Université Hamma Lakhdar Eloued
Faculté de Technologie
Département Hydraulique et Géni Civil
$3^{éme}$ année Licence Travaux publics
Module Poutres et treillis

année universitaire : 2020/2021

Chapitre 1 : Flexion composée et flexion déviée

Rappel :

Vu que les éléments de ce chapitre (Flexion composée et flexion déviée) sont en relation directe avec la compression (traction) simple et la flexion simple, on préfère alors de commencer par un petit rappel sur ces deux types de sollicitation.

Compression et traction simple

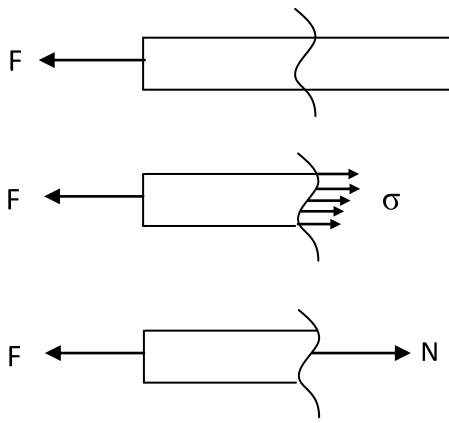
1) Définition :

1.1) Traction : une poutre droite est sollicité en traction chaque fois que les actions a ses extrémités es réduisent à deux force égales et directement opposées, qui tendent à l'allonger.

1.2) Compression : un corps est sollicité à la compression si les forces extérieures se réduisent à deux forces égales directement opposées qui tendent à le raccourcir.

2) Effort normal :

Faisons une section dans la poutre entre les deux extrémités, des efforts intérieurs seront apparaître.



Avec : $N = \int_A \sigma\, dA$

La résultante des contraintes qui s'exercent en chaque point de la section, se réduit au seul effort normal N (appliqué au centre de gravité de la section)

Si N>0 ……………………. c'est un effort de traction
Si N<0 ……………………. c'est un effort de compression

Remarque :
La traction (ou compression) simple est satisfait à trois conditions :

$N_x \neq 0$, $T_y = 0$, $M = 0$

3) <u>Contrainte normale :</u>

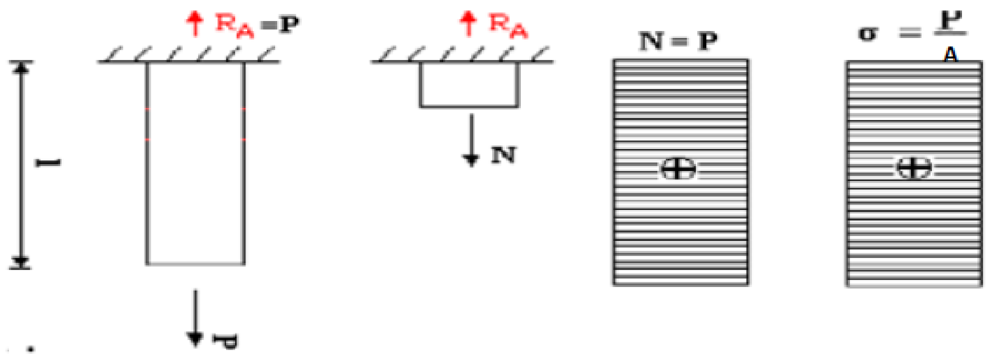
$$N = \int_A \sigma\, dA = \sigma A \qquad \Rightarrow \sigma = \frac{N}{A}$$

σ : c'est la contrainte normal

σ > 0 ………………..contrainte normale de traction
σ < 0 ………………..contrainte normale de compression

Avec : σ en Mpa , N en Newton et A en mm²

<u>Exemple :</u> Soit la barre suivante soumise à l'effort de traction P, on trace le diagramme de L'effort normal N, el la contrainte normale σ comme suit :



4) <u>Condition de résistance :</u>

Dans tous les cas la contrainte calculée σ doit être inférieur à la contrainte admissible σ_{adm} :

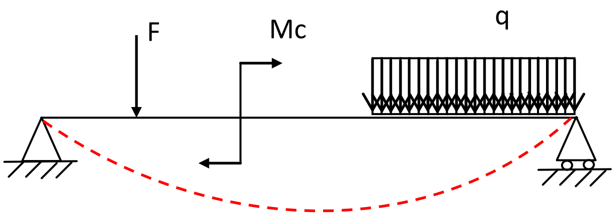
$\sigma \leq \sigma_{adm}$ avec : $\sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{n}$

σ_e : la limite élastique du matériau déterminer par les essais.
n : coefficient de sécurité.

