Effort tranchant et moment fléchissant .....   | 37 |
| 3. Diagrammes des efforts internes (M et T) ..... | 39 |

|  |    |
|--|----|
| 4. Relations différentielles entre les charges et les efforts M et T ..... | 42 |
| 5. Contraintes normales en flexion simple .....                            | 42 |
| 6. Déformation d'une poutre soumise à la flexion simple .....              | 45 |
| 7. Calcul des contraintes tangentielles .....                              | 46 |
| Exercices .....  | 49 |

## **Chapitre V : Cisaillement**

|  |    |
|--|----|
| 1. Généralité .....                              | 57 |
| 2. Calcul des contraintes de cisaillement .....  | 58 |
| 3. Déformation de cisaillement .....             | 59 |
| 4. Condition de résistance au cisaillement ..... | 59 |

## **Chapitre VI : Torsion**

|  |    |
|--|----|
| 1. Généralité .....                        | 61 |
| 2. Contraintes et déformations .....       | 61 |
| 3. Calcul de résistance a la torsion ..... | 63 |

|  |    |
|--|----|
| <b>Références bibliographiques</b> ..... | 64 |
|--|----|

## CHAPITRE I

**Introduction et généralités****1. Définition :**

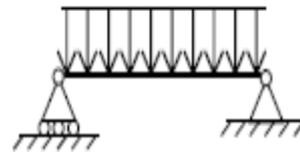
La résistance des matériaux est un outil élémentaire mis à la disposition de l'ingénieur et du technicien. A condition de vérifier certaines hypothèses la RDM permet de dimensionner les différentes parties d'un système matériel afin :

- Que ces pièces résistent aux sollicitations auxquelles elles sont soumises.
- Que les déformations subies soient compatibles avec le bon fonctionnement du mécanisme

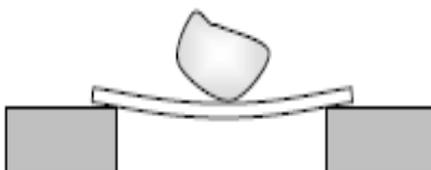
**2. Différents types de chargement :**

Les charges qui sollicitent les systèmes (poutres, portiques ...etc) comprennent :

- **Le poids propre (action de la pesanteur):**



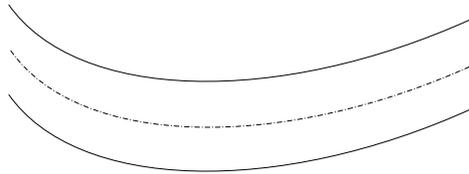
- **Les forces et les couples concentrés:**



- **Les forces et les couples répartis:**



Nous supposons que les charges extérieures sont appliquées aux fibres moyennes des poutres.



**3. Types d'appuis (liaison) :**

**3-1) appui simple :**

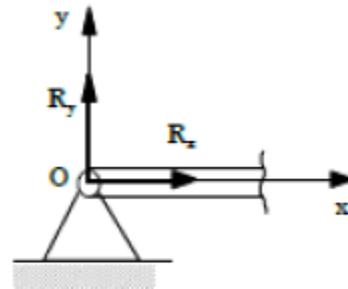
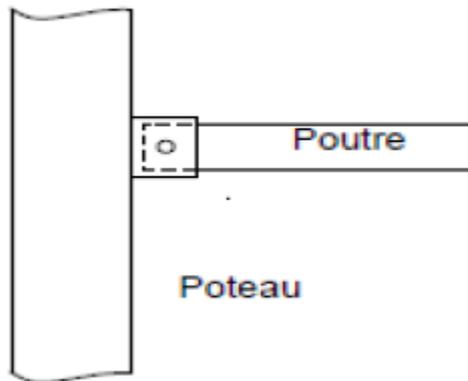
Ce type d'appui permet la rotation et le déplacement horizontal



$R_y$  : réaction d'appui suivant l'axe y

**3-2) appuis double :**

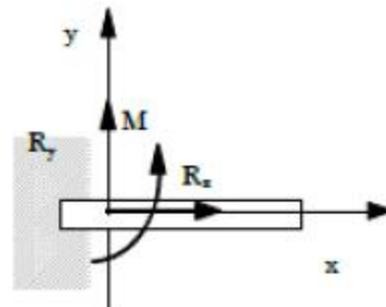
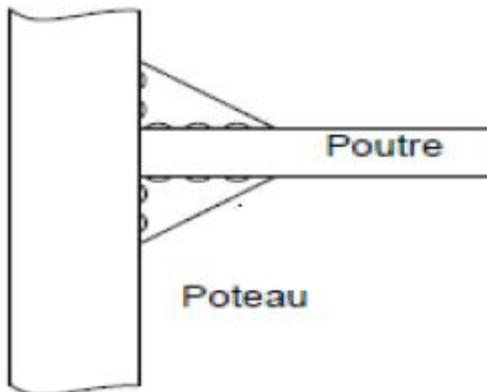
Cet appui autorise uniquement la rotation



$R_x$   $R_y$  : réactions d'appui suivant les axes  $x$  et  $y$ .

**3-3) Encastrement :**

Ce type d'appui interdit tout déplacement.



Deux réactions d'appui  $R_x$   $R_y$  et un moment d'encastrement  $M$

**4. Principe général d'équilibre :**

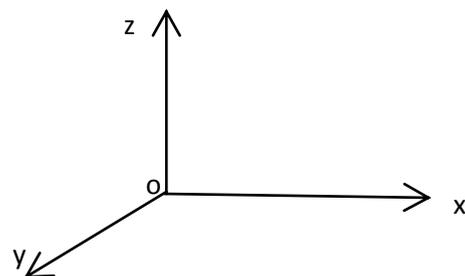
Un corps est dit en équilibre si la somme des forces est égale à zéro et la somme des moments est nul également.

Equations d'équilibre :

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad \sum M_{/x} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad \sum M_{/y} = 0$$

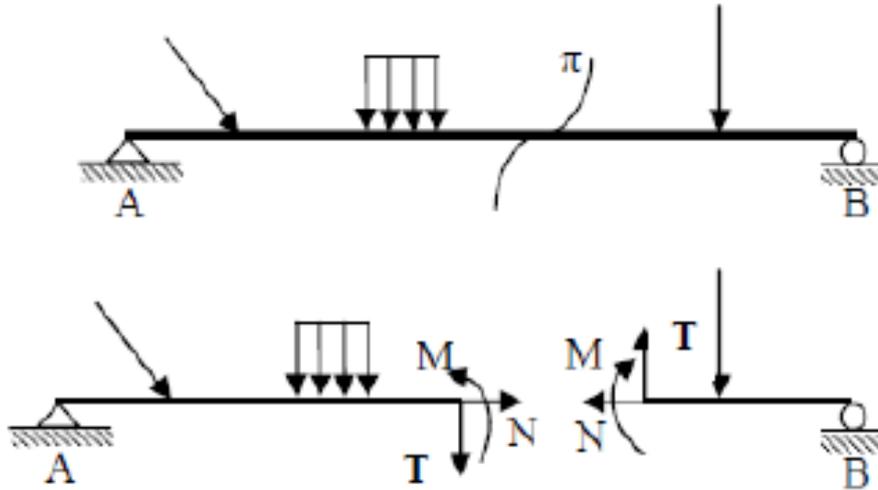
$$\sum F_z = 0 \quad ; \quad \sum M_{/z} = 0$$



### 5. Méthode des sections :

Le principe de la méthode des sections est le suivant :

Un corps en équilibre est coupé suivant une section ( $\pi$ - $\pi$ ) l'une des parties est ensuite rejetée il apparaît alors des efforts intérieurs :



Ensuite on utilise les équations d'équilibre :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 && \text{ nous donne l'effort normal } N \\ \sum F_y &= 0 && \text{ nous donne l'effort tranchant } T \\ \sum M &= 0 && \text{ nous donne le moment fléchissant } M\end{aligned}$$

## CHAPITRE II

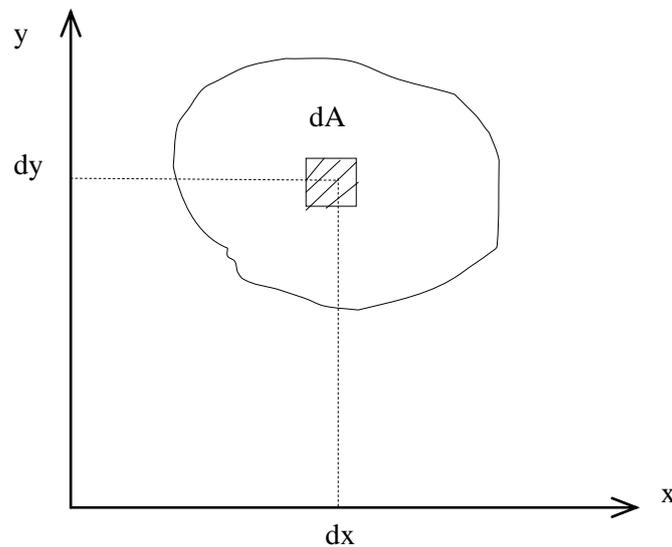
**Caractéristiques géométriques des sections droites****Introduction :**

La variété des formes des sections transversales des éléments utilisés dans le domaine de la construction n'est pas un fait de hasard la plupart de ces formes ont été développée pour répondre à des critères de résistance de rigidité ou de stabilité.

Les principales caractéristiques de sections planes sont :

**1) moment statique et centre de gravité :**

Soit la section plane A, par analogie de la notion du moment d'une force on définit le moment d'une surface élémentaire  $dA$  par rapport à un axe quelconque qu'on appelle moment statique :



$$dS_x = ydA$$

$$dS_y = xdA$$

$dS_x$  : moment statique de  $dA$  par rapport à  $x$

$dS_y$  : moment statique de  $dA$  par rapport à  $y$

pour la surface totale  $A$  :

$$S_x = \int_A dS_x = \int_A y dA$$

$$S_y = \int_A dS_y = \int_A x dA \quad \dots \dots \dots (1)$$

L'unité du moment statique c'est le  $(m^3)$

Les coordonnées du centre de gravité  $G(x_G, y_G)$  sont :

$$S_x = Ay_G$$

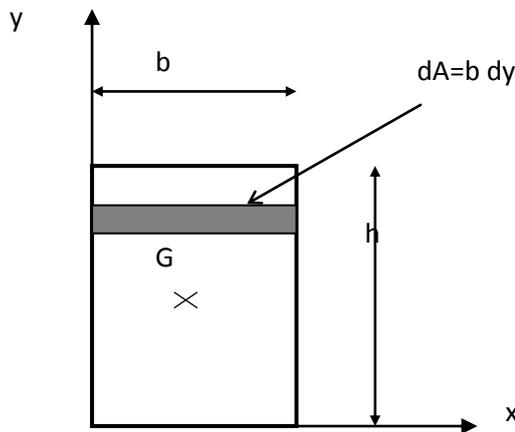
$$S_y = Ax_G \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$x_G = \frac{S_y}{A}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} \quad \dots \dots \dots (3)$$

**Application :**

On calcul  $S_x$  et  $S_y$  et  $(x_G, y_G)$  pour une section rectangulaire :



Pour le calcul de  $S_x$  on prend :

La surface  $dA = bdy$

$$S_x = \int_A ydA = \int_0^h ybdy = b \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{bh^2}{2}$$

Pour  $S_y$  :  $dA = hdx$

$$S_y = \int_A x dA = \int_0^b xhdx = h \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^b = \frac{hb^2}{2}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{b}{2}$$

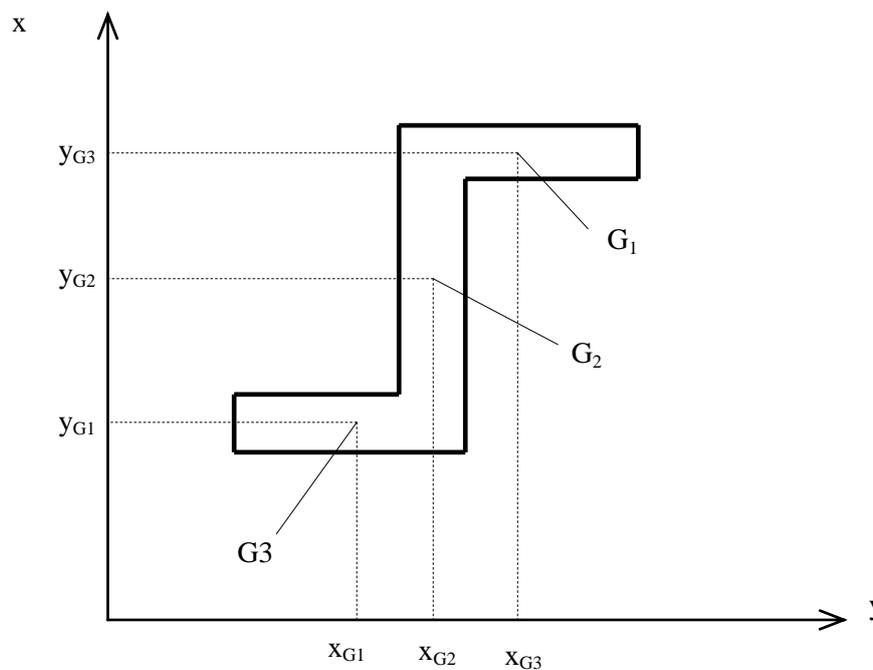
$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{h}{2}$$

### - Remarque :

Le moment statique d'une surface par rapport aux axes passant par son centre de gravité est nul, on appelle ces axes "axes centraux".

### - Cas d'une section composée :

On procède à discrétiser la section en élément de surface  $A_i$  leur centre de gravité  $G_i$  :



Donc le moment statique par rapport à un axe c'est la somme des moments statique des surfaces partielles  $A_i$  par rapport à cet axe :

$$S_x = \sum S_x(i) = \sum A_i y_{Gi}$$

$$S_y = \sum S_y(i) = \sum A_i x_{Gi} \dots \dots \dots (4)$$

D'où on trouve le centre de gravité :

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum A_i x_{Gi}}{A}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum A_i y_{Gi}}{A} \dots \dots \dots (5)$$

Avec  $A = \sum A_i$

**2) moment d'inertie :**

On définit le moment d'inertie d'une section comme le degré de résistance de la section aux efforts extérieurs appliqués.

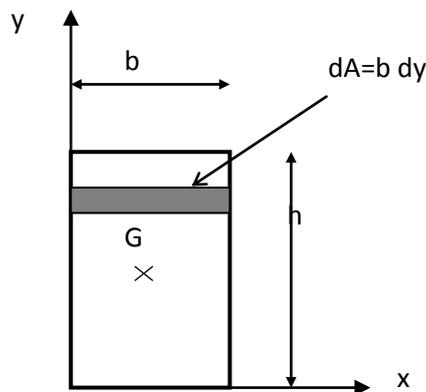
Le moment d'inertie par rapport aux axes x, y est donné par :

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \dots \dots \dots (6)$$

**Application :**

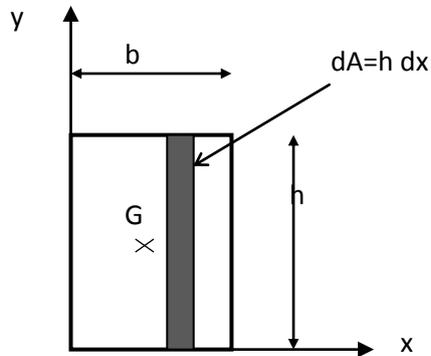
Cas d'un rectangle (bxh)



On prend une petite bande dy donc :  $dA = bdy$

$$I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

Pour  $I_y$  on a :  $dA = h dx$

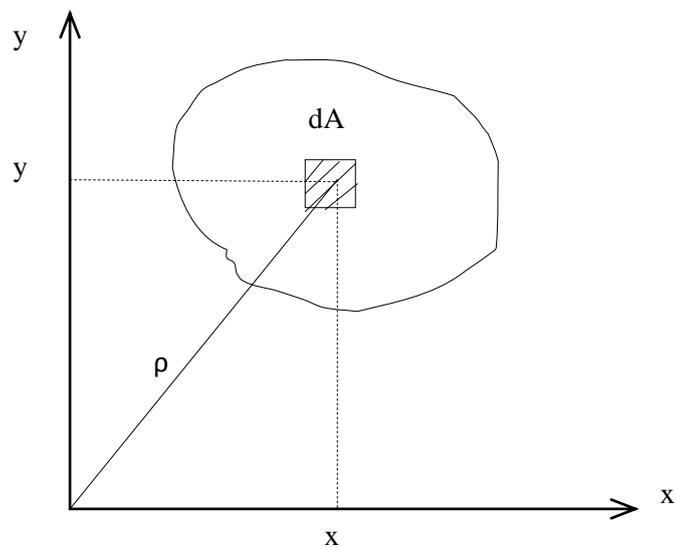


$$I_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 h dx = h \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{hb^3}{12}$$

### 3) moment d'inertie polaire:

C'est le moment d'inertie d'une section par rapport à un point qui s'appelle pôle :

$$I_P = \int_A \rho^2 dA \dots \dots \dots (7)$$



$\rho$  : c'est la distance entre l'aire  $dA$  et le point O (pôle)

