

## Chapitre II

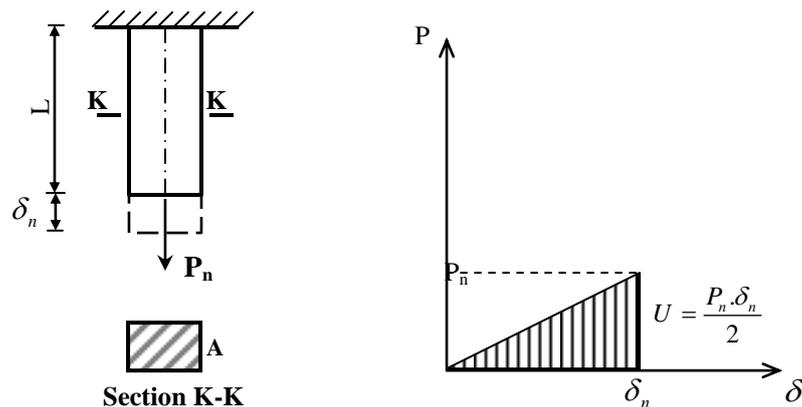
### DEFORMATION DES STRUCTURES ELASTIQUES

#### 2.1. Travail des forces extérieures

Considérons l'éprouvette de la figure 1.

Lorsque  $P$  augmente, l'allongement au point d'application de  $P$  augmente proportionnellement à  $P$ , si le matériau constituant l'éprouvette est élastique linéaire,

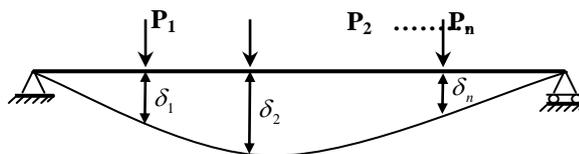
- La charge varie de  $0 \rightarrow P_n$
  - La relation entre  $P_n$  et  $\delta_n$  est linéaire, le fait que la charge  $P_n < P_n$  élastique de l'éprouvette.
- ⇒ Le travail fourni pendant le processus de sollicitation est égal à l'aire hachurée. Le travail se transforme complètement en une énergie potentielle de déformation qui est emmagasinée dans l'éprouvette.



En mécanique des structures, on parle aussi d'énergie potentielle d'un système : C'est le travail effectué de manière réversible par des forces pour passer de l'état initial (0) à l'état final (1).

Soit, 
$$U_{ext} = \frac{P \cdot \delta}{2}$$

Donc, pour un corps élastique sollicité par une série de forces ( $P_1, P_2, \dots, P_n$ ) voir figure 2.



Le travail de ces forces extérieures sera emmagasiné dans le corps élastique sous forme d'une énergie de déformation :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta_i$$

Même chose pour un corps élastique sollicité par une série de couple :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n C_i \cdot \theta_i$$

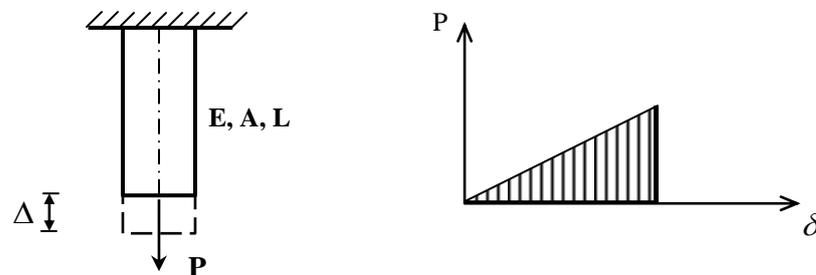
D'où, si les deux sollicitations agissent ensemble on a :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot \sum (P_i \cdot \delta_i + C_i \cdot \theta_i)$$

## 2.2. Travail des forces internes

### 2.2.1. Expression de l'énergie potentielle due à une charge axiale (N)

Prenons l'exemple de la barre en traction, cherchons le travail qu'il faut fournir pour l'allonger de  $\Delta$



Comme dans l'exemple précédent, le matériau constituant la barre est élastique linéaire et l'effort est appliqué progressivement.

Le tableau ci-dessous traduit l'évolution de P et de l'allongement associé Δ par l'intermédiaire du paramètre λ (0 ≤ λ ≤ 1)

Etat	P	Δ
0 : Etat initial	0	0
•		
•		
Etat (λ)	λP	λΔ
Etat (λ + dλ)	(λ + dλ)P	(λ + dλ)Δ
•		
•		
1 : Etat final	P	Δ

Où, dλ représente une variation très faible du paramètre λ.

Le travail élémentaire effectué pour passer de l'état (λ) à l'état (λ + dλ) est :

$$dW = [(\lambda + d\lambda)\Delta - \lambda\Delta] \cdot (\lambda + d\lambda)P$$

$$dW = \lambda \cdot d\lambda \cdot \Delta \cdot P + \cancel{(d\lambda)^2} \cdot \Delta \cdot P = \lambda \cdot d\lambda \cdot \Delta \cdot P$$

Le travail global  $W$  qu'il est nécessaire de fournir à la barre pour l'allonger de  $\Delta$  a pour expression :  $W = \int_0^{\Delta} dW = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \Delta$

Par ailleurs, on a les relations suivantes :

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{L} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{P}{A}$$

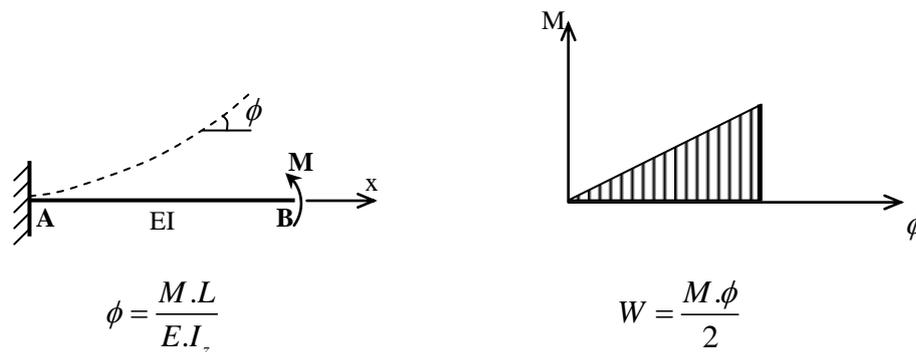
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{P/A}{\Delta/L} \Rightarrow \Delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