Flexion simple

1) définition :

Il est fréquent que les barres subissent l'action d'une charge transversale ou des couples extérieurs. Dans ces conditions, les sections droites de la barre sont sollicitées par des moments fléchissants, c'est-à-dire des moments intérieurs dont le plan d'action est perpendiculaire au plan de la section droite. L'action d'une charge provoque l'incurvation de l'axe de la barre comme le montre la figure ci-dessous.



Cette forme de sollicitation s'appelle flexion, et les barres qui travaillent surtout à la flexion s'appellent ''poutres''.

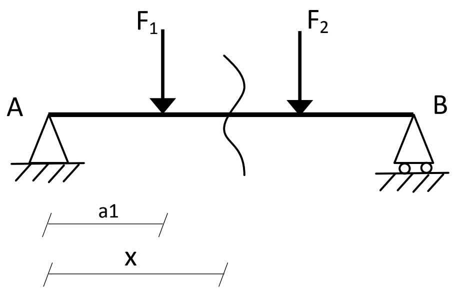
2) Effort tranchant et moment fléchissant :

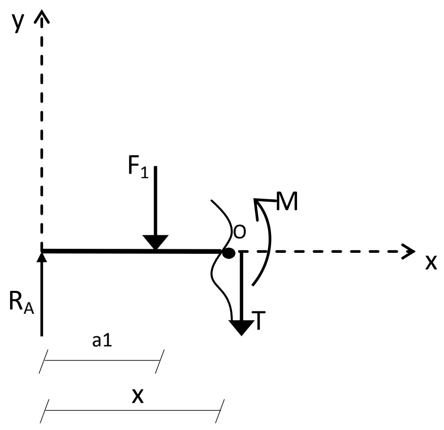
La flexion simple engendre dans les sections droites d'une poutre deux efforts intérieurs le moment fléchissant M et l'effort tranchant T.

La détermination de M et T se fait par l'application de la méthode des sections, pour illustré cette méthode on prend l'exemple de la poutre ci-dessous.

Pratiquons une coupe fictive à la distance x de l'appui gauche, rejtons la partie droite de la poutre et considérons l'équilibre de la partie gauche (ou bien l'inverse, on élimine la partie gauche et on considére l'équilibre de la partie droite).

On remplace l'interaction des parties de la poutre par les efforts intérieurs M et T.





Pour calculer M et T, on utilise les deux équations d'équilibre :

$$\sum F/y = 0 \quad \Rightarrow \quad T + F_1 - R_A = 0 \quad \Rightarrow T = R_A - F_1$$

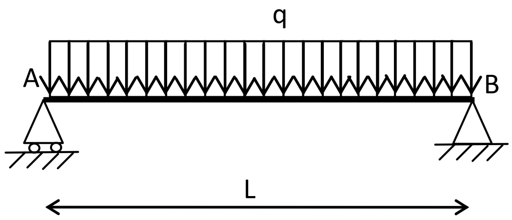
$$T = \sum (f_i)_y$$

$$\sum M/o = 0 \quad \Rightarrow \quad M + F_1(x - a_1) - R_A x = 0$$

$$M = R_A x - F_1(x - a_1)$$

$$M = \sum M_o\,(f_i)$$

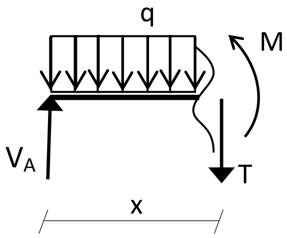
Exemple : Cas d'une charge uniformément répartie



Détermination des réactions:

$\Sigma \quad M/A = 0 \Rightarrow \; V_B\, L - qL\,(L/2) = 0$

$\Rightarrow \; V_B = qL/2$



$\Sigma \quad F/y \; = 0 \Rightarrow \; V_A + V_B - qL = 0$

$\Rightarrow \; V_A = qL/2$

Expressions des efforts internes:

