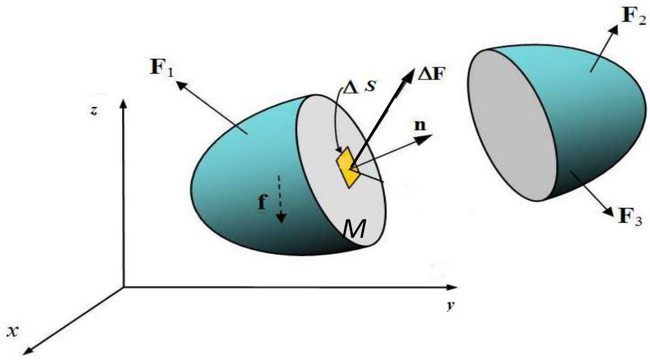
Université Hamma Lakhdar Eloued *année universitaire : 2022/2023*
Faculté de Technologie
Département Hydraulique et Géni Civil
1ére année Master Matériaux en Génie Civil
Module Elasticité

COURS ELASTICITE CHAPITRE II

Les Contraintes

1) Définitions :

la contrainte représente l'intensité de la force agissent sur l'unité de surface, elle est exprimé en (N/m²)

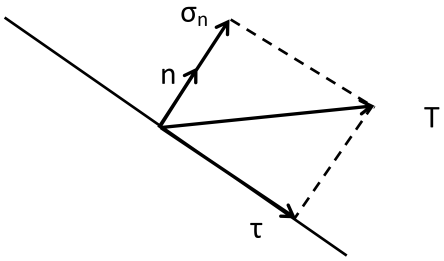


Le vecteur contraint au point M :

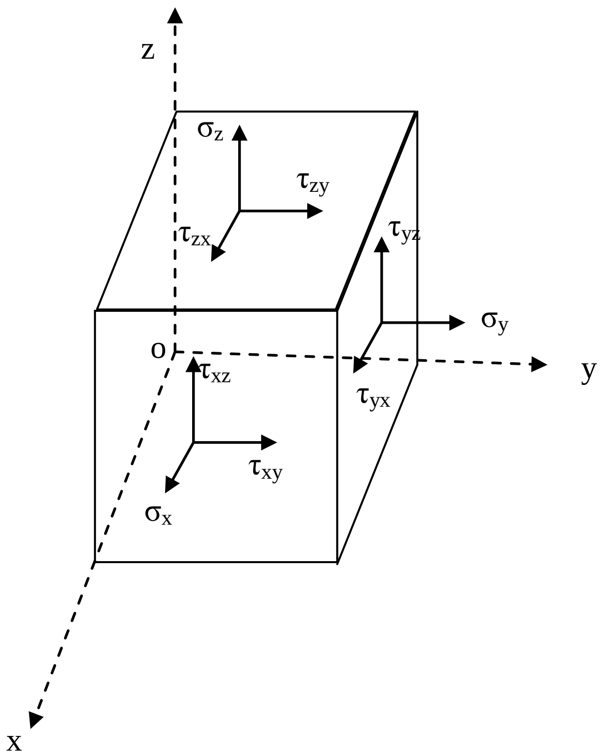
$$T^n = \lim_{\Delta S \to 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta S}\right)$$

Le vecteur contrainte possède deux composantes :

σ_n : contrainte normale
τ : contrainte tangentielle



2) Composantes du tenseur des contraintes :



En considérant toutes ces composantes, on peut dire que la contrainte en un point quelconque M(x,y,z) est définie par la matrice :

$$[\sigma]_M = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Appelée tenseur des contraintes

Le tenseur σ s'écrit aussi :

$$[\sigma] \ = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{y22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Le système d'axe utilisé est (O,x_1,x_2,x_3)

En notations indicielles

$$\sigma = [\sigma_{ij}] \quad avec\ i,j = 1,2,3$$

Notations et convention des signes :

- On utilise un indice pour les contraintes normales qui représente la direction de la normale à la face sur laquelle agit cette contrainte, exemple : σ_x

$\sigma > 0$ - - - -→ Contrainte de traction

$\sigma < 0$ - - - -→ Contrainte de compression

- pour les contraintes tangentielles on utilise deux indices :

