Chapitre III

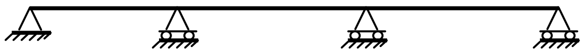
POUTRES DROITES HYPERSTATIQUES, METHODES ANALYTIQUES APPLIQUEES

3.1. **Théorème des trois moments**

3.1.1. Définition

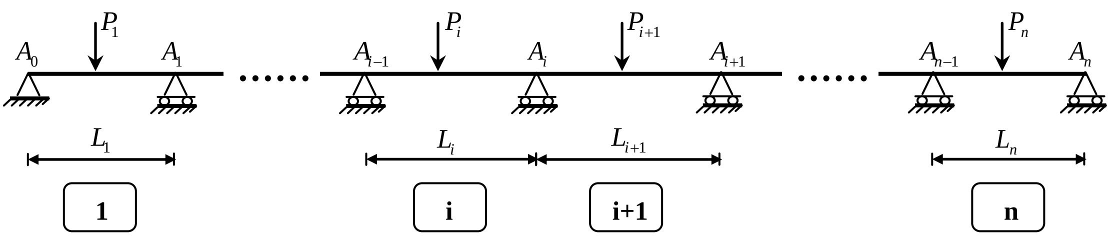
Une poutre continue est une poutre droite horizontale reposant sur plus de deux appuis simples incompressibles. La poutre est soumise à des charges verticales, les réactions exercées par les appuis sur la poutre sont verticales.

On suppose que les efforts sont nuls dans la poutre, en l'absence de charges extérieures appliquées.



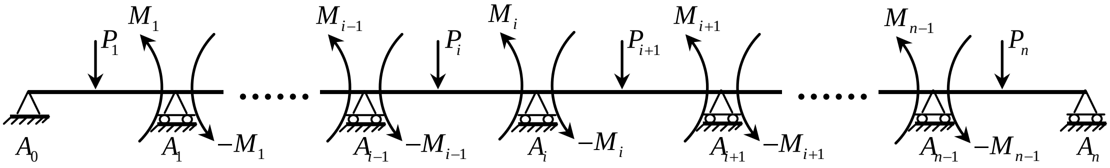
3.1.2. Notations

- Les appuis sont numérotés de 0 à n : A_0, …., A_i, ….,A_n
- Les travées sont numérotées de 1 à n.



En conséquence, il y a (n+1) réactions d'appui et l'on peut écrire deux équations de la statique, le degré d'hyperstaticité du système est donc égal à (n-1).

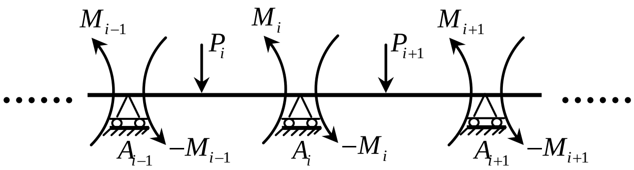
La particularité de cette méthode de résolution des poutres continues est de prendre comme inconnues hyperstatiques (n-1) moments fléchissants notés : M_1, …, M_{i-1}, M_i, M_{i+1}, …., M_{n-1}



Les valeurs de M_0 et M_n sont nulles puisque A_0 et A_n sont des appuis simples et qu'il n'ya pas de couple extérieur appliqué en ces points : $M_0 = M_n = 0$

3.1.3. Théorème des trois moments

On considère le point A_i et les deux travées adjacentes numérotées i et i+1



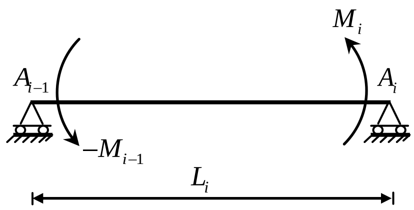
M_{i-1}, M_i , M_{i+1} sont les trois inconnus hyperstatiques concernant les deux travées considérées.

En outre, on néglige l'effet de l'effort tranchant dans les calculs qui vont suivre, et seul va intervenir ici l'effet du moment fléchissant.

On suppose que les longueurs de travées L_i sont quelconques, et à priori, EI peut varier selon la travée. Pour cette raison, EI sera indicé du même indice que la travée : $(EI)_i$

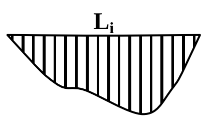
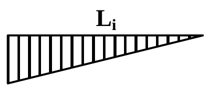
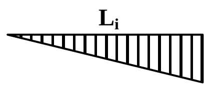
3.1.4. Mise en place du théorème

Etudions la travée de longueur L_i. On va calculer le moment fléchissant dans cette travée.
Soit, $m_i(x)$



m(x) va donc être dû :

- Aux charges extérieures,
- Au couple – M_{i-1} appliqué à gauche de la travée,
- Au couple M_i appliqué à droite de la travée.

Chargement	Diagramme	Equation
Charges extérieures		$M(x) = \mu_i(x)$
Couple – M_{i-1}		$M(x) = M_{i-1}\left(1 - \frac{x}{L_i}\right)$
Couple M_i		$M(x) = M_i \cdot \frac{x}{L_i}$

Par superposition on obtient l'expression globale de $m_i(x)$.
On a pour la travée L_i

$$m_i(x) = \mu_i(x) + M_i.\frac{x}{L_i} + M_{i-1}.\left(1-\frac{x}{L_i}\right) \quad (1)$$

Si l'on fait de même pour les travées adjacentes L_{i+1} et L_{i-1}

Travée L_{i+1} : $$m_{i+1}(x) = \mu_{i+1}(x) + M_{i+1}.\frac{x}{L_{i+1}} + M_i.\left(1-\frac{x}{L_{i+1}}\right) \quad (2)$$

Travée L_{i-1} : $$m_{i-1}(x) = \mu_{i-1}(x) + M_{i-1}.\frac{x}{L_{i+1}} + M_{i-2}.\left(1-\frac{x}{L_{i-1}}\right) \quad (3)$$

Idée de la démonstration

- On va exprimer le potentiel en fonction des variables inconnues hyperstatiques M_1, …, M_i, .., M_{n-1}

- La structure étant hyperstatique, on applique le théorème de Menabrea en privilégiant le point A_i .
- Ce théorème fournit une équation dans laquelle n'interviendront que trois inconnues hyperstatiques : $M_{i-1,}$ M_i, M_{n-1} .

C'est pour cette raison que cette méthode de résolution des poutres continues s'appelle : la méthode des trois moments.

- En appliquant cette méthode à tous les appuis intermédiaires on obtiendra autant d'équations que d'inconnues. D'où, la possibilité de calculer M_1, .., M_{n-1} , par résolution du système obtenu.

Démonstration

Pour chaque travée, le potentiel est donnée par : $$W_k = \int_0^{L_k} \frac{m_k(x)^2}{2.(EI)_k}.dx \quad (4)$$

K : Indice numérotant la travée.

Pour l'ensemble de la poutre, on aura : $$W = \sum_{k=1}^{n} W_k = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{L_k} \frac{m_k(x)^2}{2.(EI)_k}.dx \quad (5)$$

3.1.5. Application du théorème de Menabrea à la structure complète

On s'intéresse à l'appui A_i , donc à l'inconnue hyperstatique M_i

$$\frac{\partial W}{\partial M_i} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial W}{\partial M_i} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{L_k} \frac{m_k(x)}{(EI)_k}.\frac{\partial m_k(x)}{\partial M_i}.dx \quad (7)$$

- On remarque que lorsque k = i-1 , dans $m_{i-1}(x)$ n'intervient pas le terme M_i , il en sera de même pour tous les indices inférieurs à i-1.

- M_i intervient lorsque k = i , ainsi que k = i+1. Mais M_i n'intervient plus lorsque k = i+2 ;

$$m_{i+2}(x) = \mu_{i+2}(x) + M_{i+2}.\frac{x}{L_{i+2}} + M_{i+1}.\left(1 - \frac{x}{L_{i+2}}\right)$$

Il en sera de me^me pour tous les indices supérieurs k > i+2

- Si M_i n'intervient pas dans des valeurs de $m_k(x)$, cela signifie que : $\frac{\partial m_k(x)}{\partial M_i} = 0$ (8)

Dans ce cas, $\frac{\partial W}{\partial M_i}$ s'écrit finalement sous la forme de la somme de deux termes correspondant à k = i et k = i+1

D'où, $$\frac{\partial W}{\partial M_i} = \int_0^{L_i} \frac{m_i(x)}{(EI)_i}.\frac{\partial m_i(x)}{\partial M_i}.dx + \int_0^{L_{i+1}} \frac{m_{i+1}(x)}{(EI)_{i+1}}.\frac{\partial m_{i+1}(x)}{\partial M_i}.dx = 0 \quad (9)$$

D'après (1), $$\frac{\partial m_i(x)}{\partial M_i} = \frac{x}{L_i} \quad (10)$$

Et d'après (2), $$\frac{\partial m_{i+1}(x)}{\partial M_i} = 1 - \frac{x}{L_{i+1}} \quad (11)$$

Soit donc ;

$$\int_0^{L_i} \left(\mu_i(x) + M_i.\frac{x}{L_i} + M_{i-1}.\left(1 - \frac{x}{L_i}\right)\right).\frac{x}{L_i}.\frac{dx}{(EI)_i} \; +$$

$$\int_0^{L_{i+1}} \left(\mu_{i+1}(x) + M_{i+1}.\frac{x}{L_{i+1}} + M_i.\left(1 - \frac{x}{L_{i+1}}\right)\right).\left(1 - \frac{x}{L_{i+1}}\right).\frac{dx}{(EI)_{i+1}} = 0$$

Expression dans laquelle figurent les termes en M_{i-1} , M_i , M_{i+1}

- Terme en facteur de M_{i-1} : $\int_0^{L_i} \left(1 - \frac{x}{L_i}\right).\frac{x}{L_i}.\frac{dx}{(EI)_i}$

- Terme en facteur de M_i : $\int_0^{L_i} \left(\frac{x}{L_i}\right)^2.\frac{dx}{(EI)_i} + \int_0^{L_{i+1}} \left(1 - \frac{x}{L_{i+1}}\right)^2.\frac{dx}{(EI)_{i+1}}$

- Terme en facteur de M_{i+1} : $\int_0^{L_{i+1}} \left(1 - \frac{x}{L_{i+1}}\right).\frac{x}{L_{i+1}}.\frac{dx}{(EI)_{i+1}}$

On pose : $$a_i = \int_0^{L_i} \left(1 - \frac{x}{L_i}\right)^2.\frac{dx}{(EI)_i}$$

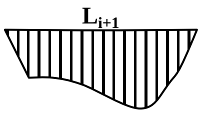
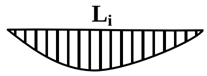
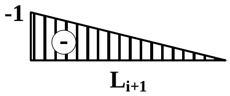
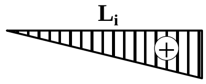
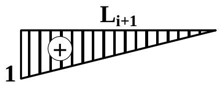
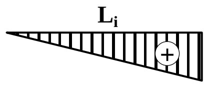
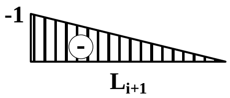
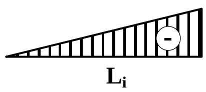
$$b_i = \int_0^{L_i} \left(1 - \frac{x}{L_i}\right).\frac{x}{L_i}.\frac{dx}{(EI)_i} \quad \text{et} \quad c_i = \int_0^{L_i} \left(\frac{x}{L_i}\right)^2.\frac{dx}{(EI)_i}$$

On obtient trois variations,

$$b_i.M_{i-1}+(a_{i+1}+c_i).M_i+b_{i+1}.M_{i+1}=\int_0^{L_{i+1}}-\mu_{i+1}(x).\left(1-\frac{x}{L_{i+1}}\right).\frac{dx}{(EI)_{i+1}}-\int_0^{L_i}\mu_i(x).\frac{x}{L_i}.\frac{dx}{(EI)_i}\;\ldots\ldots\ldots\;(1)$$

$$b_i.M_{i-1}+(a_{i+1}+c_i).M_i+b_{i+1}.M_{i+1}=-\int_0^{L_{i+1}}\mu_{i+1}(x).\left(1-\frac{x}{L_{i+1}}\right).\frac{dx}{(EI)_{i+1}}-\int_0^{L_i}\mu_i(x).\frac{x}{L_i}.\frac{dx}{(EI)_i}\;\ldots\ldots..\;(2)$$

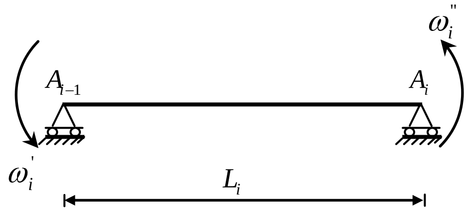
$$b_i.M_{i-1}+(a_{i+1}+c_i).M_i+b_{i+1}.M_{i+1}=\int_0^{L_{i+1}}-\mu_{i+1}(x).\left(1-\frac{x}{L_{i+1}}\right).\frac{dx}{(EI)_{i+1}}+\int_0^{L_i}-\mu_i(x).\frac{x}{L_i}.\frac{dx}{(EI)_i}\;\ldots\ldots..\;(3)$$

<table>
<tr><td colspan="3">ω'_{i+1} : rotation de gauche</td><td colspan="2">ω''_i : rotation de droite</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diagramme</td><td>Equation</td><td>Diagramme</td><td>Equation</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>$M(x)=\mu_{i+1}(x)$</td><td></td><td>$M(x)=\mu_i(x)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(1)</td><td></td><td></td><td colspan="2" rowspan="2">$b_i.M_{i-1}+(a_{i+1}+c_i).M_i+b_{i+1}.M_{i+1}=\omega'_{i+1}-\omega''_i$</td></tr>
<tr><td>$M(x)=-\left(1-\frac{x}{L_{i+1}}\right)$</td><td>$M(x)=\frac{x}{L_i}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td></td><td></td><td colspan="2" rowspan="2">$b_i.M_{i-1}+(a_{i+1}+c_i).M_i+b_{i+1}.M_{i+1}=-\omega'_{i+1}-\omega''_i$</td></tr>
<tr><td>$M(x)=\left(1-\frac{x}{L_{i+1}}\right)$</td><td>$M(x)=\frac{x}{L_i}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(3)</td><td></td><td></td><td colspan="2" rowspan="2">$b_i.M_{i-1}+(a_{i+1}+c_i).M_i+b_{i+1}.M_{i+1}=\omega'_{i+1}+\omega''_i$</td></tr>
<tr><td>$M(x)=-\left(1-\frac{x}{L_{i+1}}\right)$</td><td>$M(x)=-\frac{x}{L_i}$</td></tr>
</table>

Cette formule est appelée équation de **Clapeyron** ou équation des trois moments.
Le terme de gauche est par rapport aux appuis, celui de droite est par rapport aux travées.

ω'_{i+1} : C'est la rotation à gauche de la travée de longueur L_{i+1} supposée isostatique (Sur deux appuis) et soumise au même chargement extérieur que celui qu'elle supporte dans la structure réelle.

ω''_i : C'est la rotation à droite de la travée de longueur L_i supposée isostatique (Sur deux appuis) et soumise au même chargement extérieur que celui qu'elle supporte dans la structure réelle.



Cas particulier : Très fréquemment, on rencontre en calcul de structure le cas des poutres à inertie constante.

Dans ce cas : $a_i = 2.b_i = c_i = \dfrac{L_i}{3.(EI)_i}$ (à suivre)

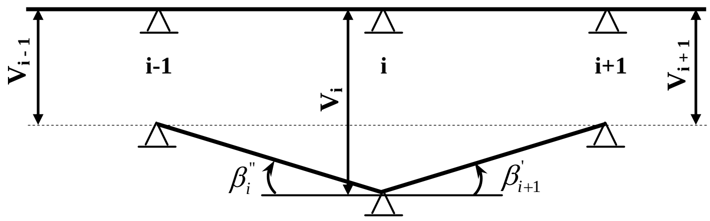
3.1.6. Cas des appuis déplaçables : (Tassement)

L'équation des trois moments s'écrit :

$$b_i.M_{i-1} + (a_{i+1} + c_i).M_i + b_{i+1}.M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i + \beta'_{i+1} - \beta''_i$$

Où, $tg(\beta''_i) = \beta''_i = \dfrac{V_i - V_{i-1}}{L_i}$

Et $\beta'_{i+1} = \dfrac{V_i - V_{i+1}}{L_{i+1}}$



Suite du cas particulier : $a_{i+1} = 2.b_{i+1} = c_{i+1} = \dfrac{L_{i+1}}{3.(EI)_{i+1}}$

$$\frac{L_i}{6.EI_i}.M_{i-1} + \left(\frac{L_i}{3.EI_i} + \frac{L_{i+1}}{3.EI_{i+1}}\right).M_i + \frac{L_{i+1}}{6.EI_{i+1}}.M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i + \beta'_{i+1} - \beta''_i$$

$I_i = I_{i+1} = ... = I$ d'où :

$$\frac{L_i}{6.EI}.M_{i-1} + \left(\frac{L_i}{3.EI} + \frac{L_{i+1}}{3.EI}\right).M_i + \frac{L_{i+1}}{6.EI}.M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i + \beta'_{i+1} - \beta''_i$$

$$L_i.M_{i-1} + 2.(L_i + L_{i+1}).M_i + L_{i+1}.M_{i+1} = 6.EI.(\omega'_{i+1} - \omega''_i + \beta'_{i+1} - \beta''_i)$$

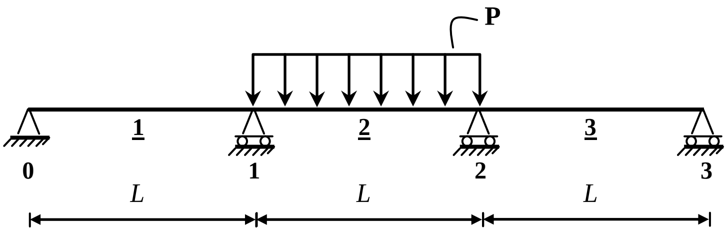
Si en outre, $L_i = L_{i+1} = ... = L$ (Travées égales).

$$M_{i-1} + 4.M_i + M_{i+1} = \frac{6.EI}{L}.(\omega'_{i+1} - \omega''_i + \beta'_{i+1} - \beta''_i)$$

3.1.7. Exemples d'application

Exemple 1

Trouver les valeurs de M_1 et M_2 pour la poutre représentée ci-dessous.