$0 \leq \; x \leq \; L$

$T + q\,x - V_A = 0$

$\Rightarrow \; T = qL/2 - q\,x$

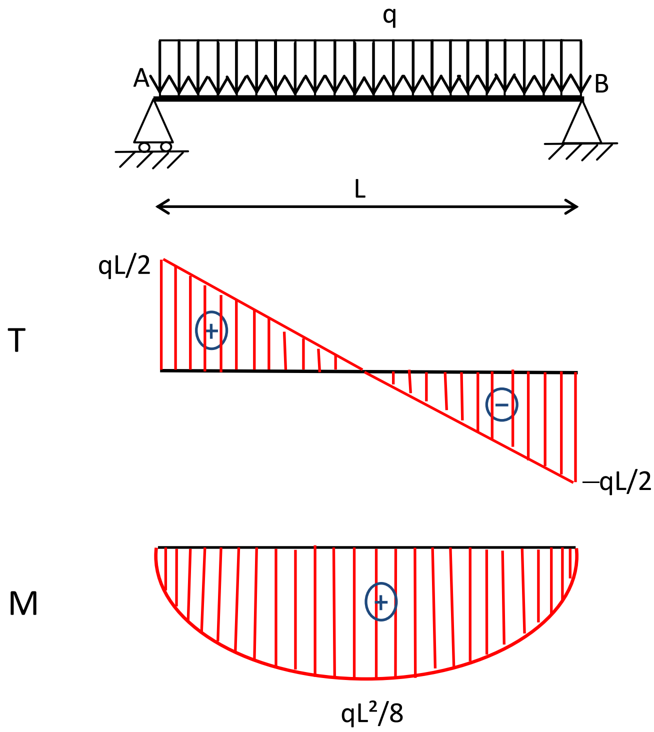
$T(0) = qL/2 \qquad T(L) = -\,qL/2$

$M + q\,x\,(x/2) - V_A\,x = 0$

$M = qLx/2 - q\,x^2/2$

$M(0) = 0,\ M(L) = 0$

$Mmax = M(L/2) = qL^2/8$

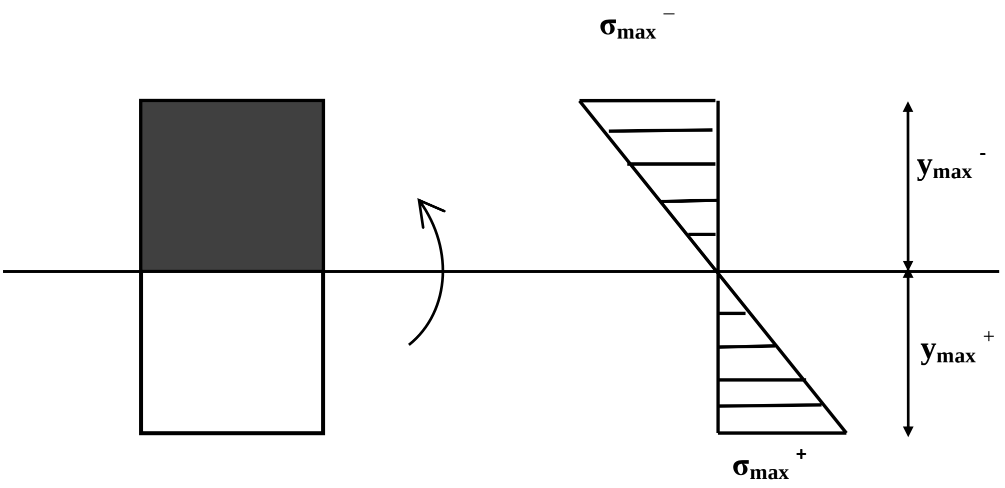


3) Contraintes normales en flexion simple :

La contrainte normale dans la section transversale d'une poutre soumise à un moment fléchissant et donnée par :

$$\sigma_x = \frac{M_z\ y}{I_z}$$

La fibre la plus sollicitée (la contrainte de traction ou de compression maximale) est située au point le plus éloigné de l'axe neutre.