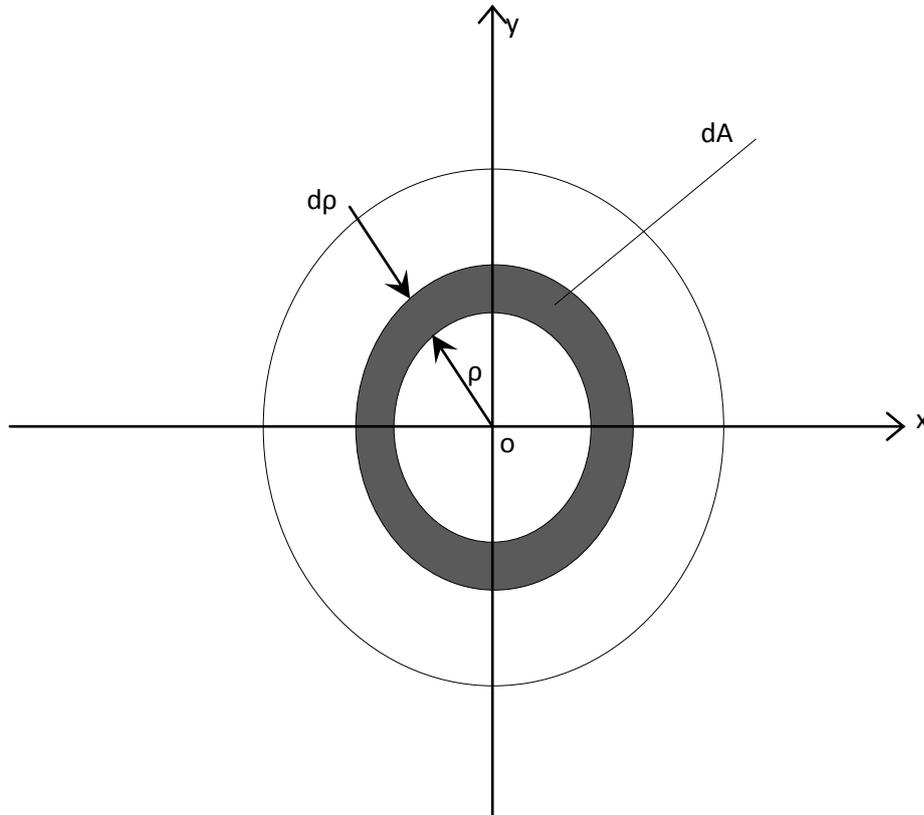
on à :  $\rho^2 = x^2 + y^2$

En remplace dans l'équation (7) :

$$I_P = I_x + I_y$$

### Application :

Section circulaire de diamètre D et de rayon r



On à la bande  $dA = 2\pi\rho d\rho$

Avec  $0 \leq \rho \leq r$

$$I_P = \int_A \rho^2 dA = \int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^r$$

$$I_P = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

**4) Produit d'inertie (moment centrifuge):**

Le moment produit des axes orthogonaux (x,y) :

$$I_x = I_y = \int_A x y dA \dots \dots \dots (8)$$

**5) Rayon de giration:**

Le rayon de giration par rapport aux axes orthogonaux (x,y) est donné par :

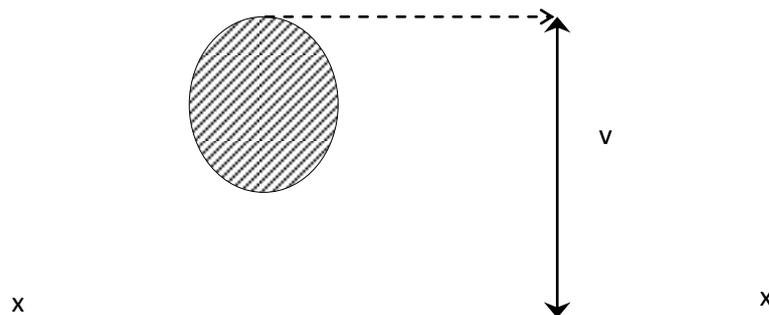
$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad , \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \dots \dots \dots (9)$$

**6) Module de résistance:**

Le module de résistance d'une section est donné par :

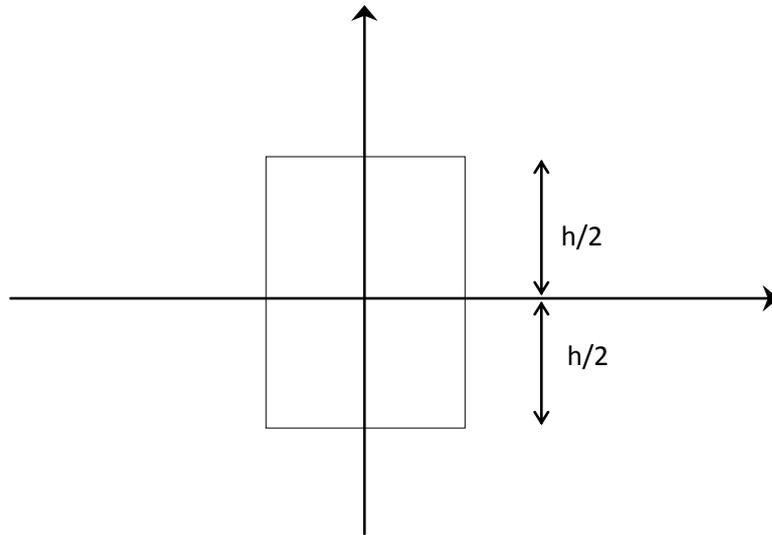
$$W_x = \frac{I_x}{v} \dots \dots \dots (10)$$

Avec v : la distance entre l'axe considéré et le point le plus éloigné de la surface



**Exemple :**

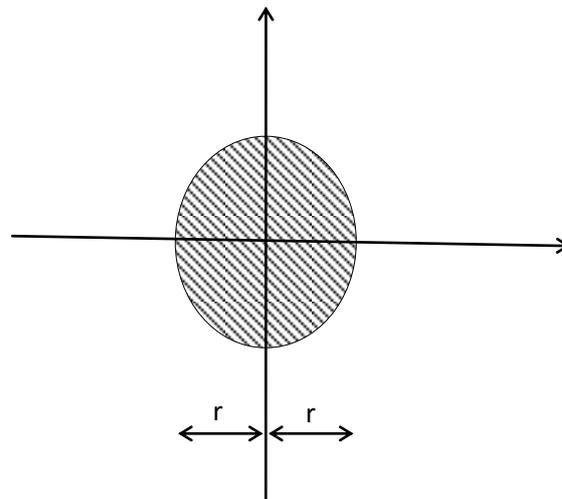
- Rectangle :



$$W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_y = \frac{I_y}{b/2} = \frac{hb^3/12}{b/2} = \frac{hb^2}{6}$$

- Cercle :



$$W_x = W_y = \frac{I_x}{r} = \frac{\pi D^3}{32}$$

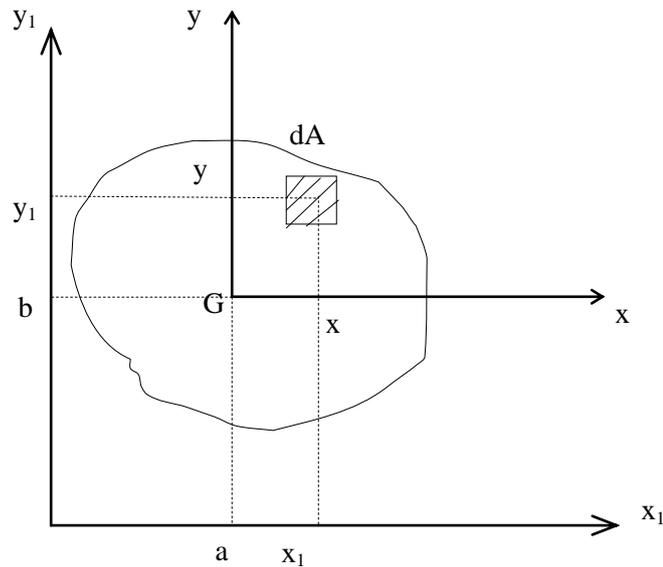
**Remarques :**

- Le moment S peut être positif, négatif ou nul.
- Les moments  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_p$  sont toujours positifs, tandis que  $I_{xy}$  peut être positif, négatif ou nul.
- Si  $I_{xy} = 0$  les deux axes  $x, y$  sont appelés axes principaux d'inertie.
- Si  $I_{xy} = 0$  et l'intersection des axes  $x, y$  coïncide avec le point G, ces axes sont appelés axes principaux centraux.
- Moments d'inertie des sections composées :  
On procède à discrétiser la surface en élément de surface  $A_i$  et on calcul leur moment d'inertie et on fait la sommation de ces moments comme suit :

$$\begin{cases} I_x = \sum I_{x_i} \\ I_y = \sum I_{y_i} \\ I_{xy} = \sum I_{xy_i} \end{cases} \dots \dots \dots (11)$$

**7) Variation des moments par rapport à des axes parallèles:**

Soit une section A, ces moments d'inertie par rapport aux axes centraux  $(x, y)$  sont :  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$ , on peut calculé les moments d'inertie  $I_{x_1}$ ,  $I_{y_1}$ ,  $I_{xy_1}$  par rapport aux axes orthogonaux  $(x_1, y_1)$  qui sont parallèles aux axes  $(x, y)$



On à :

$$\begin{cases} x_1 = x + a \\ y_1 = y + b \end{cases}$$

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \int (y + b)^2 dA$$

$$I_{x_1} = \int y^2 dA + 2b \int y dA + \int b^2 dA$$

Le point O coïncide avec le centre de gravité G, les moments statiques Sx devienne nul et on a:

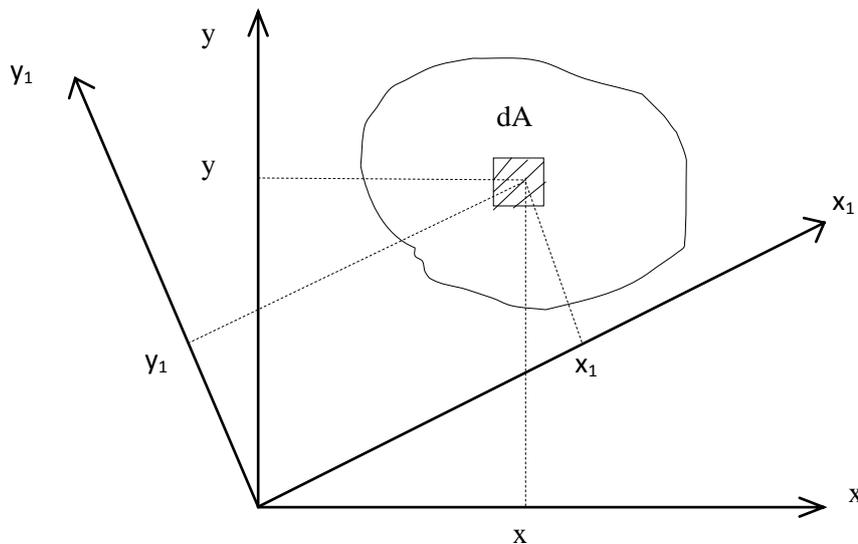
$$I_{x_1} = I_x + Ab^2$$

De la même manière on trouve :

$$\begin{cases} I_{x_1} = I_x + Ab^2 \\ I_{y_1} = I_y + Aa^2 \\ I_{x_1 y_1} = I_{xy} + Aab \end{cases} \dots \dots \dots (12)$$

La relation (12) s'appelle **théorème de Huygens**.

**8) Rotations des axes :**



Soit une section A, ces moments d'inertie par rapport aux axes (x,y) sont : :  $I_x$  ,  $I_y$  ,  $I_{xy}$

Déterminons les moments par rapport aux axes  $(x_1, y_1)$  :

On à :

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{cases}$$

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \int (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA$$

Et en utilisons la relation :  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$

On trouve :

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

De même pour  $I_{y_1}$  ,  $I_{x_1 y_1}$

$$\begin{cases} I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \\ I_{y_1} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha \\ I_{x_1 y_1} = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \end{cases} \dots \dots \dots (13)$$

D'après ces relations on trouve :

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_P$$

**9) axes d'inertie et moments d'inertie principaux:**

Lorsque l'angle  $\alpha$  change  $I_{x_1}$  ,  $I_{y_1}$  ,  $I_{x_1 y_1}$  changent également. Déterminons l'angle  $\alpha$  pour lequel  $I_{x_1}$  ,  $I_{y_1}$  sont maximum. Pour cela on détermine la dérivée première de  $I_{x_1}$  ou  $I_{y_1}$  par rapport à  $\alpha$  et annulons la :

$$\frac{dI_{x_1}}{d\alpha} = -2I_x \cos \alpha \sin \alpha + 2I_y \sin \alpha \cos \alpha - 2I_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \dots \dots \dots (14)$$

La relation (14) détermine la position des deux axes dont le moment d'inertie est maximal pour l'un et minimal pour l'autre, ces axes sont dites principaux.

**Moments d'inertie principaux :**

En remplaçant  $\alpha$  tiré de la relation (14) dans (13) :

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

En annulant le produit d'inertie  $I_{xy1}$  :

$$\frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Cela montre que le moment  $I_{xy} = 0$  par rapport aux axes principaux

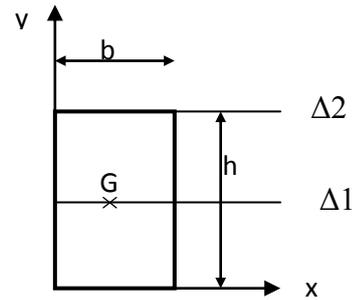
Les axes principaux qui passent par le centre de gravité de la section sont dits axes centraux principaux.

**Exercices**

**Exercice N°1 :**

Soit la section plane de largeur  $b$  et de hauteur  $h$  :

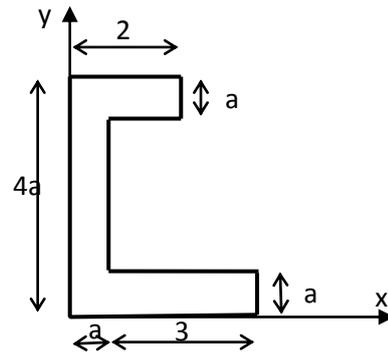
- 1) Calculer le moment statique de cette section par rapport aux axes  $x, y, \Delta_1, \Delta_2$
- 2) Calculer le moment d'inertie de la même section par rapport aux axes précédents



**Exercice N°2 :**

La figure ci-après présente la section d'un élément préfabriqué en béton armé. Calculer les coordonnées du centre de gravité  $(x_G, y_G)$  pour cette section.

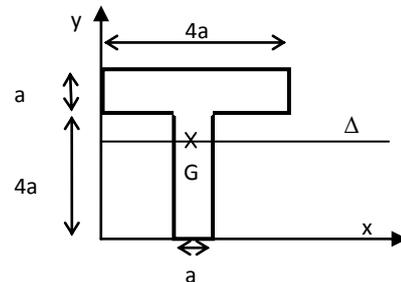
On prend  $a=2\text{cm}$



**Exercice N°3 :**

La section d'une poutre et de forme en T comme le montre la figure ci-après. Calculer le moment d'inertie de cette section par rapport aux axes  $x, y, \Delta$ .

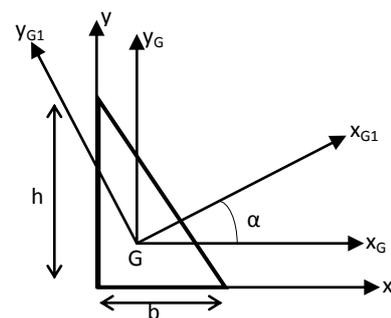
On prend  $a=2\text{cm}$



**Exercice N°4 :**

Soit la section suivante :

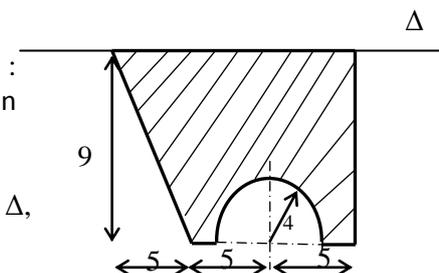
- 1) Calculer la surface du triangle en utilisant l'intégrale
- 2) Déterminer la position du centre de gravité  $(x_G, y_G)$
- 3) Calculer les moments d'inertie  $I_x, I_y, I_{xy}$
- 4) Déduire les moments d'inertie  $I_{x_G}, I_{y_G}, I_{x_G y_G}$
- 5) Déterminer la valeur de l'angle  $\alpha$  pour que les axes  $x_{G1}, y_{G1}$  seront des axes principaux



**Exercice N°5 :**

Soit la section présentée dans la figure suivante (les unités en cm) :

- 1) Déterminer la position du centre de gravité pour cette section
- 2) Calculer le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe horizontal qui passe Par le centre de gravité
- 3) Calculer le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe  $\Delta$ , ainsi que le rayon de giration de cette section



**Solution****Exercice N°1 :**

1) le moment statique de cette section par rapport aux axes :

axe x :

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^h y b dy = b \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^h$$

$$S_x = \frac{bh^2}{2}$$

On peut trouver le même résultat pour  $S_x$  par :

$$S_x = Ay_G = bh \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{2}$$

axe y :

$$S_y = \int_A x dA = \int_0^b x h dx = h \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^b$$

$$S_y = \frac{hb^2}{2}$$

On peut trouver le même résultat pour  $S_y$  par :

$$S_y = Ax_G = bh \frac{b}{2} = \frac{hb^2}{2}$$

axe  $\Delta_1$  :

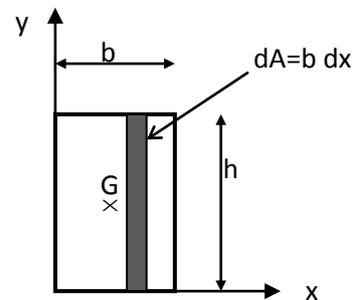
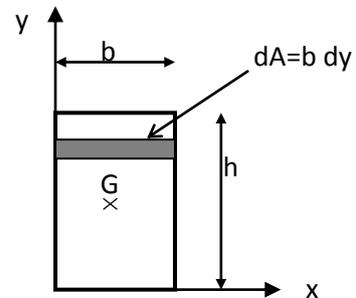
$$S_{\Delta_1} = \int_A y dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y b dy = b \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$S_{\Delta_1} = 0$$

axe  $\Delta_2$  :

$$S_{\Delta_2} = \int_A y dA = \int_0^{-h} y b (-dy) = -b \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{-h}$$

$$S_{\Delta_2} = -\frac{bh^2}{2}$$



2) le moment d'inertie de cette section par rapport aux axes :

axe x :