L'équation de l'énergie devient :  $W_{\text{int}} = \frac{P^2 \cdot L}{2 \cdot E \cdot A}$

### 2.2.2. Expression de l'énergie de déformation pour un comportement flexionnel

$$dW = \frac{M^2}{2 \cdot E \cdot I} \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2(x)}{E \cdot I_z} \cdot dx}$$

Soit une console (figure 3) soumise à un moment  $M$  appliqué à l'extrémité **B**. la console fléchit, et nous avons comme rotation angulaire à l'extrémité libre :



La relation entre  $M$  et  $\phi$  est linéaire pour les matériaux élastiques par un raisonnement similaire à la charge axiale, l'énergie emmagasinée dans la barre est :

$$W = \frac{M \cdot \phi}{2} = \frac{M^2 \cdot L}{2 \cdot E \cdot I_z} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2(x)}{E \cdot I_z} \cdot dx}$$

Autrement,

$$E \cdot I \cdot Y'' = +M(x) = +M$$

$$E \cdot I \cdot Y' = M \cdot x + C_1$$

$$x = 0, Y' = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow E \cdot I \cdot Y' = M \cdot x$$

$$Y'_{(x=L)} = \phi = \frac{M \cdot L}{E \cdot I_z}$$

### 2.2.3. Expression de l'énergie de déformation due à un comportement de cisaillement

De la même manière, l'énergie se calcule comme dans le cas de charge axiale.

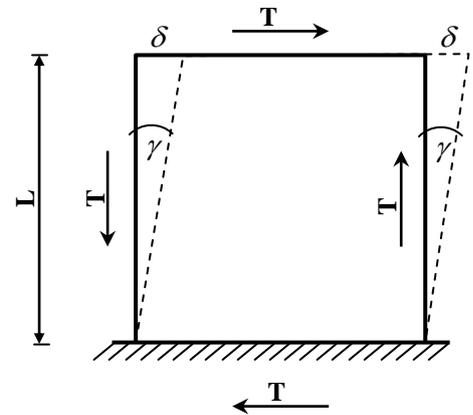
Soit,  $W = \frac{T \cdot \delta}{2}$

$$\gamma = \frac{T}{A_r \cdot G} = \frac{\delta}{L} \Rightarrow W = \frac{T^2 \cdot L}{2 \cdot A_r \cdot G} \Leftrightarrow W = \int_0^L \frac{T^2(x)}{2 \cdot A_r \cdot G} \cdot dx$$

A : Aire de la section transversale  
 A<sub>r</sub> : Aire de la section transversale réduite A<sub>r</sub> = K.A

Section rectangulaire : A<sub>r</sub> =  $\frac{5}{6} \cdot A$

Section circulaire : A<sub>r</sub> =  $\frac{9}{10} \cdot A$



### 2.2.4. Expression de l'énergie de déformation pour un comportement de torsion

De la même manière,  $W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_t^2(x)}{G \cdot K} \cdot dx$

K : Moment d'inertie de torsion de la section,  
 G : Constante de LEDUC  
 GK : Rigidité de torsion.

D'une manière générale, l'énergie accumulée dans un élément d'une poutre quelconque due à une charge axiale N, un moment de flexion M, un effort de cisaillement T et à un moment de torsion M<sub>t</sub> est simplement la somme des quatre (4) effets, soit :

$$W_{int} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{N^2}{E \cdot A} + \frac{M^2}{E \cdot I} + \frac{T^2}{G \cdot A_r} + \frac{M_t^2}{G \cdot K} \right) \cdot dx$$

Et pour les charges extérieures (Forces ou couples) :  $W_{ext} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n (P_i \cdot \delta_i + C_i \cdot \theta_i) \right)$

La loi de conservation de l'énergie impose que le travail externe doit être égal au travail interne:

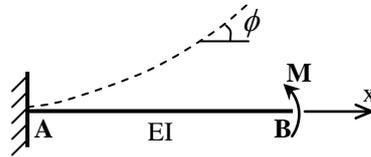
$W_{ext} = W_{int}$  ..... Equation de Bertrand de Fontiviolant

Pour les structures solides : les efforts extérieurs sont absorbés en grande quantité par les moments internes, donc on peut négliger les déformations dues à N et T.

Et si  $M_t = 0 \Rightarrow W_{int} = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{E \cdot I} \cdot dx$

### 2.3. Théorème de Castigliano

« La dérivée partielle de l'énergie potentielle par rapport à l'une des forces appliquées est égale à la projection du déplacement du point d'application de la force suivant le support de cette force »



D'une manière générale et si on a un système de force  $(P_1, P_2, \dots, P_n)$

$$W = f(P_1, P_2, \dots, P_n) \quad \rightarrow \quad \delta_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}$$

si le système comporte un couple  $C_i$  et si  $\phi_i$  est la rotation de la section d'application du

couple  $C_i$  on aura :  $\phi_i = \frac{\partial W}{\partial C_i}$

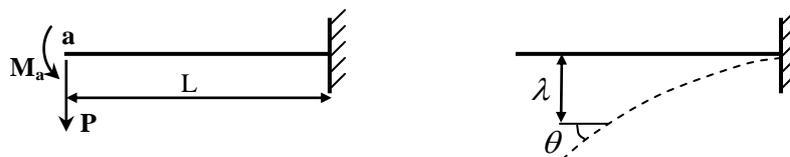
#### Cas de la charge fictive

X est un effort fictif ( Soit une force concentrée  $P_0$  ou un moment concentré  $M_0$  ), qui donc n'existe pas dans la structure réelle: C'est pour cette raison qu'après avoir calculé  $\frac{\partial W}{\partial X}$ , on prend la valeur de cette expression pour  $X = 0$ .

X ne fait que servir d'intermédiaires, afin de permettre le calcul de  $\delta$  par application du théorème de Castigliano.