$$\sigma_{max} = \frac{M\ y_{max}}{I_z}$$

σ_{max}^{-} : contrainte de compression max

σ_{max}^{+} : contrainte de traction max

Condition de résistance :

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{adm}$$

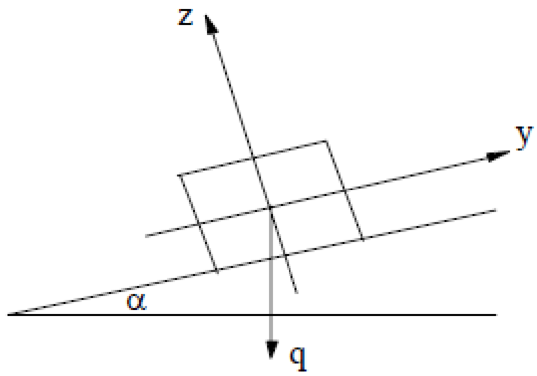
Flexion Déviée

1) Introduction

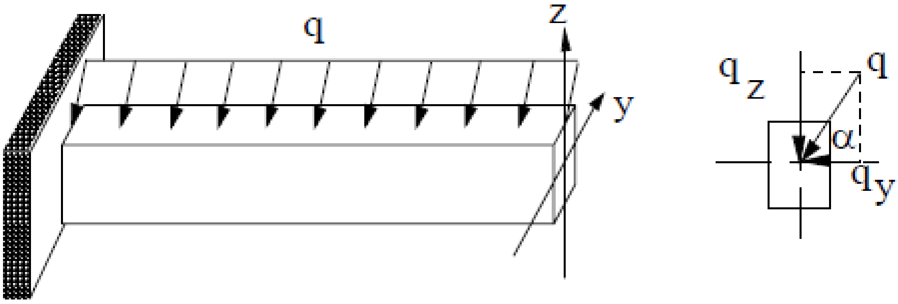
Dans le cas général une section peut être soumise à l'action des six composantes de l'effort internes à savoir (N, Tx, Ty, Mx, My, Mz) et qui ont été classées sous quatre catégories de sollicitation ou déformation simple: traction et compression (N), cisaillement (Tx , Ty) torsion Mx et flexion My, Mz. Dans la pratique courante, on rencontre rarement des cas où les sollicitations sont simples moins encore ou les six composantes des efforts internes apparaissent en même temps au niveau d'une section.
On rencontre, cependant, différents types de leurs combinaisons. Sous les hypothèses de la résistance des matériaux ces combinaisons peuvent être analysées en utilisant le principe de superposition des efforts. Dans ce chapitre on étudiera la combinaison de deux flexions dite *flexion déviée* et la combinaison de la flexion déviée avec la traction ou la compression communément appelée *flexion composée.*

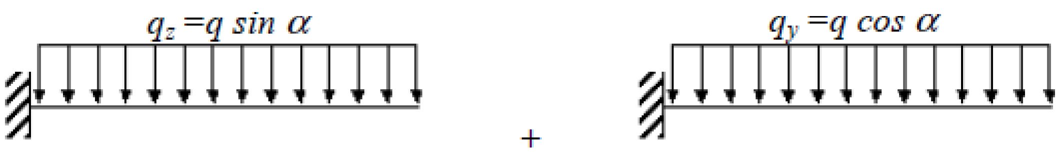
2) Définition de la flexion déviée

La flexion déviée est le résultat de l'action des forces extérieures agissant suivant un plan différent de ceux des axes principaux de la poutre. Par exemple une panne d'une toiture inclinée soumise à une charge verticale.



L'étude de la flexion déviée revient à décomposer les sollicitations en deux flexions planes suivant les plans principaux.