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^h$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

axe y :

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 h dx = h \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^b$$

$$I_y = \frac{hb^3}{3}$$

axe  $\Delta_1$  :

$$I_{\Delta_1} = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$I_{\Delta_1} = \frac{bh^3}{12}$$

On peut trouver  $I_{\Delta_1}$  aussi en utilisant le théorème de Huygens :

$$I_x = I_{\Delta_1} + Ad^2$$

$$\Rightarrow I_{\Delta_1} = I_x - Ad^2 = \frac{bh^3}{3} - bh \left( \frac{h}{2} \right)^2 = \frac{bh^3}{12}$$

axe  $\Delta_2$  :

$$I_{\Delta_2} = \int_A y^2 dA = \int_0^{-h} y^2 b (-dy) = -b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{-h}$$

$$I_{\Delta_2} = \frac{bh^3}{3}$$

**Exercice N°2 :**

Calculer des coordonnées du centre de gravité ( $x_G$ ,  $y_G$ ) :

On divise la section en trois surfaces 1 2 3

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum S_{iy}}{\sum A_i}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 3a^2 + 4a^2 + a^2 = 8a^2$$

$$S_y = \sum S_{iy} = S_{1y} + S_{2y} + S_{3y} = 3a^2 \frac{5}{2}a + 4a^2 \frac{a}{2} + a^2 \frac{3}{2}a$$

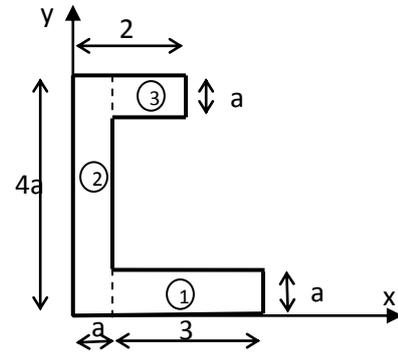
$$S_y = 11a^3$$

$$x_G = \frac{11a^3}{8a^2} = \frac{11a}{8}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum S_{ix}}{\sum A_i}$$

$$S_x = 3a^2 \frac{a}{2} + 4a^2 2a + a^2 \frac{7}{2}a = 13a^3$$

$$y_G = \frac{13a}{8}$$

**Exercice N° 3:**

le moment d'inertie de la section en T par rapport aux axes :

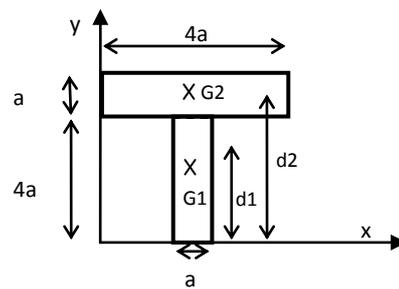
axe x :

D'après le théorème de Huygens

$$I_x = I_{xG1} + A_1 d_1^2 + I_{xG2} + A_2 d_2^2$$

$$I_x = \frac{a(4a)^3}{12} + (4a^2)(2a)^2 + \frac{(4a)(a)^3}{12} + (4a^2)\left(\frac{9}{2}a\right)^2$$

$$I_x = \frac{308}{3} a^4$$



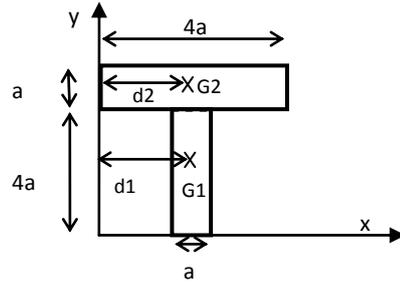
axe y :

D'après le théorème de Huygens

$$I_y = I_{yG1} + A_1 d_1^2 + I_{yG2} + A_2 d_2^2$$

$$I_y = \frac{4a(a)^3}{12} + (4a^2)(2a)^2 + \frac{(a)(4a)^3}{12} + (4a^2)(2a)^2$$

$$I_y = \frac{113}{3} a^4$$

axe Δ :

D'après le théorème de Huygens

$$I_x = I_{\Delta} + Ad^2$$

$$I_{\Delta} = I_x - Ad^2$$

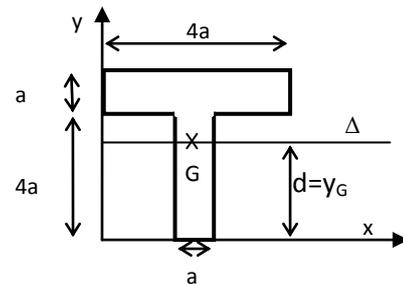
On calcul  $y_G$ 

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{(4a^2)(2a) + (4a^2)(\frac{9}{2}a)}{8a^2}$$

$$y_G = \frac{13}{4} a$$

$$I_{\Delta} = \frac{308}{3} a^4 - (8a^2)(\frac{13}{4} a)^2$$

$$I_{\Delta} = \frac{109}{6} a^4$$



**Exercice N° 4:**

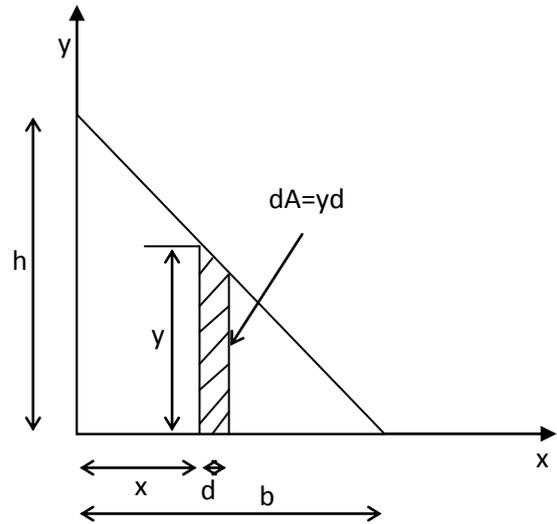
1) La surface du triangle

$$\frac{h}{b} = \frac{y}{b-x} \Rightarrow y = h \left( \frac{b-x}{b} \right)$$

$$y = h \left( 1 - \frac{x}{b} \right)$$

On a :

$$A = \int_A dA = \int_0^b y dx = \int_0^b h \left( 1 - \frac{x}{b} \right) dx = \frac{bh}{2}$$



2) position de G

$$S_y = \int_A x dA = \int_0^b x y dx = \int_0^b x h \left( 1 - \frac{x}{b} \right) dx = \frac{hb^2}{6}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{hb^2}{6} \frac{2}{bh} = \frac{b}{3}$$

$$S_x = \int_0^h y x dy = \int_0^h y b \left( 1 - \frac{y}{h} \right) dy = \frac{bh^2}{6}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{bh^2}{6} \frac{2}{bh} = \frac{h}{3}$$

3) Calcule des moments d'inertie  $I_x$   $I_y$   $I_{xy}$  :

$$I_x = \int_0^h y^2 \frac{b}{h} (h-y) dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \int_0^b x^2 \frac{h}{b} (b-x) dx = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{xy} = \int_A x y dA = \int_0^h y \left( \int_0^{b-\frac{b}{h}y} x dx \right) dy = \frac{b^2 h^2}{24}$$

4) les moments d'inertie  $I_{xG}$   $I_{yG}$   $I_{xGyG}$ 

$$I_x = I_{xG} + (y_G)^2 A$$

$$I_{xG} = I_x - (y_G)^2 A = \frac{bh^3}{12} - \left( \frac{h}{3} \right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = I_{yG} + (x_G)^2 A$$

$$I_{yG} = I_y - (x_G)^2 A = \frac{hb^3}{12} - \left(\frac{b}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{hb^3}{36}$$

$$I_{x_G y_G} = I_{xy} - x_G y_G A = \frac{b^2 h^2}{24} - \left(\frac{b}{3}\right) \left(\frac{h}{3}\right) \frac{bh}{2} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

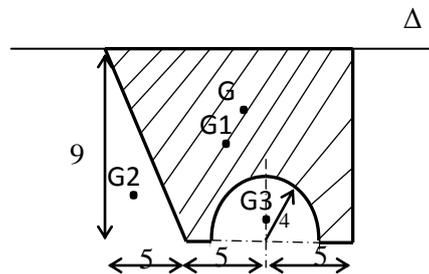
5) la valeur de l'angle  $\alpha$  pour que les axes  $x_{G1}$ ,  $y_{G1}$  seront des axes principaux

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{x_G y_G}}{I_{yG} - I_{xG}} = \frac{bh}{h^2 - b^2}$$

$$2\theta = \text{Arctg}\left(\frac{bh}{h^2 - b^2}\right) \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \text{Arctg}\left(\frac{bh}{h^2 - b^2}\right)$$

### Exercice N°5:

1) centre de gravité  $x_G$   $y_G$



|   | A     | $x_G$ | $y_G$ | $S_x$ | $S_y$  |
|---|-------|-------|-------|-------|--------|
| 1 | 135   | 7,5   | 4,5   | 607,5 | 1012,5 |
| 2 | 22,5  | 1,66  | 3     | 67,5  | 37,35  |
| 3 | 25,13 | 10    | 1,7   | 42,72 | 251,3  |

$$x_G = \frac{\sum S_y}{A} = \frac{1012,5 - 37,35 - 251,3}{135 - 22,5 - 25,13} = \frac{723,85}{87,37} = 8,28 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{\sum S_x}{A} = \frac{607,5 - 67,5 - 42,72}{135 - 22,5 - 25,13} = \frac{497,28}{87,37} = 5,7 \text{ cm}$$

2) moment d'inertie  $I_G$

$$I_G = I_{G1} - I_{G2} - I_{G3}$$

$$I_{G1} = \frac{15(9)^3}{12} + (1,2)^2 135 = 1105,65 \text{ cm}^4$$

$$I_{G2} = \frac{5(9)^3}{36} + (2,7)^2 22,5 = 265,27 \text{ cm}^4$$

$$I_{G3} = \left[ \frac{\pi(4)^4}{8} - (1,7)^2 25,13 \right] + (4)^2 25,13 = 430 \text{ cm}^4$$

$$I_G = 1105,65 - 265,27 - 430 = 410,38 \text{ cm}^4$$

3) moment d'inertie  $I_\alpha$

$$I_\alpha = I_G + d^2 A = 410,38 + (9 - 5,7)(87,37) = 1361,84 \text{ cm}^4$$

4) rayon de giration

$$i_\alpha = \sqrt{\frac{I_\alpha}{A}} = \sqrt{\frac{1361,84}{87,37}} = 3,94 \text{ cm}$$

CHAPITRE III

**Traction simple et compression simple**

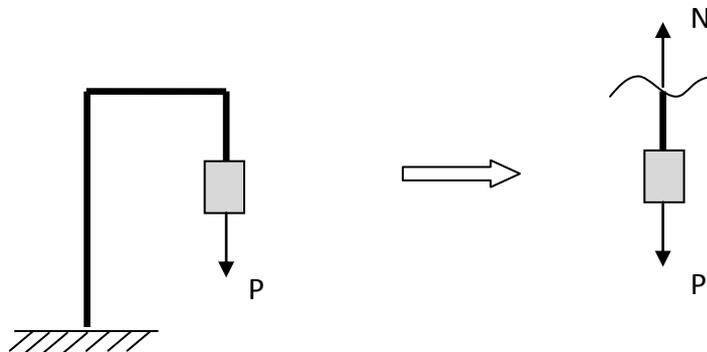
1) **Définition :**

- 1.1) Traction : une poutre droite est sollicité en traction chaque fois que les actions a ses extrémités es réduisent à deux force égales et directement opposées, qui tendent à l'allonger.



Exemple :

Un câble soulevant une charge

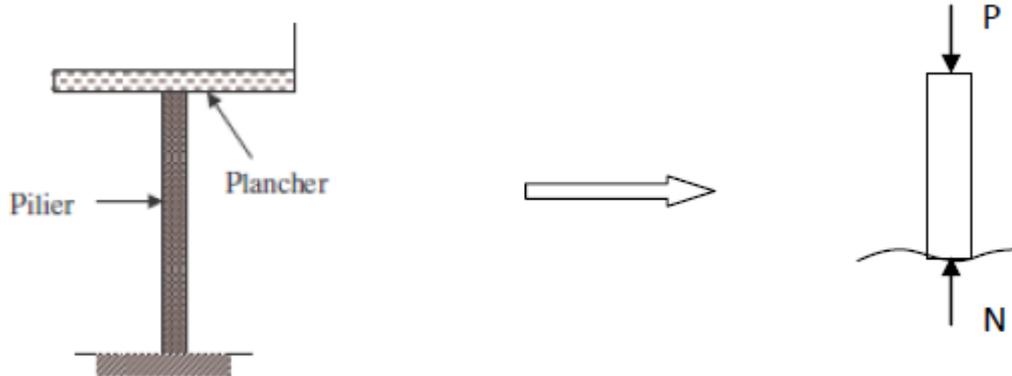


- 1.2) Compression : un corps est sollicité à la compression si les forces extérieures se réduisent à deux forces égales directement opposées qui tendent à le raccourcir.



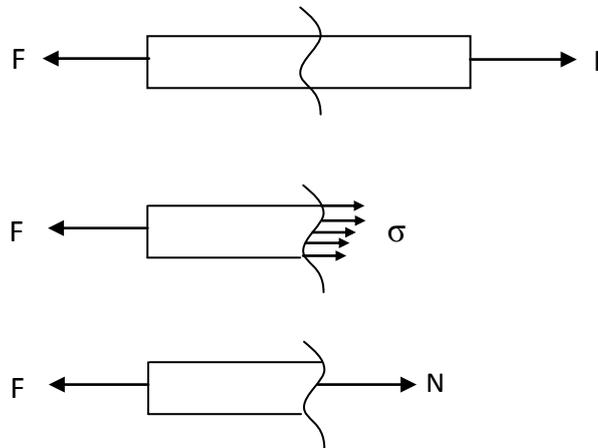
Exemple :

Un pilier supportant une partie du poids d'un plancher.



**2) Effort normal :**

Faisons une section dans la poutre entre les deux extrémités, des efforts intérieurs seront apparaître.



Avec :

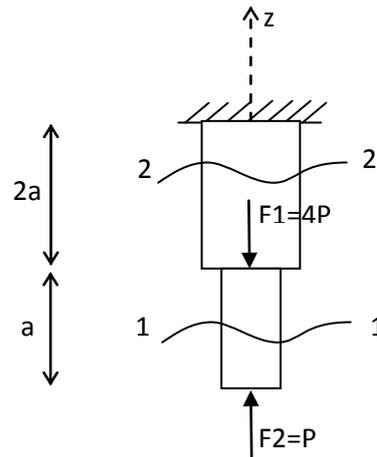
$$N = \int_A \sigma dA$$

La résultante des contraintes qui s'exercent en chaque point de la section, se réduit au seul effort normal N (appliqué au centre de gravité de la section)

Si  $N > 0$  ..... c'est un effort de traction

Si  $N < 0$  ..... c'est un effort de compression

Exemple :



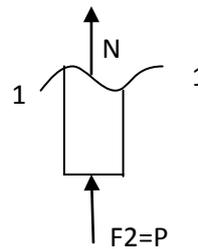
Coupe 1-1

$$0 \leq z \leq a$$

$$\sum F/z = 0$$

$$N + F_2 = 0 \Rightarrow N = -F_2 = -P$$

$N < 0$  : N c'est un effort de compression



Coupe 2-2

$$a \leq z \leq 3a$$

$$\sum F/z = 0$$

$$N + F_2 - F_1 = 0 \Rightarrow N = F_1 - F_2 = 3P$$

$N > 0$  : N c'est un effort de traction

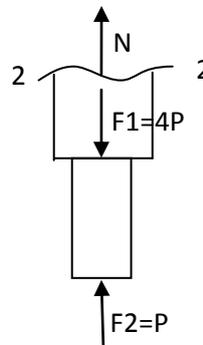
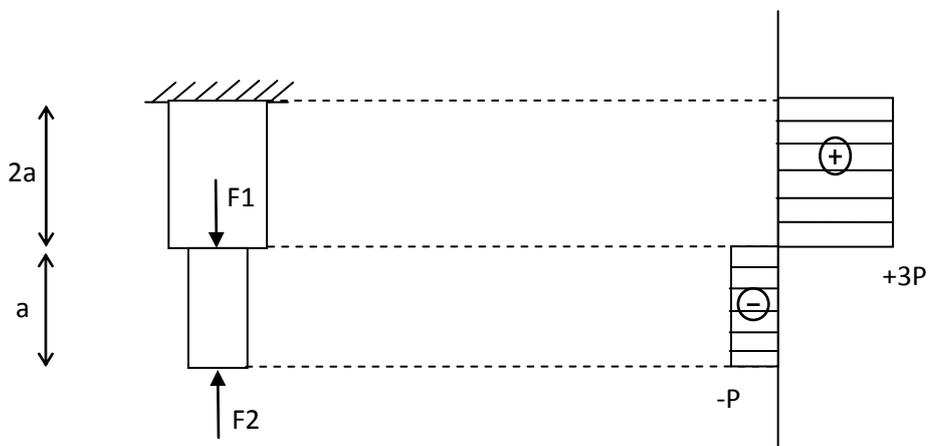


Diagramme de N :



La formule générale donnant la valeur de l'effort normal (pour des charges concentrées P et des charges réparties  $q_x$ ) :

$$N_x = \sum P + \sum \int q_x dx$$

Remarque :

La traction (ou compression) simple est satisfait à trois conditions :

$$N_x \neq 0, \quad T_y = 0, \quad M = 0$$

### 3) Contrainte normale :

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma A \quad \Rightarrow \sigma = \frac{N}{A}$$

$\sigma$  : c'est la contrainte normale

$\sigma > 0$  .....contrainte normale de traction

$\sigma < 0$  .....contrainte normale de compression

Avec :

$\sigma$  en Mpa, N en Newton et A en mm<sup>2</sup>

### 4) Condition de résistance :

Dans tous les cas la contrainte calculée  $\sigma$  doit être inférieure à la contrainte admissible  $\sigma_{adm}$  :

$$\sigma \leq \sigma_{adm} \quad \text{avec : } \sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{n}$$

$\sigma_e$  : la limite élastique du matériau déterminer par les essais.

n : coefficient de sécurité.

