

CHAPITRE IV

SYSTÈMES RETICULES

2.4. Cas des systèmes réticulés (triangulés)

2.4.1. Données de base

2.4.1.1. Définitions

On appelle systèmes réticulaires articulés ou triangulés articulés des ensembles de pièces prismatiques droites assemblées entre elles par des articulations (Appuis du 2^{ème} genre).

Ces pièces ou poutrelles sont nommées barres et les articulations sont désignées sous le nom de nœuds.

2.4.1.2. Hypothèses fondamentales

Pour aborder aisément le calcul des forces intérieures et des contraintes, on fait sur ces systèmes trois (03) hypothèses, dont on s'efforce de se rapprocher le plus possible dans les constructions réelles ; en charpente métallique en particulier où les systèmes réticulaires sont très employés.

- Les axes neutres longitudinaux des barres sont coplanaires,
- Les nœuds doivent coïncider avec les intersections des axes neutres des barres qui y aboutissent,
- Les forces extérieures, charges directement appliquées ou réactions d'appui, sont coplanaires avec les axes des barres et leurs droites d'action passent toujours par un nœud.

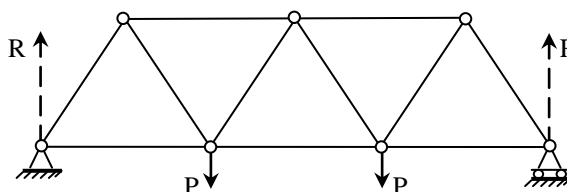
Conséquences

Ces systèmes donnent donc des ensembles coplanaires dont les conditions d'équilibre seront résolues algébriquement ou graphiquement.

2.4.1.3. Exemples de systèmes réticulaires

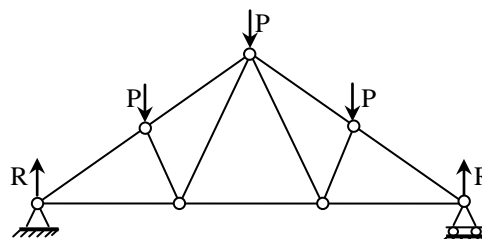
a) – Poutres dite de Warren

Le système repose sur deux appuis du 2^{ème} genre ou l'un du 1^{er}, l'autre du 2^{ème} genre. Les nœuds intermédiaires inférieures sont sollicités par des charges P et les nœuds d'extrémités par les réactions d'appuis R.



b) – Ferme à deux versants symétriques

Ce système est destiné à porter la couverture d'un bâtiment. Les deux barres en > (Arbalétriers) contiennent les nœuds de charge P et aux extrémités les nœuds d'appui, réactions R



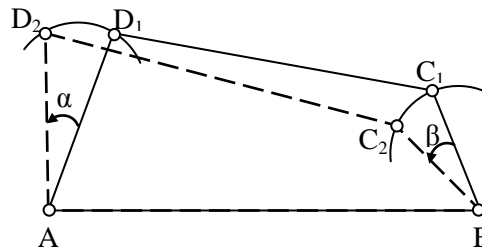
2.4.1.4. Classification géométrique

a) Systèmes déformables

Les longueurs des barres sont invariables mais par le jeu des articulations, les angles peuvent varier.

Exemple : Quadrilatère articulé

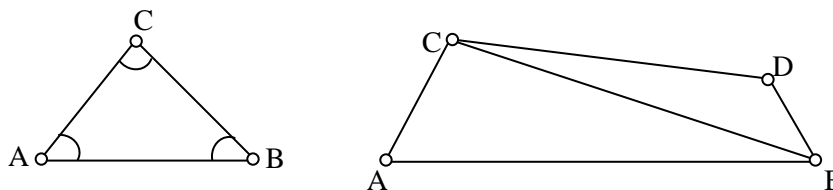
- 1^{ère} figure : AB restant fixe, ABC_1D_1
- 2^{ème} figure : ABC_2D_2 par rotation β de BC_1 , α de AD_1 avec $C_1D_1 = C_2D_2$



b) Systèmes indéformables

Les longueurs des barres ainsi que les angles sont invariables. Ces derniers sont complètement déterminés dès que les longueurs sont fixées.