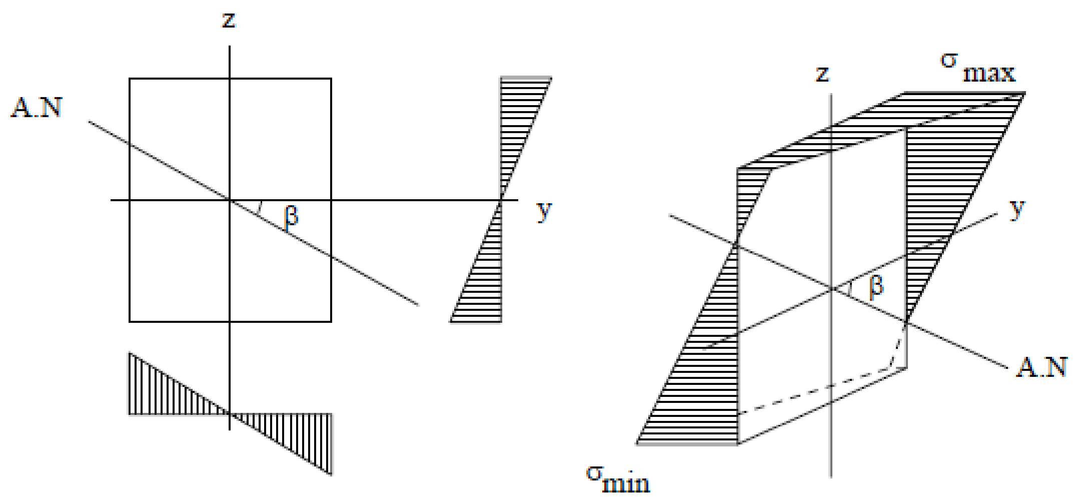
3) contrainte normale

Pour une action simultanée de My et Mz, les contraintes en un point de coordonnées y et z se déterminent par la formule :

$$\sigma = \frac{M_z\, y}{I_z} + \frac{M_y\, z}{I_y}$$

I_y et I_z moments d'inertie principaux de la section droite de la poutre suivant *y* et *z*.
My et *Mz* sont les moments fléchissant par rapport aux axes *y* et *z* qui sont les composantes du moment fléchissant résultants.

Ce résultat est établi directement en considérant que la flexion déviée comme la somme de deux flexions dirigées suivant les axes centraux d'inertie et en appliquant le principe de superposition.
.



4) Axe neutre

L'axe neutre est l'ensemble des points pour les quels la contrainte s est nulle.
L'axe neutre, a pour équation :

$$\sigma = 0 \qquad \Rightarrow \frac{M_z\, y}{I_z} + \frac{M_y\, z}{I_y} = 0$$

$$Donc: \qquad y = -\frac{M_y}{M_z} \times \frac{I_z}{I_y} z$$

En flexion déviée due à une charge inclinée de α par rapport à l'axe oy on a les relations :

$$M_z = M \sin\alpha$$
$$M_y = M \cos\alpha$$

Où M est le moment suivant un axe orienté de α par rapport à y-y.
La tangente de l'axe neutre s'écrit alors:

$$tg\beta = -\frac{M_y}{M_z} \times \frac{I_z}{I_y} = -ctg\alpha \frac{I_z}{I_y}$$

Et on peut écrire σ par :

$$\sigma = M \left(\frac{z \cos \alpha}{I_y} + \frac{y \sin \alpha}{I_z} \right)$$

Le calcul de vérification de la résistance s'effectue à la base des données sur la contrainte totale maximale. D'après la formule de la contrainte, les contraintes maximales se localisent aux points les plus éloignés de l'axe neutre. Pour une section symétrique on a :

$$\sigma_{max}^{+} = \left| M_{max} \left(\frac{y_{max} \sin \alpha}{I_z} + \frac{z_{max} \cos \alpha}{I_y} \right) \right| \leq [\sigma_+]$$

$$\sigma_{max}^{-} = -\left| M_{max} \left(\frac{y_{max} \sin \alpha}{I_z} + \frac{z_{max} \cos \alpha}{I_y} \right) \right| \leq [\sigma_-]$$

<u>Application :</u>

Une panne de toiture simplement appuyée de longueur L = 6 m soumise à une charge verticale répartie q=0,5 KN/m, l'angle entre le toit et l'horizontale est de 20° .
On donne : section de la panne (b x h) = (20 x 30) cm
la contrainte admissible $[\sigma] = 10 N/mm^2$

Vérifier la résistance de la panne.