### 2.31. Exemples d'application

#### Exemple 1



#### Calcul du déplacement $\lambda$ et de rotation $\theta$ du point (a).

On néglige l'effet de l'effort de cisaillement :

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2.E.I} . dx$$

$$\lambda = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial U}{\partial M_x} . \frac{\partial M_x}{\partial P} \quad ; \quad M(x) = -M . a - P . x$$

$$\Rightarrow \lambda = \int_0^L \frac{M(x)}{E.I} \cdot (-x) \cdot dx = \int_0^L \frac{M_a + P \cdot x}{E.I} \cdot x \cdot dx$$

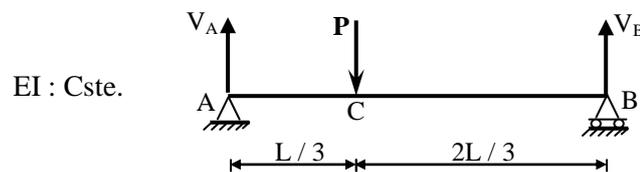
$$\lambda = \frac{1}{E.I} \cdot \left[ \frac{M_a \cdot L^2}{2} + \frac{P \cdot L^3}{3} \right]$$

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M_a} = \frac{\partial U}{\partial M_x} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial M_a} = \int_0^L \frac{M(x)}{E.I} \cdot (-1) \cdot dx = \int_0^L \frac{(M_a + P \cdot x)}{E.I} \cdot dx$$

$$\theta = \frac{1}{E.I} \cdot \left[ M_a \cdot L + \frac{P \cdot L^2}{2} \right]$$

### Exemple 2

A l'aide du théorème de **Castigliano**. Trouver la flèche au point C ( $\delta_C$ ) et la pente au niveau de l'appui A de la partie suivante.



### Solution

$$V_A = \frac{2}{3}P \quad V_B = \frac{1}{3}P$$

$$0 \leq x \leq L/3 \quad \Rightarrow \quad M_1(x) = V_A \cdot x = \frac{2}{3}P \cdot x$$

$$L/3 \leq x \leq L \quad \Rightarrow \quad M_2(x) = V_A \cdot x - P \cdot \left( x - \frac{L}{3} \right) = -\frac{1}{3}P \cdot x + P \cdot \frac{L}{3}$$

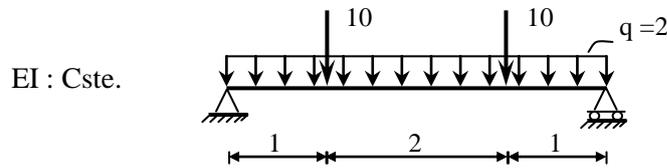
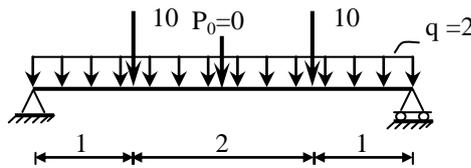
$$\delta_C = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial U}{\partial M_x} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial P}$$

$$\delta_C = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/3} M_1(x) \cdot \frac{\partial M_1(x)}{\partial P} \cdot dx + \int_{L/3}^L M_2(x) \cdot \frac{\partial M_2(x)}{\partial P} \cdot dx \right]$$

$$\delta_C = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{L/3} \left( \frac{2}{3}P \cdot x \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot x \right) \cdot dx + \int_{L/3}^L \left( -\frac{1}{3}P \cdot x + P \cdot \frac{L}{3} \right) \cdot \left( -\frac{1}{3} \cdot x + \frac{L}{3} \right) \cdot dx \right]$$

$$\delta_C = \frac{4 \cdot P \cdot L^3}{243 \cdot EI}$$

**Exemple 3**

 Utiliser la méthode de **Castigliano** pour trouver la flèche

**Solution**


$$EI \cdot \delta_{\max} = \frac{\partial W}{\partial P_0} = \frac{\partial W}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_0} = \int_0^L M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial P_0} \cdot dx$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow M_1(x) = -x^2 + \left(14 + \frac{P_0}{2}\right) \cdot x \Rightarrow \frac{\partial M_1(x)}{\partial P_0} = \frac{x}{2}$$

$$1 < x < 2 \Rightarrow M_2(x) = -x^2 + \left(4 + \frac{P_0}{2}\right) \cdot x + 10 \Rightarrow \frac{\partial M_2(x)}{\partial P_0} = \frac{x}{2}$$

$$2 < x < 3 \Rightarrow M_3(x) = -x^2 + \left(4 - \frac{P_0}{2}\right) \cdot x + 10 + 2 \cdot P_0 \Rightarrow \frac{\partial M_3(x)}{\partial P_0} = -\frac{x}{2} + 2$$

$$3 < x < 4 \Rightarrow M_4(x) = -x^2 + \left(-6 - \frac{P_0}{2}\right) \cdot x + 40 + 2 \cdot P_0 \Rightarrow \frac{\partial M_4(x)}{\partial P_0} = -\frac{x}{2} + 2$$

$$EI \delta_{\max} = \int_0^1 M_1(x) \cdot \frac{\partial M_1(x)}{\partial P_0} \cdot dx + \int_1^2 M_2(x) \cdot \frac{\partial M_2(x)}{\partial P_0} \cdot dx + \int_2^3 M_3(x) \cdot \frac{\partial M_3(x)}{\partial P_0} \cdot dx + \int_3^4 M_4(x) \cdot \frac{\partial M_4(x)}{\partial P_0} \cdot dx$$

①
②
③
④

$$\text{①} = \int_0^1 \left[ -x^2 + \left(14 + \frac{P_0}{2}\right) \cdot x \right] \cdot \frac{x}{2} \cdot dx = 2,208$$

$$\text{②} = \int_1^2 \left[ -x^2 + \left(4 + \frac{P_0}{2}\right) \cdot x + 10 \right] \cdot \frac{x}{2} \cdot dx = 17,041$$

$$\text{③} = \int_2^3 \left[ -x^2 + \left(4 + \frac{P_0}{2}\right) \cdot x + 10 + 2P_0 \right] \cdot \left[ -\frac{x}{2} + 2 \right] \cdot dx = 10,291$$