Solution

On note que $M_0 = M_3 = 0$

Il suffit d'écrire deux équations correspondant aux appuis 1 et 2, comme suit :

Appui i = 0

$$\cancel{b_0.M_{-1}} + (a_1 + \cancel{c_0}).M_0 + b_1.M_1 = \omega'_1 - \omega''_0$$

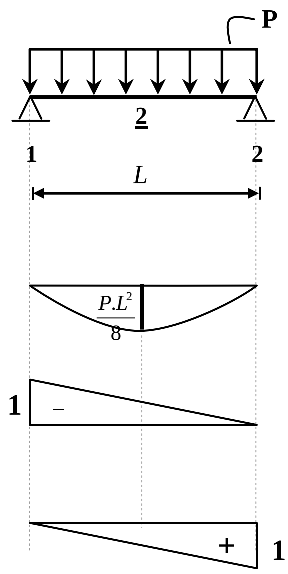
Et puisque la travée est non chargée, on a : $b_1.M_1 = \omega'_1 = 0$

Appui i = 1

$$\cancel{b_1.M_0}^{0} + (a_2 + c_1).M_1 + b_2.M_2 = \omega'_2 \cancel{-\omega''_1}^{0}$$

Appui i = 2

$$b_2.M_1 + (a_3 + c_2).M_2 + \cancel{b_3.M_3}^{0} = \cancel{\omega'_3}^{0} - \omega''_2$$



Donc : $\begin{cases} (a_2 + c_1).M_1 + \quad b_2.M_2 = +\omega'_2 \\ b_2.M_1 + (a_3 + c_2).M_2 = -\omega''_2 \end{cases}$

$$a_i = 2.b_i = c_i = \frac{L_i}{3.(EI)_i}$$

$$c_1 = \frac{L}{3.EI} \quad ; \quad a_2 = \frac{L}{3.EI} \;;\; b_2 = \frac{L}{6.EI} \;;\; c_2 = a_3 = \frac{L}{3.EI}$$

Calcul des rotations

$$\omega'_2 = 2.\frac{2}{3}.\frac{L}{2}.P\frac{L^2}{8}.\left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{-\frac{P.L^3}{24.EI}}$$

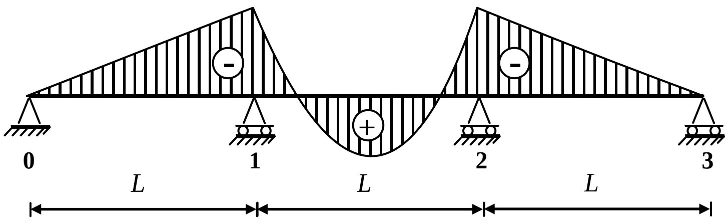
Et de même :

$$\boxed{\omega_2'' = +\frac{P.L^3}{24.EI}}$$

Le système d'équations est :

$$\begin{cases} \dfrac{2.L}{3.EI}.M_1 + \dfrac{L}{6.EI}.M_2 = -\dfrac{P.L^3}{24.EI} \\ \dfrac{L}{6.EI}.M_1 + \dfrac{2.L}{3.EI}.M_2 = -\dfrac{P.L^3}{24.EI} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4.M_1 + \quad M_2 = -\dfrac{P.L^2}{4} \\ M_1 + 4.M_2 = -\dfrac{P.L^2}{4} \end{cases}$$



M

Alors, $\boxed{M_1 = M_2 = -\dfrac{P.L^2}{20}}$

Exemple 2

Trouver la valeur du moment M_1, pour la poutre continue, Figure1, représentée ci-dessous Puis, extraire les valeurs de M et T pour la figure 2.

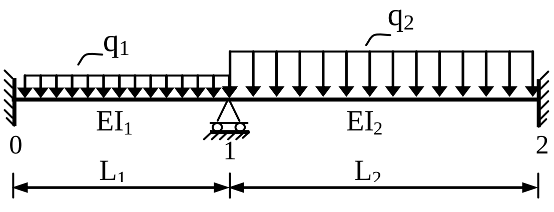


Figure 1.

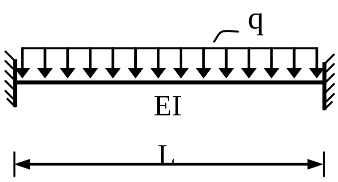
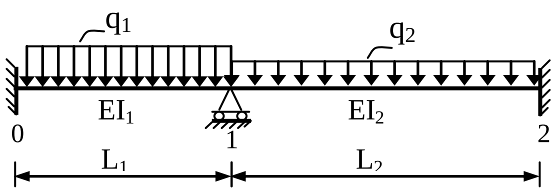


Figure 2.

Solution



$$b_i.M_{i-1} + M_i.(a_{i+1} + c_i) + b_{i+1}.M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i$$

$$i = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0.\cancel{M_{-1}} + M_0.(a_1 + \cancel{c_0}) + b_1.M_1 = \omega'_1 - \cancel{\omega''_0}$$

$$i = 1 \quad \Rightarrow \quad b_1.M_0 + M_1.(a_2 + c_1) + b_2.M_2 = \omega'_2 - \omega''_1$$

$$i = 2 \quad \Rightarrow \quad b_2.M_1 + M_2.(\cancel{a_3} + c_2) + \cancel{b_3.M_3} = \cancel{\omega'_3} - \omega''_2$$

$$\begin{cases} \dfrac{L_1}{3.EI_1}.M_0 + \dfrac{L_1}{6.EI_1}.M_1 = -\dfrac{q_1.L_1^3}{24.EI_1} \\ \dfrac{L_1}{6.EI_1}.M_0 + \left(\dfrac{L_2}{3.EI_2}+\dfrac{L_1}{3.EI_1}\right).M_1 + \dfrac{L_2}{6.EI_2}.M_2 = -\dfrac{q_2.L_2^3}{24.EI_2} - \dfrac{q_1.L_1^3}{24.EI_1} \\ \left(\dfrac{L_2}{6.EI_2}\right).M_1 + \dfrac{L_2}{3.EI_2}.M_2 = -\dfrac{q_2.L_2^3}{24.EI_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_0 + \dfrac{1}{2}.M_1 = -\dfrac{q_1.L_1^2}{8} & \text{................ (1)} \\ \dfrac{L_1}{2.I_1}.M_0 + \left(\dfrac{L_1}{I_1}+\dfrac{L_2}{I_2}\right).M_1 + \dfrac{L_2}{2.I_2}.M_2 = -\dfrac{q_2.L_2^3}{8.I_2} - \dfrac{q_1.L_1^3}{8.I_1} & \text{................ (2)} \\ 1 + \dfrac{1}{2}.M_1 + M_2 = -\dfrac{q_2.L_2^2}{8.I_2} & \text{................ (3)} \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow M_0 = -\frac{q_1.L_1^2}{8} - \frac{M_1}{2}$$

$$(3) \Rightarrow M_2 = -\frac{q_2.L_2^2}{8} - \frac{M_1}{2}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{L_1}{2.I_1}\left(-\frac{q_1.L_1^2}{8} - \frac{M_1}{2}\right) + \left(\frac{L_1}{I_1}+\frac{L_2}{I_2}\right).M_1 + \frac{L_2}{2.I_2}\left(-\frac{q_2.L_2^2}{8} - \frac{M_1}{2}\right) = -\frac{q_2.L_2^3}{8.I_2} - \cancel{\frac{q_1.L_1^3}{8.I_1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_1 = -\frac{\dfrac{q_1.L_1^3}{4.I_1}+\dfrac{q_2.L_2^3}{4.I_2}}{\dfrac{3.L_1}{I_1}+\dfrac{3.L_2}{I_2}}} \qquad (3)$$

Afin d'obtenir l'exemple de la figure 2, on doit supposer que l'exemple de la figure 1 est symétrique (C'est-à-dire que toutes les caractéristiques mécaniques et géométriques de deux travées sont égaux.

$$q_1 = q_2 = q$$
$$L_1 = L_2 = L$$
$$I_1 = I_2 = I$$

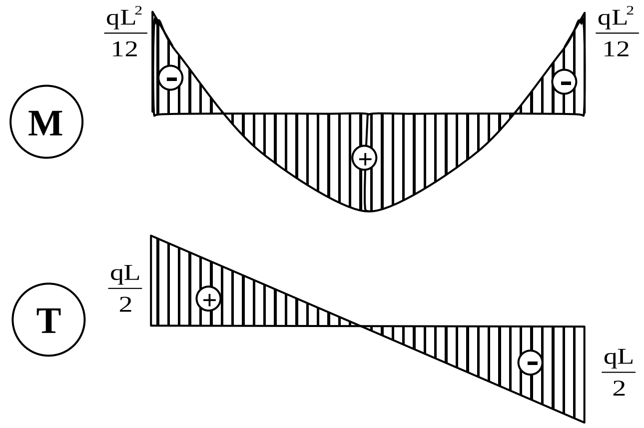
On remplace ces valeurs dans la relation (3), on trouve :

$$M_1 = -\frac{\dfrac{q\ .L^3}{4.I}+\dfrac{q\ .L^3}{4.I}}{\dfrac{3.L}{I}+\dfrac{3.L}{I}} = -q.\frac{L^2}{12}$$

Tant que l'exemple de la figure 1 est symétrique, on peut écrire:

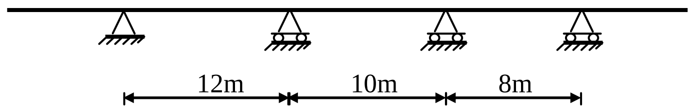
$$M(x) = \left(q.\frac{L}{2}x - q.\frac{x^2}{2}\right) + \left(-q.\frac{L^2}{12}\right).\left(1 - \frac{x}{L}\right) + \left(-q.\frac{L^2}{12}\right).\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$T(x) = q.\frac{L}{2} - q.x \qquad \begin{cases} T(0) = q.\dfrac{L}{2} \\ T(L) = -q.\dfrac{L}{2} \end{cases}$$

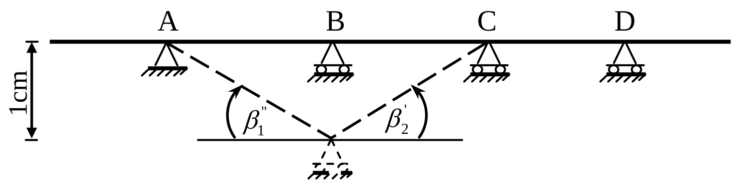


Exemple 3

Tracer le diagramme de M pour la poutre continue mentionnée ci-dessous, en tenant compte que l'appui B a subit un affaissement de 1 cm.



Solution



$$\beta_1^{''} = \frac{0,01}{12} = 0,00083$$

$$\beta_2^{'} = -\beta_2^{''} = -\frac{0,01}{10} = -0,001$$

$$b_i.M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}).M_i + b_{i+1}.M_{i+1} = \omega_{i+1}^{'} - \omega_i^{''} + \beta_{i+1}^{'} + \beta_i^{''}$$

N.B.

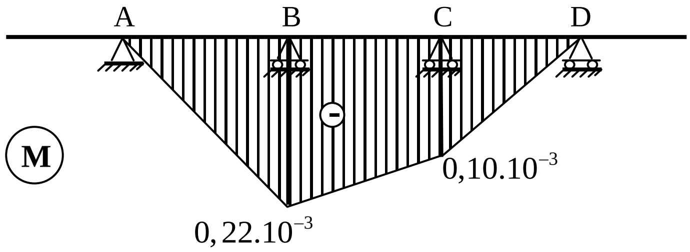
Dans le cas d'une travée non chargée ; $\Rightarrow \omega_{i+1}^{'} = \omega_i^{''} = 0$

$$i=1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{12}{3}+\frac{10}{3}\right).M_1+\frac{10}{6}.M_2=-0,001-0,00083$$

$$i=2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{10}{6}\right).M_1+\left(\frac{10}{3}+\frac{8}{3}\right).M_2=-0,001$$

$$\Rightarrow \quad M_1=-0,02259.10^{-2}$$

$$M_2=-0,01039.10^{-2}$$



Exemple 4

Trouver la valeur du moment M_1, pour la poutre continue, Figure 1, représentée ci-dessous Puis, extraire les valeurs de M et T pour l'exemple de la figure 2.

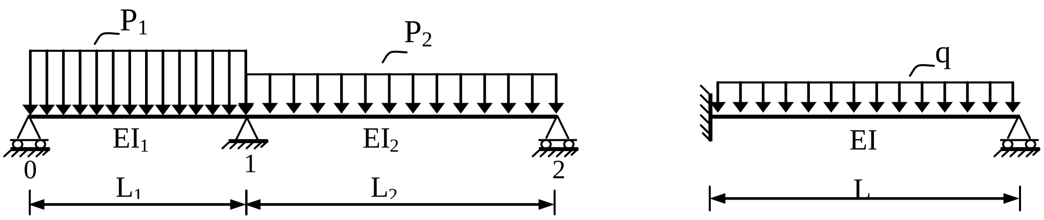
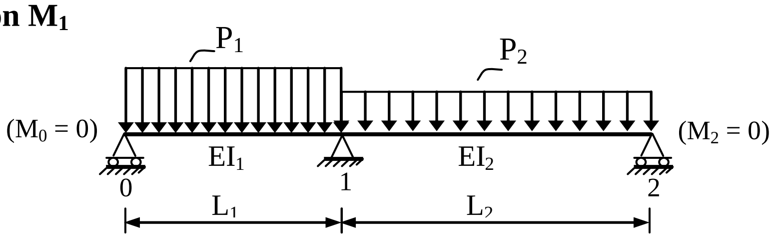


Figure 1 **Figure 2**

Solution

Moment de flexion M_1



Méthode de trois moments

$$b_i.M_{i-1}+M_i.(a_{i+1}+c_i)+b_{i+1}.M_{i+1}=\omega'_{i+1}-\omega''_i$$

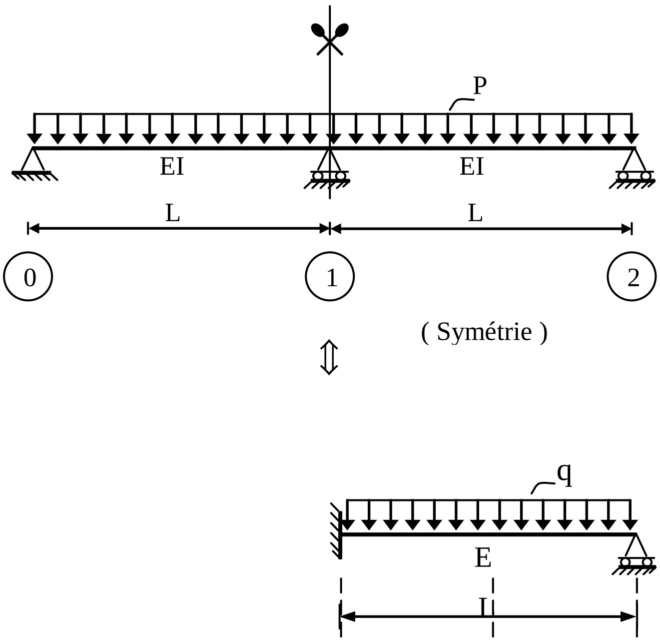
$$i=1 \quad \Rightarrow \quad \cancel{b_1.M_0}+M_1(a_2+c_1)+\cancel{b_2.M_2}=\omega'_2-\omega''_1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_1=\frac{\omega'_2-\omega''_1}{a_2+c_1}}$$

$$\omega_2^{'} = +\frac{P_2.L_2^3}{24.EI_2} \quad ; \quad \omega_1^{''} = -\frac{P_1.L_1^3}{24.EI_1} \quad ; c_1 = \frac{L_1}{3.EI_1} \quad ; \quad a_2 = \frac{L_2}{3.EI_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_1 = \frac{-\frac{P_2.L_2^3}{I_2} - \frac{P_1.L_1^3}{I_1}}{8.\left(\frac{L_2}{I_2} + \frac{L_1}{I_1}\right)}} \qquad \Rightarrow M_1 = \frac{\frac{P.L^3}{8.I} + \frac{P.L^3}{8.I}}{\frac{L}{I} + \frac{L}{I}} = -\frac{P.L^2}{8}$$

Valeur de M et T



$$\begin{cases} P_1 = P_2 = P \\ L_1 = L_2 = L \qquad \text{........................ (*)} \\ I_1 = I_2 = I \end{cases}$$

$$(*) \quad \Rightarrow \quad M_1 = -\left(\frac{\frac{P.L^3}{I} + \frac{P.L^3}{I}}{8.\left(\frac{L}{I} + \frac{L}{I}\right)} \right) = \frac{-PL^2}{8}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_1 = \frac{-PL^2}{8}}$$

$$M(x) = \left(\frac{PL}{2}.x - P.\frac{x^2}{2}\right) - \frac{PL^2}{8}.\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

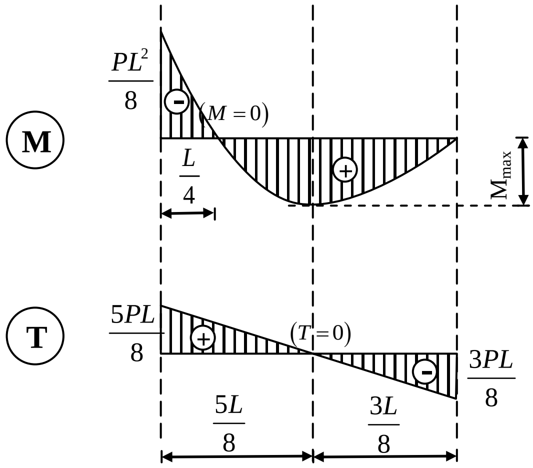
$$T(x) = \frac{PL}{2} - P.x + \frac{PL}{8}$$

pour $(T = 0) \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{5L}{8}$

$$\Rightarrow M_{\max} = M\left(\frac{5L}{8}\right) = \frac{9.PL^2}{128}$$

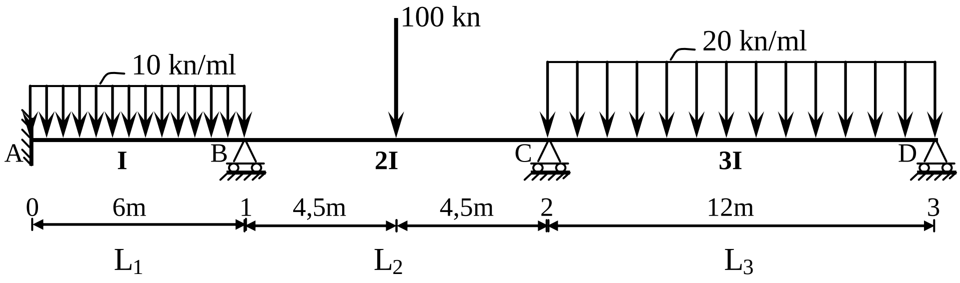
$$(M = 0) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{4}$$

$$\Rightarrow T\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{3.PL}{8}$$



Exemple 5

A l'aide des équations de 3 moments, trouver les éléments de réduction de la poutre ABCD.