Exemple :

Si on impose une contrainte admissible de 100 MPa, déterminons le diamètre d minimal d'une poutre en acier pour qu'elle résiste en toute sécurité, ainsi que le coefficient de sécurité adopté. L'Effort appliqué  $N = 62\,000$  N.

L'acier employé a pour caractéristique :  $\sigma_e = 300$  MPa

Détermination du diamètre  $d$  :

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{N}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq \sigma_{adm} \quad \Rightarrow \quad d \geq \sqrt{\frac{4N}{\pi \sigma_{adm}}} \quad \text{d'où } d \geq 28,10 \text{ mm}$$

Détermination du coefficient de sécurité :

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\sigma_e}{\sigma_{adm}} = \frac{300}{100} = 3$$

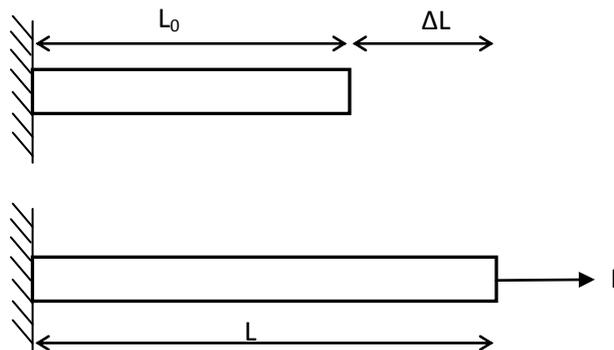
### 5) Les déformations :

5.1) les déformations longitudinales :

Soit une poutre de longueur initial  $L_0$ , si on applique une force  $F$  à l'extrémité de la poutre, alors on peut définir :

$\Delta L$  : l'allongement total de la poutre

$L$  : longueur final

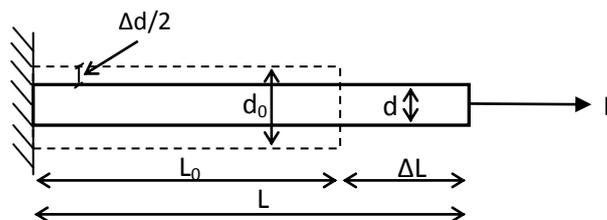


On appelle déformation relative ( $\varepsilon$ ) le rapport de l'allongement total sur la longueur initiale :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

5.2) les déformations transversales :

Le coefficient de poisson  $\nu$  caractérise le rapport entre les déformations transversales et longitudinales :



$$\varepsilon_l = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \varepsilon_t = \frac{\Delta d}{d_0} \quad \text{alors } \nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l}$$

**6) Relation déformations-contraintes :**

Pour un grand nombre de matériau, l'essai de traction montre qu'il existe une zone élastique pour laquelle les déformations sont proportionnelles aux contraintes normales, cette propriété est énoncée par la loi de Hooke qui traduit la dépendance linéaire des déformations par rapport aux contraintes normales :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{ou} \quad \sigma = \varepsilon E$$

Ou E est le coefficient de proportionnalité appelé module d'élasticité ou module de young  
Dans cette relation on a :

$$\sigma \text{ en Mpa} \quad , \quad \varepsilon \text{ sans unité} \quad \text{et} \quad E \text{ en Mpa}$$

Dans une poutre en traction on a :

$$\sigma_x = \frac{N(x)}{A(x)}$$

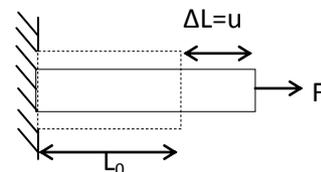
A partir de la loi de Hooke

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N(x)}{EA(x)}$$

$$\text{et} \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Si on introduit les déplacements :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad du = \varepsilon_x dx$$



$$\text{avec} \quad \int du = u = \Delta L$$

$$\text{alors:} \quad \Delta L = \int \varepsilon_x dx = \int \frac{N(x)}{EA(x)} dx$$

Si N, E, A sont constants ( c'est le cas en traction sur une poutre simple) :

$$\Delta L = \frac{N L_0}{E A}$$

Si on a une barre composée de plusieurs parties, l'intégration se fait suivant la longueur de chaque partie, et l'allongement total est obtenu par la sommation des allongements partielles :

$$\Delta L = \sum \Delta L_i = \sum \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$$

Application :

Déterminer les efforts, les contraintes et les raccourcissements ( $\Delta L$ ) dans les différents tronçons de la colonne représentée sur la figure ci-dessous, sachant que  $d_{1-1} = 50 \text{ mm}$ ,  $d_{2-2} = 100 \text{ mm}$ ,  $d_{3-3} = 200 \text{ mm}$  et  $E = 2,1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

## Section 1-1

$$N + 400 = 0 \quad \Rightarrow N = -400 \text{ KN}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-400 \times 10^3}{\pi(25)^2} = -203,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta L_{AB} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-203,7 \times 3000}{2,1 \times 10^5} = -2,91 \text{ mm}$$

## Section 2-2

$$N + 400 + 2 \times 500 = 0 \quad \Rightarrow N = -1400 \text{ KN}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-1400 \times 10^3}{\pi(50)^2} = -178,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta L_{BC} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-178,3 \times 3000}{2,1 \times 10^5} = -2,55 \text{ mm}$$

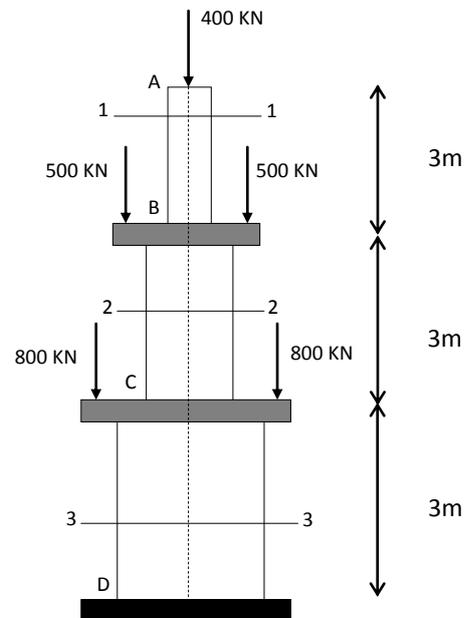
## Section 3-3

$$N + 400 + 2 \times 500 + 2 \times 800 = 0 \quad \Rightarrow N = -3000 \text{ KN}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-3000 \times 10^3}{\pi(100)^2} = -95,5 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta L_{CD} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-95,5 \times 3000}{2,1 \times 10^5} = -1,36 \text{ mm}$$

$$\Delta L_T = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} + \Delta L_{CD} = -2,91 - 2,55 - 1,36 = -6,82 \text{ mm}$$

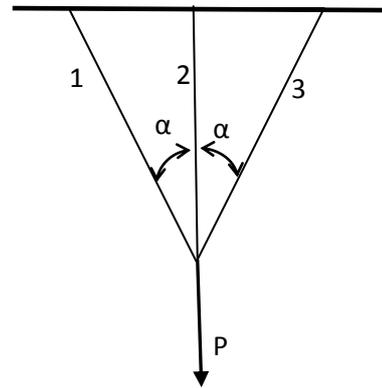


**Exercices**

**Exercice N°1 :**

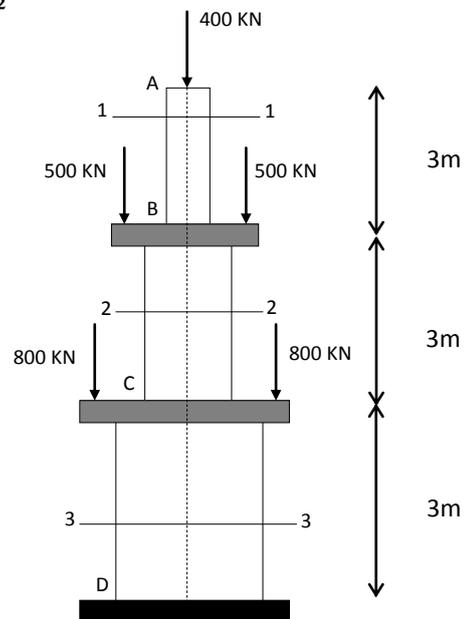
Soit le système de barres défini sur la figure ci-après.  
 Etant données:  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $P$  et  $\alpha$   
 avec  $L_2 = L_3$

Déterminer les efforts dans les barres 1, 2 et 3 .



**Exercice N°2 :**

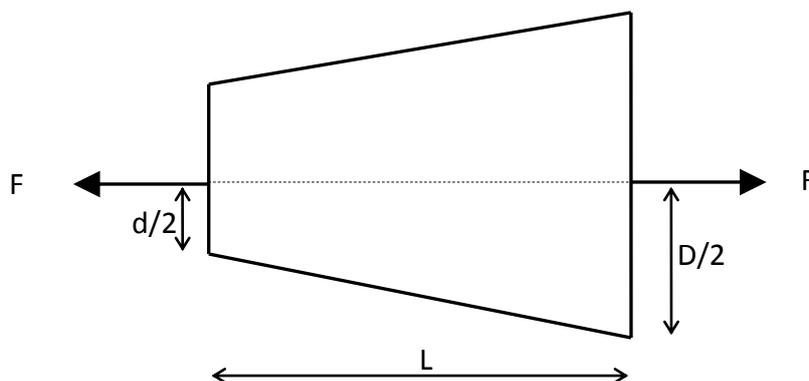
Déterminer les efforts, les contraintes et les raccourcissements ( $\Delta L$ ) dans les différents tronçons de la colonne représentée sur la figure ci-dessous, sachant que  $d_{1-1} = 50$  mm,  $d_{2-2} = 100$  mm,  $d_{3-3} = 200$  mm et  $E = 2.1 \times 10^5$  N/mm<sup>2</sup>



**Exercice N°3 :**

Une barre solide de forme tronconique de section circulaire se rétrécit uniformément d'un diamètre  $d$  à sa petite extrémité et  $D$  à la grande extrémité.

Déterminer l'allongement du aux forces appliquées aux extrémités de la barre.



**Solution**

**Exercice N°1 :**

1- Aspect statique

$$\sum F_x = 0$$

$$N_2 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow N_2 = N_3 \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - P = 0$$

$$\Rightarrow N_1 + 2 N_2 \cos \alpha = P \dots \dots \dots (2)$$

2- Aspect géométrique

$$\Delta L_2 = \Delta L_3 = \Delta L_1 \cos \alpha \dots \dots \dots (3)$$

3- Aspect physique:

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{E A} \quad \text{et} \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{E A}$$

En substituant dans (3), on obtient

$$\frac{N_2 L_2}{E A} = \frac{N_1 L_1}{E A} \cos \alpha \Rightarrow N_2 L_2 = N_1 L_1 \cos \alpha$$

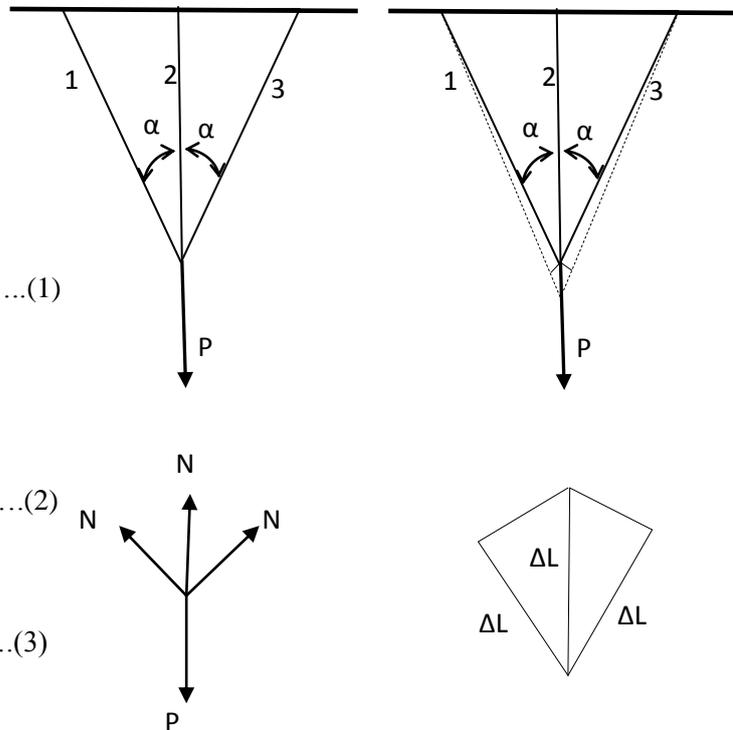
on tire

$$N_1 = N_2 \frac{L_2}{L_1 \cos \alpha}$$

et on aussi :  $N_1 + 2 N_2 \cos \alpha = P$  (on utilise  $L_1 = L_2 \cos \alpha$ )

on a donc deux équations avec deux inconnus  $N_1$  et  $N_2$  :

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos \alpha^3} \quad \text{et} \quad N_2 = N_3 = \frac{P \cos \alpha^2}{1 + 2 \cos \alpha^3}$$



**Exercice N°2 :**

## Section 1-1

$$N + 400 = 0 \quad \Rightarrow N = -400 \text{ KN}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-400 \times 10^3}{\pi(25)^2} = -203,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta L_{AB} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-203,7 \times 3000}{2,1 \times 10^5} = -2,91 \text{ mm}$$

## Section 2-2

$$N + 400 + 2 \times 500 = 0 \quad \Rightarrow N = -1400 \text{ KN}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-1400 \times 10^3}{\pi(50)^2} = -178,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta L_{BC} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-178,3 \times 3000}{2,1 \times 10^5} = -2,55 \text{ mm}$$

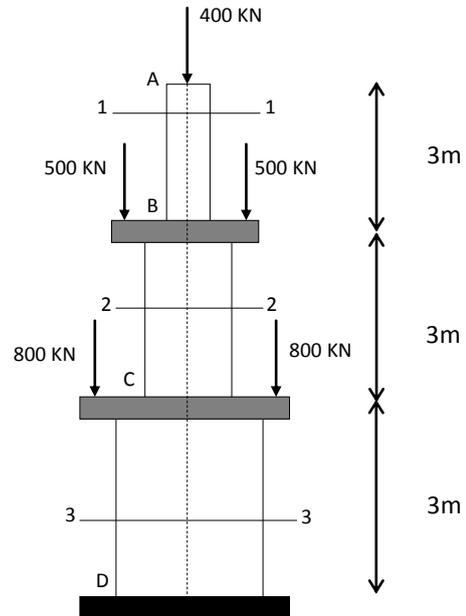
## Section 3-3

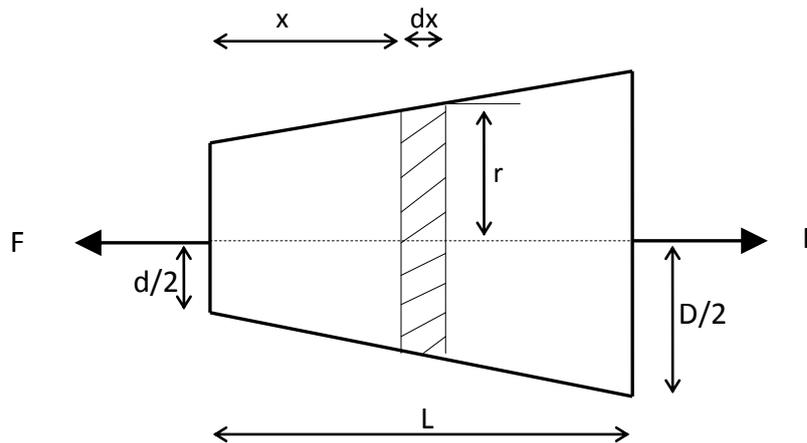
$$N + 400 + 2 \times 500 + 2 \times 800 = 0 \quad \Rightarrow N = -3000 \text{ KN}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-3000 \times 10^3}{\pi(100)^2} = -95,5 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta L_{CD} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-95,5 \times 3000}{2,1 \times 10^5} = -1,36 \text{ mm}$$

$$\Delta L_T = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} + \Delta L_{CD} = -2,91 - 2,55 - 1,36 = -6,82 \text{ mm}$$



**Exercice N°3 :**

On a :

$$\frac{r - \frac{d}{2}}{x} = \frac{D - d}{L}$$

$$\Rightarrow r = \frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left( \frac{D - d}{2} \right)$$

$$\Delta(dx) = \frac{Pdx}{E\pi \left( \frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left( \frac{D - d}{2} \right) \right)^2}$$

$$\Delta L = \int_0^L \frac{4Pdx}{E\pi \left( d + \frac{x}{L} (D - d) \right)^2}$$

$$\Delta L = \frac{4PL}{\pi E D d}$$

## CHAPITRE IV

**Flexion simple****1) Hypothèses et définition :**

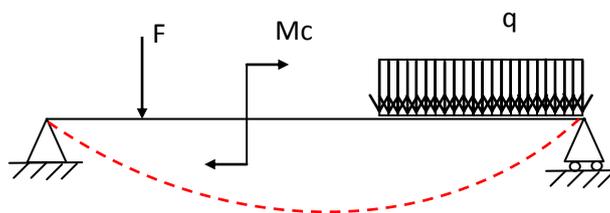
## 1.1) hypothèses :

En plus des hypothèses déjà énoncées au chapitre I, la flexion simple nous amène à supposer que :

- la poutre admet un plan de symétrie longitudinal.
- toutes les forces appliquées à la poutre sont disposées perpendiculairement à la ligne moyenne et dans le plan de symétrie longitudinal (ou symétriquement par rapport à celui-ci).