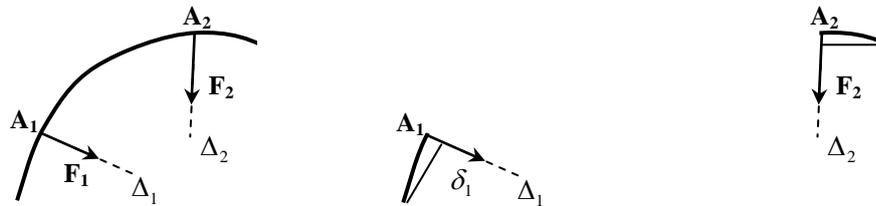
$$\text{④} = \int_3^4 \left[ -x^2 - x \left(6 + \frac{P_0}{2}\right) + 40 + 2P_0 \right] \cdot \left[ -\frac{x}{2} + 2 \right] \cdot dx = 2,208$$

$$\Rightarrow \boxed{EI \cdot \delta_{\max} = 31,748}$$

## 2.4. Théorème de réciprocité de Maxwell et Betti

« Le travail produit par une force  $F_1$  (Couple  $C_1$ ) pour des déplacements (Rotations) dus à l'application d'une force  $F_2$  (Couple  $C_2$ ) est égal au travail produit par la force  $F_2$  (Couple  $C_2$ ) pour les déplacements (Rotations) dus à l'application d'une force  $F_1$  (Couple  $C_1$ ) »

Considérons une poutre soumise aux deux forces  $F_1$  et  $F_2$  en  $A_1$  et  $A_2$  de support  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$



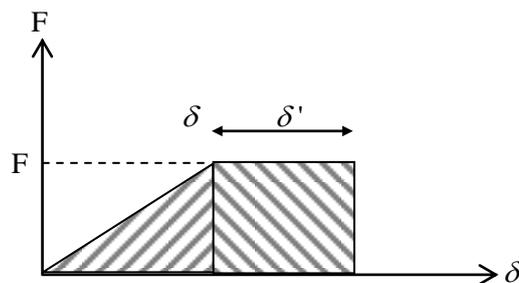
### 2.4.1. Application de la force $F_1$ d'abord

Calculons le potentiel interne  $U$  de la poutre résultant des deux forces  $F_1$  et  $F_2$

$A_1$  se déplace de  $\delta_1$  suivant le support  $\Delta_1 \rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot F_1 \cdot \delta_1$

*En suite on applique  $F_2$*  - Le potentiel devient :  $U = \frac{1}{2} \cdot F_1 \cdot \delta_1 + \frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot \delta_2 + F_1 \cdot \delta_1'$

**Remarque :** La quantité  $F_1 \cdot \delta_1'$  n'est pas divisée par 2, car la force  $F_1$  reste constante durant le temps où le point  $A_1$  subit le déplacement  $\delta_1'$



### 2.4.2. Application de la force $F_2$ d'abord

$U = \frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot \delta_2$

*En suite on applique  $F_1$*  - Le potentiel devient :  $U = \frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot \delta_2 + \frac{1}{2} \cdot F_1 \cdot \delta_1 + F_2 \cdot \delta_2'$

On obtient à partir des deux expressions :

$$F_1 \cdot \delta_1' = F_2 \cdot \delta_2' \quad \text{si } F_1 = F_2 \Rightarrow \boxed{\delta_1' = \delta_2'} \quad (\delta_{12} = \delta_{21})$$

(Ligne d'influence des déplacements). Maxwell a suivi le même principe en prenant  $F_1 = F_2 = 1$

## 2.5. Généralisation du théorème de Castigliano

### 2.5.1. Théorème de la charge unité ou théorème de Muller – Breslau

#### Enoncé du théorème

Le travail d'un effort unitaire appliqué à une structure chargée est égal au travail des efforts internes qu'il développe dans cette structure, dans les déformations élastiques dues aux charges extérieures.

$$\delta_i = \int_{Structure} \left[ \frac{M \cdot \bar{M}_i}{E.I} + \frac{N \cdot \bar{N}_i}{E.S} + \frac{T \cdot \bar{T}_i}{G.S} \right] dx$$

(Cas d'une structure plane chargée dans son plan).

#### Démonstration :

On a :

$$\Delta_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} \quad (\text{Castigliano}) \quad W = \int_{Structure} \frac{M(x)^2}{2.E.I} dx$$

#### Remarque

La démonstration est faite sur le seul terme du moment fléchissant, ceci dans le but de simplifier les écritures.

$$\frac{\partial W}{\partial F_i} = \int_s \frac{M}{E.I} \cdot \frac{\partial M}{\partial F_i} dx$$

Où, M représente le moment fléchissant en un point courant de la structure. Il faudrait écrire M(x).

$F_i$  : Représente un effort concentré appliqué en (i),

$\bar{F}_i$  : Représente un effort concentré unitaire appliqué en (i).

**M** est toujours linéaire par rapport à un effort concentré : C'est le produit de cet effort par la distance au point en lequel on le calcule (En expression formelle). On peut donc écrire :

$$\frac{\partial M}{\partial F_i} = \text{« Distance »} = M(F_i = 1) = \bar{M}_i$$

On note en effet  $\bar{M}_i$  le moment dû à  $F_i = 1$  (ou  $\bar{F}_i$ ) appliqué en (i).

Si l'on reporte la valeur de  $\frac{\partial M}{\partial F_i}$  dans l'expression de  $\frac{\partial W}{\partial F_i}$ , on obtient :  $\delta_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} = \int_s \frac{M \cdot \bar{M}_i}{E.I} dx$

#### Rappel

Signification de  $\delta_i$  : C'est le déplacement dans le sens de  $F_i$  dû à l'ensemble des forces appliquées à la structure.

#### Remarque

Les intégrales du type :  $\int_s \frac{M \cdot \bar{M}_i}{E.I} dx$  ;  $\int_s \frac{N \cdot \bar{N}_i}{E.S} dx$  ;  $\int_s \frac{T \cdot \bar{T}_i}{G.S} dx$  sont appelées intégrales de Mohr.

## 2.6. Théorème de Verechtchaguine

$$\delta_i = \int_a^b \frac{M(x) \cdot \bar{M}(x)}{EI} \cdot dx$$

On va s'intéresser aux allures des courbes représentatives de  $M(x)$  et  $\bar{M}(x)$ , dans le cas où  $EI$  est constant.

$M(x)$  est une fonction quelconque, dont le diagramme est connu, mais peut être assez compliqué.