Exemple : Le triangle est essentiellement indéformable et constitue la cellule initiale type des systèmes indéformables.



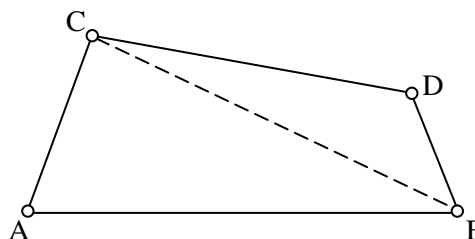
Tout système composé de triangles juxtaposés par côtés communs est à son tour indéformable. Ainsi par l'articulation D, nous faisons passer les barres DB et DC, nous avons ainsi deux triangles ABC et BCD indéformables donc leur ensemble ABCD c'est aussi.

c) Division des systèmes indéformables

➤ Les systèmes strictement indéformables

On nomme ainsi les systèmes qui peuvent devenir déformables dès qu'on supprime une seule barre.

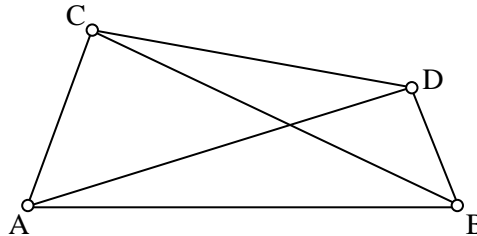
Exemple : Le système ABCD est indéformable ; retirons-lui la barre BC, il devient le quadrilatère articulé précédent ABCD



➤ **Les systèmes indéformables à barres surabondantes**

Ce sont ceux auxquels on peut enlever une ou plusieurs barres et qui restent encore indéformables après cette opération.

Exemple : Le système du quadrilatère ABCD et de ses deux diagonales est à barres surabondantes car on peut lui enlever soit AC, soit BD il demeure encore indéformable mais ne l'est plus que strictement.



Conséquence

1 ^{er} Cas	$b < 2.n - 3$	Système déformable,
2 ^{ème} Cas	$b = 2.n - 3$	Système strictement indéformable,
3 ^{ème} Cas	$b > 2.n - 3$	Système indéformable à barres surabondantes.

Avec,

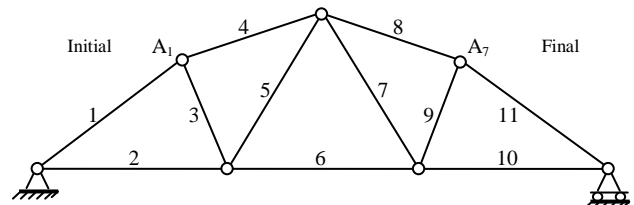
n : nombre de nœuds ; b : nombre de barres.

2.4.1.5. Application aux poutres réticulaires à triangulation simple

➤ **Définition**

La poutre réticulaire à triangulation simple se compose de triangles juxtaposés dont certains côtés peuvent être alignés.

Exemple : Poutre de Warren de hauteur variable.



➤ **Propriétés**

- Ce sont des systèmes strictement indéformables par construction.
Vérification : $n = 7$, $b = 11$ $11 = 14 - 3$
- En partant d'un des sommets de la première maille triangulaire, nœud initial, il est possible de parcourir toutes les barres du système d'un mouvement continu sans jamais repasser deux fois la même barre et en aboutissant à un nœud final.
- Les barres étant ainsi numérotées, on appelle diagonales les barres d'indice impair qui, sauf la première et la dernière, appartiennent à deux diagonales successifs et sont intérieures à la poutre.

- Ici : 3, 5, 7 et 9 sont les diagonales. Dans certaines poutres, ces diagonales sont verticales, elles prennent le nom de montant.