## 1.2) définition :

Il est fréquent que les barres subissent l'action d'une charge transversale ou des couples extérieurs. Dans ces conditions, les sections droites de la barre sont sollicitées par des moments fléchissants, c'est-à-dire des moments intérieurs dont le plan d'action est perpendiculaire au plan de la section droite. L'action d'une charge provoque l'incurvation de l'axe de la barre comme le montre la figure ci-dessous.



Cette forme de sollicitation s'appelle flexion, et les barres qui travaillent surtout à la flexion s'appellent "poutres".

La flexion est dite pure si le moment fléchissant est l'unique effort intérieur que supporte la section droite ( $M \neq 0$  ;  $T = 0$  ;  $N = 0$ ).

Il est plus fréquent, pourtant, que les sections droites des barres soient soumises en plus à des efforts tranchants. Une telle flexion est dite "simple" ( $M \neq 0$  ;  $T \neq 0$  ;  $N = 0$ ).

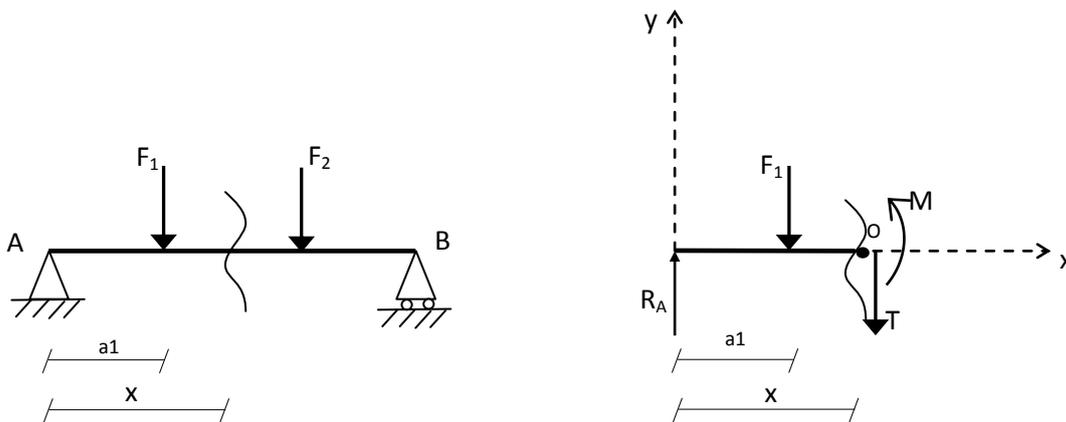
## 2) Effort tranchant et moment fléchissant :

La flexion simple engendre dans les sections droites d'une poutre deux efforts intérieurs le moment fléchissant  $M$  et l'effort tranchant  $T$ .

La détermination de  $M$  et  $T$  se fait par l'application de la méthode des sections, pour illustrer cette méthode on prend l'exemple de la poutre ci-dessous.

Pratiquons une coupe fictive à la distance  $x$  de l'appui gauche, rejtons la partie droite de la poutre et considérons l'équilibre de la partie gauche (ou bien l'inverse, on élimine la partie gauche et on considère l'équilibre de la partie droite).

On remplace l'interaction des parties de la poutre par les efforts intérieurs  $M$  et  $T$ .



Pour calculer  $M$  et  $T$ , on utilise les deux équations d'équilibre :

$$\sum F/y = 0 \Rightarrow T + F_1 - R_A = 0 \Rightarrow T = R_A - F_1$$

$$T = \sum (f_i)_y$$

$$\sum M/o = 0 \Rightarrow M + F_1(x - a_1) - R_A x = 0$$

$$M = R_A x - F_1(x - a_1)$$

$$M = \sum M_o (f_i)$$

ainsi dans la section droite d'une poutre :

1°/ l'effort tranchant  $T$  est numériquement égal à la somme algébrique des projections sur le plan de la section de toutes les forces extérieures appliquées d'un côté de la section ;

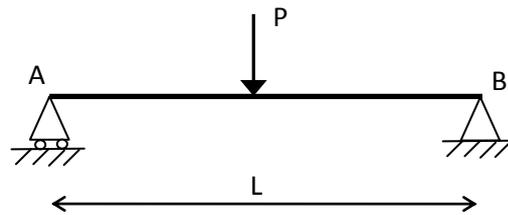
2°/ le moment fléchissant est numériquement égal à la somme algébrique des moments (calculés par rapport au centre de gravité de la section) des forces extérieures appliquées d'un côté de la section considérée.

Exemple 1) : cas d'une force concentrée à mi-travée

Détermination des réactions:

$$\Sigma M/A = 0 \Rightarrow V_B = 0.5 P$$

$$\Sigma F/y = 0 \Rightarrow V_A = 0.5 P$$



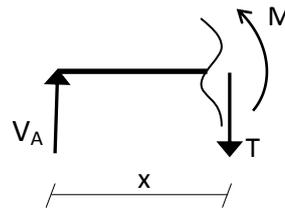
Expressions des efforts internes:

**Tronçon I:  $0 \leq x \leq L/2$**

$$T - V_A = 0 \Rightarrow T = 0.5P$$

$$M - V_A x = 0 \Rightarrow M = 0.5P x$$

$$M(0) = 0, M(L/2) = PL/4$$



**Tronçon II:  $L/2 \leq x \leq L$**

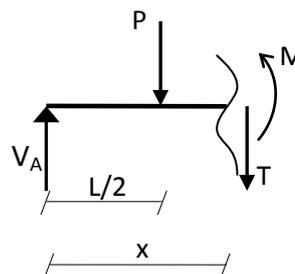
$$T + P - V_A = 0 \Rightarrow T = -0.5P$$

$$M - V_A x + P(x - L/2) = 0$$

$$\Rightarrow M = 0.5P x - P(x - L/2)$$

$$M(L/2) = PL/4, M(L) = 0$$

$$M_{\max} = M(L/2) = PL/4$$



Exemple 2) : Cas d'une charge uniformément répartie

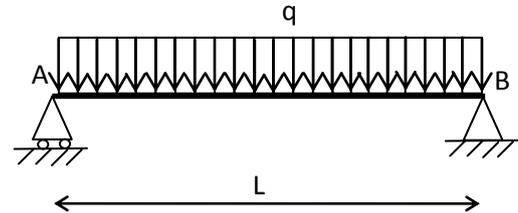
Détermination des réactions:

$$\sum M/A = 0 \Rightarrow V_B L - qL (L/2) = 0$$

$$\Rightarrow V_B = qL/2$$

$$\sum F/y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - qL = 0$$

$$\Rightarrow V_A = qL/2$$



Expressions des efforts internes:

$$0 \leq x \leq L$$

$$T + q x - V_A = 0$$

$$\Rightarrow T = qL/2 - q x$$

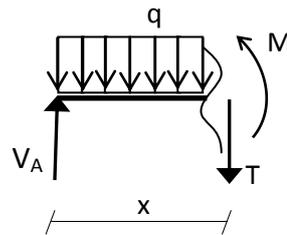
$$T(0) = qL/2 \quad T(L) = -qL/2$$

$$M + q x (x/2) - V_A x = 0$$

$$M = qLx/2 - q x^2/2$$

$$M(0) = 0, M(L) = 0$$

$$M_{\max} = M(L/2) = qL^2/8$$



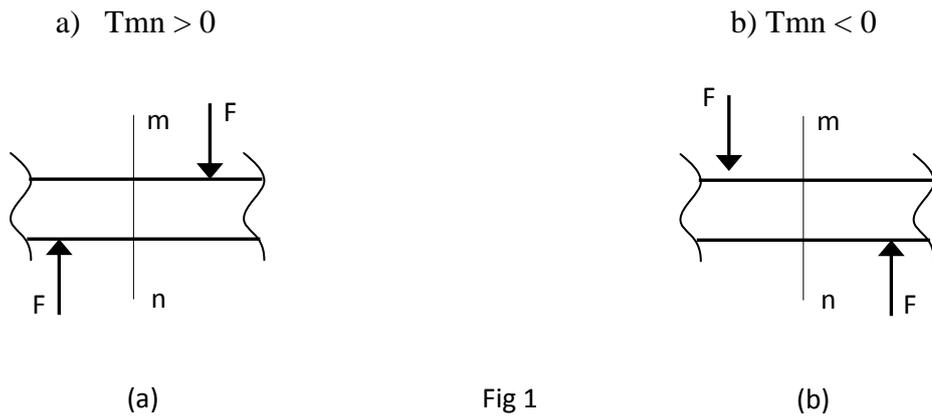
### 3) Diagrammes des efforts internes (M et T) :

Pour pouvoir tracer les diagrammes, il est indispensable de connaître toutes les forces extérieures y compris les réactions qui doivent être préalablement déterminées.

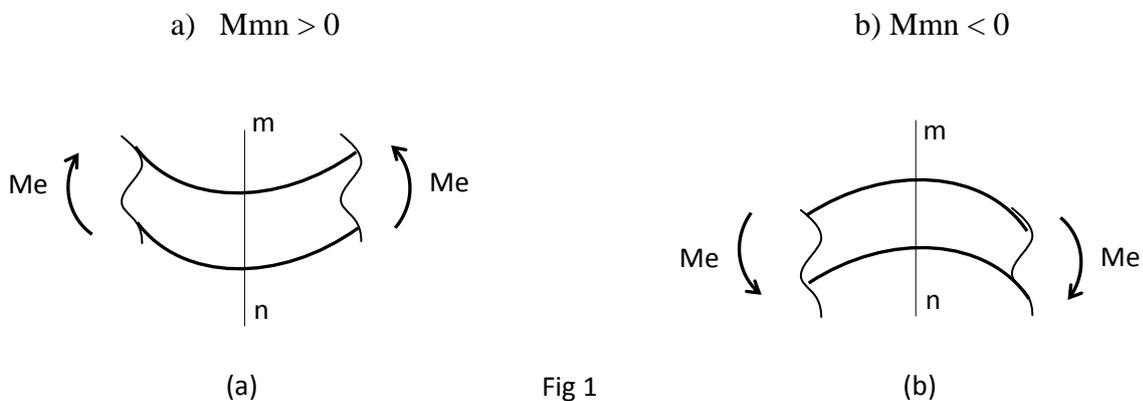
D'après les exemples précédents on a vu qu'on peut déterminer les expressions de M et T en fonction de l'abscisse x, ce qui permet donc de connaître la valeur de M et T en tous points de la poutre, alors on peut tracer M et T graphiquement à l'aide de leurs expressions en fonction de x.

Remarques :

- L'effort tranchant dans la section m-n d'une poutre (Fig1 .a) est considéré comme positif, si la résultante des forces extérieures à gauche de la section est dirigée de bas en haut, et à droite de la section, de haut en bas, et négative dans le cas contraire (Fig1 .b).



- On admet que dans la section d'une poutre, par exemple dans m-n (Fig2 .a), le moment fléchissant est positif si la résultante de tous les moments des forces extérieures à gauche de la section est dirigée dans le sens horaire, et négative si elle est dirigée dans le sens antihoraire (Fig2 .b).

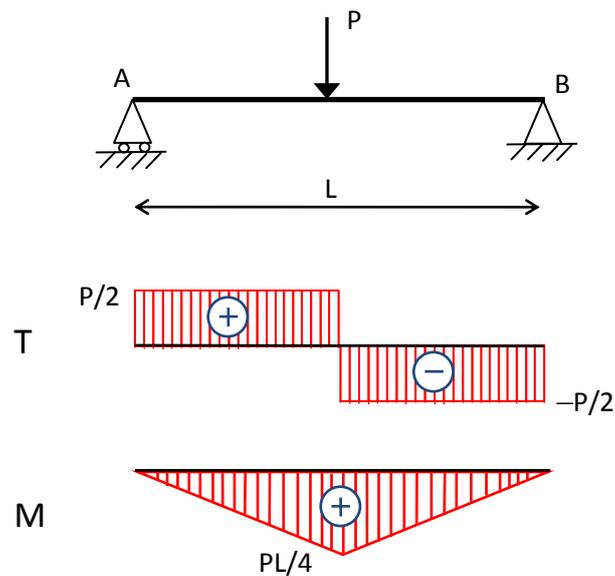


- On en tire une autre règle des signes du moment fléchissant, plus commode à retenir. Le moment fléchissant est considéré comme positif si dans la section envisagée, la courbure de la poutre est orientée en bas. On trace toujours le diagramme du moment fléchissant de côté des fibres tendues.
- Pour tracer le diagramme de M et T on détermine les valeurs numériques des efforts intérieurs aux extrémités de chaque tronçon. Ces points sont joints par des lignes ou des courbes.
- Sur les tronçons où il n'y a pas de charge répartie (uniquement des charges concentrées), le diagramme des T est délimité par des droites parallèles à la base tandis que le diagramme des M est délimité par des droites obliques.
- Sur les tronçons où la poutre supporte une charge répartie, le diagramme des T est délimité par des droites obliques tandis que celui des M est délimité par des paraboles, et on doit connaître la valeur du moment fléchissant en un point entre les deux extrémités du tronçon considéré.
- Les maximums et minimums des M coïncident avec les sections où  $T=0$ .

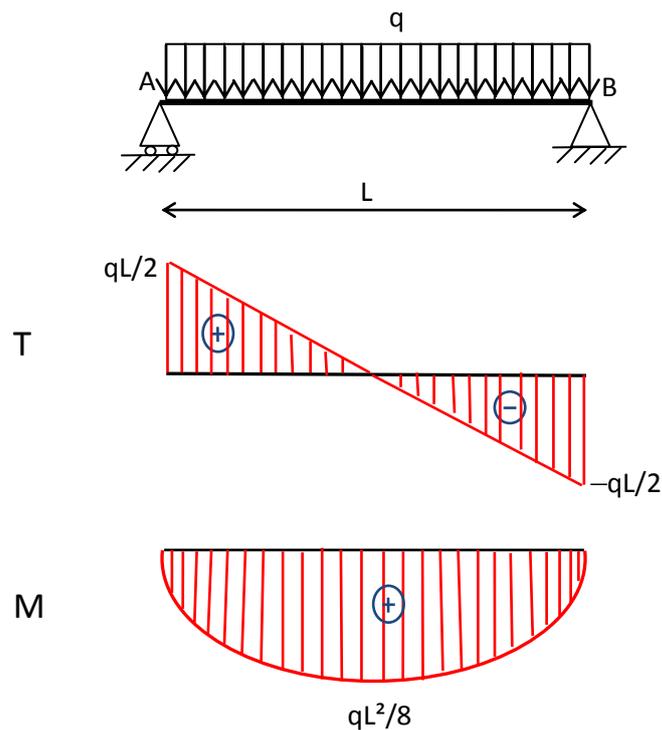
- Dans les sections où les charges concentrées sont appliquées à la poutre, le diagramme des T est caractérisé par des passages brusques aux niveaux de ces charges, celui des M, il y aura des brisures dont la pointe sera dirigée dans le sens de la ligne d'action de la force.
- Dans les sections où des moments concentrés sont appliqués à la poutre, le diagramme des moments sera marqué par des passages brusques d'une valeur proportionnelle à ces moments tandis que sur le diagramme des T, il n'y aura aucune modification.

Reprenons les exemples précédents, les diagrammes de M et T seront comme :

Exemple 1) : cas d'une force concentrée à mi-travée



Exemple 2) : Cas d'une charge uniformément répartie

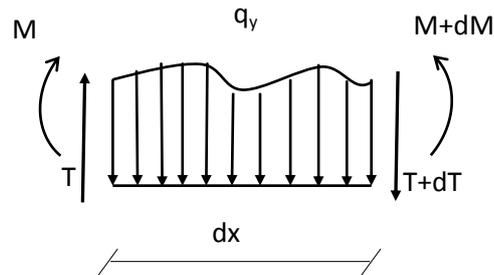


#### 4) Relations différentielles entre les charges et les efforts M et T :

Ils existent des relations différentielles entre les forces extérieures et intérieures et qui constituent la base de la méthode directe pour la détermination des efforts internes.