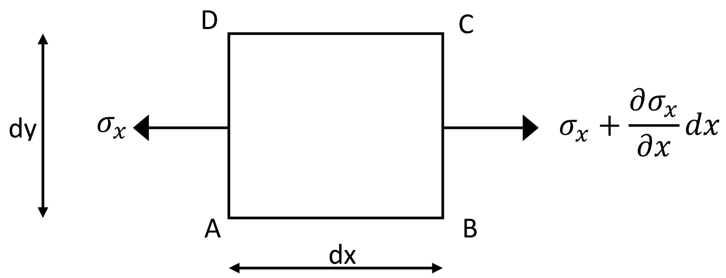
Exemple : τ_{xy}

Direction de la normale au plan considéré

Direction de la composante elle même

3) Accroissement des composantes de la contrainte :

Considérons le petit élément plan de dimensions dx dy :

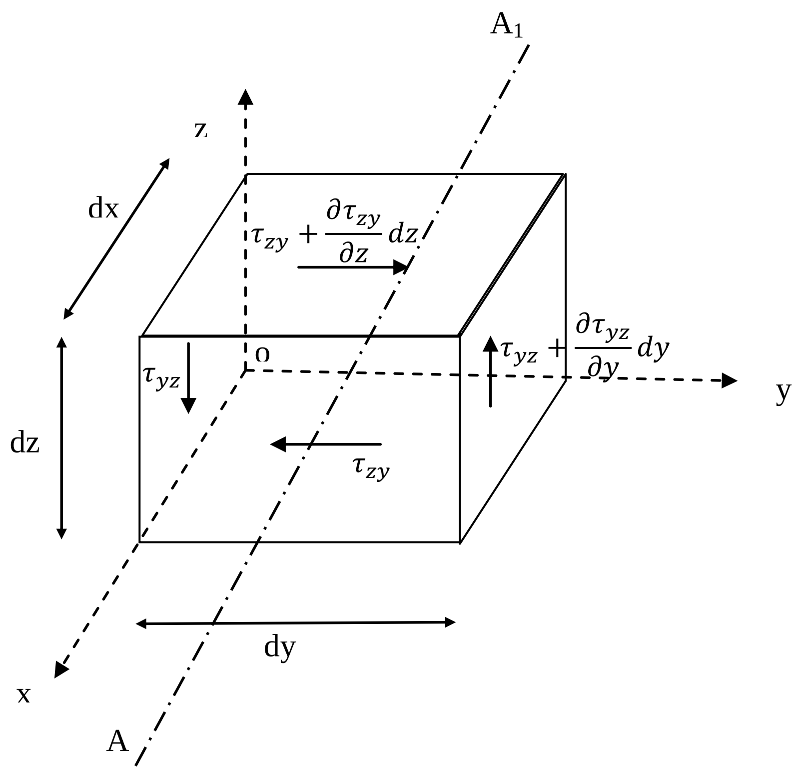


Si la face AD est soumise à une contrainte σ_x , la contrainte résultante sur la face BC sera :

$$\boxed{\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx}$$

4) Théorème de réciprocité des contraintes tangentielles :

Considérons un petit élément de dimensions dx dy dz



L'équilibre des moments par rapport à AA_1 :

$$(\tau_{yz}dxdz)\frac{dy}{2}-(\tau_{zy}dxdy)\frac{dz}{2}+\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy\right)dxdz\frac{dy}{2}-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz\right)dxdy\frac{dz}{2}=0$$

En négligeant les différentielles d'ordre supérieur :