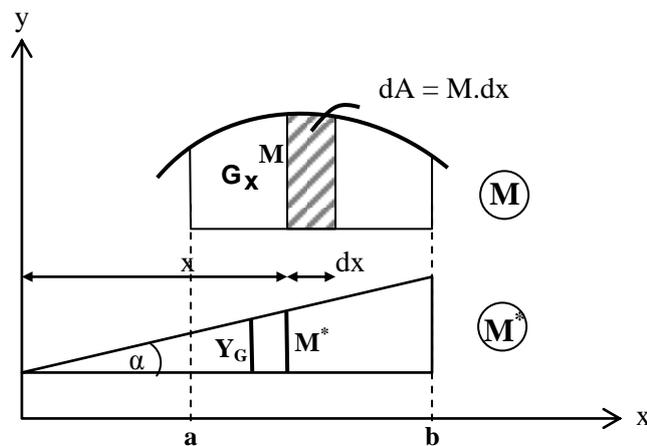
Dans la majorité des cas rencontrés en mécanique des structures :

- Charges extérieures concentrées : *droites*.
- Charges extérieures réparties linéairement : *paraboles*.
- Charges extérieures réparties triangulairement : *cubiques*.

S'appuyant sur ces considérations, Verechtchaguine a énoncé un théorème qui permet un calcul très rapide d'intégrales de cette forme. D'où l'énoncé :

« L'intégrale entre  $a$  et  $b$  du produit de deux fonctions dont l'une au moins est linéaire  $\bar{M}(x)$  sous met sous la forme du produit de deux termes :

- L'aire  $A$  délimitée par la courbe  $\bar{M}(x)$  et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$ ,
- L'ordonnée du centre de gravité  $G(A)$  de l'aire  $A$  lue sur la droite :  $C$ 'est le terme  $Y_G$  »



$$I = \int_L M \cdot \bar{M} \cdot dx \quad dA = M \cdot dx \quad M^* = x \cdot \text{tg}(\alpha)$$

$EI$  : Constant

$$I = \int_L x \cdot \text{tg}(\alpha) \cdot dA = \int_L \text{tg}(\alpha) \cdot x \cdot dA$$

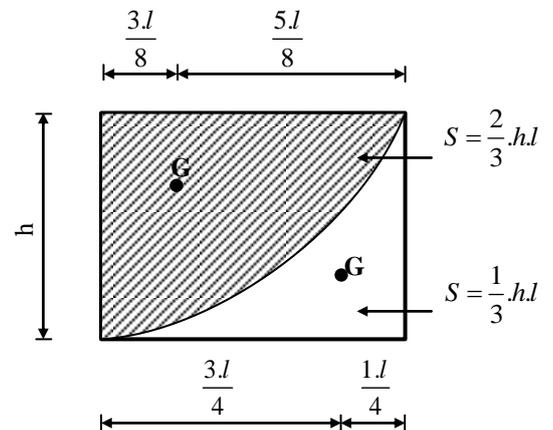
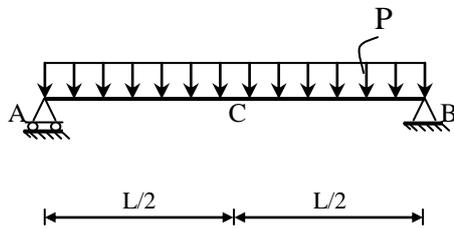
Sachant que  $x_G = \frac{\int_L x \cdot dA}{\int_L dA} \Rightarrow \int_L x \cdot dA = x_G \cdot A$

$$\Rightarrow I = x_G \cdot \text{tg}(\alpha) \cdot A = Y_G \cdot A$$

### 2.6.1. Exemples d'application

#### Exemple 1

Déterminer les valeurs du déplacement au point C et la rotation en B.



#### Remarque

La figure ci-contre montre les valeurs de la surface et de la disposition du centre de gravité d'une section parabolique pour une poutre sollicitée par une charge uniformément répartie..

#### Solution

$$V_A = \frac{P.l}{2}$$

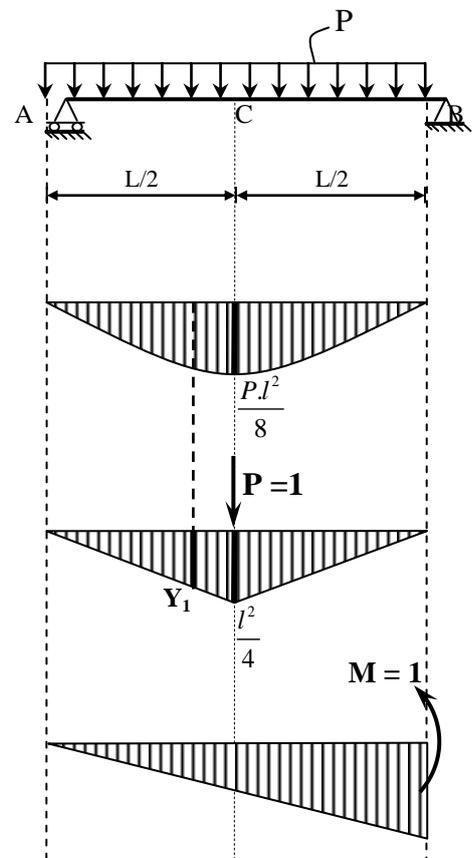
$$h = \frac{p.l^2}{8}$$

$$\frac{l/4}{l/2} = \frac{Y_1}{\frac{5}{8} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)} \Rightarrow Y_1 = \frac{5.l}{32}$$

$$\delta_C = \frac{2}{EI} \left( \frac{2.h.l/2}{3} \cdot Y_1 \right)$$

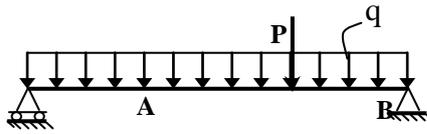
$$\delta_C = \frac{5}{384} \cdot \frac{P.l^4}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{P.l^3}{24.EI}$$



**Exemple 2**

C'est la même question que l'exemple 1.