On appelle membrures, les barres d'indice pair qui sont sur le pourtour de la poutre.

- membrures supérieures 4 et 8,
- membrures inférieures 2, 6 et 10.

2.4.2. Equilibre d'un système triangulé isostatique

2.4.2.1. Equilibre statique ou extérieur

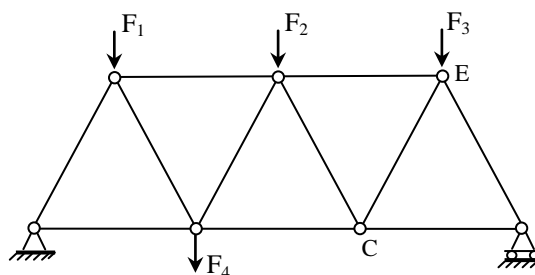
Le système des forces directement appliquées et des réactions d'appui doit former un système nul ou en équilibre. Cette condition doit permettre de déterminer algébriquement ou graphiquement les réactions d'appui inconnues.

2.4.2.2. Equilibre élastique ou intérieur

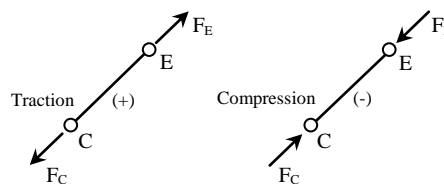
L'hypothèse des articulations des barres à appuis du 2^{ème} genre fait que les forces extérieures passant toutes par les nœuds ne peuvent donner de flexion. Elles donnent des composantes dont les droites d'action seront les axes des barres et par suite celle-ci ne peuvent être que tendues ou comprimées suivant des forces intérieures f : qui équilibreront les forces extérieures.

2.4.2.3. Equilibre d'une barre isolée

Soit,



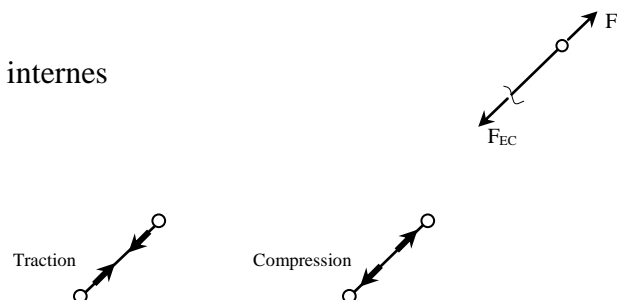
a) Equilibre externe d'une barre isolée



b) Equilibre interne d'une barre isolée

F_{EC} : Résultante des forces internes

$$F_E = F_{EC}$$



2.4.3. Détermination des forces intérieures

2.4.3.1. Méthode des nœuds

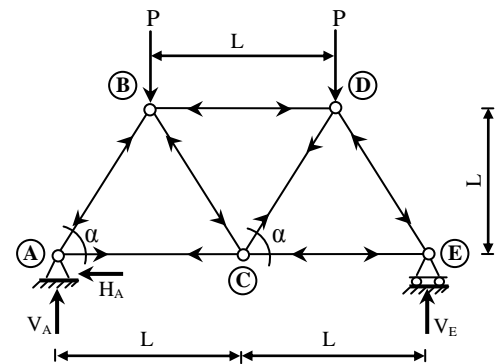
2.4.3.1.1. Principe général : Le système étant en équilibre, on considère qu'il en est de même de chacun de ses nœuds. Un nœud quelconque est en 'équilibre sous l'action d'une force directement appliquée quand il y en a une, et des forces intérieures agissant dans les barres aboutissant à ce nœud. On est donc ramené à traduire la nullité d'un système de forces coplanaires et concourantes ; il faut et il suffit que le polygone de Varignon de ce système soit fermé.

