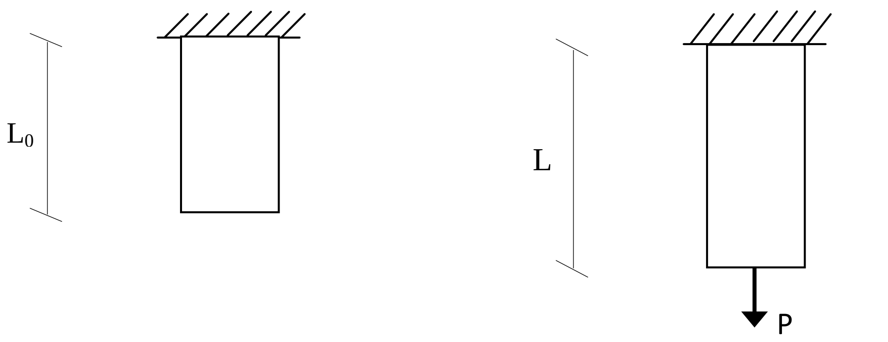
Université Hamma Lakhdar Eloued *année universitaire : 2021/2022*
Faculté de Technologie
Département Hydraulique et Géni Civil
1ére année Master Matériaux en Génie Civil
Module Elasticité

COURS ELASTICITE CHAPITRE III

Les Déformations

1) Généralités :

On dit qu'un corps est déformé lorsqu'il y'a changement des positions relatives des points du corps. Le cas le plus simple est celui d'une barre prismatique suspendu :

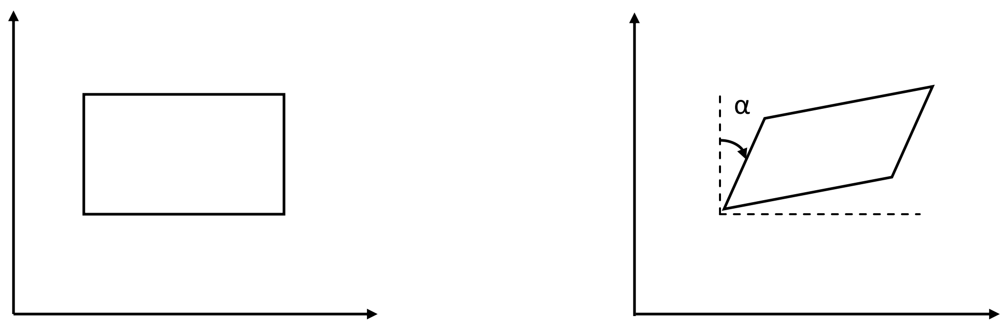


Avant chargement Après chargement

- On définit l'extension comme étant la variation relative de la longueur de l'élément dans l'une des directions du repéré considéré, cette déformation sera noté ε :

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$$

- Un autre type de déformation est celle reliée au changement de l'angle que fait entre eux les deux cotés d'un même élément, ce type de déformation est appelé distorsion (ou glissement) et est noté par γ :



2) Composantes de déformations :

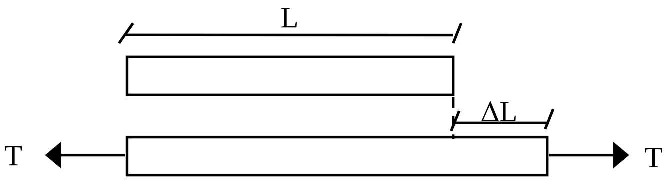
2.1) Extension :

Désignons par u , v , w les composantes des déplacements d'un point de l'élément dans les directions x , y , z. On admettra que ces composantes sont des infiniment petites variant d'une manière continue à l'intérieur du volume.