Pour déterminer ces relations on considère un cas de charge arbitraire d'un système de sollicitations donné dans un plan avec:

$q_y$  : intensité de la charge extérieure selon l'axe y



Entre l'intensité  $q_y$ , l'effort tranchant T et le moment fléchissant M qui agissent dans une certaine section, existent les relations différentielles suivantes:

$$T - q_y(x)dx - T - dT = 0$$

$$\Rightarrow dT/dx = -q_y(x)$$

$$M + Tdx - q_y(x)dx^2/2 - M - dM = 0$$

en négligeant le terme quadratique en  $dx^2$  on obtient:

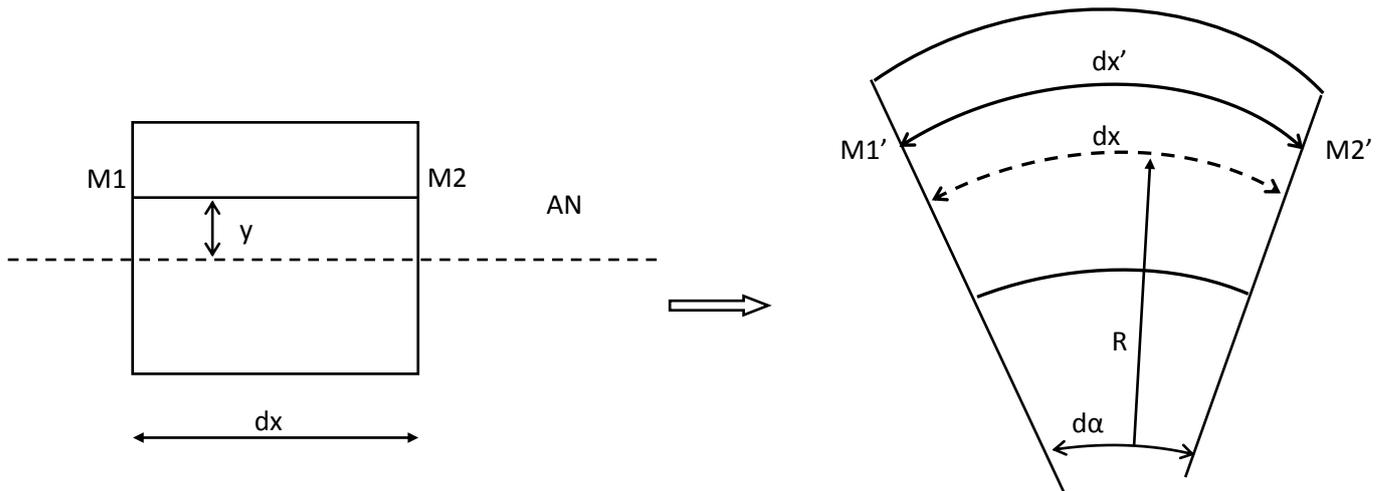
$$dM/dx = T$$

Où

$$d^2M/dx^2 = -q_y(x)$$

#### 5) Contraintes normales en flexion simple :

Des contraintes normales se développent dans les sections transversales d'une poutre soumise à un moment fléchissant. La figure ci-dessous montre les fibres tendues et comprimées externes d'un tronçon de poutre fléchi. Dans la zone comprimée les fibres se raccourcissent tandis que dans la zone de traction elles s'allongent. Ces deux zones sont séparées par un plan neutre ayant un rayon de courbure R et dont la longueur ne varie pas lors de la flexion. L'allongement relatif d'une fibre se trouvant à une distance y de l'axe neutre peut être écrit:



Les déformations longitudinales :

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} \quad \text{et} \quad d\alpha = \frac{dx}{R} = \frac{dx'}{R + y}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x = \frac{dx'}{dx} - 1 = \frac{R + y}{R} - 1$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x = \frac{y}{R}$$

A partir de la loi de Hooke :

$$\sigma_x = \varepsilon_x E = \frac{y}{R} E \dots \dots \dots (1)$$

Relation des contraintes avec le moment fléchissant :

$$M_z = \int_A y \sigma dA = \int_A \frac{y^2 E}{R} dA = \frac{E}{R} \int_A y^2 dA$$

$$\Rightarrow M_z = \frac{E}{R} I_z$$

Soit :

$$\frac{M_z}{EI_z} = \frac{1}{R} \dots \dots \dots (2)$$

La quantité  $k = \frac{1}{R}$  est la courbure de la couche neutre de la poutre. Il s'en suit que l'expression (2) détermine la courbure de la poutre. En flexion, la courbure de l'axe d'une

poutre et proportionnelle au moment fléchissant et inversement proportionnelle à la grandeur  $EI_x$  appelée rigidité de la poutre.

En portant la valeur obtenue de  $1/R$  dans (1), on aboutit à la formule de grand intérêt :

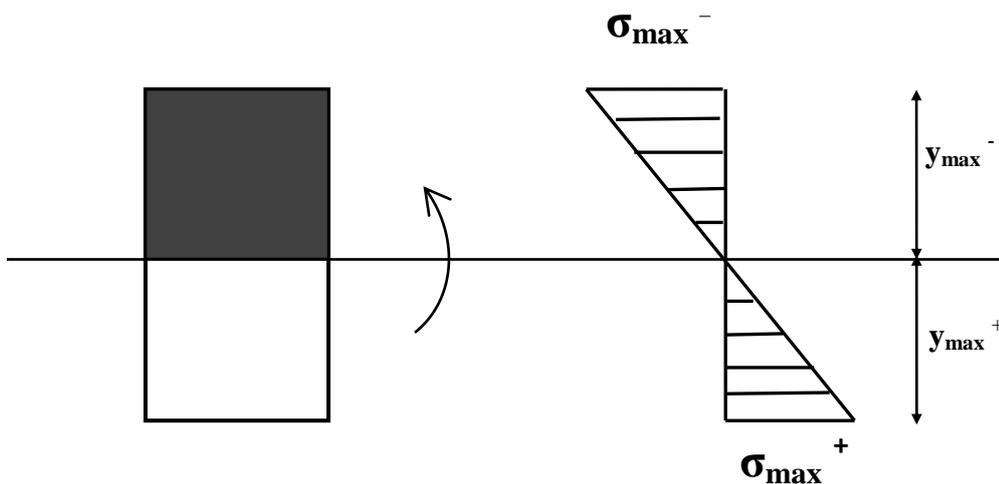
$$\sigma_x = \frac{y}{R} E = \frac{y E M_z}{E I_z}$$

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} \dots \dots \dots (3)$$

Les contraintes sont proportionnelles au moment fléchissant et inversement proportionnelles au moment d'inertie  $I_z$ .

Les contraintes varient linéairement avec la distance  $y$  de l'axe neutre.

La fibre la plus sollicitée (la contrainte de traction ou de compression maximale) est située au point le plus éloigné de l'axe neutre.



$$\sigma_{max} = \frac{M y_{max}}{I_z} = \frac{M}{W_z}$$

Avec  $W_z$  : le module de résistance de la section

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$$

$\sigma_{max}^-$  : contrainte de compression max

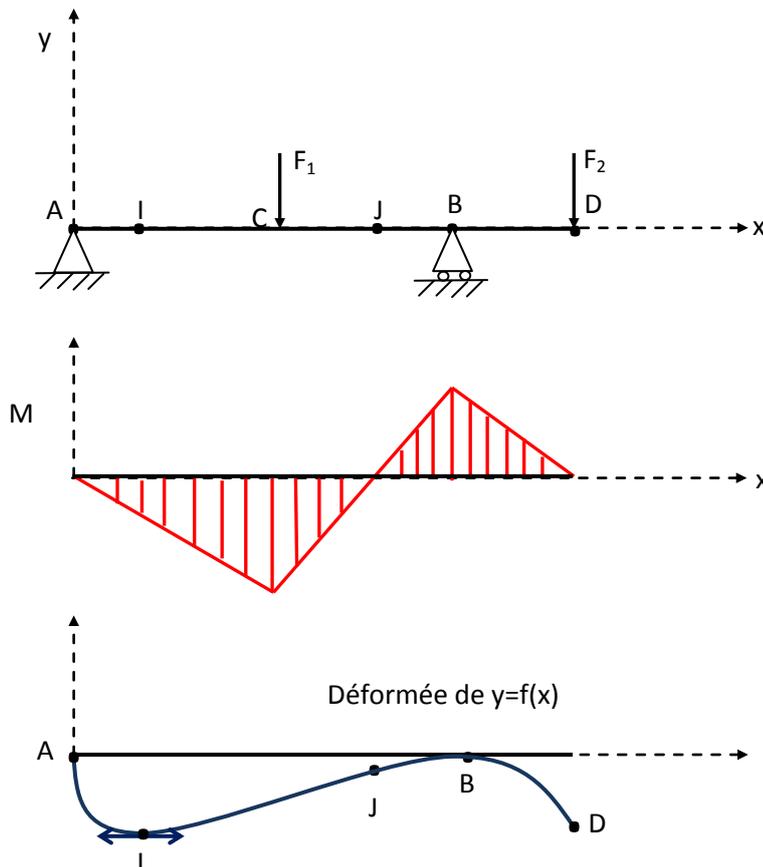
$\sigma_{max}^+$  : contrainte de traction max

Condition de résistance :

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{adm}$$

### 6) Déformation d'une poutre soumise à la flexion simple :

Dans ce qui précède, on s'est intéressé aux poutres fléchies et à leur dimensionnement d'un point de vue de résistance sous charge. Nous allons voir à présent l'aspect déformation. En particulier, la détermination de la flèche maximale (et de sa valeur admissible) est l'un des éléments fondamentaux de la conception des poutres.



Pour la poutre ci-dessus, la ligne moyenne AICJBD a pour direction l'axe des  $x$  avant déformation et la courbe  $y = f(x)$  après déformation. Cette courbe est appelée déformée.  $y = f(x)$  est l'équation mathématique de la déformée dans le système d'axes  $(x, y)$ .

Conditions aux limites :

Les conditions  $y_A = 0$ ,  $y_B = 0$  et  $y'_I = 0$ , appelées conditions aux limites, sont des éléments connus de la déformée. Ces éléments sont imposés par les appuis A et B ou par la forme de la déformée.

Flèches :

La déformée présente des valeurs maximales en I (entre A et B) et à l'extrémité D. Pour ces points particuliers, la déformation est souvent appelée flèche ( $f$ ) :

$$f_I = y_I \text{ et } f_D = y_D$$

### Méthode par intégration :

Principe :

Connaissant l'équation des moments fléchissants  $M$  en fonction de  $x$  (position le long de la poutre), la pente  $y'$  et la déformée  $y$  sont obtenues par intégrations successives à partir de :

$$M = -EI y''$$

Avec

- $M$  : le moment fléchissant (équation en  $x$ )  
 $E$  : le module d'élasticité longitudinale (MPa).  
 $I = I_z$  : le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe  $(G, z)$  (mm<sup>4</sup>)  
 $y''$  : la dérivée seconde de la déformée  $y$ .

Remarque :

Les constantes d'intégration successives sont calculées à partir des conditions aux limites imposées par la position et la nature des appuis, ou encore par la forme générale de la déformée.

Exemple usuels des conditions aux limites :

- Encastrement :  $y'_A = 0$  ;  $y_A = 0$   
Appui double :  $y_A = 0$   
Appui simple :  $y_A = 0$

### **7) Calcul des contraintes tangentielles :**

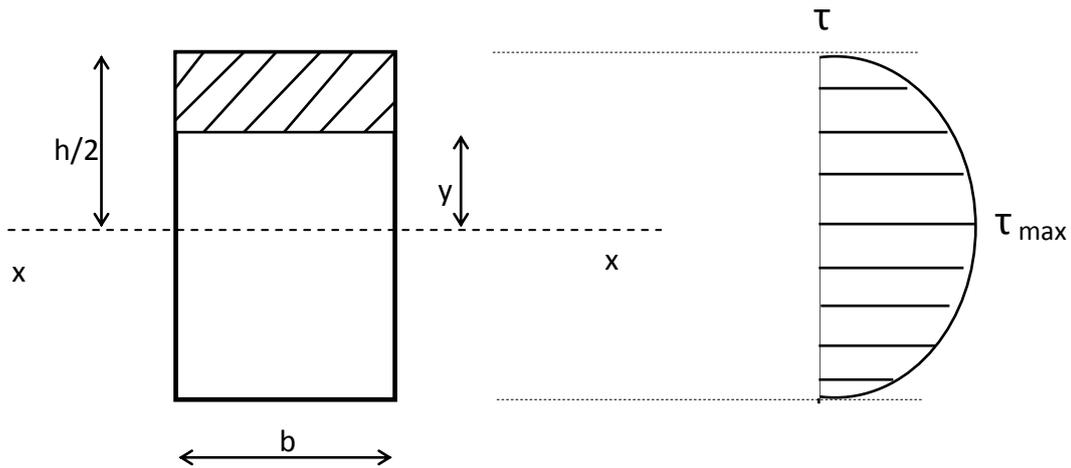
Dans le cas général de la flexion, les sections droites d'une poutre subissent des moments fléchissants et des efforts tranchants. La présence du moment fléchissant est associée à l'apparition des contraintes normales qui peuvent être déterminées par la formule (3).

La présence de l'effort tranchant est due à l'apparition des contraintes tangentielles dans la section droite.

En général, la relation permettant de calculer la contrainte tangentielle est donnée par la formule suivante ( $S_x^*$ , étant le moment statique de la section) :

$$\tau = \frac{T S_x^*}{I_x b}$$

Etudions la loi de distribution des contraintes tangentielles dans une poutre de section rectangulaire.



$$I_x = \frac{b h^3}{12}$$

Le moment statique de l'aire hachurée par rapport à l'axe x :

$$S_x^* = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2} \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{T \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{\frac{b h^3}{12} b} = \frac{6 T}{b h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Construisons le diagramme de  $\tau$  d'après les 3 points :

$$\tau \left( y = \frac{h}{2} \right) = 0$$

$$\tau(y = 0) = \frac{3T}{2bh} = \frac{3T}{2A}$$

$$\tau \left( y = -\frac{h}{2} \right) = 0$$

Pour une poutre de section rectangulaire, la contrainte tangentielle maximale se manifeste au niveau de l'axe neutre.

$$\tau_{max} = \frac{3T}{2bh}$$

- Pour une section circulaire, la valeur maximale de  $\tau$  sur l'axe neutre vaut :

$$\tau_{max} = \frac{4T}{3\pi R^2}$$

- Pour une section triangulaire :

$$\tau_{max} = \frac{3T}{Bh}$$

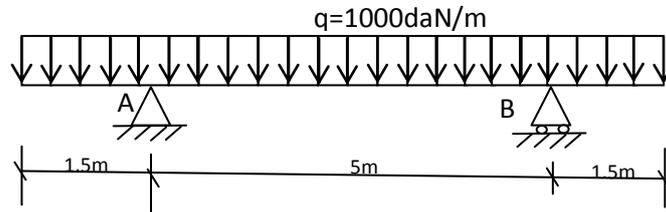
La condition de résistance :  $\tau_{max} \leq [\tau]$

$[\tau]$  : Contrainte tangentielle admissible

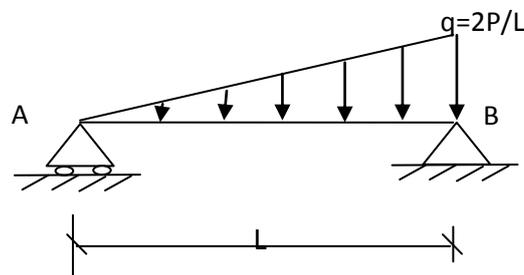
## Exercices

**Exercice N°1 :**

Soit une poutre soumise à une charge uniformément répartie sur toute la longueur. Déterminer les expressions des moments fléchissant  $M$  et de l'effort tranchant  $T$  et tracer leurs diagrammes.

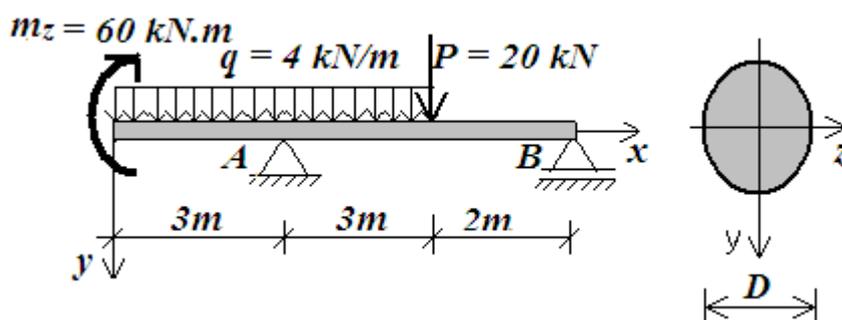
**Exercice N°2 :**

Soit une poutre soumise à une charge triangulairement répartie sur la longueur. Tracer les diagrammes des efforts internes  $M$  et  $T$ .

**Exercice N°3 :**

Soit une poutre en acier de section transversale ronde, comme le montre la figure ci-dessous.

- 1- Calculer les réactions aux appuis.
- 2- Tracer les diagrammes des efforts intérieurs tout au long de la poutre.
- 3- Pour la section où le moment fléchissant est maximal, tracer la distribution des contraintes normale et tangentielle tout au long de la section transversale de la poutre.
- 4- Déterminer le diamètre  $D$  de la section si  $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$ ,  $[\tau] = 1100 \text{ kg/cm}^2$ .