Solution

$$b_i.M_{i-1} + (a_{i+1} + c_i).M_i + b_{i+1}.M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i$$

Appui i = 0

$$b_0.M_{-1} + (a_1 + c_0).M_0 + b_1.M_1 = \omega'_1 - \omega''_0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \; a_1.M_0 + b_1.M_1 = \omega'_1$$

Appui i = 1

$$b_1.M_0 + (a_2 + c_1).M_1 + b_2.M_2 = \omega'_2 - \omega''_1 \quad (2)$$

Appui i = 2

$$b_2.M_1 + (a_3 + c_2).M_2 + b_3.M_3 = \omega'_3 - \omega''_2 \quad (3)$$

$$a_i = 2.b_i = c_i = \frac{L_i}{3.(EI)_i}$$

$$a_1 = \frac{L_1}{3.EI_1} \; ; \quad a_2 = \frac{L_2}{3.EI_2} \; ; \; a_3 = \frac{L_3}{3.EI_3} \; ;$$

$$b_1 = \frac{L_1}{6.EI_1} \; ; \quad b_2 = \frac{L_2}{6.EI_2} \; ; \; b_3 = \frac{L_3}{6.EI_3} \; ;$$

$$c_1 = \frac{L_1}{3.EI_1} \; ; \quad c_2 = \frac{L_2}{3.EI_2} \; ; \; c_0 = 0 \quad \text{car } L_0 = 0$$

$L_1 = 6$ m , $L_2 = 9$ m , $L_3 = 12$ m

Alors,

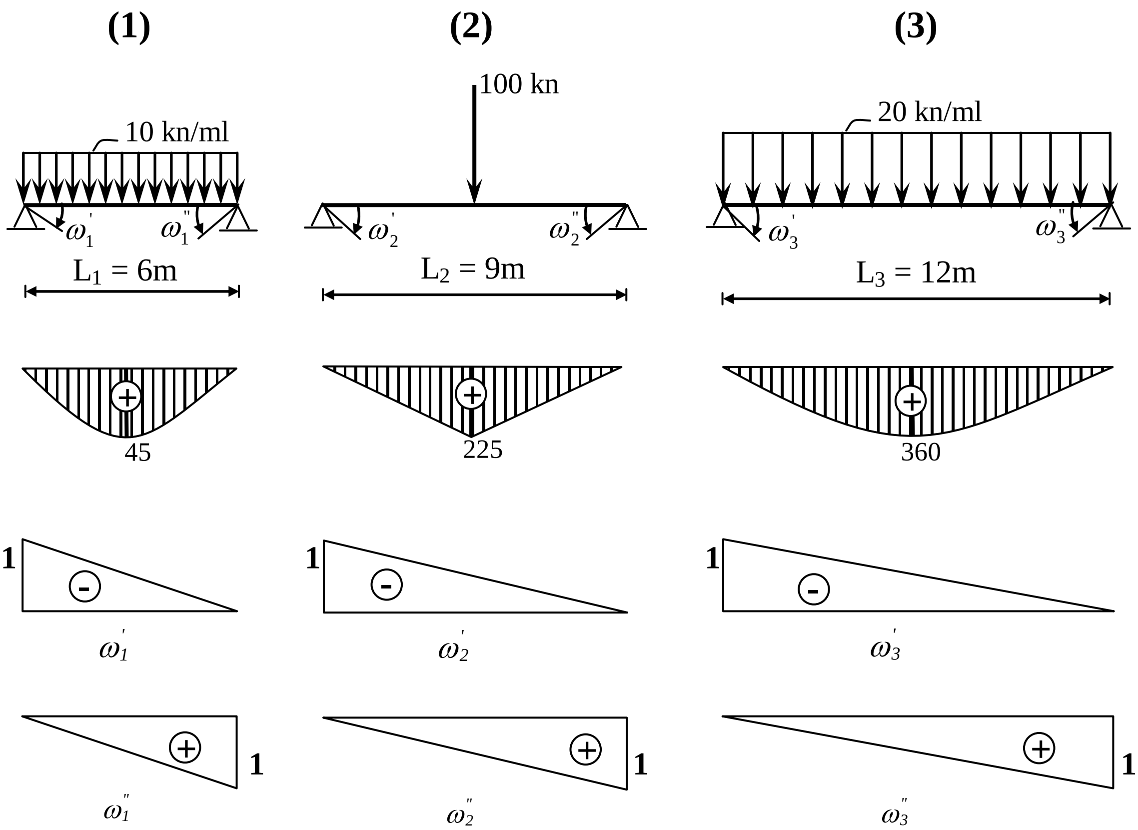
$$a_1 = \frac{2}{EI_1} \; ; \quad a_2 = \frac{3}{2.EI_2} \; ; \; a_3 = \frac{4}{3.EI_3} \; ;$$

$$b_1 = \frac{1}{EI_1} \; ; \quad b_2 = \frac{3}{4.EI_2} \; ; \; b_3 = \frac{2}{3.EI_3} \; ;$$

$$c_1 = \frac{2}{EI_1} \; ; \quad c_2 = \frac{3}{2.EI_2} \; ;$$

Calcul de rotation ω

Pour évaluer les valeurs des rotations, on peut utiliser l'une des méthodes analytiques précédentes (Verechtchaguine, ... etc.).



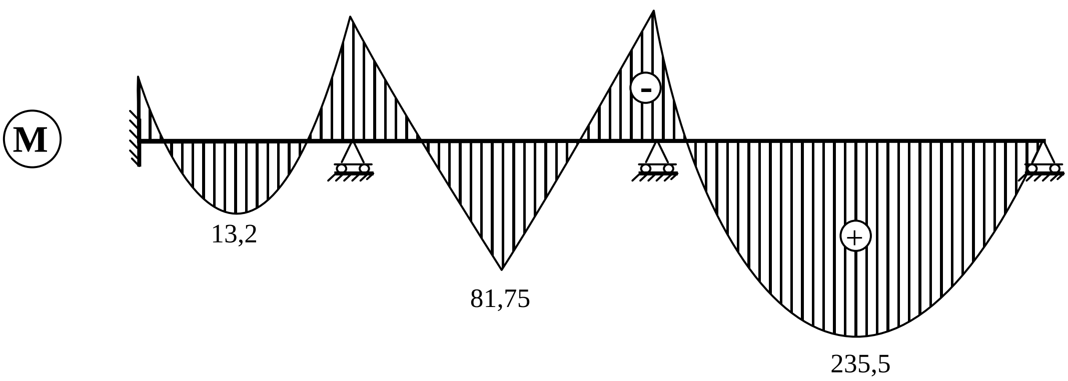
$$\omega_1' = -\frac{90}{EI} \qquad \omega_2' = -\frac{506,25}{2.EI} \qquad \omega_3' = -\frac{1440}{3.EI}$$

$$\omega_1'' = \frac{90}{EI} \qquad \omega_2'' = \frac{506,25}{2.EI} \qquad \omega_3'' = \frac{1440}{3.EI}$$

Alors,

- Cas (1) : $\dfrac{2}{EI}.M_0 + \dfrac{1}{EI}.M_1 = -\dfrac{90}{EI} \quad \Rightarrow \quad 2.M_0 + M_1 = -90$
- Cas (2) : $\dfrac{1}{EI}.M_0 + \dfrac{7}{2.EI}.M_1 + \dfrac{3}{4.EI}.M_2 = -\dfrac{90}{EI} - \dfrac{506,25}{2.EI} \quad \Rightarrow \quad M_0 + \dfrac{7}{2}M_1 + \dfrac{3}{4}M_2 = -343,125$
- Cas (3) : $\dfrac{3}{4.EI}.M_1 + \dfrac{17}{6.EI}.M_2 = -\dfrac{506,25}{2.EI} - \dfrac{1440}{3.EI} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3}{4}.M_1 + \dfrac{17}{6}M_2 = -733,125$

$$\begin{cases} 2.M_0 + M_1 = -90 \\ 4.M_0 + 14.M_1 + 3.M_2 = -1372,5 \\ 0,75.M_1 + 2,83.M_2 = -733,125 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_0 = -26,4 \quad \text{kn.m} \\ M_1 = -37,2 \quad \text{kn.m} \\ M_2 = -249 \quad \text{kn.m} \end{cases}$$



Efforts tranchants

$$M\left(x\right)=\mu\left(x\right)+M_0.\left(1-\frac{x}{l}\right)+M_1.\frac{x}{l}$$

$$T\left(x\right)=\frac{d\mu\left(x\right)}{dx}+\frac{M_1-M_0}{l}$$

$$T\left(x\right)=\pm\ T_{\text{iso}}+\frac{M_d-M_g}{l}$$

$$T_{01}=\quad\frac{P.l}{2}+\frac{-37,2-(-37,2)}{6}=\quad 28,2\ \ \text{kn}$$

$$T_{10}=-\frac{P.l}{2}+\frac{-37,2-(-37,2)}{6}=-31,8\quad\text{kn}$$

$$T_{12}=\quad\frac{P}{2}+\frac{-249-(-37,2)}{9}\quad=\quad 26,5\quad\text{kn}$$

$$T_{21}=-\frac{P}{2}+\frac{-249-(-37,2)}{9}\quad=-73,5\quad\text{kn}$$

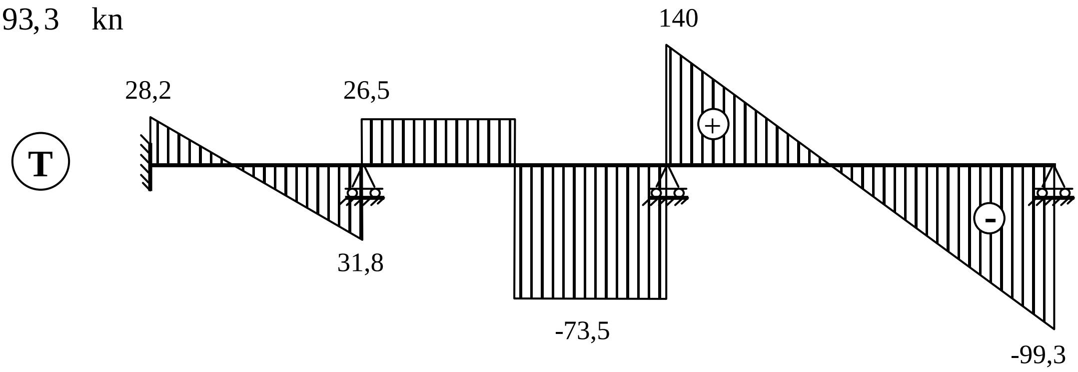
Réactions d'appuis

$R_0=28,2$ kn

$R_1=58,3$ kn

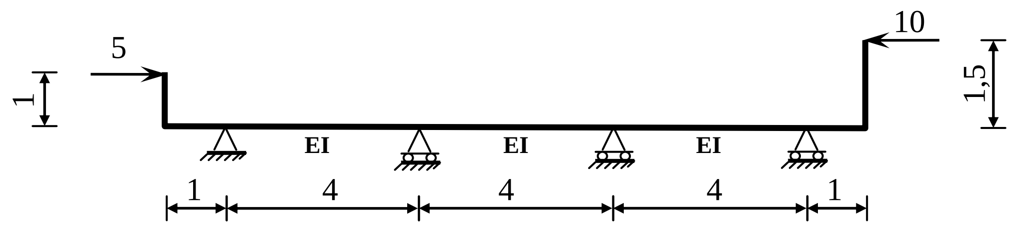
$R_2=213,5$ kn

$R_3=93,3$ kn



Exemple 6

Tracer le diagramme de M pour la poutre continue représentée à la figure ci-dessous.



Solution

$$b_i.M_{i-1} + (a_{i+1} + c_i).M_i + b_{i+1}.M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i$$

Appui i = 1 $\quad b_1.M_0 + (a_2 + c_1).M_1 + b_2.M_2 = \omega'_2 - \omega''_1$

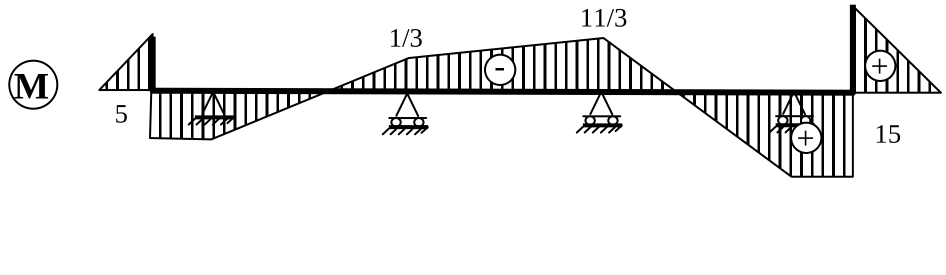
Appui i = 2 $\quad b_2.M_1 + (a_3 + c_2).M_2 + b_3.M_3 = \omega'_3 - \omega''_2$

Travée non chargée $\Rightarrow$ $\omega'_2 = \omega'_3 = \omega''_1 = \omega''_2 = 0$

$$a_i = 2.b_i = c_i = \frac{L_i}{3.(EI)_i}$$

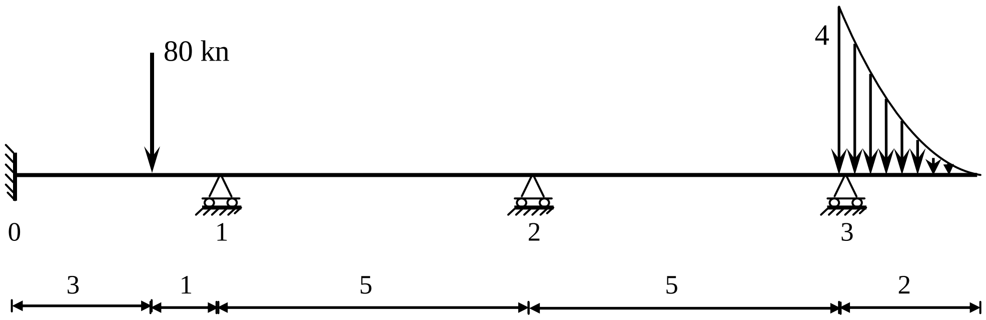
$$b_1 = b_2 = b_3 = \frac{4}{6.EI} \quad , \quad a_1 = c_2 = c_3 = a_3 = \frac{4}{3.EI}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(5) + \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right).M_1 + \frac{2}{3}.M_2 = 0 \\ \frac{2}{3}.M_1 + \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right).M_2 + \frac{2}{3}.(15) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1 = -\frac{1}{3} \\ M_2 = -\frac{11}{3} \end{cases}$$



Exemple 7

Tracer les diagrammes de M et T pour la poutre continue représentée à la figure ci-dessous.