$$2\tau_{yz}dxdz\frac{dy}{2}-2\tau_{zy}dxdy\frac{dz}{2}=0$$

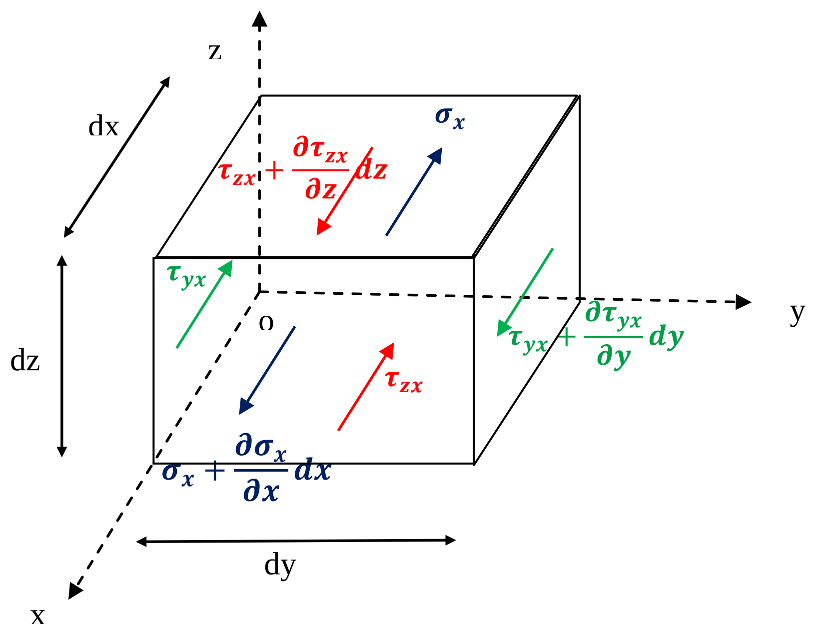
$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau_{yz}=\tau_{zy}}$$

De la même manière on trouve :

$$\boxed{\begin{array}{c}\tau_{xy}=\tau_{yx}\\ \tau_{xz}=\tau_{zx}\end{array}}$$

5) Equations différentielles d'équilibre (équations de Navier):

Considérons le petit élément (dx dy dz), cet élément en plus des contraintes à une force de volume F (F_x, F_y, F_z).



L'équilibre statique des forces suivant x :

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz-\sigma_x dydz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdz-\tau_{yx}dxdz+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy$$
$$-\tau_{zx}dxdy+F_x dxdydz=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots.(1)$$

D'une façon similaire, pour les axes y et z on trouve:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0$$

- Ces équations sont appelées équations d'équilibre et doivent être satisfaites en tout point du corps.

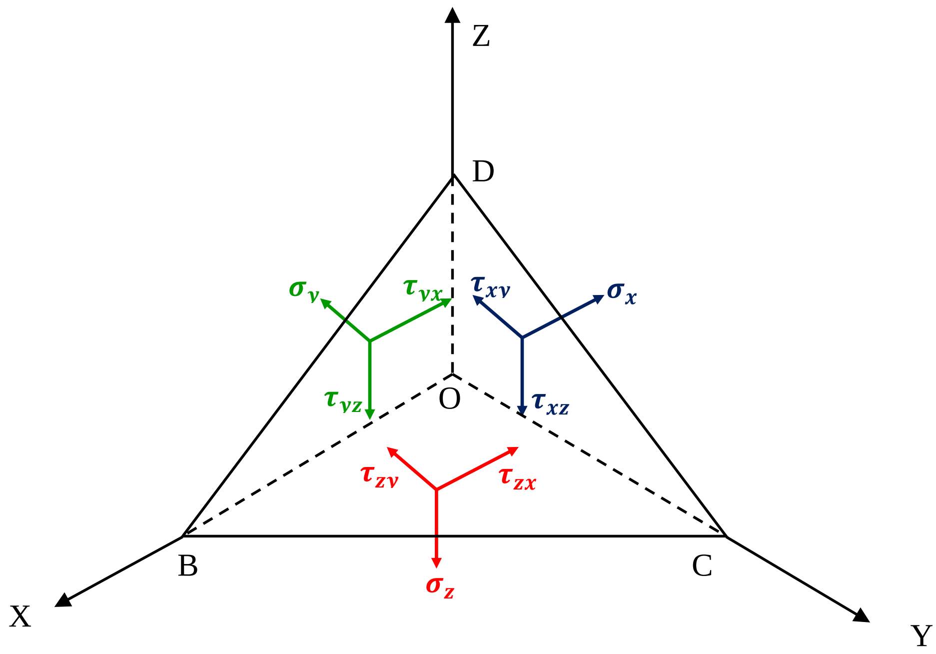
Ces équations s'écrit aussi sous la forme :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_j = 0$$

Ou bien : $$div\ \sigma + f_v = 0$$

- sur la surface du corps les contraintes doivent équilibrer les forces de surface, cette notion d'équilibre est appelée conditions aux limites.