2.4.3.1.2. Exemple d'application

$$b = 7 ; r = 3 ; 2.j = 5.2 = 10$$

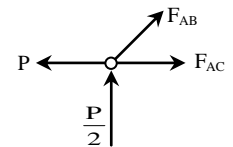
1. Réactions d'appuis

$$\begin{aligned} \sum x = 0 &\Rightarrow H_A = P \leftarrow \\ \sum M_E = 0 &\Rightarrow 2.L.V_A - P.\frac{3.L}{2} - P.\frac{L}{2} + P.L = 0 \\ &\Rightarrow V_A = \frac{P}{2} \uparrow \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow 2.L.V_E - P.\frac{3.L}{2} - P.\frac{L}{2} - P.L = 0 \\ &\Rightarrow V_E = \frac{3.P}{2} \uparrow \end{aligned}$$



Nœud A

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{2}{\sqrt{5}} ; \quad \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow \frac{P}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}}.F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = -P.\frac{\sqrt{5}}{4} \quad (\text{Comp.}) \\ \sum X = 0 &\Rightarrow F_{AC} - P + \frac{1}{\sqrt{5}}.F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AC} = P + \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{P.\sqrt{5}}{4} = \frac{5}{4}.P \quad (\text{Trac.}) \end{aligned}$$

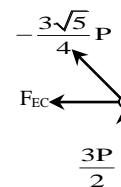


Nœud E

$$\sum X = 0 \Rightarrow F_{AB} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(-\frac{3}{4}.\sqrt{5}\right).P = \frac{3}{4}.P$$

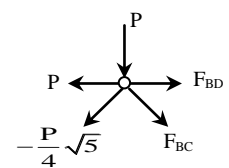
Vérification:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}.P + \frac{2}{\sqrt{5}}F_{ED} = \frac{3}{2}.P - \frac{3}{2}.P = 0$$



Nœud B

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 &\Rightarrow P + \frac{2}{\sqrt{5}}F_{BC} + \frac{2}{\sqrt{5}}F_{BA} = 0 \\ P + \frac{2}{\sqrt{5}}F_{BC} - \frac{2}{\sqrt{5}}.P.\frac{\sqrt{5}}{4} &= 0 \Rightarrow F_{BC} = -P.\frac{\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$



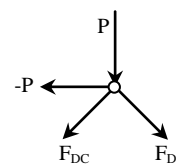
$$\sum X = 0 \Rightarrow P + F_{BD} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot P \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot F_{BC} = 0 \Rightarrow F_{BD} = -P$$

Nœud D

$$\sum X = 0 \Rightarrow F_{DB} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot F_{DC} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot F_{DE} = -P + \frac{1}{\sqrt{5}} F_{DC} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot F_{DE} = 0$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow P + \frac{2}{\sqrt{5}} F_{DC} + \frac{2}{\sqrt{5}} F_{DE} = 0$$

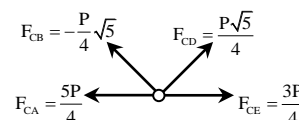
$$\Rightarrow F_{DC} = P \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} \quad ; \quad F_{DE} = -P \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{4}$$



Nœud C

$$\sum X = 0 \Rightarrow F_{CA} - F_{CE} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot F_{CB} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot F_{CD} = \frac{5}{4} \cdot P - \frac{3}{4} \cdot P - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot P \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot P \frac{\sqrt{5}}{4} = 0$$

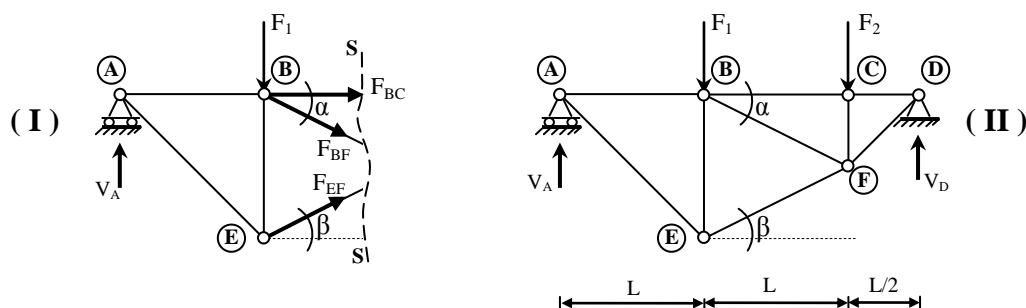
$$\sum Y = 0 \Rightarrow \dots = 0$$



Barre	Forces
AB	$-P \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}$
BC	$-P$
CD	
DE	
.	
.	