Suivant l'axe x :

- Pour un élément de longueur L

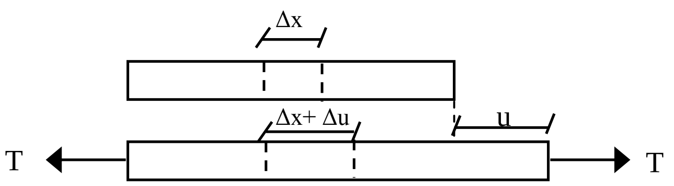
$$\varepsilon_x = \frac{(L + \Delta L) - L}{L} = \frac{\Delta L}{L}$$



- Pour un petit élément de de longueur Δx

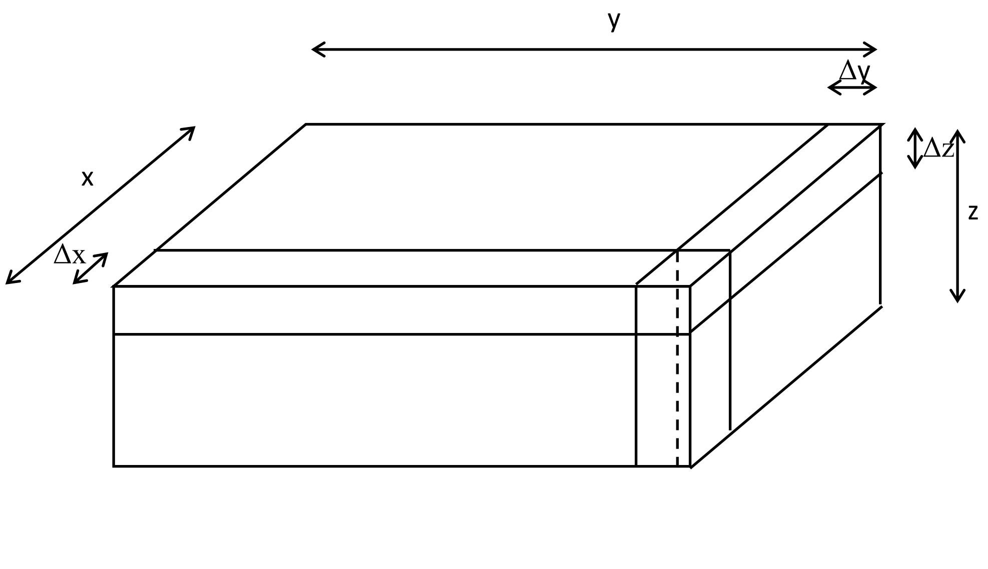
$$\varepsilon_x = \frac{(\Delta x + \Delta u) - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Quand $x \to 0 \;\; \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$

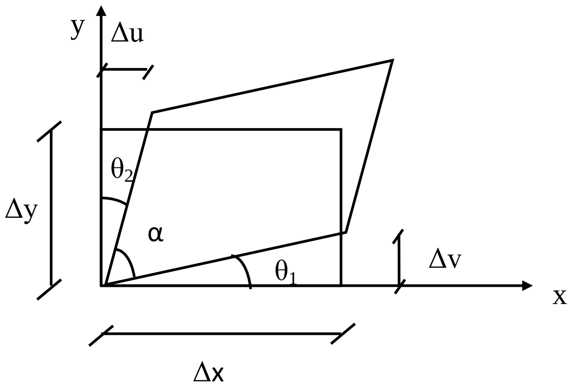


De même suivant les axes y et z :

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\Delta y} \qquad ; \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\Delta z}$$



2.2) Distorsion (déformation angulaire) :
Ce type de déformation se produit sous une contrainte de cisaillement



A l'état initial (avant déformation) :

$$L'angle = \frac{\pi}{2}$$

A l'état actuel (après déformation) :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - (\theta_1 + \theta_2)$$

D'après l'hypothèse des petites déformations :

u et v sont trés petites $\rightarrow \theta_1 \; et \; \theta_2 \ll 1$
$donc \; tg\theta = \theta$

$$\Rightarrow \quad \theta_1 = \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad ; \quad \theta_2 = \frac{\Delta u}{\Delta y}$$

$$quand \begin{cases} \Delta x \\ \Delta y \end{cases} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad \theta_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Alors la déformation dans le plan (x,y) :

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}$$

on définit: $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$

d'une façon similaire pour les plans (x,z) et (y,z) :

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

2.3) Tenseur de déformations

Avec les 06 composantes de déformation on peut définir le tenseur des déformations comme suit :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Sous forme indicielle :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

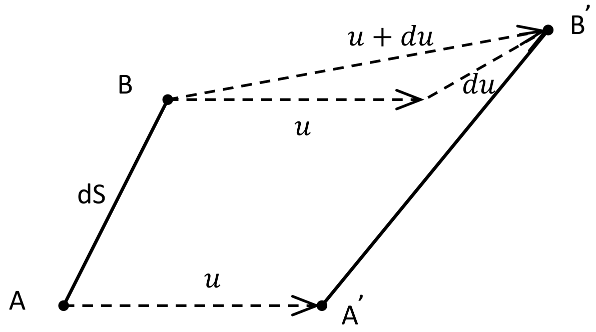
Sous forme matricielle :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(grad\, u + grad\, u^T)$$