<u>Solution :</u>

On calcul d'abord le moment max dans le plan vertical (plan de la charge)
Pour une poutre soumise a une charge répartie on à :

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{0{,}5 \times (6)^2}{8}$$

$$M_{max} = 2{,}25\ KN.m = 2{,}25 \times 10^6\ N.mm$$

Ce moment fléchissant donne deux composantes M_y et M_z suivant les axes y et z

La contrainte normale dans la section la plus sollicitée :

$$\sigma_{max} = M_{max} \left(\frac{y_{max} \sin \alpha}{I_z} + \frac{z_{max} \cos \alpha}{I_y} \right)$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = 4{,}5 \times 10^8 \ mm^4$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = 2 \times 10^8 \ mm^4$$

$$y_{max} = \frac{h}{2} = 150 \ mm \qquad ; \qquad z_{max} = \frac{b}{2} = 100 \ mm$$

$$\Rightarrow \ \sigma_{max} = 1{,}31 \ N/mm^2 < [\sigma] = 10N/mm^2$$

Donc la condition de résistance est vérifiée.

Flexion composée

La flexion composée provient de l'action conjuguée d'une flexion due à un chargement latérale et d'un effort axial (traction ou compression) ou seulement de l'effet d'un effort normal excentré par rapport à l'axe moyen de l'élément.

.1 *Flexion composée avec traction ou compression*

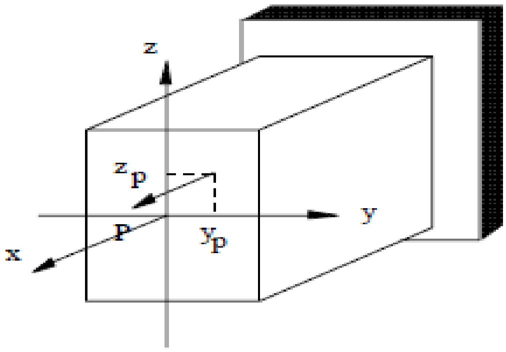
C'est le cas général d'une poutre soumise à des chargements transversaux et longitudinaux, ou en une section arbitraire, les efforts M_Z, M_Y, T_X, T_Y ainsi que N sont présents.

En utilisant le principe de superposition, on peut déterminer la contrainte normale globale en un point quelconque de la section normale par:

$$\sigma = \frac{N_x}{S} + \frac{M_Z}{I_Z} y + \frac{M_Y}{I_Y} z$$

.2 *Traction ou compression excentrée*

La flexion composée peut être aussi le résultat de l'action d'une force longitudinale excentrée par rapport à l'axe moyen de la poutre. On rencontre ce cas de chargement généralement dans les éléments courts sollicités par une force excentrée dont les coordonnées du point d'application sont y_P, z_P .



Les efforts internes en une section quelconque sont:

$N = F$, $M_Z = F.y_P$

Et $M_Y = F.z_P$

D'où les contraintes en un point dans la section :

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_Y}{I_Y} z + \frac{M_Z}{I_Z} y$$

$$\sigma = \frac{F}{S}\left[1 + \frac{z_P S_Z}{I_Y} + \frac{y_P S_Y}{I_Z}\right]$$

On pose $i = \sqrt{\frac{I}{S}}$

$$= \frac{F}{S}\left[1 + \frac{z_P}{i_y^2} z + \frac{y_P}{i_z^2} y\right]$$

L'équation de l'axe neutre: $\sigma = 0 \Rightarrow 1 + \frac{z_P}{i_y^2} z + \frac{y_P}{i_z^2} y = 0$

D'après l'équation de l'axe neutre, ce dernier coupe les axes zz et yy aux points :

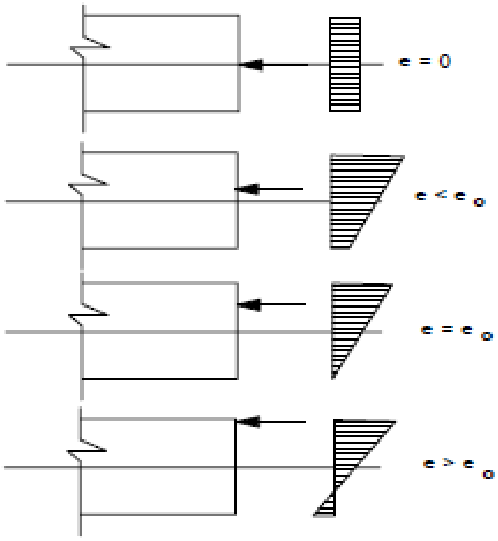
$$y = 0 \quad , \quad z_{AN} = -\frac{i_y^2}{z_P}$$

Et

$$z = 0 \quad , \quad y_{AN} = -\frac{i_z^2}{y_P}$$

Donc l'axe neutre coupe les axes du quadrant opposé de celui du point d'application de la force.