**Exercice N°4 :**

Déterminer la flèche et la rotation maximale ( $f_{\max}$  et  $\theta_{\max}$ ) pour une console chargée par une force concentrée à l'extrémité :



## SOLUTION SERIE TD N°04

**Exercice N°1 :**

Calcul des réactions d'appuis :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = q \cdot L = 8000$$

$$\sum M/A = 0 \Rightarrow R_B \cdot 5 - 1000(6,5)\left(\frac{6,5}{2}\right) + 1000(1,5)\left(\frac{1,5}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = R_A = 4000 \text{ daN}$$

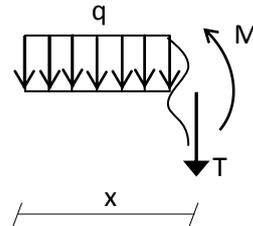
Expressions des efforts internes :

**-effort tranchant :**Tronçon :  $0 \leq x \leq 1,5$ 

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T + qx = 0 \Rightarrow T = -qx$$

$$x = 0 \quad \rightarrow T = 0$$

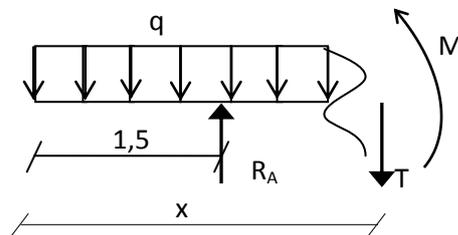
$$x = 1,5 \quad \rightarrow T = -1500 \text{ daN}$$

Tronçon :  $1,5 \leq x \leq 6,5$ 

$$R_A - T - qx = 0 \Rightarrow T = R_A - qx$$

$$x = 1,5 \quad \rightarrow T = 2500 \text{ daN}$$

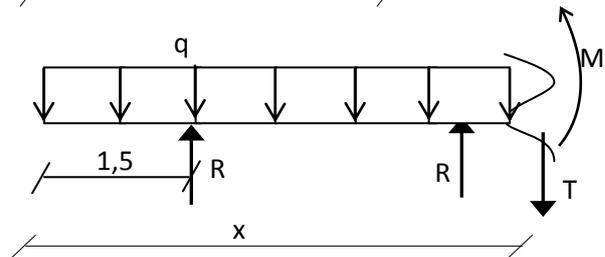
$$x = 6,5 \quad \rightarrow T = -2500 \text{ daN}$$

Tronçon :  $6,5 \leq x \leq 8$ 

$$R_A + R_B - T - qx = 0 \Rightarrow T = R_A + R_B - qx$$

$$x = 6,5 \quad \rightarrow T = 1500 \text{ daN}$$

$$x = 8 \quad \rightarrow T = 0 \text{ daN}$$

**- moments fléchissant:**Tronçon :  $0 \leq x \leq 1,5$ 

$$\sum M = 0 \Rightarrow M(x) + qx \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow M(x) = -q \frac{x^2}{2}$$

$$x = 0 \quad \rightarrow M = 0$$

$$x = 1,5 \quad \rightarrow M = -1125 \text{ daN.m}$$

Tronçon :  $1,5 \leq x \leq 6,5$ 

$$R_A(x - 1,5) - M - qx \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow M = R_A(x - 1,5) - q \frac{x^2}{2}$$

$$x = 1,5 \quad \rightarrow M = -1125 \text{ daN.m}$$

$$x = 6,5 \quad \rightarrow M = -1125 \text{ daN.m}$$

$$T = 0 \Rightarrow x = \frac{R_A}{q} = 4 \text{ m donc } M_{max} = M(4) = 2000 \text{ daN.m}$$

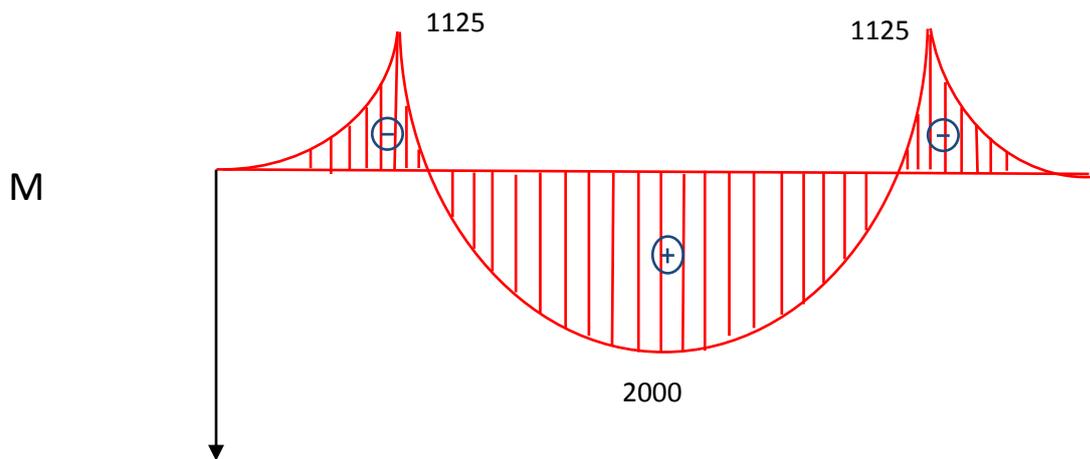
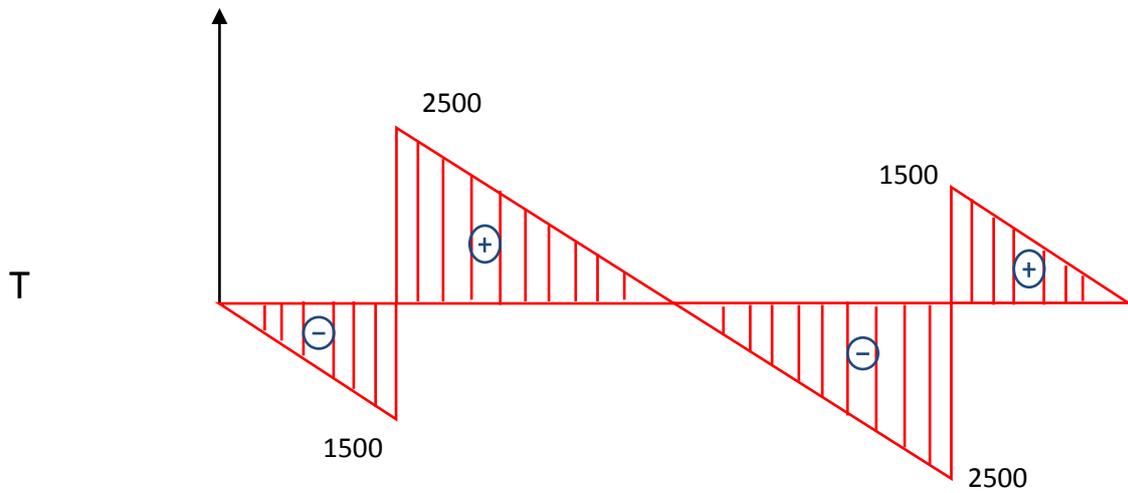
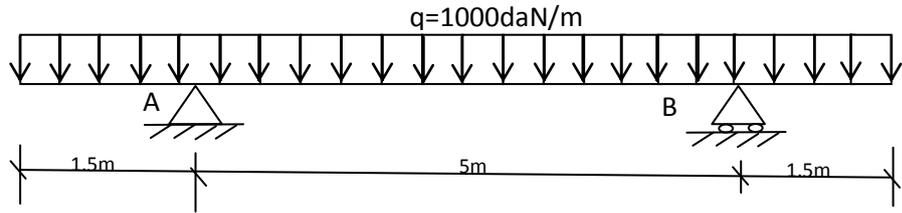
Tronçon :  $6,5 \leq x \leq 8$ 

$$R_A(x - 1,5) + R_B(x - 6,5) - M - qx \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow M = R_A(x - 1,5) + R_B(x - 6,5) - q \frac{x^2}{2}$$

$$x = 6,5 \quad \rightarrow M = -1125 \text{ daN.m}$$

$$x = 8 \quad \rightarrow M = 0 \text{ daN.m}$$

**-Diagrammes de M et T**



**Exercice N°2 :**

Détermination des réactions :

$$\sum M/A = 0 \Rightarrow R_B \cdot L - q(L/2)(2L/3) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = qL/3 = (2/3)P$$

$$\sum F = 0 \Rightarrow R_A + R_B - qL/2 = 0$$

$$\Rightarrow R_A = qL/6 = P/3$$

Expressions des efforts internes :

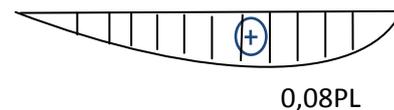
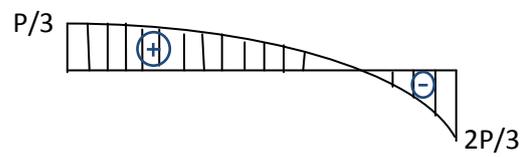
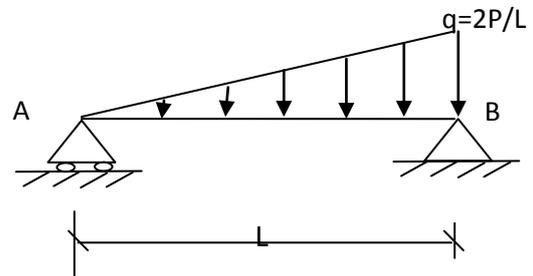
$$T - \frac{P}{3} + q \frac{x}{L} \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow T = \frac{P}{3} - q \frac{x^2}{2L}$$

$$T = \frac{P}{3} - \frac{Px^2}{L^2} \Rightarrow T(0) = \frac{P}{3} ; T(L) = -\frac{2P}{3}$$

$$M - \frac{P}{3}x + q \frac{x}{L} \frac{x^2}{2 \cdot 3} = 0 \Rightarrow M = \frac{P}{3}x - \frac{qx^3}{6L}$$

$$M = \frac{P}{3}x - \frac{Px^3}{3L^2} \Rightarrow M(0) = 0 ; M(L) = 0$$

$$T(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}} \text{ donc } M_{max} = M\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = 0,08PL$$



**Exercice N°3 :**

1- Réactions aux appuis

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_B = 44\text{KN}$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow R_B = 24\text{KN}$$

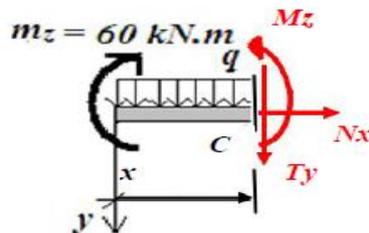
$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 20\text{KN}$$

$$R_{Ay} + R_B = 44\text{KN} \Leftrightarrow 20 + 24 = 44\text{KN}$$

2- Diagrammes des efforts intérieurs

**Section 1-1**

$$0 \leq x \leq 3\text{m}$$



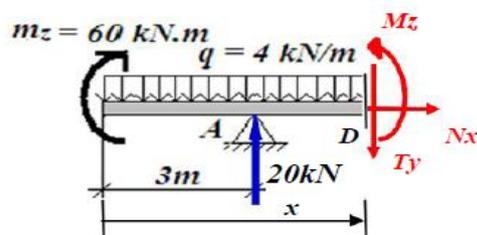
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = -4x \quad d'ou \begin{cases} T_y(x=0) = 0 \\ T_y(x=3) = -12\text{KN} \end{cases}$$

$$\sum M_{/C} = 0 \Rightarrow M_z = 60 - 2x^2 \quad d'ou \begin{cases} M_z(x=0) = 60\text{KN.m} \\ M_z(x=3) = 42\text{KN.m} \end{cases}$$

**Section 2-2**

$$3 \leq x \leq 6\text{m}$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = 20 - 4x \quad d'ou \begin{cases} T_y(x=3) = 8\text{KN} \\ T_y(x=6) = -4\text{KN} \end{cases}$$

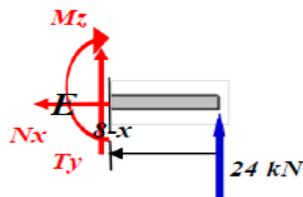
$$\sum M_{/D} = 0 \Rightarrow M_z = 60 + 20(x - 3) - 2x^2 \quad d'ou \begin{cases} M_z(x = 3) = 42 \text{KN.m} \\ M_z(x = 6) = 48 \text{KN.m} \end{cases}$$

$$T_y = 0 \Rightarrow x = 5 \text{m}$$

$$M_z^{max} = M_z(x = 5 \text{m}) = 50 \text{KN.m}$$

**Section 3-3**

$6 \leq x \leq 8 \text{m}$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = -24 \text{KN}$$

$$\sum M_{/E} = 0 \Rightarrow M_z = 24(8 - x) \quad d'ou \begin{cases} M_z(x = 6) = 48 \text{KN.m} \\ M_z(x = 8) = 0 \end{cases}$$

## 3- Distribution des contraintes

$$M_z^{max} = 60 \text{KN.m} ; T_y^{cor} = 0$$

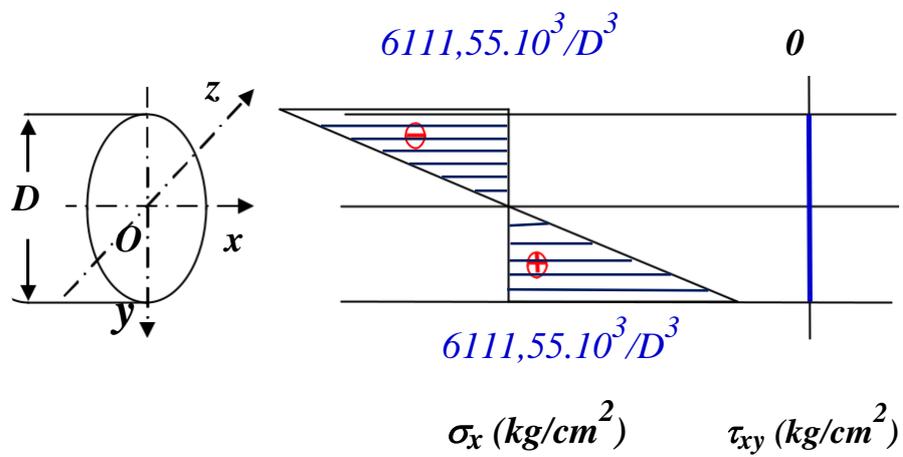
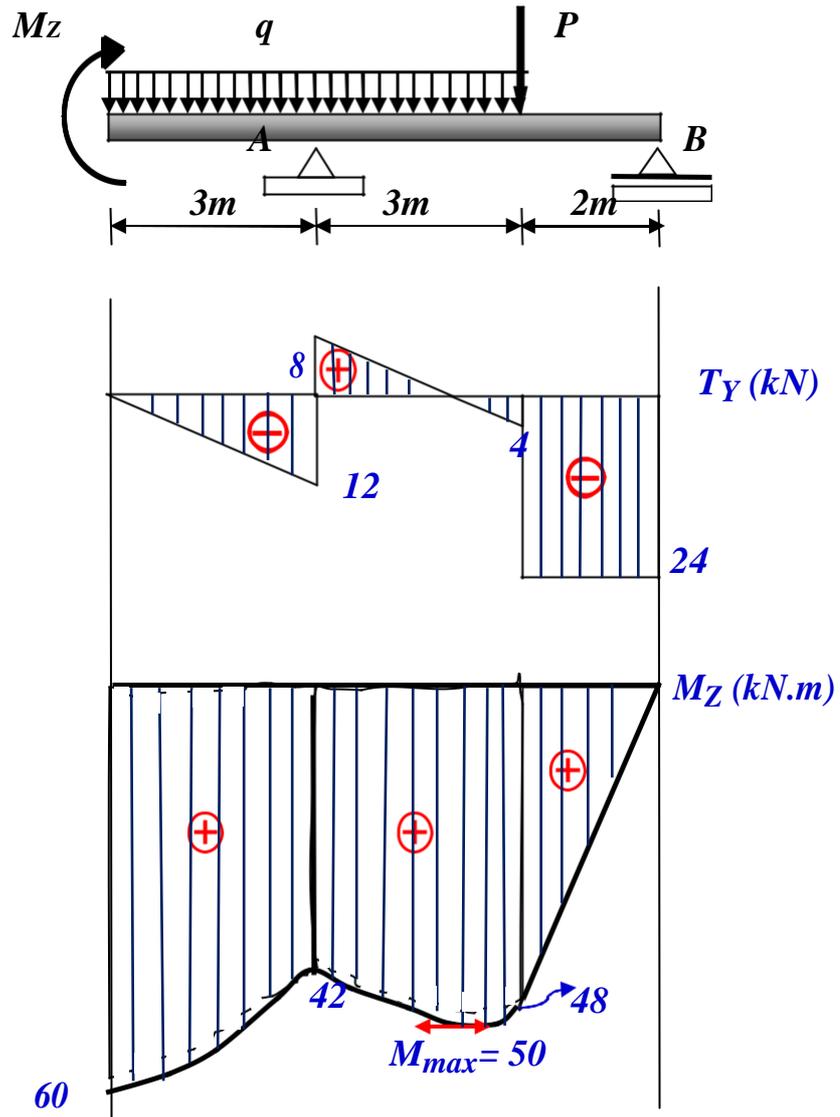
$$\sigma_x(y) = \frac{M_z}{I_z} y = \frac{60 \cdot 10^4}{\frac{\pi D^4}{64}} y$$

$$\tau_{xy} = \frac{T_y \cdot S_{1z}(y)}{I_z \cdot b(y)} = 0$$

## 4- Dimensionnement

$$\sigma_x \leq [\sigma]$$

$$\frac{6111,55 \cdot 10^3}{D^3} \leq 1600 \Rightarrow D \geq 15,63 \text{ cm}$$



**Exercice N°4 :**

Calcul du moment fléchissant :

Section :  $0 \leq x \leq L$ 

$$M = -F \cdot x$$

Donc :

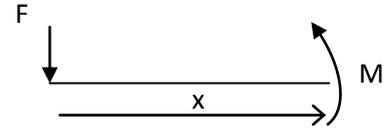
$$EIf'' = -F \cdot x$$

Intégrons la 1<sup>ère</sup> fois :

$$EIf' = -\frac{F \cdot x^2}{2} + C = EI\theta$$

Intégrons la 2<sup>ème</sup> fois :

$$EIf = -\frac{F \cdot x^3}{6} + C \cdot x + D$$



C et D seront déterminés par les conditions aux limites suivantes :

Pour :

$$x = L \Rightarrow f = 0$$

Pour :

$$x = L \Rightarrow \theta = f' = 0$$

De la deuxième condition on tire

$$0 = -\frac{F \cdot L^2}{2} + C \Rightarrow C = \frac{F \cdot L^2}{2}$$

La 1<sup>ère</sup> condition donne :

$$0 = -\frac{F \cdot L^3}{6} + \frac{F \cdot L^3}{2} + D \Rightarrow D = -\frac{F \cdot L^3}{3}$$

 $f_{max}$  et  $\theta_{max}$  ont eu lieu à l'extrémité libre ( $x=0$ ) donc :

$$\theta_{max} = f'_{max} = \left( -\frac{F \cdot 0^2}{2} + \frac{F \cdot L^2}{2} \right) \frac{1}{EI} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{F \cdot L^2}{2EI}$$

$$f_{max} = \left( \frac{F \cdot 0^3}{6} + \frac{F \cdot L^2}{2} \cdot 0 - \frac{F \cdot L^3}{3} \right) \frac{1}{EI} \Rightarrow f_{max} = \frac{-F \cdot L^3}{3EI}$$

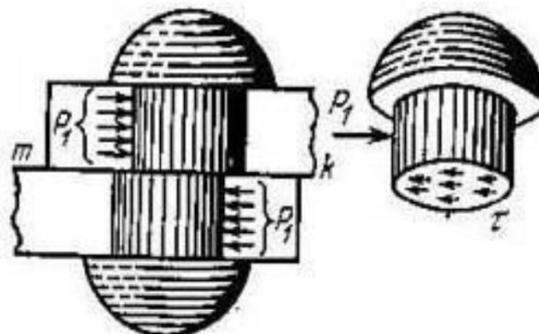
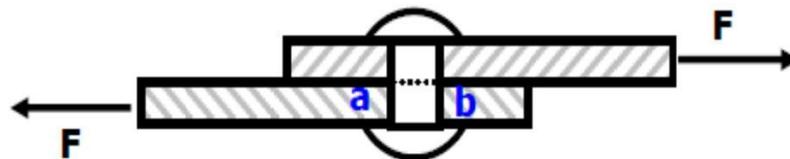
 $\theta > 0 \Rightarrow$  la section tourne dans le sens antihoraire. $f < 0 \Rightarrow$  le centre de gravité de la section se déplace vers le bas.