2.4.3.2. Méthode de Ritter (de sections)

Soit, un système réticulaire en équilibre. Nous le coupons par une section S en deux parties I et II. Les forces extérieures constituant un système nul sont partagées en $\sum F_I$ à gauche de S et $\sum F_{II}$ à droite de S et l'on a symboliquement : $\sum F_I + \sum F_{II} = 0$



On applique pour l'une des parties

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad \sum F_y = 0 \quad ; \quad \sum M_A = 0$$

Il vaut mieux utilisé les équations des moments par rapport au point de rencontre de deux barres.

$$\sum M_{/F} = 0 \quad (\text{Pour le calcul de } F_{BC}),$$

$$\sum M_{/B} = 0 \quad (\text{Pour le calcul de } F_{EF}),$$

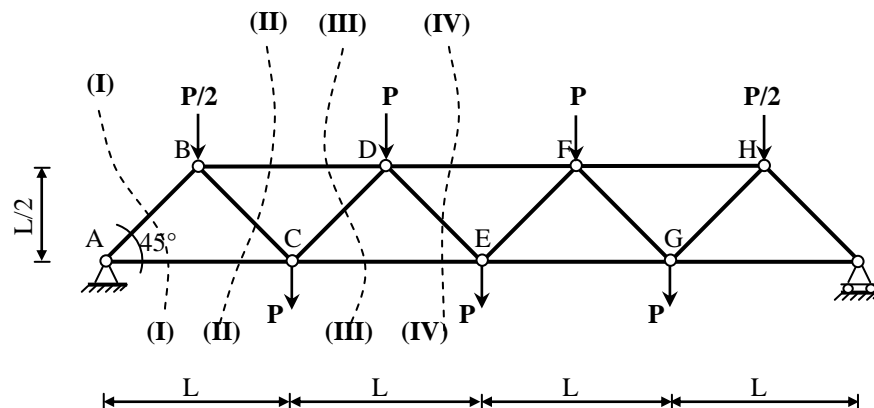
$$\sum F_{/x} = 0 \quad (\text{Pour le calcul de l'inconnue qui reste}).$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow V_A \cdot \overline{AB} - F_{EF} \cdot \cos(\beta) \cdot \overline{BE} = 0 \Rightarrow F_{EF} = V_A \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} \cdot \frac{1}{\cos(\beta)}$$

$$\sum M_{/F} = 0 \Rightarrow F_{BC} = \frac{1}{CF} \cdot (F_I \cdot \overline{BC} - V_A \cdot \overline{AC})$$

$$\begin{aligned} \sum M_{/x} = 0 &\Rightarrow F_{BF} \cdot \cos(\beta) + F_{BC} + F_{EC} \cdot \cos(\beta) = 0 \\ &\Rightarrow F_{BF} = - \frac{1}{\cos(\beta)} \cdot [F_{BC} + F_{EF} \cdot \cos(\beta)] \end{aligned}$$