Le noyau central



D'après l'équation de l'axe neutre l'étendu de la partie de la section comprimée ou tendue dépend de l'excentricité de la force. Il est donc d'un grand intérêt pratique d'éviter dans la section droite le développement des contraintes de traction dues à la force compressive excentrique pour assurer la résistance des barres en matériau fragile à la traction. On appelle noyau central de section la partie du plan de la section droite contenant le centre de gravité et limitée par un contour fermé, dans lequel la force appliquée provoque des contraintes de même signe en tous les points de la section droite.

Le contour du noyau central de la section est déterminé par l'ensemble des positions des points d'application de la force excentrée qui fait passer l'axe par tous les points tangents à la section de telle manière qu'elle ne le coupe nulle part.

Les coordonnées des points d'application de la force sont déterminées d'après les formules suivantes :

$$y_P = -\frac{i_z^2}{y_{AN}} \quad , \quad z_P = -\frac{i_y^2}{z_{AN}}$$

Ces formules traduisent la relation entre la position de l'axe neutre et le point d'application de la force. Quand l'axe neutre tourne par rapport à un point fixe y_0 et z_0, le point d'application de la force se déplace suivant une ligne droite PP ne passant pas par le centre de gravité de la section.

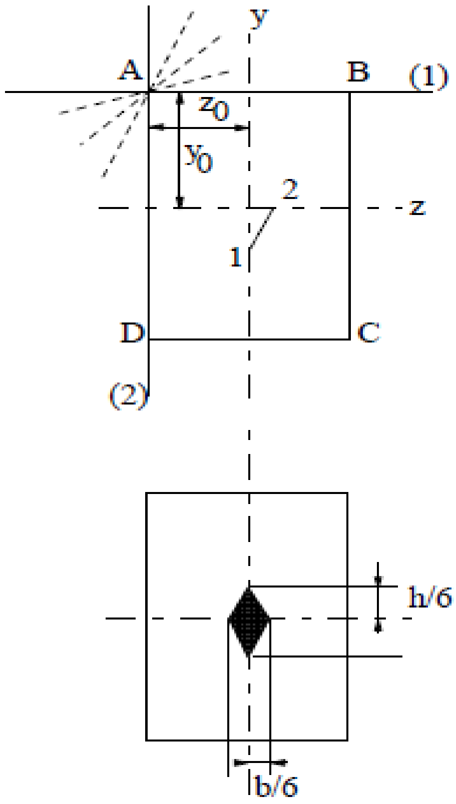
Pour le cas d'un rectangle par exemple quand l'axe neutre est coïncidant avec AB : l'axe neutre coupe l'axe y-y à $y_{AN} = y_0 = \frac{h}{2}$ et ne coupe pas l'axe z-z ($z_{AN} = \infty$).

Les coordonnées du point d'application de la force correspondante à cette position de l'axe neutre sont déterminées par :

$$y_P = -\frac{i_z^2}{y_{AN}} = -\frac{h}{6}$$

car $\quad i_z^2 = \frac{I_z}{S} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}$

$$z_P = -\frac{i_y^2}{z_{AN}} = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0$$



D'une manière analogue on détermine les coordonnées du point 2 qui correspond à une position de l'axe neutre coïncidente avec AD, et on trouve

$$y_P = 0 \ \text{ et } \ z_P = b\ /\ 6$$

La liaison des deux points 1 et 2 correspond à la rotation de l'axe neutre au point (z_o, y_o) passant de la position AB à AD.

Le contour du noyau central de la section rectangulaire est un losange dont les deux autres points 3 et 4 sont déterminés de la même manière que précédemment, c'est à dire quand l'axe neutre passe de BA à AD et de AD à DC.