**Solution**

$$EI.\delta_A = A_1.Y_1 + A_2.Y_2 + A_3.Y_3 + A_4.Y_4$$

$$EI.\theta_B = A_1.Y'_1 + A_2.Y'_2 + A_3.Y'_3 + A_4.Y'_4$$

$$A_1 = \frac{2}{3}.h.\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{2}{3}.9 \quad Y_1 = 0,1875 \quad Y'_1 = 0,6875$$

$$A_2 = A_1 \quad Y_2 = 0,3125 \quad Y'_2 = 0,3125$$

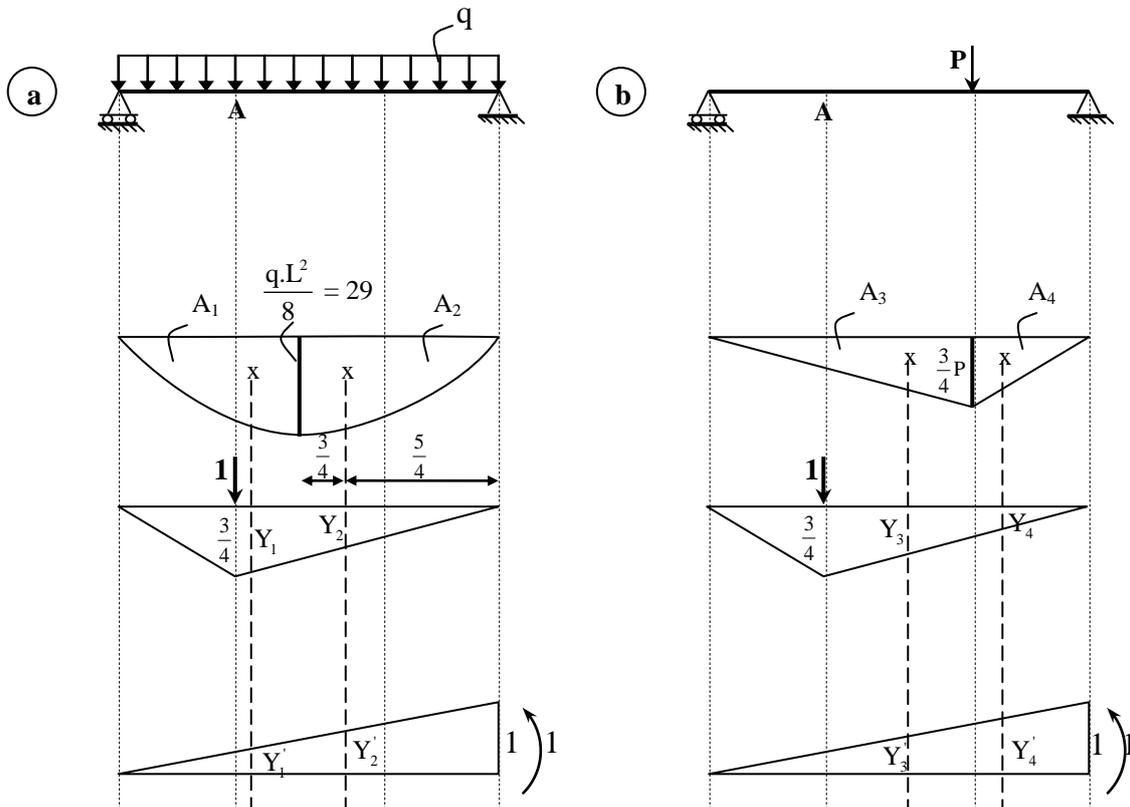
$$A_3 = \frac{9}{8}P \quad Y_3 = 0,5 \quad Y'_3 = 0,5$$

$$A_4 = \frac{3}{8}P \quad Y_4 = 0,1667 \quad Y'_4 = 0,8333$$

$$EI.\delta_A = 1,33.q + 0,625.P$$

$$EI.\theta_B = 2,667.q + 0,875.P$$

**Superposition**



**Exemple 3**

 Trouver la flèche au point C ( $\delta_C$ ).

**Solution**

$$\delta_C = S_1 \cdot Y_1 + S_2 \cdot Y_2$$

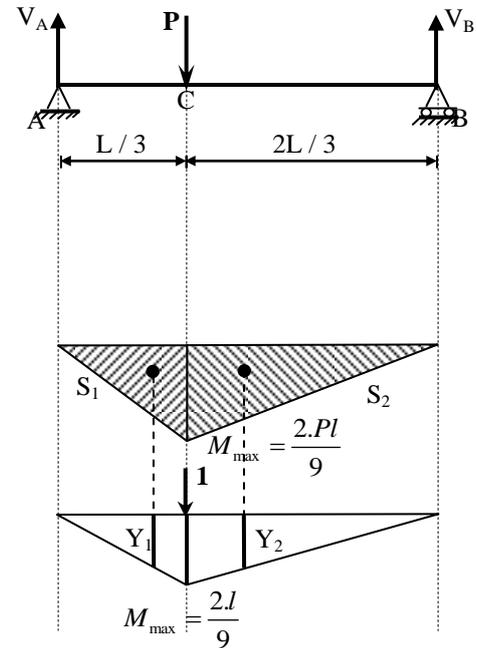
$$\delta_C = \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2Pl}{9} \right) Y_1 + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2l}{3} \cdot \frac{2Pl}{9} \right) Y_2 \right]$$

$$\frac{Y_2}{2l/9} = \frac{(2/3)(2l/3)}{2l/3}$$

$$Y_1 = Y_2 = \frac{4l}{27}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_C = \frac{4 \cdot Pl^3}{243 \cdot EI}}$$

EI : Cste.


**Exemple 4**

$$\delta_B = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} (PL \cdot L) \cdot Y = \frac{PL^2}{2 \cdot EI} \cdot Y$$