Solution

$$b_i.M_{i-1} + M_i.(a_{i+1} + c_i) + b_{i+1}.M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i$$

$$i = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0.\cancel{M_{-1}} + M_0.(a_1 + \cancel{c_0}) + b_1.M_1 = \omega'_1 - \cancel{\omega''_0}$$

$$i = 1 \quad \Rightarrow \quad b_1.M_0 + M_1.(a_2 + c_1) + b_2.M_2 = \cancel{\omega'_2} - \omega''_1$$

$$i = 2 \quad \Rightarrow \quad b_2.M_1 + M_2.(\cancel{a_3} + c_2) + \cancel{b_3.M_3} = \cancel{\omega'_3} - \cancel{\omega''_2}$$

$$a_i = 2.b_i = c_i = \frac{L_i}{3.(EI)_i}$$

$$a_1 = c_1 = \frac{4}{3.EI} \quad ; \quad b_1 = \frac{4}{6.EI} = \frac{2}{3.EI}$$

$$a_2 = c_2 = \frac{5}{3.EI} \quad ; \quad b_2 = \frac{5}{6.EI}$$

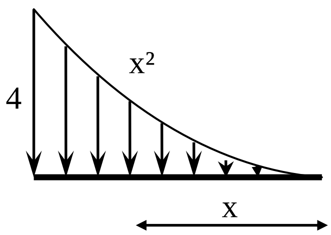
$$a_3 = c_3 = \frac{5}{3.EI} \quad ; \quad b_3 = \frac{5}{6.EI}$$

$$\omega'_1 = -\frac{p.a}{6.EI.L}.(L-a)(2L-a) = -\frac{80.3}{6.EI.4}(4-3)(2.4-3) = -\frac{50}{EI}$$

$$\omega''_1 = \frac{p.a}{6.EI.L}.(L-a)(L+a) = \frac{80.3}{6.EI.4}(4-3)(4+3) = \frac{70}{EI}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}.M_0 + \frac{2}{3}.M_1 = -50 \\ \frac{2}{3}.M_0 + \left(\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\right).M_1 + \frac{5}{3}.M_2 = -70 \\ \frac{5}{6}.M_1 + \left(\frac{5}{3}+\frac{5}{3}\right).M_2 + \frac{5}{6}.\left(-\frac{4}{3}\right).M_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_0 = -28,290 \\ M_1 = -18,418 \\ M_2 = \quad 4,934 \\ M_3 = -1,33 \end{cases}$$



$$M(x) = \frac{1}{2}x^2.x.\frac{1}{4}.x = -\frac{x^4}{12}$$

$$T(x) = \frac{x^3}{3}\begin{cases} T(0) = 0 \\ T(2) = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Travée 0 – 1

$0 \le x \le 3$

$$M(x) = \frac{80.1}{4}.x - 28,29.\left(1 - \frac{x}{4}\right) - 18,418.\frac{x}{4}$$

$$M(3) = 39,114$$

$$T(x) = 20 + \frac{28,29}{4} - \frac{18,418}{4} = 22,468$$

$3 \le x \le 4$

$$M(x) = \frac{80}{4}.x - 80.(x-3) - 28,418.\frac{x}{4}$$

$$T(x) = 20 - 80 + \frac{28,29}{4} - \frac{18,418}{4} = -57,532$$

Travée 1 – 2

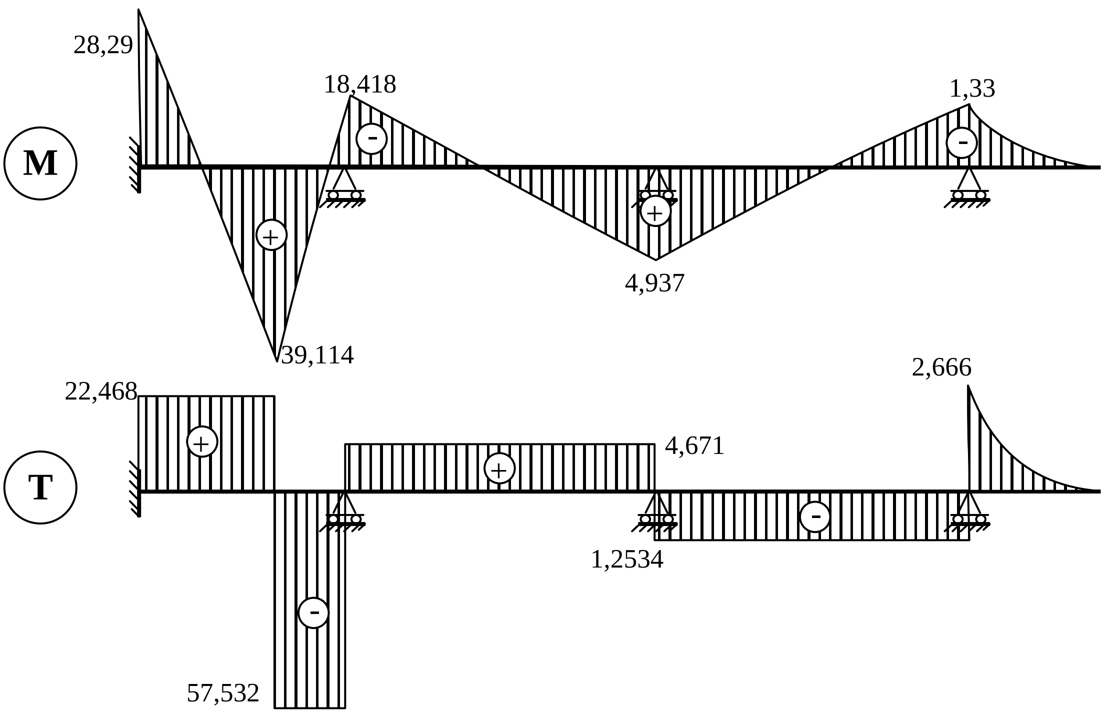
$0 \le x \le 5$

$$T(x) = \frac{18,418}{5} + \frac{4,937}{5} = 4,671$$

Travée 2 – 3

$0 \le x \le 5$

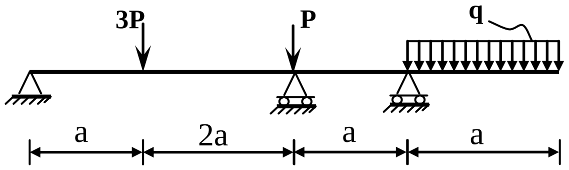
$$T(x) = -\frac{1,33}{5} - \frac{4,937}{5} = -1,2534$$



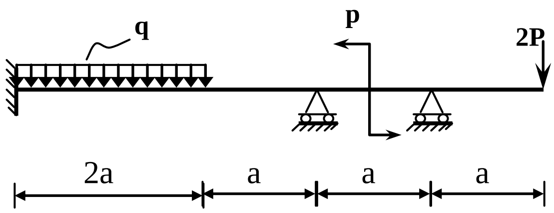
3.1.8. Exercices

Tracer le diagramme de M et T .

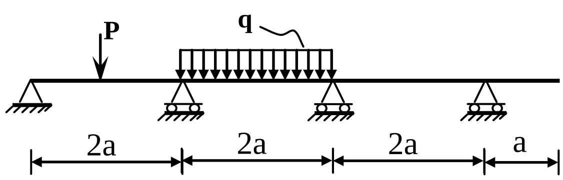
1



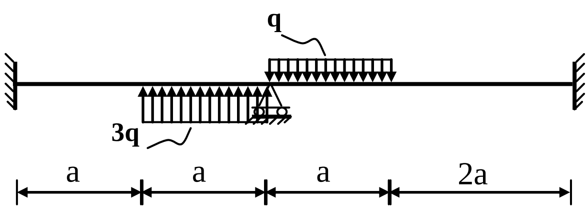
2



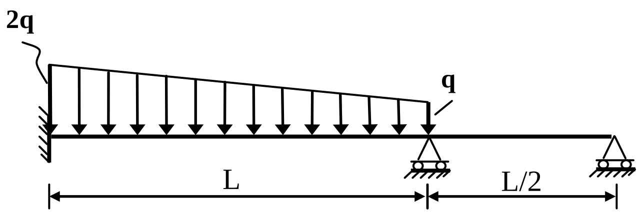
3



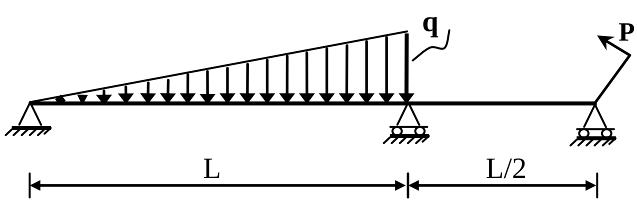
4



5



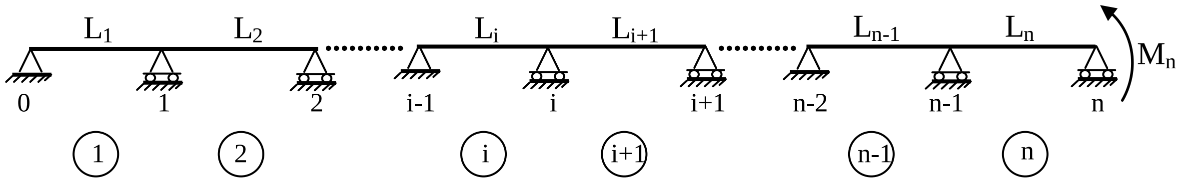
6



3.2. Méthode des Foyers

3.2.1. Hypothèses

1. Toutes les travées sont non chargées, on écrit : $\Rightarrow \omega_i^{'} = \omega_i^{''} = 0$
2. Tout déplacement d'appui est non admissible.
3. Le dernier appui (n) est chargé par un moment extérieur Mn.



Pour l'appui,

i = 1 : $\left(c_1 + a_2\right).M_1 + b_2.M_2 = 0$ (1)

i = 2 : $b_2.M_1 + \left(c_2 + a_3\right).M_2 + b_3.M_3 = 0$ (2)

i $b_i M_{i-1} + \left(c_i + a_{i+1}\right) M_i + b_{i+1}.M_{i+1} = 0$

n – 1 $b_{n-1} M_{n-2} + \left(c_{n-1} + a_n\right) M_{n-1} + b_n.M_n = 0$

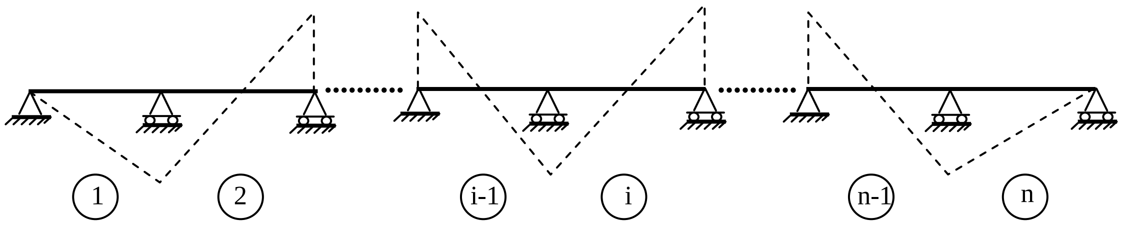
On pose, $\phi_i = -\dfrac{M_{i-1}}{M_i}$ d'où, $\phi_2 = -\dfrac{M_1}{M_2}$

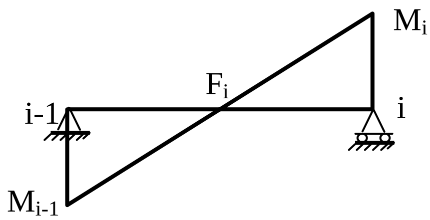
(1) $\Rightarrow \left(c_1 + a_2\right).\cancel{M_1} - \dfrac{\cancel{M_1}}{\phi_2} b_2 = 0 \Rightarrow \phi_2 = \dfrac{b_2}{\left(c_1 + a_2\right)}$

(2) $\Rightarrow b_2.\cancel{M_1} + \left(c_2 + a_3\right)\left(-\dfrac{\cancel{M_1}}{\phi_2}\right) + b_3\left(-\dfrac{\cancel{M_2}}{\phi_3}\right) = 0$

d'où, $\phi_3 = \dfrac{b_3}{c_2 + a_3 - b_2 \phi_2}$ …………………………………..……. $\boxed{\phi_i = \dfrac{b_i}{c_{i-1} + a_i - b_{i-1}\phi_{i-1}}}$

Après application d'un moment extérieur Mn, sur l'appui extrême droit de la poutre continue, le diagramme des moments de flexion pour chaque travée aura l'allure d'une droite ; la travée étant non chargée $\left(\mu(x) = 0\right)$.





On isole la travée (i)
On définit le point Fi , c'est la Foyer gauche. Il s'agit du point de moment nul.

$$\phi_i = -\frac{M_{i-1}}{M_i} = \frac{\overline{G_{i-1}.F_i}}{\overline{F_i.G_i}} \qquad \phi > 0$$

Les Foyers droits : de façon analogue, ici on applique le moment extérieur M_0 à l'extrémité gauche.

$$n-1 \qquad \Rightarrow b_{n-1}.M_{n-2} + (c_{n-1} + a_n) M_{n-1} = 0 \qquad (3)$$
$$n-2 \qquad \Rightarrow b_{n-2}.M_{n-3} + (c_{n-2} + a_{n-1}) M_{n-2} + b_{n-1}.M_{n-1} = 0$$
.
.
.
$$i \qquad \Rightarrow b_i.M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1}.M_{i+1} = 0$$

On pose : $\phi_i^{'} = -\frac{M_i}{M_{i-1}} = \frac{\overline{F_i^{'}.G_i}}{\overline{G_{i-1}.F_i^{'}}}$ d'où, $\phi_n^{'} = 0$

De (3) on a :

$$b_{n-1}.M_{n-2} + (c_{n-1} + a_n)(-\phi_{n-1}^{'}.M_{n-2}) = 0 \qquad \Rightarrow \phi_{n-1}^{'} = \frac{b_{n-1}}{c_{n-1} + a_n}$$

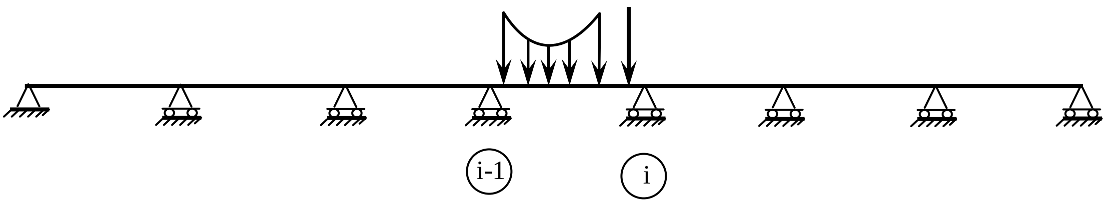
$$\phi_i^{'} = \frac{b_i}{c_i + a_{i+1} - b_{i+1}\phi_{i+1}^{'}}$$ …………………………………… Pour Foyers droits.

$$\phi_i = \frac{b_i}{c_{i-1} + a_i - b_{i-1}\phi_{i-1}}$$ …………………………………… Pour Foyers gauches.

On note que la position du Foyer est seulement liée aux constantes mécaniques de la poutre.

3.2.2. Détermination des moments aux appuis pour une seule travée chargée

Supposons que la travée (G_{i-1} , G_i) est la seule travée chargée.



A gauche de l'appui G_{i-1} :

$M_{i-2} = -\phi_{i-1} M_{i-1}$

$M_{i-3} = -\phi_{i-2} M_{i-2}$

....

....

A droite de l'appui G_i :

$M_{i+1} = -\phi'_{i+1} M_i$

$M_{i+2} = -\phi'_{i+2} M_{i+1}$

....

....

i-1 $\quad b_{i-1}.M_{i-2} + \left(c_{i-1} + a_i\right) M_{i-1} + b_i.M_i = \omega'_i - 0$ (4)

i $\quad b_i.M_{i-1} + \left(c_i + a_{i+1}\right) M_i + b_{i+1}.M_{i+1} = 0 - \omega''_i$ (5)

$\phi_{i-1} = -\dfrac{M_{i-2}}{M_{i-1}}$

De (4), on a : $-b_{i-1}.M_{i-1}.\phi_{i-1} + \left(c_{i-1} + a_i\right) M_{i-1} + b_i.M_i = \omega'_i$ (6)

$\phi'_{i+1} = -\dfrac{M_{i+1}}{M_i}$

De (5), on a : $b_i.M_{i-1} + \left(c_i + a_{i+1}\right) M_i - b_{i-1}.\phi'_{i+1} M_i = -\omega''_i$ (7)

On déduit de (6) et (7) que

$$M_{i-1} = -\frac{1}{b_i}.\frac{\dfrac{\omega'_i}{\phi'_i} + \omega''_i}{\dfrac{1}{\phi_i \phi'_i} - 1}$$

$\omega' < 0$ $\qquad$ $\omega' = -\omega''$

$\omega'' > 0$ $\qquad$ $\omega' > 0$ $\qquad$ on change le signe

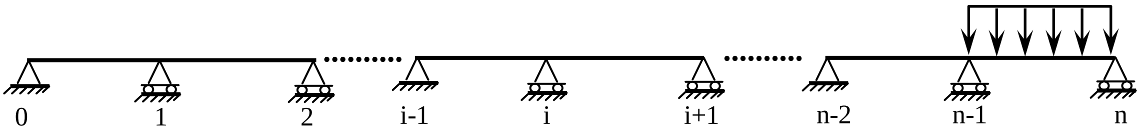
$$M_i = -\frac{1}{b_i}.\frac{\dfrac{\omega''_i}{\phi_i} + \omega'_i}{\dfrac{1}{\phi_i \phi'_i} - 1}$$

Ainsi en utilisant ϕ et ϕ' , on pourra déterminer tous les autres moments, c'est-à-dire les moments restant.

Cas particuliers (Evaluation de la valeur du moment sur appui)

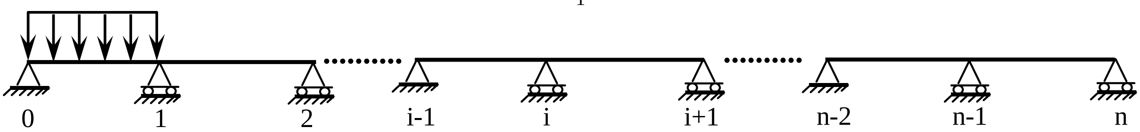
- Pour le cas d'une poutre continue ayant une travée extrême droite (dernière travée) chargée et dont l'appui extrême soit simple ou double, voir la figure ci-dessous, la valeur du moment sur l'appui (n-1) sera calculée en utilisant l'expression suivante:

$$M_{n-1} = -\frac{\omega_n^{'}}{b_n}.\phi_n$$



- Pour le cas d'une poutre continue ayant une travée extrême gauche (1ère travée) chargée et dont le premier appui soit simple ou double, voir la figure ci-dessous, la valeur du moment sur l'appui (1) sera calculée en utilisant l'expression suivante:

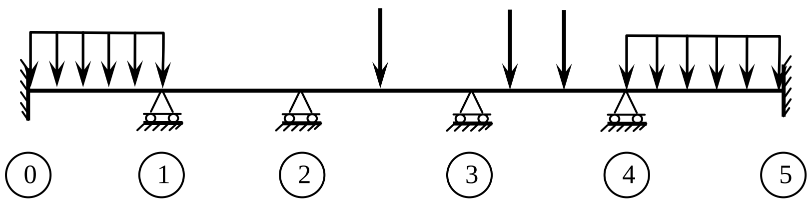
$$M_1 = \frac{\omega_1^{''}}{b_1}.\phi_1^{'}$$

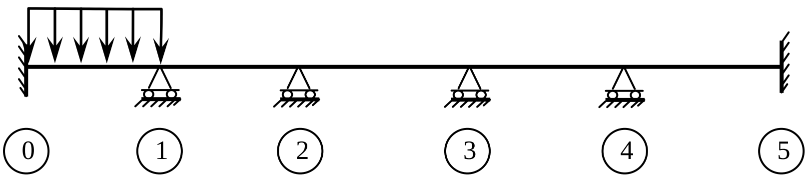


Principe de la méthode

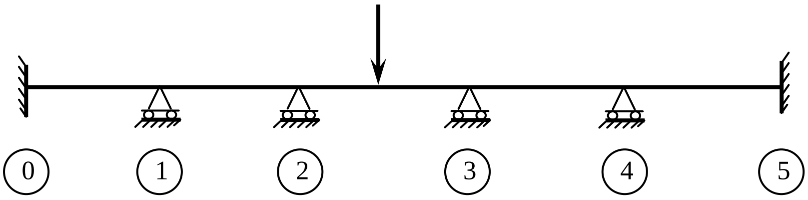
Il est préférable d'utiliser la méthode des Foyers aux poutres continues hyperstatiques ayant plusieurs travées ; (4 travées et plus).