Avec : $$grad\, u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

<u>Vecteur déplacement :</u>

Si on défini 2 points A et B très voisins dans le corps solide, après déformation se transforme en A' et B' comme le montre le schéma si dessous :



Le vecteur déplacement $= u + du$

translation
(déplacement du corps rigide)

déformation +rotation

Avec : $ds = \langle dx \quad dy \quad dz \rangle$; $u = \langle u \quad v \quad w \rangle$; $du = \langle du \quad dv \quad dw \rangle$;

du : C'est la résultante des deux vecteurs de déformation et de rotation

$du = [\varepsilon]\{ds\} + [\omega]\{ds\}$

D'après cette relation on peut définir :
Le vecteur de déformation = $[\varepsilon]\{ds\}$
Le vecteur de rotation = $[\omega]\{ds\} = \omega \wedge$ ds
$[\varepsilon]$: Tenseur des déformations (tenseur symétrique)
$[\omega]$: Tenseur des rotations (tenseur antisymétrique)

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ -\omega_{xy} & 0 & \omega_{yz} \\ -\omega_{xz} & -\omega_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

$avec$: $\omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$; $\omega_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$; $\omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)$

3) Les déformations principales :

De la même maniéré que les contraintes les déformations principales ainsi que les directions principales se calculent en résolvant le système :

$$det([\varepsilon] - \varepsilon[I]) = 0$$

Où :
[ε] : tenseur des déformations
[I] : tenseur identité
ε : valeur propre cherchée correspondante à la déformation principale
Ceci nous ramène à résoudre l'équation de $3^{\text{éme}}$ degré :

$$\varepsilon^3 - I_1'\varepsilon^2 + I_2'\varepsilon - I_3' = 0$$

Avec : I_1' , I_2' , I_3' Invariant indépendants.

$I_1' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

$I_2' = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 - \gamma_{xz}^2 - \gamma_{yz}^2\right)$

$I_3' = \varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3 = det[\varepsilon]$

Donc le tenseur des déformations dans les axes principaux prend la forme diagonalisée suivante :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix}$$

<u>Variation relative de volume :</u>
La trace du tenseur des déformations représente la dilatation volumique (variation relative de volume) :

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = trace\ \varepsilon$$

Variation relative de longueur :

La variation relative de longueur ε_l dans la direction du vecteur n :

$$\varepsilon_l = n^T \varepsilon\, n = \langle n \rangle [\varepsilon]\{n\}$$

4) Etat de déformation plane:

On a un état plan de déformation dans (x,y) par exemple lorsque :

$\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$

La tenseur déformation se réduit aux quatre composantes :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

La matrice associée au tenseur de la rotation matérielle prend la forme :

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} \\ -\omega_{xy} & 0 \end{bmatrix}$$

Les déformations principales :

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Lors d'un changement d'axes en faisant une rotation d'angle α sur la facette x' :

$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x\, cos^2\alpha + \varepsilon_y sin^2\alpha + \gamma_{xy}\, sin\alpha\, cos\alpha$

$\gamma_{x'y'} = 2(\varepsilon_y - \varepsilon_x) sin\alpha\, cos\alpha + \gamma_{xy}(cos^2\alpha - sin^2\alpha)$

5) Equations de compatibilités:

Le tenseur des déformations ε possède 06 composantes qui sont des dérivées d'un champ de déplacement (u) à 03 composantes, pour déterminer le champ de déplacement on doit utiliser les 06 composantes de déformations (06 équations différentielles pour 03 inconnues), cela ne peut se faire que si les six fonctions de déformations vérifient certains conditions appelé équations de compatibilités :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} = 0$$

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}\right)=0$$

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right)=0$$

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}\right)=0$$

Les 06 équations précédentes peuvent être écrites :

$$\varepsilon_{ij,kk}+\varepsilon_{kk,ij}-\left(\varepsilon_{kj,ik}+\varepsilon_{ik,kj}\right)=0$$