3 Vérification à la résistance

Pour une section symétrique, la condition de résistance s'écrit :

$$\sigma = \frac{F}{S} \pm \frac{M_Z}{W_Z} \pm \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma]$$

Ou pour le cas d'un effort normal excentré

$$\sigma = \frac{F}{S}\left(1 \pm \frac{z_P}{i_y^2} z_{max} \pm \frac{y_P}{i_z^2} y_{max}\right) \leq [\sigma]$$

4 Application

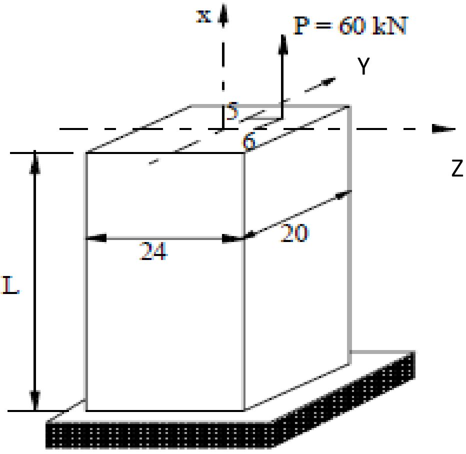
1/ Déterminer les contraintes normales σ_{max}^{+} et σ_{max}^{-} et la position de l'axe neutre dans la section dangereuse de la poutre ci-dessous :

2/ Si les angles que forme P avec les axes x-x, y-y et z-z sont 30°, 60° et 90° respectivement, déterminer la longueur L maximale de la poutre pour que la contrainte normale maximale ne dépasse pas celle provoquée par la force excentrée.

Solution :

1- Les contraintes, maximale et minimale sont données par:

$$\sigma_{max}^{\pm} = \frac{N}{S}\left(1 \pm \frac{z_P}{i_y^2} z_{max} \pm \frac{y_P}{i_z^2} y_{max}\right)$$



Application numérique

$$i_y^2 = \frac{b^2}{12} = \frac{(240)^2}{12} = 4800 mm^2$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{200 \times \overline{240}^3}{12} = 2.3 \times 10^8 mm^4$$

$$i_z^2 = \frac{h^2}{12} = \frac{\overline{200}^2}{12} = 3333.3 mm^2$$

$$I_Z = \frac{bh^3}{12} = \frac{240 \times \overline{200}^3}{12} = 1.6 \times 10^8 mm^4$$

$z_P = 60$ mm $\qquad z_{max} = 120$ mm

$y_P = 50$ mm $\qquad y_{max} = 100$ mm

$N = 60 \times 10^3$ N

$S = 240 \times 200 = 48000$ mm²

$$\sigma_{max}^{\pm} = \frac{60 \times 10^3}{48 \times 10^3}\left(1 \pm \frac{60 \times 120}{4800} \pm \frac{50 \times 100}{3333.3}\right) \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_{max}^{+} &= 5.0 N/mm^2 \\ \sigma_{max}^{-} &= -2.5 N/mm^2 \end{aligned}$$

2- La force inclinée par rapport à l'axe moyen de la poutre provoque une flexion composée dont les moments et l'effort normal résultant des projections de la force sur les axes y-y, z-z et x-x sont respectivement:

$P_x = P\cos\alpha \qquad P_y = P\cos\beta \qquad P_z = P\cos\gamma$

$N = P_x = P\cos\alpha$

$M_y = P_z.L = PL\cos\gamma$

$M_z = P_y.L = PL\cos\beta$

$$\sigma = \frac{N}{S} \pm \frac{M_z y_{max}}{I_z} \pm \frac{M_y z_{max}}{I_y}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P\cos\alpha}{S} + \frac{y_{max} PL\cos\gamma}{I_z} + \frac{PL\cos\beta z_{max}}{I_y}$$

$$\Rightarrow \sigma_{max} - \frac{P\cos\alpha}{S} = L\left(\frac{P\cos\gamma y_{max}}{I_z} + \frac{P\cos\beta z_{max}}{I_y}\right)$$

Application numérique

avec $\sigma_{max} = 5\ N/mm^2$

on obtient:

$$5 - \frac{60\times10^3\cos30}{48000} = L\left(\frac{60\times10^3\cos60\times100}{1.6\times10^8} + \frac{60\times10^3\cos90\times120}{2.3\times10^8}\right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{3.92}{0.0188} = 209\text{mm}$$