(a)

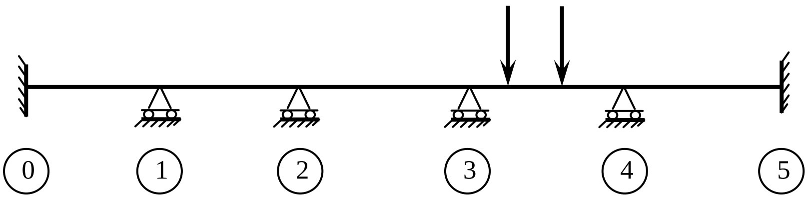




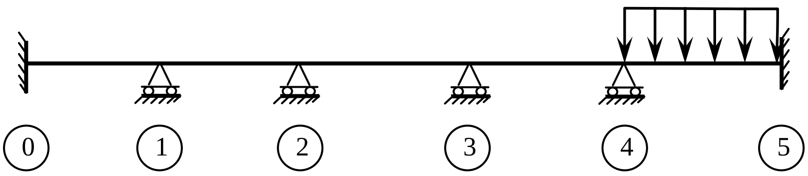
(+)



(+)



(+)

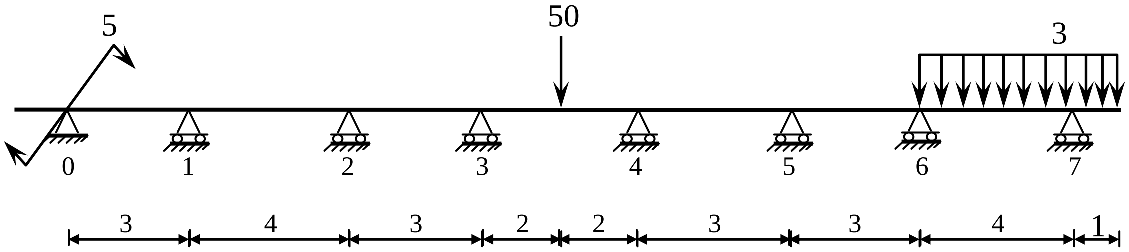


L’étude de la poutre (a) se fait par application du principe de superposition des charges.

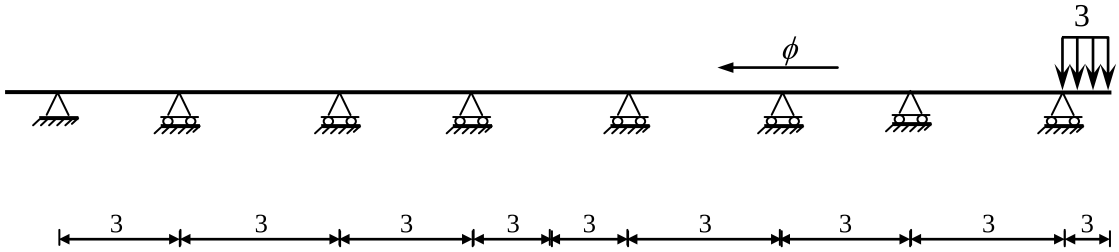
3.2.3. Exemples d'application

Exemple 1

Tracer le diagramme du moment



Solution



$$M_7 = -3.1.\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} = -1.5 \text{ t.m}$$

$$\phi_i = \frac{b_i}{c_{i-1} + a_i - b_{i-1}\phi_{i-1}} \quad a_i = 2b_i = c_i = \frac{l_i}{3\mathrm{EI}_i}$$

Comme les appuis aux extrémités sont simples : $\phi_1 = 0$, $\phi_7 = 0$

Foyers gauches

$$\phi_2 = \frac{b_2}{c_1 + a_2} = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{3}{3} + \frac{4}{3}} = 0,2857$$

$$\phi_3 = \frac{b_3}{c_2 + a_3 - b_2\phi_2} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{4}{3} + \frac{3}{3} - \frac{4}{6}.0,2857} = 0,2333$$

$$\phi_4 = \frac{b_4}{c_3 + a_5 - b_3\phi_3} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{3}{3} + \frac{4}{3} - \frac{3}{6}.0,2333} 0,2334$$

$$\phi_5 = \frac{b_5}{c_4 + a_5 - b_4\phi_4} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{4}{3} + \frac{3}{3} - \frac{4}{6}.0,3007} = 0,2344$$

$$\phi_6 = \frac{b_6}{c_5 + a_6 - b_5\phi_5} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{3}{3} + \frac{3}{3} - \frac{3}{6}.0,2344} = 0,2656$$

$$\phi_7 = \frac{b_7}{c_6 + a_7 - b_6\phi_6} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{3}{3} + \frac{4}{3} - \frac{3}{6}.0,2656} = 0,3029$$

Foyers droits

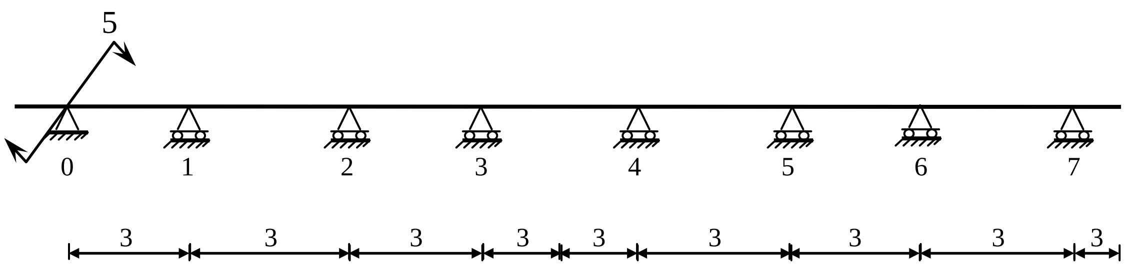
$$\phi_i = \frac{b_i}{c_i + a_{i+1} - b_{i+1}\phi_{i+1}}$$

$$\phi_6 = \frac{b_6}{c_6 + a_7} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{3}{3} + \frac{4}{3}} = 0,2143$$

$$\phi_5 = \frac{b_5}{c_5 + a_6 - b_6\phi_6} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{3}{3} + \frac{3}{3} - \frac{3}{6}.0,2143} = 0,2510$$

$$\phi_4 = \frac{b_4}{c_4 + a_5 - b_5\phi_5} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{4}{3} + \frac{3}{3} - \frac{3}{6}.0,3020} = 0,3020$$

- **1^er Cas**



$$M_0 = 5$$

$$M_1 = -\phi_1 M_0 = -(0,2344).5 = -1,172$$

$$M_2 = -\phi_2 M_1 = -(0,3008)(-1,172) = 0,3525$$

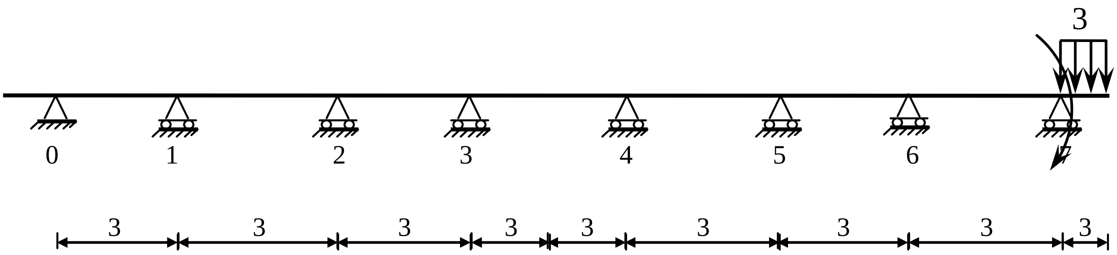
$$M_3 = -\phi_3 M_2 = (0,2345)(0,3525) = -0,0827$$

$$M_4 = -\phi_4 M_3 = -(0,3020)(-0,0827) = 0,0250$$

$$M_5 = -\phi_5 M_4 = -(0,2510)(0,0250) = -0,00627$$

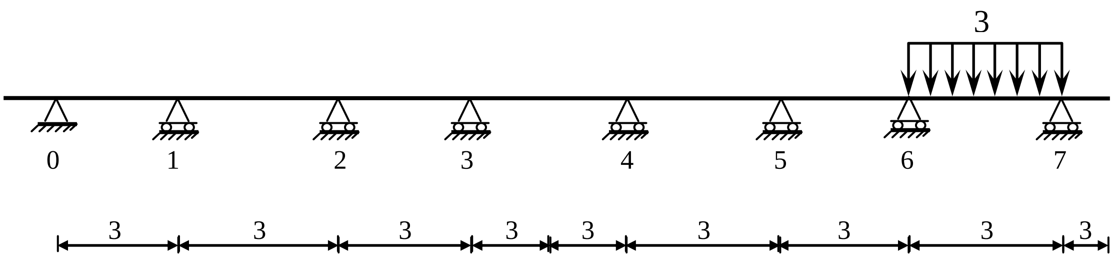
$$M_6 = -\phi_6 M_5 = -(0,2143)(-0,00627) = 0,00134$$

- **$2^{ème}$ Cas**



$$M_7 = -1,5$$
$$M_6 = -\phi_7 M_7 = -\left(0,3029\right)\left(-1,5\right) = 0,4543$$
$$M_5 = -\phi_6 M_6 = -\left(0,2656\right)\left(0,4543\right) = -0,1207$$
$$M_4 = -\phi_5 M_5 = -\left(0,2344\right)\left(-0,1207\right) = 0,0283$$
$$M_3 = -\phi_4 M_4 = -\left(0,3007\right)\left(0,0283\right) = -0,0085$$
$$M_2 = -\phi_3 M_3 = -\left(0,2333\right)\left(-0,0085\right) = 0,0020$$
$$M_1 = -\phi_2 M_2 = -\left(0,2857\right)\left(0,0020\right) = -0,00057$$
$$M_0 = 0$$

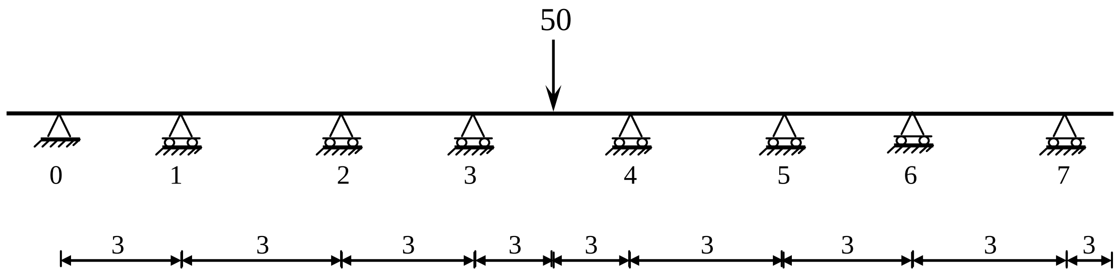
- **$3^{ème}$ Cas**



$$M_7 = 0$$
$$\frac{M_6}{\phi_7} = -\frac{\omega_7}{b_7} / \omega_7 = \frac{9L^3}{24EI} = \frac{3.\left(4\right)^3}{24EI} = \frac{8}{24EI}$$

$$M_6 = -\frac{8.0,3029}{\frac{4}{6}} = -3,6348$$
$$M_5 = -\phi_6 M_6 = -\left(0,2656\right)\left(-3,6348\right) = 0,9654$$
$$M_4 = -\phi_5 M_5 = -\left(0,2656\right)\left(0,9654\right) = -0,2263$$
$$M_3 = -\phi_4 M_4 = -\left(0;3007\right)\left(-0,2263\right) = 0,068$$
$$M_2 = -\phi_3 M_3 = -\left(0,2333\right)\left(0,068\right) = -0,0159$$
$$M_1 = -\phi_2 M_2 = -\left(0,2857\right)\left(-0,0159\right) = 0,00454$$

- **4ème Cas**



$$\mathrm{M}_3 = -\frac{1}{b_4}\frac{\frac{\omega_4^{'}}{\phi_4^{'}}+\omega_4^{''}}{\frac{1}{\phi_4\phi_4^{'}}-1} = -\frac{1}{\frac{4}{6EI}}\frac{\frac{50}{0,302EI}-\frac{50}{EI}}{\frac{1}{0,302.0,3007}-1} = -17.314$$

$$\omega_4^{'} = \frac{50}{EI}$$

$$\omega_4^{''} = \frac{50}{EI}$$

$$\mathrm{M}_4 = \frac{1}{b_4}\frac{\omega_4^{'}+\frac{\omega_4^{''}}{\phi_4}}{\frac{1}{\phi_4\phi_4^{'}}-1} = \frac{1}{\frac{4}{6}}\frac{50-\frac{50}{0,3007}}{\frac{1}{0,3007.0,302}-1} = -17,421$$

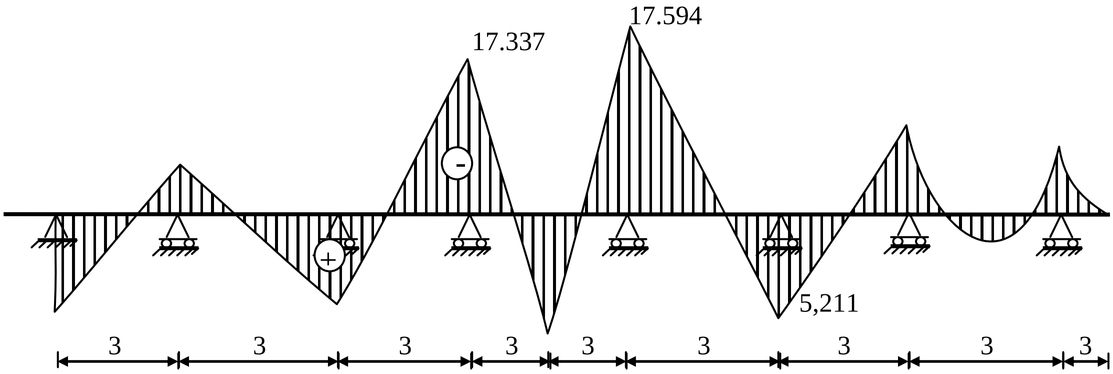
$$\mathrm{M}_2 = -\phi_3\mathrm{M}_3 = -\left(0,2333\right)\left(-17,314\right) = 4,0393$$
$$\mathrm{M}_1 = -\phi_2\mathrm{M}_2 = -\left(0,2857\right)\left(4,0393\right) = -1,154$$
$$\mathrm{M}_0 = 0$$

$$\mathrm{M}_5 = -\phi_5^{'}\mathrm{M}_4 = -\left(0,2510\right)\left(-17,421\right) = 4,3726$$
$$\mathrm{M}_6 = -\phi_6^{'}\mathrm{M}_5 = -\left(0,2143\right)\left(4,3726\right) = -0,937$$
$$\mathrm{M}_7 = 0$$

Moments finaux

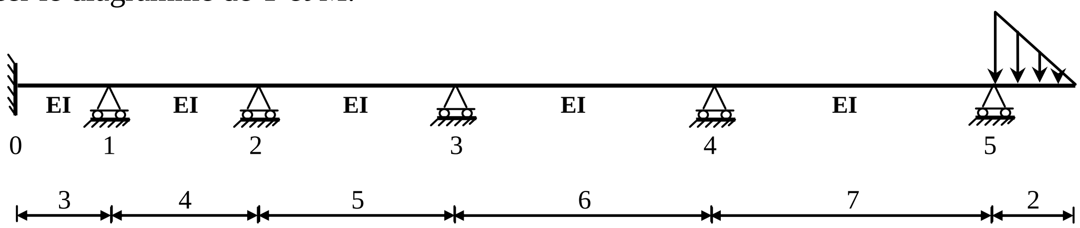
$$M_0 = 5+0+0+0 = 5 \ \ \text{t.m}$$
$$M_1 = \left(-1,172\right)+\left(-0,00057\right)+\left(0,00454\right)+\left(-1,154\right) = 2,322 \ \ \text{t.m}$$
$$M_2 = \left(0,3525\right)+\left(0,0020\right)+\left(-0,0159\right)+\left(4,0393\right) = 4,3779 \ \ \text{t.m}$$
$$M_3 = \left(-0,0827\right)+\left(-0,0085\right)+\left(0,068\right)+\left(-17,314\right) = -17,3372 \ \ \text{t.m}$$
$$M_4 = \left(0,025\right)+\left(0,0283\right)+\left(-0,2263\right)+\left(-17,421\right) = -17,594 \ \ \text{t.m}$$
$$M_5 = \left(-0,00627\right)+\left(-0,1207\right)+\left(0,9654\right)+\left(4,33726\right) = 5,211 \ \ \text{t.m}$$
$$M_6 = \left(0,00134\right)+\left(0,4543\right)+\left(-3,6348\right)+\left(-0,937\right) = -4,116 \ \ \text{t.m}$$
$$M_7 = \left(0\right)+\left(-1,5\right)+\left(0\right)+\left(0\right) = -1,5 \ \ \text{t.m}$$

Diagramme du moment

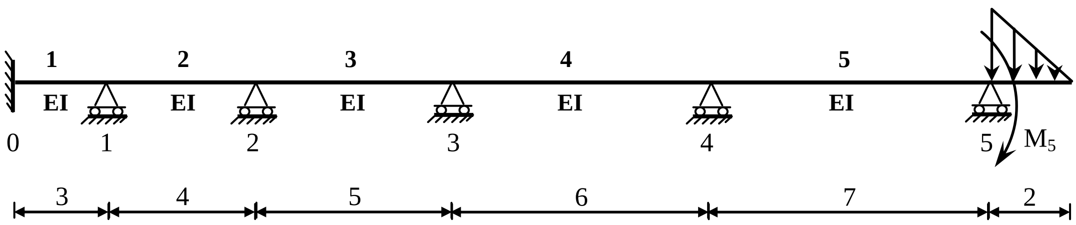


Exemple 2

- Trouver les valeurs des moments et de l'effort tranchant pour la poutre continue représentée ci-dessous.
- Tracer le diagramme de T et M.