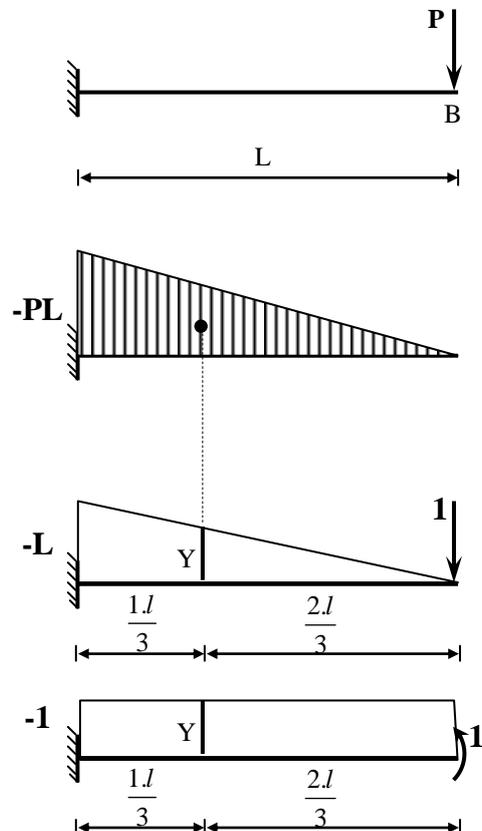
$$Y = \frac{2}{3} \cdot L$$

$$\delta_B = \frac{PL^2}{2 \cdot EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot L = \frac{PL^3}{3 \cdot EI}$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} (PL \cdot L) \cdot Y = \frac{PL^2}{2 \cdot EI} \cdot Y$$

$$Y = 1$$

$$\theta_B = \frac{PL^2}{2 \cdot EI} \cdot 1 = \frac{PL^2}{2 \cdot EI}$$



**Remarques :**

Certaines conditions doivent être vérifiées par les fonctions  $M(x)$  et  $\overline{M}(x)$  :

- La fonction  $M(x)$  doit être de signe constant : en effet, l'aire  $A$  est une aire algébrique, au sens mathématique du terme.  
Si ce n'est pas le cas, découper l'intervalle  $[a, b]$  en autant de tronçons où le signe de  $M(x)$  est constant.
- La fonction  $\overline{M}(x)$  doit être de croissance, ou de décroissance constante sur l'intervalle d'intégration.  
Si ce n'est pas le cas, découper l'intervalle  $[a, b]$  en autant d'intervalles où la pente de  $\overline{M}(x)$  ne varie pas.
- La démonstration a été faite en prenant  $\overline{M}(x)$  linéaire. On obtiendrait évidemment le même type de résultat en prenant cette fois  $M(x)$  linéaire, le problème étant symétrique :  $M.\overline{M} = \overline{M}.M$   
 $\Rightarrow$  A fortiori, le théorème de Verechtchaguine s'applique lorsque les deux fonctions  $M$  et  $\overline{M}$  sont linéaires.
- Enfin, toutes les démonstrations ont été faites en raisonnant sur des termes de moment fléchissant :  $M(x)$ ,  $\overline{M}(x)$ . Tous les résultats obtenus sont applicables aux termes d'effort tranchant :  $T(x)$ ,  $\overline{T}(x)$  et d'effort normal :  $N(x)$ ,  $\overline{N}(x)$ , en transposant les termes :  $GS'$  (Pour l'effort tranchant),  $E.S$  (Pour l'effort normal) à la place de  $EI$  (Pour le moment fléchissant) des démonstrateurs.

Classiquement, les résultats obtenus pour le calcul géométrique des intégrales de Mohr sont représentés par des tableaux, dont nous donnons quelques extraits regroupant la majorité des types de calcul qui nous intéressent.



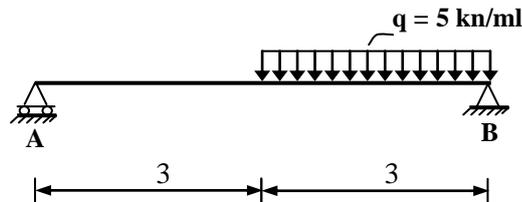
## 2.7. Méthode de l'équation différentielle

Cette technique consiste d'utiliser l'équation différentielle  $EIY'' = M$ .

### 2.7.1. Exemples d'application

#### Exemple 1

Trouver la flèche max de la poutre représentée ci-dessous.



#### Solution

##### 1. Réaction d'appuis

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow 5 \cdot 3 \cdot 4,5 - V_B \cdot 6 = 0 \Rightarrow V_B = 11,25$$

$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 15 \Rightarrow V_A = 3,75$$

##### 2. Eléments de réduction

$$0 < x < 3$$

$$M(x) = 3,75 \cdot x$$

$$EIY'' = 3,75 \cdot x$$

$$EIY' = 3,75 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EIY = 3,75 \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2$$

$$3 < x < 6$$

$$M(x) = 3,75 \cdot x - 5 \cdot \frac{(x-3)^2}{2}$$

$$EI\bar{Y}'' = 3,75 \cdot x - 5 \cdot \frac{(x-3)^2}{2}$$

$$EI\bar{Y}' = 3,75 \cdot \frac{x^2}{2} - 5 \cdot \frac{(x-3)^3}{6} + C_3$$

$$EI\bar{Y} = 3,75 \cdot \frac{x^3}{6} - 5 \cdot \frac{(x-3)^4}{24} + C_3 \cdot x + C_4$$

$$Y'_{x=3} = \bar{Y}'_{x=3} \Rightarrow 3,75 \cdot \frac{9}{2} + C_1 = 3,75 \cdot \frac{9}{2} + C_3 \Rightarrow \underline{C_1 = C_3}$$

$$Y_{x=0} = 0 \Rightarrow \underline{C_2 = 0}$$

$$Y_{x=3} = \bar{Y}_{x=3} \Rightarrow \frac{3,75 \cdot (3)^3}{6} + C_1 \cdot 3 = \frac{3,75 \cdot (3)^3}{6} + C_3 \cdot 3 + C_4 \Rightarrow \underline{C_4 = 0}$$

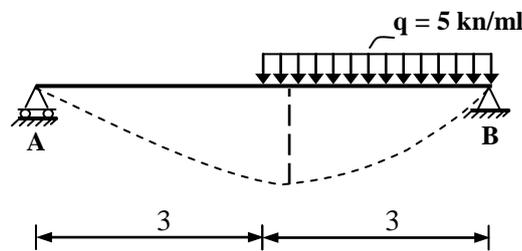
$$C_1 = C_3 = -19,687$$

$$Y' = 0 \Rightarrow 3,75 \cdot \frac{x^2}{2} - 5 \cdot \frac{(x-3)^3}{6} - 19,687 = 0$$