Pour définir cet équilibre on considère le tétraèdre OBCD, sur la face BCD agit une contrainte t(t_x, t_y, t_z).



L'équilibre suivant x, y, z :

$$t_x(aire\ BCD) - \sigma_x(aire\ OCD) - \tau_{yx}(aire\ OBD) - \tau_{zx}(aire\ OBC) = 0$$
$$t_y(aire\ BCD) - \sigma_y(aire\ OBD) - \tau_{xy}(aire\ OCD) - \tau_{zy}(aire\ OBC) = 0$$
$$t_z(aire\ BCD) - \sigma_z(aire\ OBC) - \tau_{xz}(aire\ OCD) - \tau_{yz}(aire\ OBD) = 0$$

Si on désigne par dA l'aire de la face BCD :

$aire\ BCD = dA$

$aire\ OCD = dA\cos(n,x) = n_x dA$

$aire\ OBD = dA\cos(n,y) = n_y dA$

$aire\ OBC = dA\cos(n,z) = n_z dA$

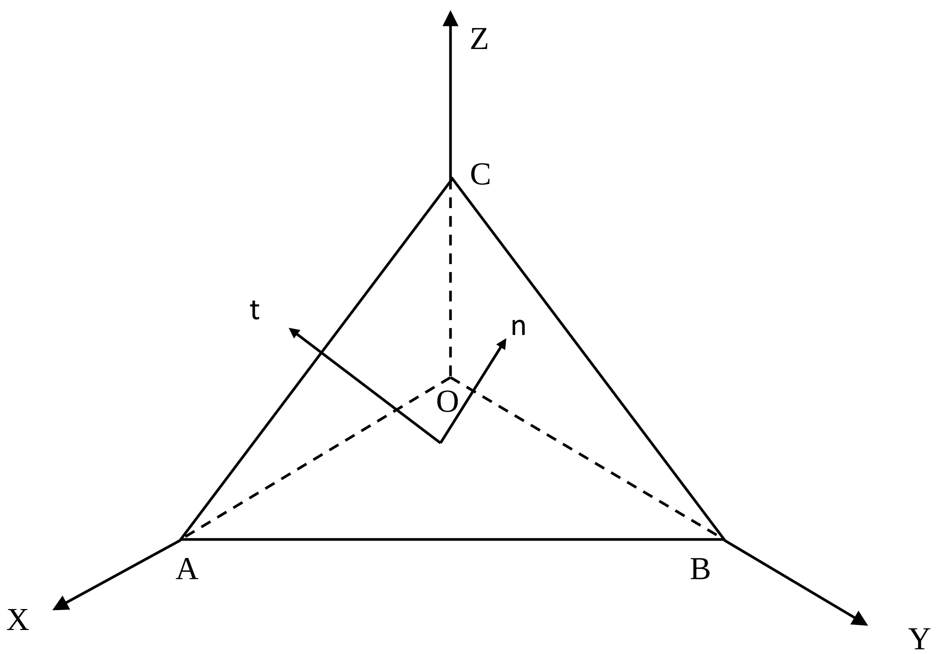
n_x, n_y, n_z sont les cosinus directeur de la normale à la surface du corps.
En remplaçant dans les équations d'équilibre :

$$t_x = n_x\sigma_x + n_y\tau_{yx} + n_z\tau_{zx}$$
$$t_y = n_x\tau_{xy} + n_y\sigma_y + n_z\tau_{zy} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$t_z = n_x\tau_{xz} + n_y\tau_{yz} + n_z\sigma_z$$

ou bien sous une forme matricielle :

$$\boxed{\{t\} = [\sigma]\{n\}}$$

<u>6) Contraintes principales:</u>



Le tenseur des contraintes est défini dans un repère quelconque x,y,z. Dans certains cas il est plus commode de choisir un repère de telle façon à ce que les contraintes de cisaillement soient nulles et seules les contraintes normales sont différents de zéro, ce type de repère est appelé repère principale et les contraintes normales correspondantes sont appelées contraintes principales.