Solution



$$M_5 = -2.2.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.2 = -\frac{4}{3} \quad \text{kn.m}$$

Afin d'obtenir les effets intérieures, il faut calculer les Foyers gauches.

Foyers gauches

$$\phi_i = \frac{b_i}{C_{i-1} + a_i - b_{i-1}.\phi_{i-1}} \quad ; \quad a_i = 2.b_i = c_i = \frac{L_i}{3.EI_i}$$

$$\phi_1 = \frac{b_1}{C_0 + a_1 - b_0.\phi_0} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\phi_2 = \frac{b_2}{C_1 + a_2 - b_1.\phi_1} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{3}{3} + \frac{4}{3} - \frac{3}{6}.\frac{1}{2}} = \frac{8}{25} = 0,32$$

$$\phi_3 = \frac{b_3}{C_2 + a_3 - b_2.\phi_2} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{4}{3} + \frac{5}{3} - \frac{4}{6}.\frac{8}{25}} = 0,299$$

$$\phi_4 = \frac{b_4}{C_3 + a_4 - b_3.\phi_3} = \frac{\frac{6}{6}}{\frac{5}{3} + \frac{6}{3} - \frac{5}{6}.0,299} = 0,2926$$

$$\phi_5 = \frac{b_5}{C_4 + a_5 - b_4.\phi_4} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{6}{3} + \frac{7}{3} - \frac{6}{6}.0,2926} = 0,2887$$

Moments aux appuis

$$\phi_i = -\frac{M_{i-1}}{M_i}$$

i = 5 $\Rightarrow$ $\phi_5 = -\dfrac{M_4}{M_5} \Rightarrow M_4 = -M_5.\phi_5$

$$M_4 = -\left(-\frac{4}{3}\right).0,2887 = 0,3849 \quad \text{kn.m}$$

i = 4 $\Rightarrow$ $\phi_4 = -\dfrac{M_3}{M_4} \Rightarrow M_3 = -M_4.\phi_4$

$$M_3 = -0,3849.0,2926 = -0,1126 \quad \text{kn.m}$$
$$M_2 = -(-0,1126).0,299 = +0,0336 \quad \text{kn.m}$$
$$M_1 = -(-0,0336).0,32 = -0,0107 \quad \text{kn.m}$$
$$M_0 = -(-0,0107).0,5 = +0,00538 \quad \text{kn.m}$$

Efforts tranchants

$$M(x) = \mu(x) + M_g.\left(1 - \frac{x}{L}\right) + M_d.\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$T(x) = \frac{\partial(\mu(x))}{\partial x} + \frac{M_d - M_g}{L}$$

Travée 0 – 1

$$T_{0-1} = \frac{-0,0107 - 0,00538}{3} = -0,00536 \quad \text{kn.m}$$

$0 < x_1 < 3$

$\mu(x_1) = 0$

Travée 1 – 2

$$T_{1-2} = \frac{0,0336 - (-0,0107)}{4} = 0,011 \text{ kn.m}$$

$0 < x_2 < 3$

$\mu(x_2) = 0$

Travée 2 – 3

$$T_{2-3} = \frac{-0,1126 - 0,0336}{5} = -0,0292 \text{ kn.m}$$

$0 < x_3 < 3$

$\mu(x_3) = 0$

Travée 3 – 4

$$T_{3-4} = \frac{0,3849 - (-0,1126)}{6} = 0,0829 \text{ kn.m}$$

$0 < x_4 < 3$

$\mu(x_4) = 0$

Travée 4 – 5

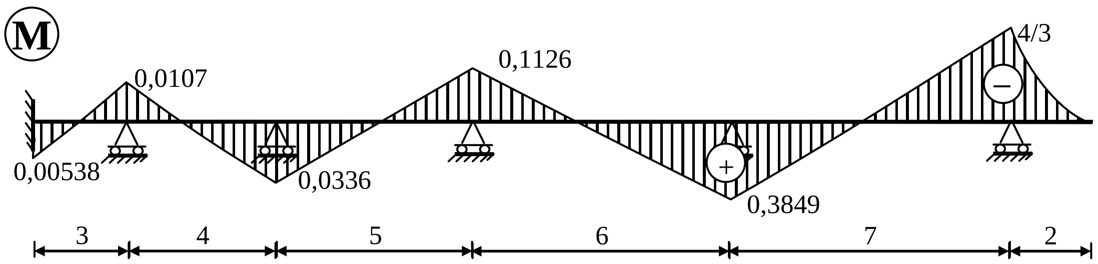
$$T_{4-5} = \frac{-1,3333 - 0,3849}{7} = -0,245 \text{ kn.m}$$

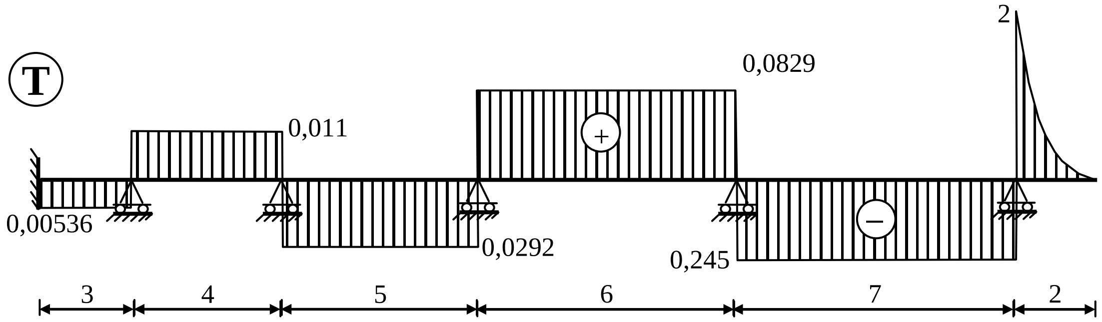
$0 < x_5 < 3$

$\mu(x_5) = 0$

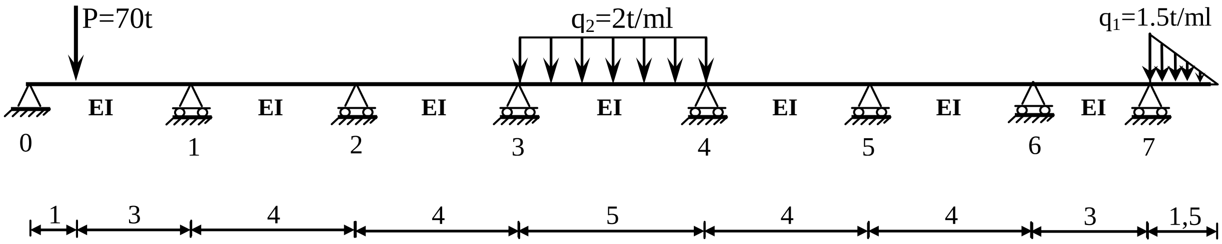
Réactions d'appuis

R_0 = 0,00536 kn.m
R_1 = 0,01636 kn.m
R_2 = 0,04020 kn.m
R_3 = 0,11210 kn.m
R_4 = 0,32790 kn.m
R_5 = 2,24500 kn.m





Exemple 3
- Trouver les valeurs des moments pour la poutre continue représentée ci-dessous.
- Tracer le diagramme de M.



Solution

Comme l'appui **(0)** gauche est simple : $\phi_1 = 0$

Foyers gauches

$$\phi_i = \frac{b_i}{c_{i-1} + a_i - b_{i-1}\phi_i} \; ; \; a_i = c_i = 2b_i = \frac{L_i}{3EI_i}$$

$$\phi_2 = \frac{b_2}{c_1 + a_2 - b_1\phi_1} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{4}{3} + \frac{4}{3} - 0} = 0{,}25$$

$$\phi_3 = \frac{b_3}{c_2 + a_3 - b_2\phi_2} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{4}{6}.0{,}25} = 0{,}2666$$

$$\phi_4 = \frac{b_4}{c_3 + a_4 - b_3\phi_3} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{4}{3} + \frac{5}{3} - \frac{4}{6}.0{,}2666} = 0{,}29527$$

$$\phi_5 = \frac{b_5}{c_4 + a_5 - b_4\phi_4} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{5}{3} + \frac{4}{3} - \frac{5}{6}.0{,}29527} = 0{,}24207$$

$$\phi_6 = \frac{b_6}{c_5 + a_6 - b_5\phi_5} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{4}{6}.0{,}24207} = 0{,}2661$$

$$\phi_7 = \frac{b_7}{c_6 + a_7 - b_6\phi_6} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{4}{3} + \frac{3}{3} - \frac{4}{6}.0{,}2661} = 0{,}2319$$

Foyers droits

$$\phi_i^{'} = \frac{b_i}{c_i + a_{i+1} - b_{i+1}\phi_{i+1}^{'}}$$

Comme l'appui **(7)** droit est simple : $\phi_7^{'} = 0$

$$\phi_6^{'} = \frac{b_6}{c_6 + a_7 - b_7\phi_7^{'}} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{4}{3} + \frac{3}{3} - 0} = 0{,}2857$$

$$\phi_5^{'} = \frac{b_5}{c_5 + a_6 - b_6\phi_6^{'}} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{4}{6}.0{,}2857} = 0{,}2692$$

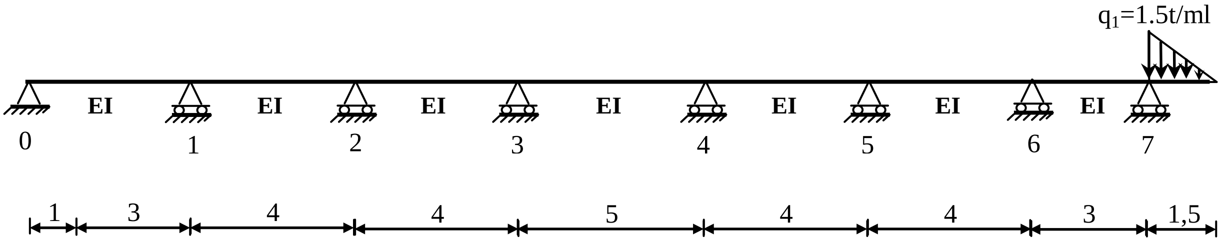
$$\phi_4^{'} = \frac{b_4}{c_4 + a_5 - b_5\phi_5^{'}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{3} + \frac{4}{3} - \frac{4}{6}.0{,}2692} = 0{,}29545$$

$$\phi_3^{'} = \frac{b_3}{c_3 + a_4 - b_4\phi_4^{'}} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{4}{3} + \frac{5}{3} - \frac{5}{6}.0{,}29545} = 0{,}24209$$

$$\phi_2^{'} = \frac{b_2}{c_2 + a_3 - b_3\phi_3^{'}} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{4}{6}.0{,}24209} = 0{,}2661$$

$$\phi_1^{'} = \frac{b_1}{c_1 + a_2 - b_2\phi_2^{'}} = \frac{\frac{4}{6}}{\frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{4}{6}.0{,}2661} = 0{,}2678$$

➢ **1er Cas**



$$M_7 = -1{,}5.1{,}5.\frac{1}{2}\ .\frac{1}{3}.\ 1{,}5 = -0{,}5625 \text{ t.m}$$

$$\phi_i = -\frac{M_{i-1}}{M_i}$$

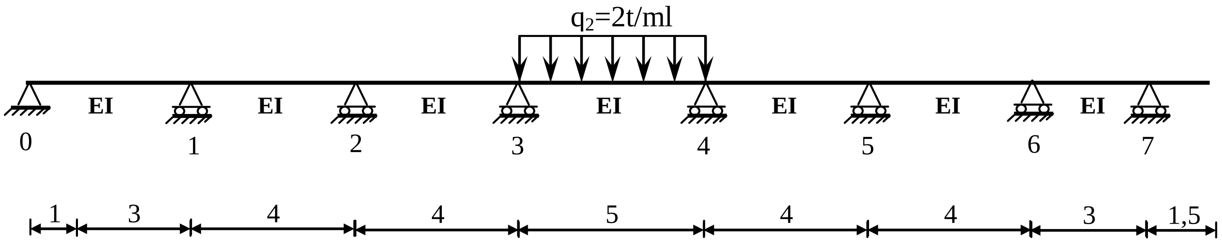
$i = 7 \Rightarrow \quad M_6 = -\phi_7 M_7 = 0{,}13044$ t.m

$i = 6 \Rightarrow \quad M_5 = -\phi_6 M_6 = -0{,}0347$ t.m

$i = 5 \Rightarrow \quad M_4 = -\phi_5 M_5 = 0{,}0084$ t.m

$i = 4 \Rightarrow \quad M_3 = -\phi_4 M_4 = -0,00248$ t.m
$i = 3 \Rightarrow \quad M_2 = -\phi_3 M_3 = 0,000661$ t.m
$i = 2 \Rightarrow \quad M_1 = -\phi_2 M_2 = -0,000165$ t.m
$i = 1 \Rightarrow \quad M_0 = 0$

- **2ème Cas**



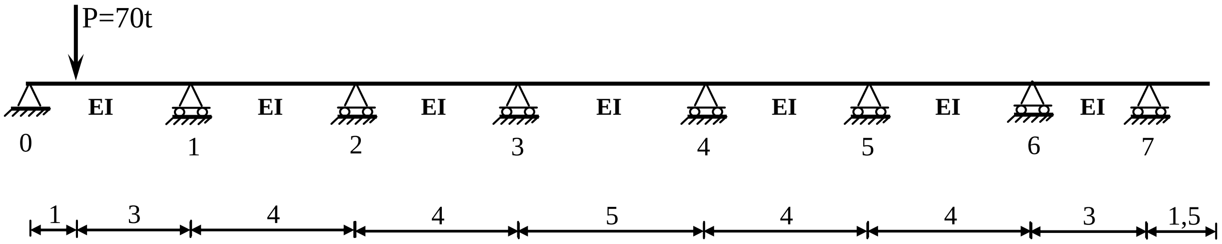
$$EI\omega_4^{'} = -10,41 \quad \left(\frac{-qL^3}{24EI}\right)$$

$$EI\omega_4^{''} = -10,41$$

$$M_i = -\frac{1}{b_i}\left(\frac{\omega_i^{'} + \dfrac{\omega_i^{''}}{\phi_i}}{\dfrac{1}{\phi_i^{'}\phi_i} - 1}\right) \qquad \Rightarrow \quad M_3 = M_4 = -2,8473 \text{ t.m}$$

$M_2 = -\phi_3 M_3 = 0,75909$ t.m
$M_1 = -\phi_2 M_2 = -0,18977$ t.m
$M_0 = 0$
$M_5 = -\phi_5^{'} M_4 = 0,76649$ t.m
$M_6 = -\phi_6^{'} M_5 = -0,21898$ t.m
$M_7 = 0$

- **3ème Cas**



$$\omega_1^{''} = 43,75$$

$$\begin{cases} M_1 = -\dfrac{\omega_1^{''}\phi_1^{'}}{b_1} \\ M_0 = 0 \end{cases}$$

$M_2 = -\phi_2' M_1 = 4{,}67644$ t.m

$M_3 = -\phi_3' M_2 = -1{,}25889$ t.m

$M_4 = -\phi_4' M_3 = 0{,}37194$ t.m

$M_5 = -\phi_5' M_4 = -0{,}1001$ t.m

$M_6 = -\phi_6' M_5 = 0{,}0286$ t.m

$M_7 = 0$

Moments finaux

$M_0 = 0$

$M_1 = (-0{,}000165) + (-0{,}18977) + (-17{,}574) = -17{,}7639$ t.m

$M_2 = (0{,}000661) + (0{,}75909) + (4{,}67644) = 5{,}43619$ t.m

$M_3 = (-0{,}00248) + (-2{,}8473) + (-1{,}25889) = -4{,}10867$ t.m

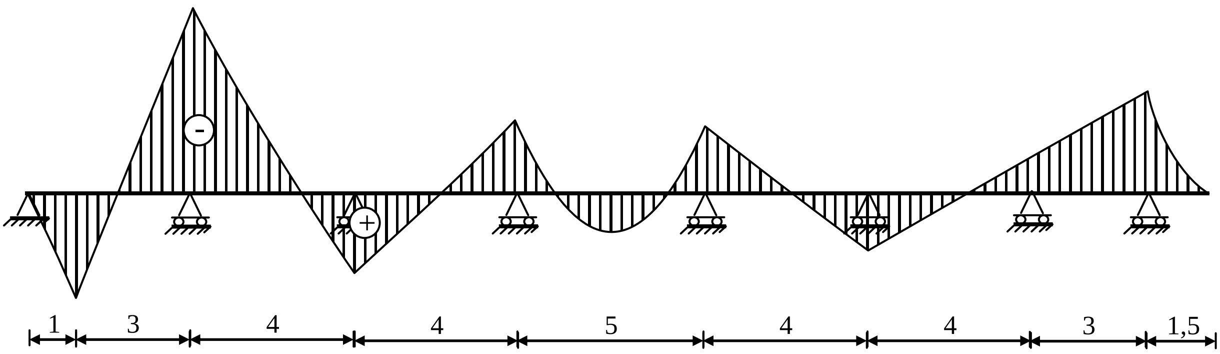
$M_4 = (0{,}0084) + (-2{,}8473) + (0{,}37194) = -2.46696$ t.m

$M_5 = (-0{,}0374) + (0{,}76644) + (-0{,}1001) = 0{,}63169$ t.m

$M_6 = (0{,}13044) + (-0{,}21898) + (0{,}0286) = -0{,}05994$ t.m

$M_7 = (-0{,}5625) + (0) + (0) = -0{,}5625$ t.m

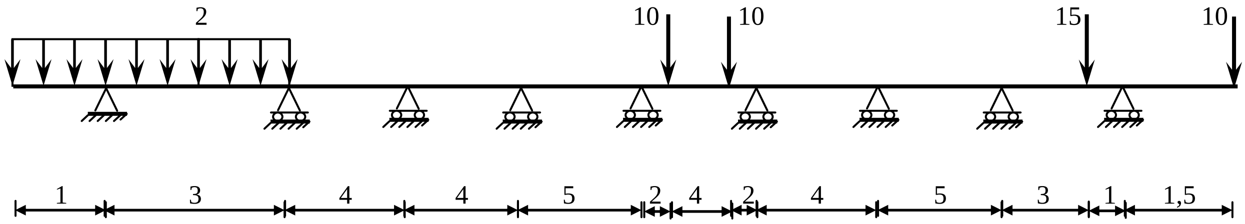
Diagramme du moment



Exemple 4

- Trouver les valeurs des moments pour la poutre continue représentée ci-dessous.
- Tracer le diagramme de M.