Par tâtonnement

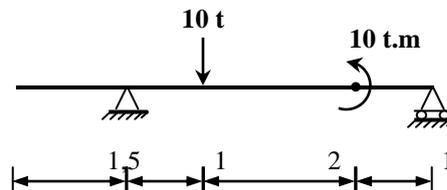
Soit,  $x = 3,2413$

$$\text{Alors, } Y_{\max}(3,2413) = 3,75 \cdot \frac{(3,2413)^3}{6} - 5 \cdot \frac{(3,2413-3)^4}{24} - 19,687 \cdot 3,2413 = \boxed{+42,528 \text{ mm}}$$

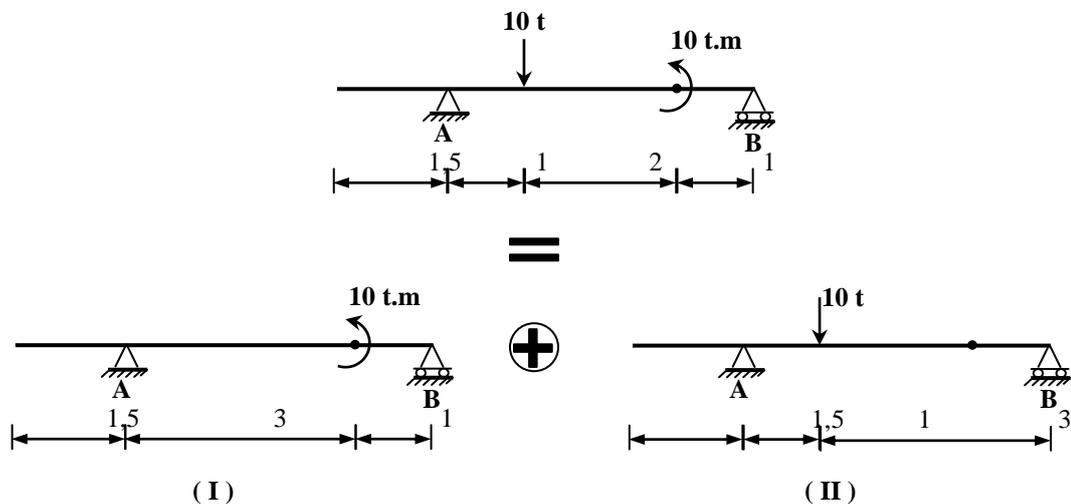


### Exemple 2

C'est la même question que l'exemple 1.



### Superposition



**1<sup>er</sup>. Cas (I)**

$$R_A = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$0 < x < 3$$

$$M(x) = R_A \cdot x$$

$$EI \cdot Y_1'' = R_A \cdot x$$

$$EI \cdot Y_1' = R_A \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EI \cdot Y_1 = R_A \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2$$

$$3 < x < 4$$

$$M(x) = R_A \cdot x - 10$$

$$EI \cdot Y_2'' = R_A \cdot x - 10$$

$$EI \cdot Y_2' = R_A \cdot \frac{x^2}{2} - 10 \cdot x + C_3$$

$$EI \cdot Y_2 = R_A \cdot \frac{x^3}{6} - 10 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4$$

Pour

$$x = 0 \quad \Rightarrow Y_1 = 0 \quad \Rightarrow C_2 = 0$$

$$x = 4 \quad \Rightarrow Y_2 = 0 \quad \Rightarrow 4 \cdot C_3 + C_4 = 53,33 \quad (1)$$

$$Y_{1/x=3}' = Y_{2/x=3}' \quad \Rightarrow C_3 - C_1 = 30 \quad (2)$$

$$Y_{1/x=3} = Y_{2/x=3} \quad \Rightarrow 3 \cdot C_1 - 3 \cdot C_3 - C_4 = -45 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_4 = -45 \\ C_3 = 24,5825 \\ C_2 = 0 \\ C_1 = -5,4175 \end{cases}$$

$Y_{\max} = ?$

$$Y_1' = 0 \quad \Rightarrow R_A \cdot \frac{x^2}{2} - 5,4175 \quad \Rightarrow x = 2,082$$

$$Y_{1/x=2,082} = -7,5248$$

**2<sup>ème</sup>. Cas (II)**

$$0 < x < 1$$

$$EI.Y_1'' = 7,5.x$$

$$EI.Y_1' = 7,5.\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EI.Y_1 = 7,5.\frac{x^3}{6} + C_1.x + C_2$$

$$1 < x < 4$$

$$EI.Y_2'' = 7,5.x - 10.(x-1) = -8,5.x + 10$$

$$EI.Y_2' = -2,5.\frac{x^2}{2} - 10.x + C_3$$

$$EI.Y_2 = -2,5.\frac{x^3}{6} - 10.\frac{x^2}{2} + C_3.x + C_4$$

Pour

$$x=0 \quad \Rightarrow Y_1=0 \quad \Rightarrow C_2=0$$

$$x=4 \quad \Rightarrow Y_2=0 \quad \Rightarrow 4.C_3 + C_4 = -53,33$$

$$Y_{1/x=1}' = Y_{2/x=1}' \quad \Rightarrow C_1 - C_3 = 5$$

$$Y_{1/x=1} = Y_{2/x=1} \quad \Rightarrow C_1 - C_3 - C_4 = 3,33$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_4 = 1,67 \\ C_3 = -13,75 \\ C_2 = 0 \\ C_1 = -8,75 \end{cases}$$

$$EI.Y_2 = -0,416.x^3 + 5.x^2 - 13,75.x + 1,67$$

$$Y_{\max} = ?$$

$$Y_2' = 0 \quad \Rightarrow -1,25.x^2 + 10.x - 13,75 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = 31,25$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-10 + 5,59}{-2,5} = 1,7$$

$$Y_{2/x=1,7} = 9,298$$

**Combinant les 2 cas :**

**Cas (I)**

$$Y_{1/x=2,082} = -7,5248$$

$$Y_{1/x=1,7} = -7,1659$$

**Cas (II)**

$$Y_{2/x=2,082} = -9,0382$$

$$Y_{2/x=1,7} = -9,2980$$

$$\begin{cases} Y_{\max} = Y_{1/x=2,082}^{(I)} + Y_{2/x=2,082}^{(II)} \\ Y_{\max} = -7,5248 + (-9,0382) = \boxed{-16,563} \end{cases}$$

2.8. Exercices

Evaluer la flèche et la rotation au point C par la méthode de Castigliano et vérifier les résultats en utilisant la méthode de Verechtchaguine.