Exemple d'application



On a :

$$P = 10 \text{ t}, L = 3 \text{ m}$$

$$H_I = 0 \quad ; \quad V_I = 30 \text{ t} \quad ; \quad V_A = 30 \text{ t}$$

1. Section I-I

$$\sum \vec{M}_{/o} = \vec{0} \Rightarrow F_{AB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot L + V_A \cdot L = 0$$

$$\sum \vec{F}_{/x} = \vec{0} \Rightarrow F_{AC} + F_{AB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow F_{AC} = 30 \text{ t}$$

$$\Rightarrow F_{AB} = -24,4 \text{ t}$$

2. Section II-II

$$\sum \vec{M}/C = \vec{0} \Rightarrow V_A \cdot L - \frac{P}{2} \cdot \frac{L}{2} + F_{BD} \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$\sum \vec{F}/x = \vec{0} \Rightarrow F_{AC} + F_{BD} + F_{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum \vec{F}/y = \vec{0} \Rightarrow V_A - \frac{P}{2} - F_{BC} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow F_{AC} = 30 \text{ t}$$

$$\Rightarrow F_{BC} = 35,3 \text{ t}$$

3. Section III-III

$$\sum \vec{M}/D = \vec{0} \Rightarrow V_A \cdot \frac{3L}{3} - \frac{P}{2} \cdot L - \frac{P}{2} \cdot L - F_{CE} \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$\sum \vec{F}/x = \vec{0} \Rightarrow F_{BD} + F_{CE} + F_{CD} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum \vec{F}/y = \vec{0} \Rightarrow V_A - \frac{P}{2} - P + F_{CD} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow F_{CD} = -21,2 \text{ t}$$

$$\Rightarrow F_{CE} = 70 \text{ t}$$

$$\Rightarrow F_{BD} = -55 \text{ t}$$

4. Section IV-IV

$$\sum \vec{M}/E = \vec{0} \Rightarrow 3 \cdot P \cdot 2L - \frac{P}{2} \cdot \frac{3L}{2} - P \cdot L - P \cdot \frac{L}{2} + F_{DF} \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$\sum \vec{F}/x = \vec{0} \Rightarrow F_{DF} + F_{CE} + F_{DE} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum \vec{F}/y = \vec{0} \Rightarrow 3 \cdot P - \frac{P}{2} - P - P - F_{DE} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

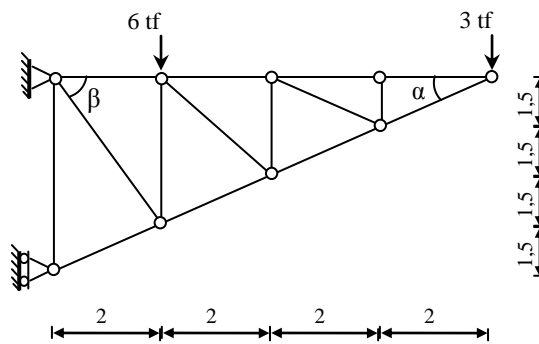
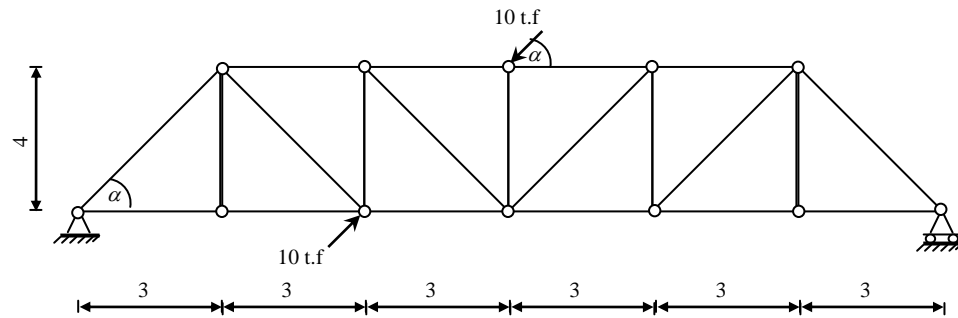
$$\Rightarrow F_{DF} = -75 \text{ t}$$

$$\Rightarrow F_{DE} = 7 \text{ t}$$

$$\Rightarrow F_{CE} = 70 \text{ t}$$

2.4.4 Exercices

1. Trouver les efforts internes dans les barres, en utilisant la méthode des nœuds.



2. Trouver les efforts internes dans les barres, en utilisant la méthode de sections