EI : constant



Solution

Comme les appuis aux extrémités de travée continue sont simples : $\phi_1 = 0$, $\phi_8' = 0$

Foyers gauches

$$\phi_i = \frac{b_i}{C_{i-1} + a_i - b_{i-1}.\phi_{i-1}} \qquad a_i = 2.b_i = c_i = \frac{L_i}{3.EI_i}$$

$$\phi_1 = 0$$

$$\phi_2 = \frac{b_2}{C_1 + a_2 - b_1.\phi_1} = 0,2857$$

$$\phi_3 = \frac{b_3}{C_2 + a_3 - b_2.\phi_2} = 0,2692$$

$$\phi_4 = \frac{b_4}{C_3 + a_4 - b_3.\phi_3} = 0,2954$$

$$\phi_5 = \frac{b_5}{C_4 + a_5 - b_4.\phi_4} = 0,3262$$

$$\phi_6 = \frac{b_6}{C_5 + a_6 - b_5.\phi_5} = 0,187$$

$$\phi_7 = \frac{b_7}{C_6 + a_7 - b_6.\phi_6} = 0,2898$$

$$\phi_8 = \frac{b_8}{C_7 + a_8 - b_7.\phi_7} = 0,2416$$

Foyers droits

$$\phi_i' = \frac{b_i}{C_i + a_{i+1} - b_{i+1}.\phi_{i+1}'}$$

$$\phi_8' = 0$$

$$\phi_7' = \frac{b_7}{C_7 + a_8 - b_8.\phi_8'} = 0,2777$$

$$\phi_6' = \frac{b_6}{C_6 + a_7 - b_7.\phi_7'} = 0,2408$$

$$\phi_5' = \frac{b_5}{C_5 + a_6 - b_6.\phi_6'} = 0,3472$$

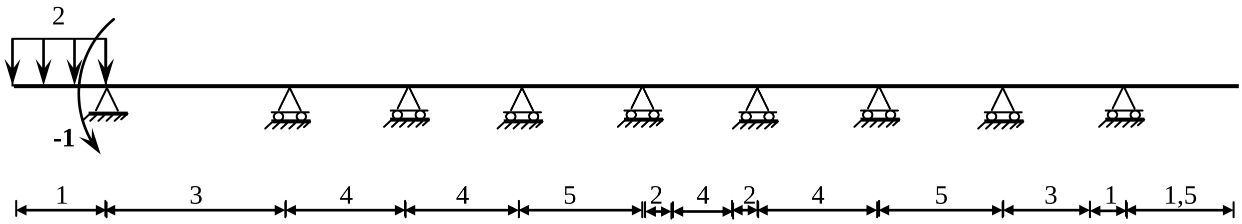
$$\phi_4' = \frac{b_4}{C_4 + a_5 - b_5.\phi_5'} = 0,2153$$

$$\phi_3' = \frac{b_3}{C_3 + a_4 - b_4.\phi_4'} = 0.2363$$

$$\phi_2' = \frac{b_2}{C_2 + a_3 - b_3.\phi_3'} = 0,2657$$

$$\phi_1' = \frac{b_1}{C_1 + a_2 - b_2.\phi_2'} = 0,232$$

- **1er Cas**



$$M_0 = -1$$

$$M_1 = -\phi_1'.M_0 = -(0,232).(-1) = 0,232$$

$$M_2 = -\phi_2'.M_1 = -(0,2657).(0,232) = -0,0616$$

$$M_3 = -\phi_3'.M_2 = -(0,2363).(-0,0616) = 0,01456$$

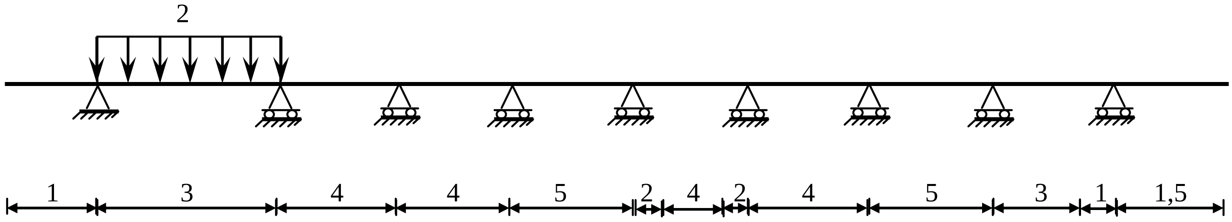
$$M_4 = -\phi_4'.M_3 = -(0,2153).(0,01456) = -0,003136$$

$$M_5 = -\phi_5'.M_4 = -(0,3472).(-0,003136) = 0,001088$$

$$M_6 = -\phi_6'.M_5 = -(0,2408).(0,001088) = -0,000262$$

$$M_7 = -\phi_7'.M_6 = -(0,2777).(-0,000262) = 0,0000728$$

- **2ème Cas**

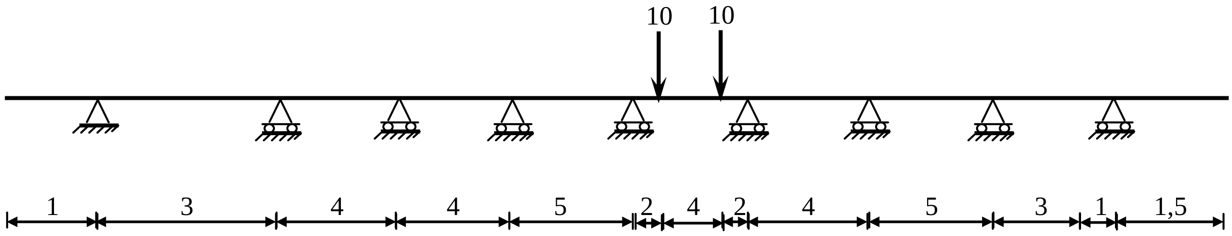


$$\omega_1'' = \frac{q.L^3}{24.EI} = \frac{2.(3)^3}{24} = 2,25$$

$$\begin{cases} M_0 = 0 \\ M_1 = -\dfrac{\omega_1''.\phi_1'}{b_1} = -\dfrac{2,25.0,232}{\frac{3}{6}} = -1,044 \end{cases}$$

$$M_2 = -\phi_2'.M_1 = -(0,2657).(-1,044) = 0,2774$$
$$M_3 = -\phi_3'.M_2 = -(0,2363).(0,2774) = -0,0655$$
$$M_4 = -\phi_4'.M_3 = -(0,2153).(-0,0655) = 0,0141$$
$$M_5 = -\phi_5'.M_4 = -(0,3472).(0,0141) = -0,0049$$
$$M_6 = -\phi_6'.M_5 = -(0,2408).(-0,0049) = 0,001179$$
$$M_7 = -\phi_7'.M_6 = -(0,2777).(0,001179) = -0,000327$$
$$M_8 = 0$$

- **3ème Cas**



$$EI\omega_5' = -60$$
$$EI\omega_5' = 60$$

$$M_i = -\frac{1}{b_i}.\frac{\omega_i' + \dfrac{\omega_i''}{\phi_i}}{\dfrac{1}{\phi_i\phi_i'} - 1} \Rightarrow M_5 = -\frac{1}{\frac{8}{6}}.\frac{-60 + \dfrac{60}{0,3262}}{\dfrac{1}{0,3262.0,3472} - 1} = -11,872$$

$$M_4 = M_5 = -11,872$$
$$M_3 = -\phi_4'.M_4 = -(0,2954).(-11,872) = 3,507$$
$$M_2 = -\phi_3'.M_3 = -(0,2692).(3,507) = -0,944$$

$M_1 = -\phi_2^{'}.M_2 = -(0,2857).(-0,944) = 0,2697$

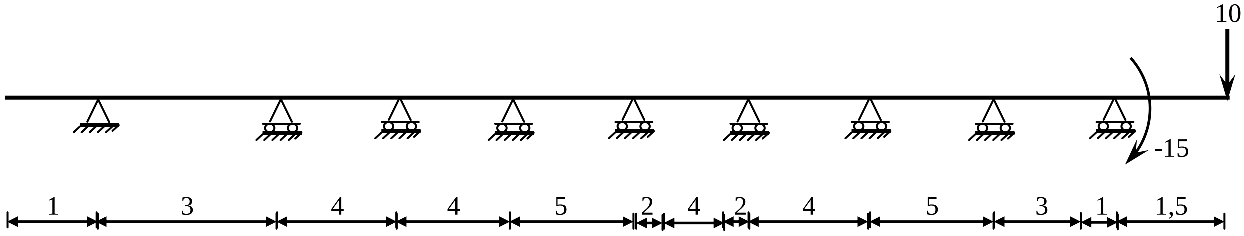
$M_0 = 0$

$M_6 = -\phi_6^{'}.M_5 = -(0,2408).(-11,872) = 2,8587$

$M_7 = -\phi_7^{'}.M_6 = -(0,2777).(2,8587) = -0,79388$

$M_8 = 0$

- **4ème Cas**



$M_8 = -15$

$M_7 = -\phi_8.M_8 = -(0,2416).(-15) = 3,624$

$M_6 = -\phi_7.M_7 = -(0,2898).(3,624) = -1,05$

$M_5 = -\phi_6.M_6 = -(0,187).(-1,05) = 0,19639$

$M_4 = -\phi_5.M_5 = -(0,3262).(0,196) = -0,064$

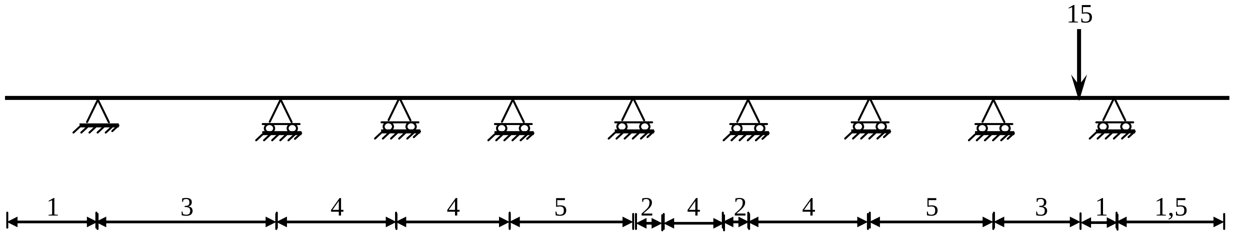
$M_3 = -\phi_4.M_4 = -(0,2954).(-0,064) = 0,0189$

$M_2 = -\phi_3.M_3 = -(0,2692).(0,0189) = -0,00509$

$M_1 = -\phi_2.M_2 = -(0,2857).(-0,00509) = 0,001455$

$M_0 = 0$

- **5ème Cas**



$$\begin{cases} M_8 = 0 \\ \dfrac{M_7}{\phi_8} = -\dfrac{\omega_8^{'}}{b_8} \end{cases}$$

$-EI\omega_8^{'} = -9,375$

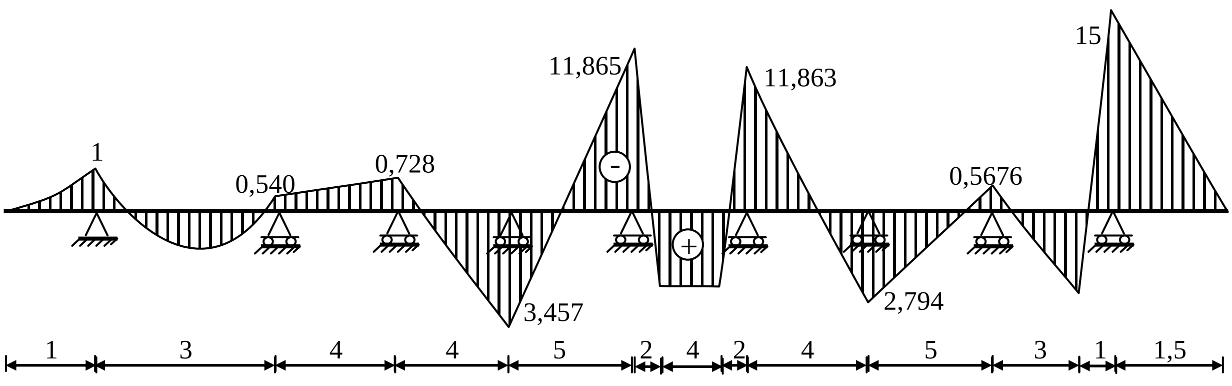
$$M_7 = \frac{9,375.0,2416}{\frac{4}{6}} = -3,3975$$

$M_6 = -\phi_7 . M_7 = -(0,2898).(-3,3975) = 0,98459$
$M_5 = -\phi_6 . M_6 = -(0,187).(0,98459) = -0,14812$
$M_4 = -\phi_5 . M_5 = -(0,3262).(-0,14812) = 0,06$
$M_3 = -\phi_4 . M_4 = -(0,2954).(0,06) = -0,0177$
$M_2 = -\phi_3 . M_3 = -(0,2692).(-0,0177) = 0,004776$
$M_1 = -\phi_2 . M_2 = -(0,2857).(0,004776) = -0,00136$
$M_0 = 0$

Moments finaux

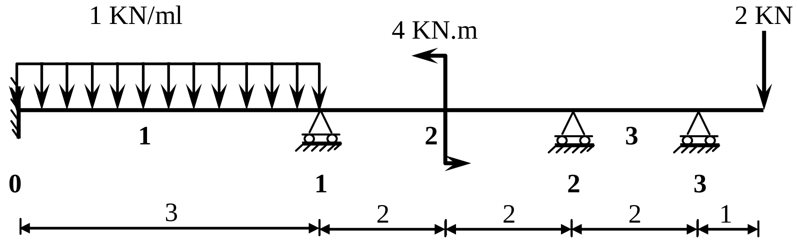
$M_0 = (-1) + (0) + (0) + (0) + (0) = -1$
$M_1 = (0,232) + (-1,044) + (0,2697) + (-0,00136) + (0,001455) = -0,5422$
$M_2 = (-0,0616) + (0,2774) + (-0,944) + (0,004776) + (-0,00509) = -0,7285$
$M_3 = (0,01456) + (-0,0655) + (3,507) + (-0,0177) + (0,0189) = 3,457$
$M_4 = (-0,003136) + (0,0141) + (-11,872) + (0,06) + (0,064) = -11,865$
$M_5 = (0,001088) + (-0,0049) + (-11,872) + (-0,18412) + (0,19639) = -11,863$
$M_6 = (-0,000262) + (0,001179) + (2,8587) + (0,98459) + (-1,05) = 2,794$
$M_7 = (0,0000728) + (-0,000327) + (-0,79388) + (-3,3975) + (3,624) = -0,5676$
$M_8 = -15$

Diagramme du moment



Exemple 5

- Tracer le diagramme de M et T pour la poutre continue représentée ci-dessous.
  EI : constant



Solution

$$M_3 = 2.1 = 2 \text{ kn}$$

$$a_1 = 2.b_1 = c_1 = \frac{3}{3.EI} = \frac{1}{EI}$$

$$a_2 = 2.b_2 = c_2 = \frac{4}{3.EI}$$

$$a_3 = 2.b_3 = c_3 = \frac{2}{3.EI}$$

Foyers gauches

$$\phi_i = \frac{b_i}{C_{i-1} + a_i - b_{i-1}.\phi_{i-1}}$$

$$\phi_1 = \frac{b_1}{C_0 + a_1 - b_0.\phi_0} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\phi_2 = \frac{b_2}{C_1 + a_2 - b_1.\phi_1} = 0,32$$

$$\phi_3 = \frac{b_3}{C_2 + a_3 - b_2.\phi_2} = 0,19$$

Foyers droits

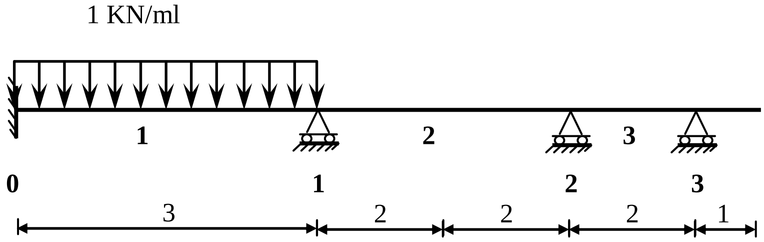
$$\phi_i' = \frac{b_i}{C_i + a_{i+1} - b_{i+1}.\phi_{i+1}'}$$

$$\phi_3' = \frac{b_3}{C_3 + a_4 - b_4.\phi_4'} = 0,5$$

$$\phi_2' = \frac{b_2}{C_2 + a_3 - b_3.\phi_3'} = 0,36$$

$$\phi_1' = \frac{b_1}{C_1 + a_2 - b_2.\phi_2'} = 0,24$$

- **1er Cas**



Appui 0 , 1 , 2

$$\mathrm{M}_{i-1} = -\frac{1}{b_i}.\frac{\omega_i^{''} + \dfrac{\omega_i^{'}}{\phi_i^{'}}}{\dfrac{1}{\phi_i\phi_i^{'}} - 1}$$

$$\mathrm{M}_{i} = \frac{1}{b_i}.\frac{\omega_i^{'} + \dfrac{\omega_i^{''}}{\phi_i}}{\dfrac{1}{\phi_i\phi_i^{'}} - 1}$$