Sur le tétraèdre la normale au plan principale (ABC) est définie par : n_x, n_y, n_z , et la contrainte σ représente la contrainte principale qui peut agir sur ce plan.
Les composantes de cette contrainte suivant x y z sont :

$$n_x\sigma \qquad n_y\sigma \qquad n_z\sigma$$

En utilisant les équations (2) :

$$\begin{aligned} n_x\sigma &= n_x\sigma_x + n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{xz} \\ n_y\sigma &= n_x\tau_{yx} + n_y\sigma_y + n_z\tau_{yz} \\ n_z\sigma &= n_x\tau_{zx} + n_y\tau_{zy} + n_z\sigma_z \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} n_x(\sigma_x - \sigma) + n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{xz} = 0 \\ n_x\tau_{yx} + n_y\left(\sigma_y - \sigma\right) + n_z\tau_{yz} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(03) \\ n_x\tau_{zx} + n_y\tau_{zy} + n_z(\sigma_z - \sigma) = 0 \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$([\sigma] - \sigma[I])\{n\} = \{0\}$$

On à donc obtenu 03 équations et 04 inconnues : n_x, n_y, n_z et σ. On dit qu'il s'agit d'un problème propre à résoudre. Ces équations ne donnent solution que si leur déterminant est nul :

$$det = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Ou bien sous forme matricielle :

$$det([\sigma] - \sigma[I]) = 0$$

Où :
[σ] : tenseur des contraintes
[I] : tenseur identité
σ : valeur propre cherchée correspondante à la contrainte principale.
En calculant ce déterminant on aura :

$$\sigma^3 - \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\sigma^2 + \left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2\right)\sigma - \left(\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(04)$$

La résolution de cette équation donne 03 contraintes principales : σ_1 , σ_2 , σ_3
En portant ces valeurs successivement dans les équations (3) et en utilisant la relation :

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

On trouve les 03 directions principales.
- on peut écrire la relation (04) sous la forme :

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

Avec : I_1 I_2 I_3 Invariant indépendants.

$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$
$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$
$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = det[\sigma]$

Donc le tenseur des contraintes dans les axes principaux prend la forme diagonalisée suivante :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

Avec : $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$

<u>7) Tenseur déviatorique et sphérique:</u>

Le tenseur des contraintes peut être décomposé en un tenseur sphérique $[\sigma]^s$ et un tenseur déviateur $[\sigma]^d$:

$$[\sigma] = \sigma^s + \sigma^d$$

Le tenseur sphérique :

$$[\sigma]^s = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$$

Où : $\sigma_m = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3}$ appelée contrainte moyenne

Et le tenseur déviateur peut s'écrire:

$$\sigma^d = [\sigma] - \sigma^s = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}$$

8) Etats de contraintes particuliers:

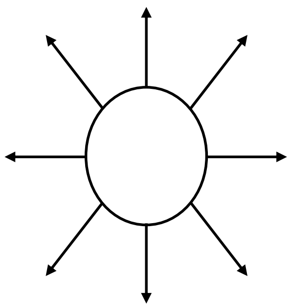
Il s'agit des états de contraintes remarquables suivantes :

a) Etat de contrainte hydrostatique :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

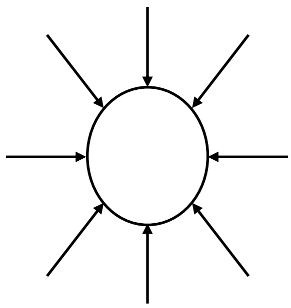
$\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} = \sigma$

C'est l'état de contrainte qui existe dans les fluides à l'équilibre



$\sigma > 0$

Traction hydrostatique



$\sigma < 0$

Compression hydrostatique

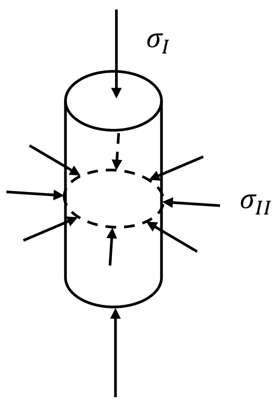
b) Etat de contrainte de révolution :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{II} \end{bmatrix}$$

Deus contraintes principales coïncident, les directions principales sont :

- La direction x pour σ_I
- Toutes directions du plan (y,z) pour σ_{II}

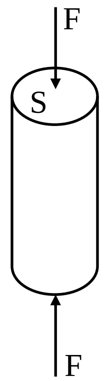
C'est l'état de contrainte qui se réalise dans le sol en profondeur



c) Etat de traction ou de compression uni-axiale :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ avec $\sigma > 0$ traction ; $\sigma < 0$ compression.