## CHAPITRE V

**Cisaillement****1) Généralité :**

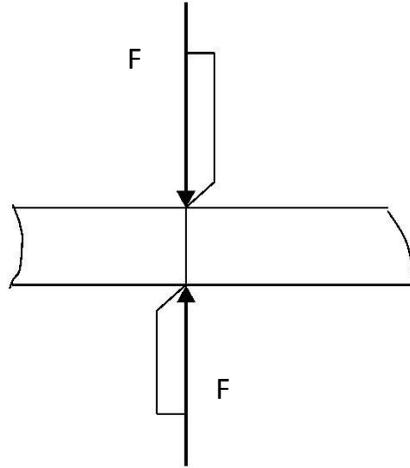
Dans le chapitre précédent nous avons étudié les contraintes tangentielles, engendrées par un effort tranchant en présence d'un moment fléchissant. Nous allons maintenant considérer les contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant seul.

Ces contraintes tendent à cisailer la section et provoquent ainsi des déformations angulaires. Si en pratique il est difficile de séparer les sollicitations les une des autres, il est encore plus difficile de réaliser des déformations de cisaillement dans sa forme pure, elles sont généralement accompagnées de déformations de flexion. Cependant les exemples considérés comme étant en cisaillement pur sont nombreux: les composants des assemblages métalliques constituent la majorité.



## 2) Calcul des contraintes de cisaillement

Une pièce est sollicitée au cisaillement lorsqu'elle est soumise à deux forces opposées qui tendent à le séparer en deux tronçons glissant l'un par rapport à l'autre suivant le plan d'une section.



Considérons le cas d'un tronçon de poutre d'une section  $S$ , soumise à deux forces opposées comme le montre la figure ci-dessous. Nous avons l'effort tranchant :

$$T = F$$

Et la relation entre l'effort tranchant et la contrainte tangentielle agissant sur la face de la section s'écrit :

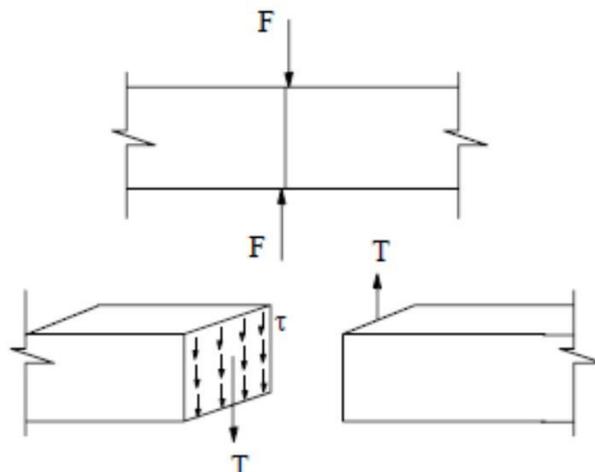
$$T = \iint \tau dS$$

Pour une distribution uniforme des contraintes sur le plan de la section l'équation s'écrira donc:

$$T = \tau S \Rightarrow \tau = T/S$$

On peut écrire aussi :

$$\tau = F/S$$



En réalité les contraintes tangentielles ne sont pas uniformément réparties sur le plan de la section car elles s'annulent aux voisinages des faces supérieures et inférieures d'après la loi de parité. Cependant cette formule est largement utilisée pour le calcul des assemblages boulonnés rivetés ou soudés.

### 3) Déformation de cisaillement

Dans la partie linéaire de l'allure contrainte-déformation, il y a une proportionnalité entre le glissement transversal par rapport à la section droite et la résultante des forces extérieures, donc la fibre moyenne s'incline d'un angle  $\gamma$  :

$$\tan \gamma \approx \gamma = dy/dx$$

On extrait directement la relation linéaire de l'allure, qui s'exprime sous la forme suivante :

$$\tau = G \gamma$$

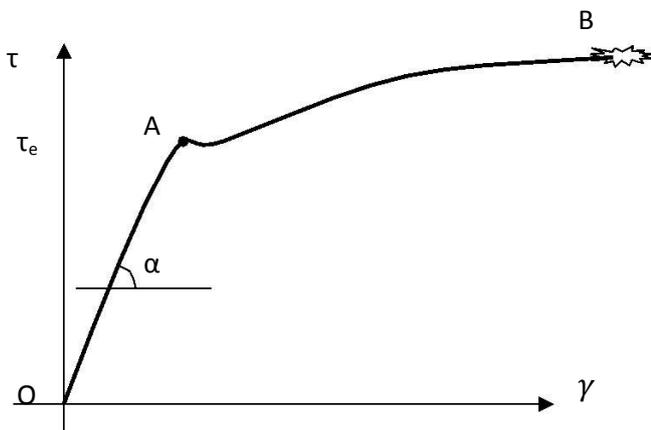
$G$  : présente le module élastique de cisaillement ou le Module de Coulomb

Pour le cas de cisaillement pur, la distribution des contraintes est uniforme sur la section droite, alors on obtient :

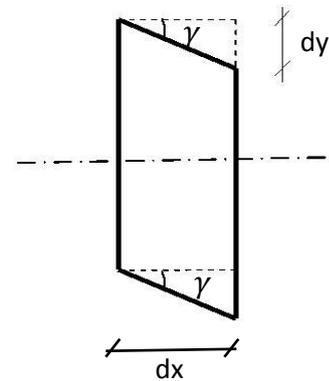
$$\tau = F/S$$

Donc :

$$\gamma = \tau/G = T/GS$$



Courbe contrainte-glissement



Déformation due au cisaillement

### 4) Condition de résistance au cisaillement

Le calcul de cisaillement pur consiste à déterminer la contrainte tangentielle  $\tau_{\max}$  dans l'élément le plus sollicité et comparer cette valeur avec la contrainte admissible. La condition de résistance au cisaillement s'écrit sous la forme:

$$\tau = T/S < \tau_{adm} = \tau_e/s$$

$s$  : coefficient de sécurité adopté du matériau

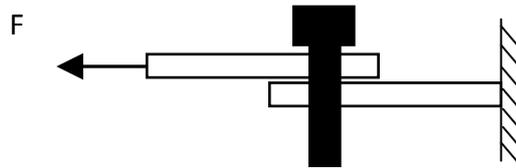
**Remarque :**

Les essais ont montré que le rapport entre la limite élastique au cisaillement ( $\tau_e$ ) et la limite élastique à l'extension ( $\sigma_e$ ) n'était pas constant pour tous les matériaux. A moins de posséder les résultats d'essais précis pour le matériau utilisé, on peut admettre pour le calcul des éléments en matériaux ductiles (boulons, rivets,...etc.) la formule suivante:

$$\tau = 0,6 \sigma$$

**Exemple :**

- Vérifier la résistance d'un boulon de diamètre  $d = 3 \text{ mm}$ , utilisé pour l'assemblage de deux bandes d'acier comme le montre la figure ci-dessous.
  - Calculer  $F_{\max}$  pour laquelle cette résistance reste vérifiée.
- Donnée :  $F = 0,5 \text{ KN}$  ;  $\tau_{adm} = 15 \text{ daN/mm}^2$



Solution :

- Vérification de la résistance :

$$T - F = 0 \quad \Rightarrow \quad T = F = 0,5 \text{ KN}$$

$$\tau = T/S \quad \text{et} \quad S = \pi d^2/4 = \pi(0,3)^2/4$$

$$\Rightarrow \tau = 7,07 \text{ KN/cm}^2$$

- Calcul de  $F_{\max}$  :

$$\tau = F/S \leq \tau_{adm} \quad \Rightarrow \quad F \leq S \tau_{adm}$$

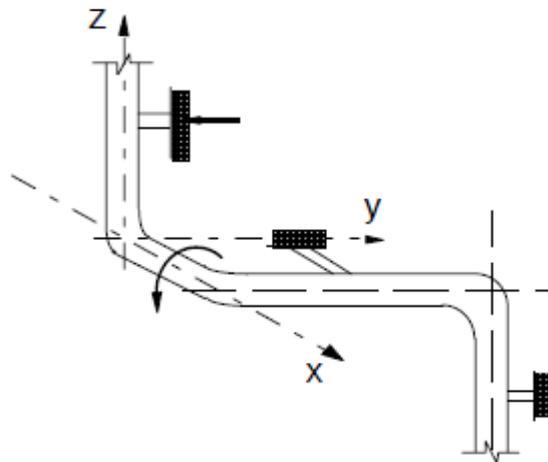
$$\Rightarrow F \leq (\pi d^2/4) \tau_{adm} \quad \Rightarrow \quad F_{\max} = (\pi(0,3)^2/4)15$$

$$\Rightarrow F_{\max} = 1,06 \text{ KN}$$

## CHAPITRE VI

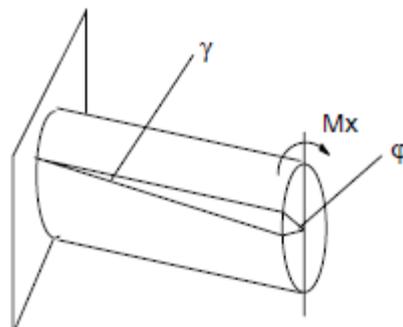
**Torsion****1) Généralités :**

Si de tous les efforts internes seul le moment  $M$  est présent, il provoque une torsion. Ce type de sollicitation est très répandu dans les structures de mécanique et surtout au niveau des arbres entraînés par les moteurs. L'analyse des éléments des structures de génie civil soumis à la torsion est moins fréquente car l'existence du moment de torsion entraîne que les forces extérieures doivent obligatoirement appartenir à un plan perpendiculaire à celui de l'élément, et cela n'est pris en compte que lors de l'analyse des structures en 3-dimensions, comme par exemple l'installation de tuyauterie d'un système de refroidissement d'une centrale nucléaire ou d'une base de pompage de pétrole.

**2) Contraintes et déformations**

Lorsqu'on sollicite en torsion une poutre circulaire, on constate qu'une section quelconque tourne dans son plan d'un angle proportionnel à son abscisse. Si l'angle de rotation est petit, alors la longueur de la barre et le rayon de la section restent inchangés.

De plus, une ligne longitudinale sur la surface de la barre a-b tourne d'un petit angle vers la position a-b'. On constate qu'un élément rectangulaire infinitésimal sur la surface de la barre de longueur  $dx$  se déforme en parallélogramme. L'angle de la déformation  $\gamma$  est appelé: distorsion exprimé par:



$$\tan \gamma = \frac{bb'}{ab}$$

$$bb' = rd\varphi \text{ et } ab = dx$$

En tenant compte du fait que l'angle  $\gamma$  est petit on assimilera  $\tan \gamma$  à  $\gamma$  et on obtient alors :

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dx}$$

$\frac{d\varphi}{dx}$  est la rotation relative analogue à  $\frac{\Delta L}{L}$   
(déformation relative longitudinale)

D'après la loi de Hooke au cisaillement:

$$\tau = G\gamma \Rightarrow \tau = Gr \frac{d\varphi}{dx}$$

La relation entre le moment de torsion et l'angle  $\phi$  peut être obtenue sachant que les contraintes tangentielles  $\tau$  réparties sur la section sont statiquement équivalentes à un couple égal et opposé au couple de torsion  $M_x$  :

$$M_x = \int_s r\tau ds$$

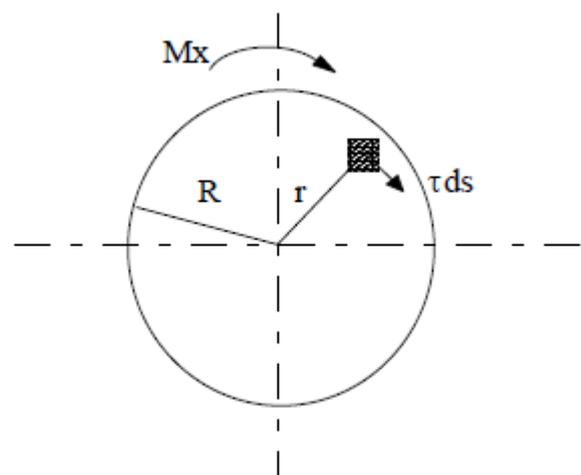
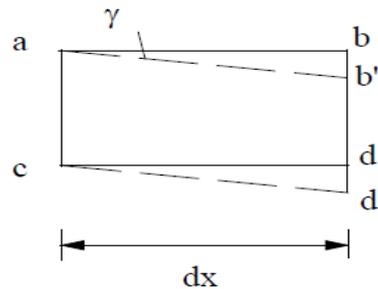
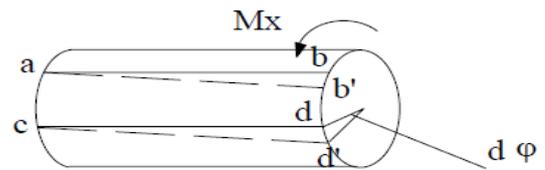
En substituant  $\tau$  par son expression

$$M_x = \int_s r^2 G \frac{d\varphi}{dx} ds$$

Finalement, la relation entre le moment de torsion et l'angle

$$M_x = G \frac{d\varphi}{dx} \int_s r^2 ds$$

On reconnaît dans cette expression le moment quadratique polaire:



$$I_p = \int_S r^2 ds$$

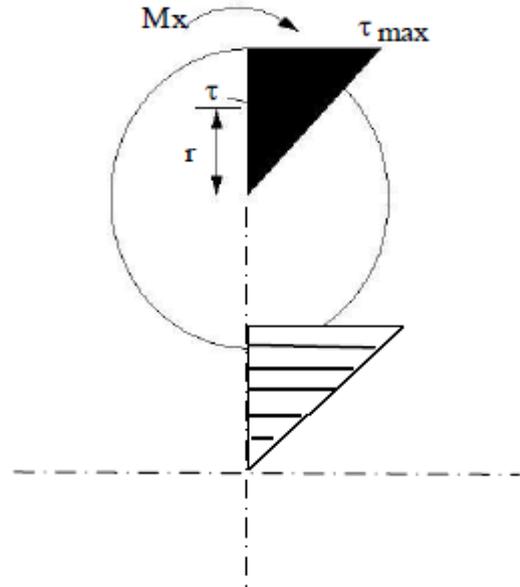
D'où l'expression de la déformation angulaire relative:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{GI_p}$$

La quantité  $GI_p$  est la rigidité à la torsion.

En remplaçant  $\frac{d\varphi}{ds}$  par sa valeur dans l'expression de  $\tau$  on obtient :

$$\tau = \frac{M_x r}{I_p}$$



Cette formule montre que les contraintes sont proportionnelles à la distance du point considéré au centre de gravité de la section. On peut alors tracer le graphe de répartition de la contrainte dans une section. La contrainte tangentielle est maximale sur les fibres extérieures:

$$\text{pour } r = R \quad \tau_{max} = \frac{M_x R}{I_p}$$

La quantité  $W_p = \frac{I_p}{R}$  est appelée module de torsion.

L'angle de rotation d'une poutre de longueur L peut être calculé par :

$$\varphi = \int_0^L \frac{M_x}{GI_p} dx$$

Si la forme de la section et le moment sont constants alors:

$$\varphi = \frac{M_x L}{GI_p} \quad (\text{le glissement d'une extrémité par rapport à l'autre})$$

### 3. Calcul de résistance a la torsion

En plus de la condition de résistance, lors du calcul des barres à la torsion, on vérifie aussi la condition de rigidité. Les deux conditions s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= M_x / W_t \leq \tau_{adm} \\ \varphi_{max} &= M_x L / GL_t \leq \varphi_{adm} \end{aligned}$$

On admet généralement  $\varphi_{adm} = 0,3^\circ/1m$  de longueur

## Références bibliographiques

Bourahla, N., 2005. Résistance des matériaux de base. Université Saad Dahlab Blida, Edition GEOTEC.

Anissimov A., Djillali-Berkane Z. et Strakhov V., Flambage systemes isostatiques de barres, O.P.U 04-1987.

Belluzi O., Scienza delle costruzioni Tome 1, edition Zanichelli Bologna 1977.

Brown E. H., Structural analysis Tome 1, Edition Longmans 1967.

Decelle A. F., et Legendre D., Mécanique appliquée au génie civil, Editions Eyrolles 1983.

Doberscu C. A., Quelques chapitres de résistance des matériaux, tome 1, O.P.U 04-91

Jalil W. A. et Ader P., Calcul pratique des structures, 4ème édition, Editions Eyrolles 1985.

Mirolioubov I. et al., Résistance des matériaux manuel de résolution de problèmes, 4ème édition 1977, Edition MIR Moscou.

Zedira H. et Lahbari N., Résistance des matériaux Tome 1, O.P.U Collection le cours de génie civil, 06-1990.

Harichane Z., Polycopié de Résistance des Matériaux, Université Hassiba Benbouali de Chlef

MALAB S., Polycopié Cours de Résistance des Matériaux - Systèmes Isostatiques - Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf USTO

Badel P., Cours de résistance des matériaux, Cycle Préparatoire Médecin-Ingénieur 2011-2012, Ecole des Mines Saint Etienne.

Ouzandja D., Support de cours en Résistance des Matériaux, Université Mohamed Boudiaf de M'sila.