Rotation $\omega_1^{''}$ et $\omega_1^{'}$

$$\omega_1^{'} = -\omega_1^{''} = \frac{9}{8.EI}$$

$$\mathrm{M}_{0} = -\frac{1}{b_1}.\frac{\dfrac{\omega_1^{'}}{\phi_1^{'}} + \omega_1^{''}}{\dfrac{1}{\phi_1\phi_1^{'}} - 1} = -0,97$$

$$\mathrm{M}_{1} = \frac{1}{b_1}.\frac{\omega_1^{'} + \dfrac{\omega_1^{''}}{\phi_1}}{\dfrac{1}{\phi_1\phi_1^{'}} - 1} = -0,310$$

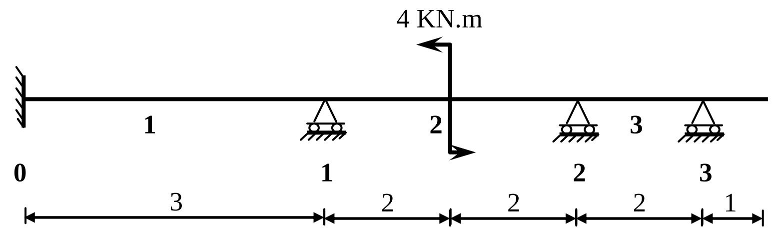
Alors,
Avec l'utilisation des Foyers droites

$$\mathrm{M}_2 = -\phi_2^{'}.\mathrm{M}_1$$

$$\mathrm{M}_2 = -\left(-0,31\right).\frac{4}{11} = 0,11$$

$$\mathrm{M}_3 = 0$$

- **2ème Cas**



$$\omega_2^{'} = \omega_2^{''} = \frac{M_0}{24.EI.L} = \frac{4}{24.4.EI} = \frac{1}{24.EI}$$

$$\mathrm{M}_1 = -\frac{1}{b_2}\frac{\frac{\omega_2^{'}}{\phi_2^{'}} + \omega_2^{''}}{\frac{1}{\phi_2\phi_2^{'}} - 1} = -0,03$$

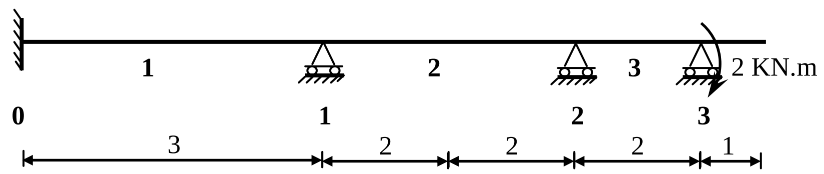
$$\mathrm{M}_2 = \frac{1}{b_2}.\frac{\omega_2^{'} + \frac{\omega_2^{''}}{\phi_2}}{\frac{1}{\phi_2\phi_2^{'}} - 1} = 0,03$$

$$\mathrm{M}_0 = -\phi_1.\mathrm{M}_1$$

$$\mathrm{M}_0 = -\frac{1}{2}(-0,03) = 0,015$$

$$\mathrm{M}_3 = 0$$

- **3ème Cas**



$$M_3 = -2,0$$

$$M_2 = -\phi_3.M_3 = -\frac{25}{134}.(-2,0) = 0,37$$

$$M_1 = -\phi_2.M_2 = -\frac{8}{25}.(0,37) = -0,12$$

$$M_0 = -\phi_1.M_1 = -\frac{1}{2}.(-0,12) = 0,06$$

Moments finaux

$$M_0 = (-0,97) + (0,015) + (0,06) = -0,895$$

$$M_1 = (-0,31) + (-0,03) + (-0,12) = -0,46$$

$$M_2 = (0,11) + (0,03) + (0,37) = 0,51$$

$$M_3 = -2,0$$

Efforts tranchants et Moments

$$M(x) = \mu(x) + M_g.\left(1 - \frac{x}{L}\right) + M_d.\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$T(x) = \frac{\partial(\mu(x))}{\partial x} + \frac{M_d - M_g}{L}$$

Travée 0 – 1

$$M(x) = \mu(x) + M_0.\left(1 - \frac{x}{L}\right) + M_1.\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$M(x) = -\frac{x^2}{2} + 1,645.x - 0,895$$

$$T(x) = -x + 1,645$$

$$M_{\max} = 0,46 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 1,645)$$

Travée 1 – 2

$0 \le x \le 2$

$$M(x) = 1,243 - 0,46$$

$$T(x) = 1,243$$

$2 \le x \le 4$

$$M(x) = 1,243.x - 4,46$$

$$T(x) = 1,243$$

Travée 2 – 3

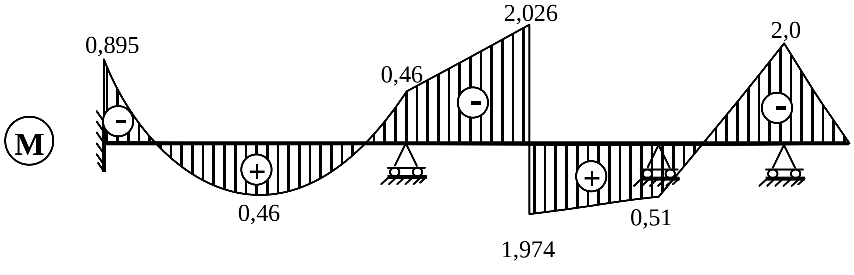
$$M(x) = 1,255.x + 0,51$$

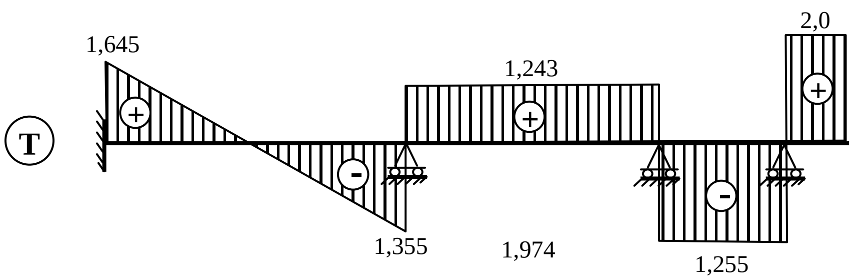
$$T(x) = -1,255$$

Console

$$M(x) = -2.(1 - x)$$

$$T(x) = +2,0$$



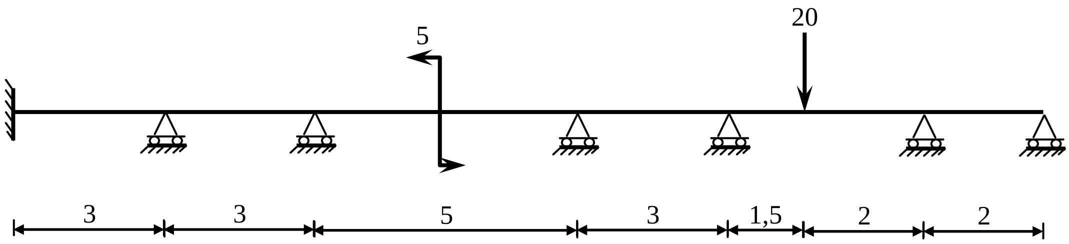


3.2.4. Exercices

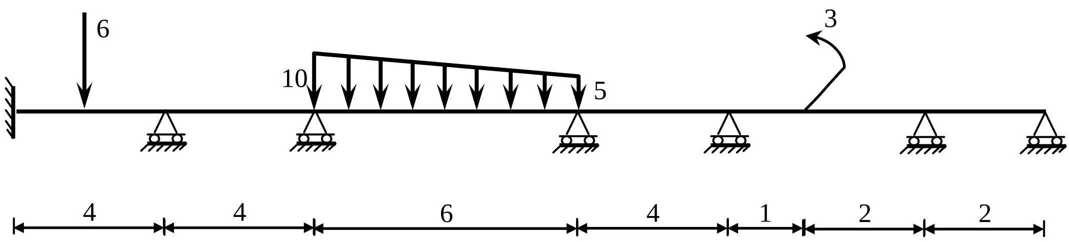
A l'aide de la méthode des Foyers ;

- Déterminer les valeurs des moments M et de l'effort tranchant T, pour les poutres représentées ci-dessous.
- Tracer le diagramme du M et T.
- Evaluer les valeurs de réactions d'appuis.

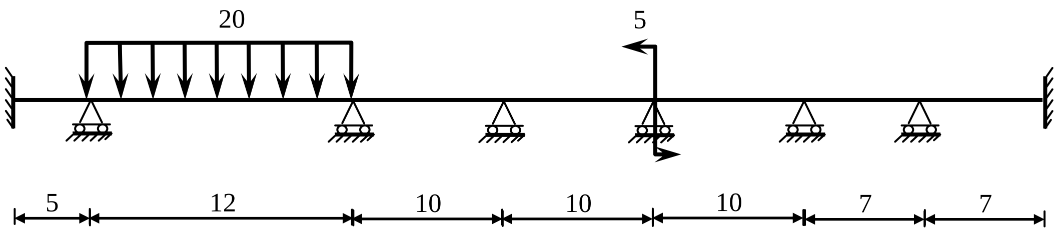
1



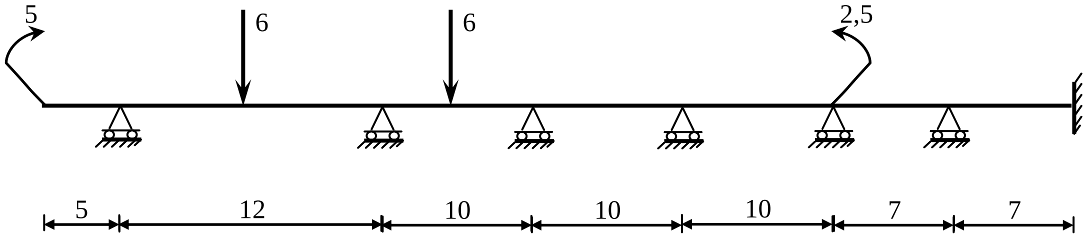
2



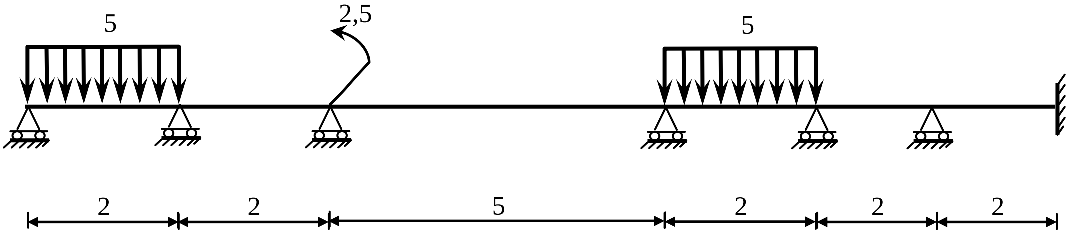
3



4



5



3.3. Méthode de Menabrea

Dans le système élastique, les valeurs que prennent les réactions hyperstatiques correspondant aux liaisons surabondantes rendent stationnaire le potentiel interne.

Les valeurs des réactions hyperstatiques correspondant à l'équilibre du système hyperstatique rendent minimum le potentiel W du système isostatique associé :

$$\frac{\partial W}{\partial R_i} = 0$$

W : Etant exprimé en fonction de l'inconnue hyperstatique choisie R_i . i = 1, 2, ….., P
P : Etant le degré d'hyperstaticité de la structure.

3.3.1. Application du théorème de Menabrea au calcul des réactions hyperstatiques

1ère Etape : On rend la structure isostatique en supprimant les liaisons surabondantes,

2ème Etape : On remplace ces liaisons par des réactions hyperstatiques inconnues,

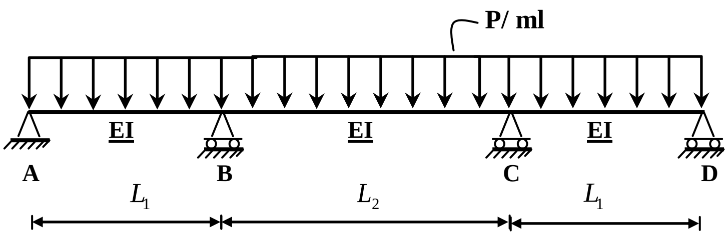
3ème Etape : On calcule l'énergie de déformation W en fonction :

- Des charges appliquées,
- Des réactions hyperstatiques.

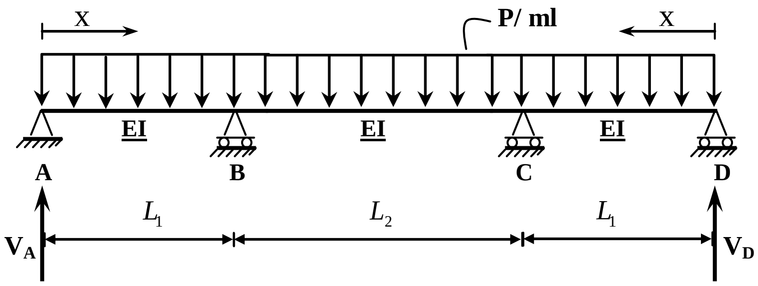
On obtient autant d'équations linéaires qu'il y a d'inconnues.

Remarque
Pour simplifier le calcul, il est préférable de ne procéder aux intégrations qu'après avoir explicité les équations dans lesquelles on dérive **sans** le signe somme.

3.3.2. Exemple d'application



La poutre est deux fois hyperstatique, mais vu la symétrie on a une seule liaison surabondante, soit la réaction V_A. Le système isostatique associé est la poutre BC avec deux consoles AB et CD.



Système isostatique associé

a) Moment fléchissant du système isostatique associé

- Sur AB : $0 \le x \le L_1$

  $$M(x) = V_A.x - P.\frac{x^2}{2}$$

- Sur BC : $L_1 \le x \le L_2$

  $$M(x) = V_A.x - P.\frac{x^2}{2} + V_B.(x - L_1)$$

- Sur CD : Si on choisit l'origine en D on obtient la même expression de AB, soit :

  $$M(x) = V_D.x - P.\frac{x^2}{2} = V_A.x - P.\frac{x^2}{2}$$

b) Liaisons surabondantes

$$\frac{\partial U}{\partial V_A} = 0 \qquad \int_A^D \left(\frac{M_x}{EI} . \frac{\partial M_x}{\partial V_A} \right) .dx = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial V_A} = \frac{1}{EI}\int_0^{L_1} \left(V_A.x - P.\frac{x^2}{2} \right).x.dx \ + \ \frac{1}{EI}\int_{L_1}^{L_2} \left(V_A.x - P.\frac{x^2}{2} + V_B\left(x - L_1\right) \right).\frac{\partial M}{\partial V_A}.dx + \qquad (1)$$

$$\frac{1}{EI}\int_0^{L_1} \left(V_A.x - P.\frac{x^2}{2} \right).x.dx = 0$$

On remarque qu'il y a deux inconnues dans cette équation V_A et V_B , mais on peut exprimer V_B en fonction de V_A .

Soit, la somme des moments par rapport à C, on trouve :

$$\sum_A^D M_C = 0 \Rightarrow V_A.\left(L_1 + L_2\right) + V_B.L_2 - V_D.L_1 - \frac{P}{2}.\left(L_1 + L_2\right)^2 + P.\frac{L_1^2}{2} = 0$$

$$V_A.L_2 + V_B.L_2 - P.L_2.\left(L_1 + \frac{L_2}{2} \right) = 0$$

$$V_B = P.\left(L_1 + \frac{L_2}{2} \right) - V_A \qquad (2)$$

L'équilibre (1) devient :

$$2.\int_0^{L_1}\left(V_A.x-P.\frac{x^2}{2}\right).x.dx\ +\int_{L_1}^{L_2}\left(-P.\frac{x^2}{2}+L_1.V_A+x.P.\left(L_1+\frac{L_2}{2}\right)-L_1.P.\left(L_1+\frac{L_2}{2}\right).L_1\right).dx=0$$

$$2.\left[V_A.\frac{x^3}{3}-P.\frac{x^4}{8}\right]_0^{L_1}+\left[-P.L_1.\frac{x^3}{6}+L_1^2.V_A.x+\frac{x^2.L_1}{2}.P.\left(L_1+\frac{L_2}{2}\right)-L_1^2.x.P.\left(L_1+\frac{L_2}{2}\right)\right]_{L_1}^{L_2}=0$$

$$L_1^2.L_2.V_A-\frac{L_1^3}{3}.V_A+\frac{5.P.L_1^4}{12}+\frac{P.L_1.L_2^3}{12}-\frac{3.P.L_1^3.L_2}{4}=0$$

$$V_A=V_D=\frac{1}{L_1.L_2-\frac{L_1^2}{3}}.\left(-\frac{5.P.L_1^3}{12}-\frac{P.L_2^3}{12}+\frac{3.P.L_1^2.L_2}{4}\right)$$

La relation (2) donne V_B, soit :

$$V_B=P.\left(L_1+\frac{L_2}{2}\right)-V_A=V_C \qquad \text{(Par symétrie).}$$

Pour le cas particulier de $L_1 = L_2 = L$, on trouve

$$V_A=\frac{3.P.L}{8}=V_D \quad \text{et} \quad V_B=\frac{9.P.L}{8}=V_C$$

3.3.3. Exercices

A l'aide du théorème de Menabrea, tracer le diagramme du moment M pour les exemples ci-dessous.