C'est un état de contrainte facile à réaliser expérimentalement : barreau soumis à une force longitudinale.

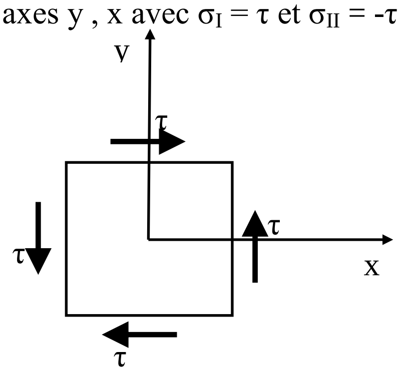


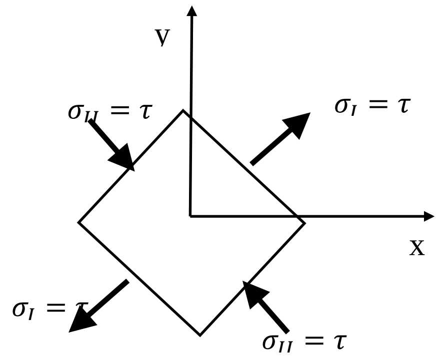
$$\sigma = \frac{F}{S}$$

d) Etat de cisaillement pur :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les directions principales sont l'axe z avec $\sigma_{III} = 0$ et les axes données par les bissectrices des axes y , x avec $\sigma_I = \tau$ et $\sigma_{II} = -\tau$

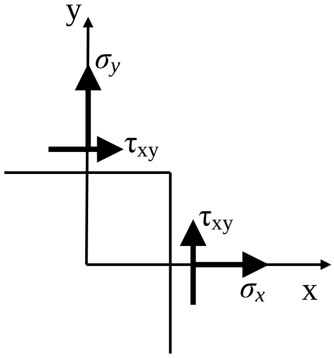




e) Etat plan de des contraintes :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ou\ bien\ [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Les directions principales sont la direction z et deux directions perpendiculaire du plan (x,y).



9) Etat plan des contraintes et cercle de Mohr:

Pour un état de contrainte plan le tenseur des contraintes est égal :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les contraintes principales peuvent êtres calculées par :

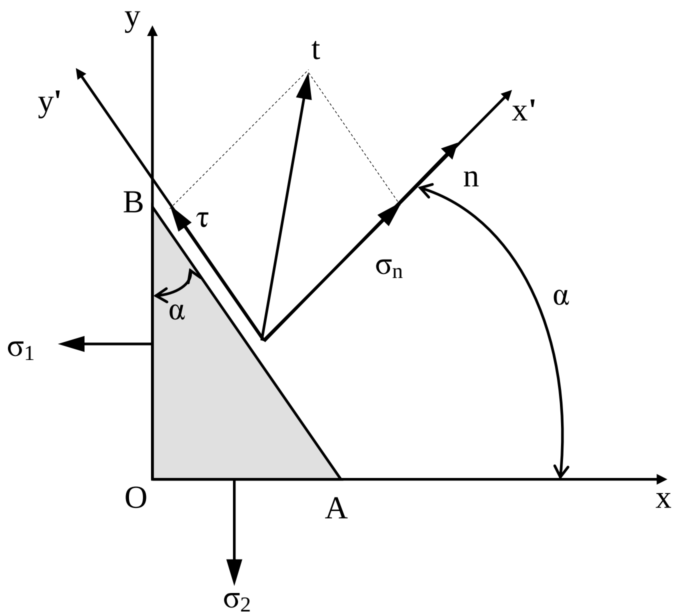
$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = \sigma^2 - \sigma(\sigma_x + \sigma_y) + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0$$

La résolution de cette équation donne les contraintes principales :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Les contraintes principales maintenant sont connues, on désire trouver les composantes σ_n et τ du vecteur de contrainte $\{t\}$ agissant sur une facette quelconque.



La facette est repérée par l'angle α de sa normale avec l'axe x.

Le tenseur des contraintes dans les axes (x',y') s'obtient à partir du tenseur contrainte dans les axes (x,y) par :

$$[\sigma]' = [C][\sigma][C]^T$$

Avec : $[C]$ matrice de rotation (appelée aussi matrice de passage).

D'où on a :

$$[\sigma]' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

La première ligne de $[\sigma]'$ donne les composantes σ_n et τ cherchées, on obtient :

$$\sigma_n = \sigma_1 cos^2\alpha + \sigma_2 sin^2\alpha$$
$$\tau = (\sigma_2 - \sigma_1)\ cos\alpha\ sin\alpha$$

En utilisant les relations trigonométriques suivantes:

$cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ $\qquad$ $sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ $\qquad$ $sin2\alpha = 2\ cos\alpha\ sin\alpha$

Donc on peut écrire σ_n et τ sous la forme :

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} cos2\alpha$$
$$\tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} sin2\alpha$$

Posons

$$\frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} = a \quad et \ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} = r$$
$$\sigma_n - a = r\ cos2\alpha$$
$$-\tau = r\ sin2\alpha$$

En additionnant ces deux égalités après les avoir élevées au carré, on obtient

$$(\sigma_n - a)^2 + (-\tau)^2 = r^2$$

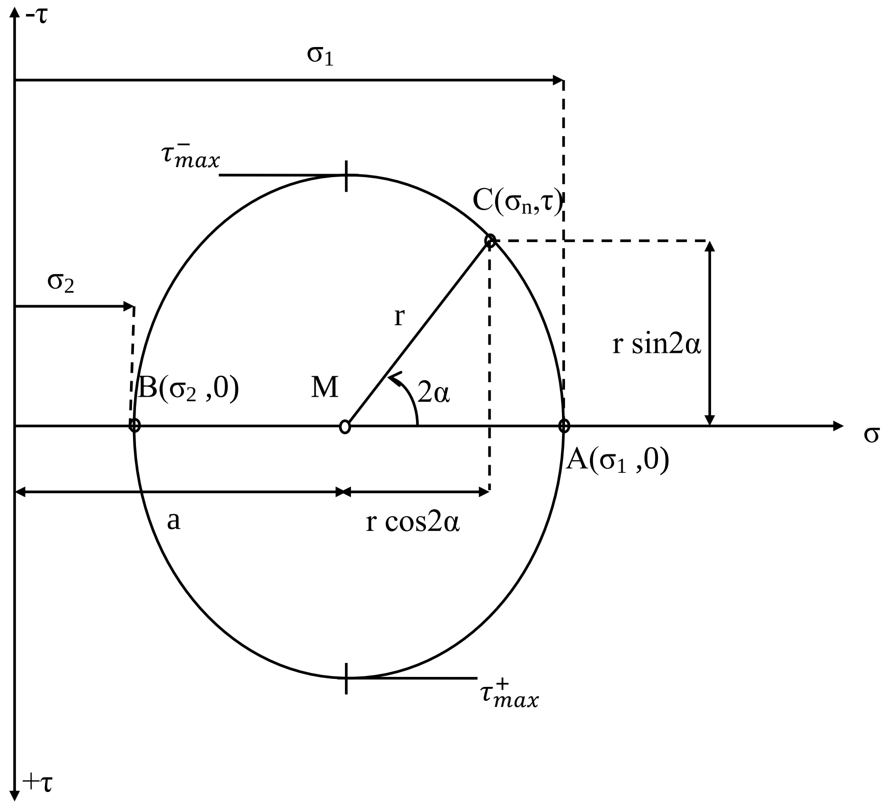
Dans un système d'axes $(\sigma,-\tau)$, cette équation est celle d'un cercle de rayon r, centré sur l'axe des σ à une distance a.

Ce cercle (figure ci-dessous), dit **cercle de Mohr** , permet une présentation graphique de l'état de contrainte. On observe que :

- Les coordonnées d'un point quelconque C du cercle sont la contrainte normale et la contrainte tangentielle agissant sur la facette dont l'orientation est fixée par l'angle 2α du rayon MC.
- Deux facettes perpendiculaires sont données par deux points diamétralement opposés.
- Le cercle coupe l'axe des abscisses aux points A et B donnant les contraintes principales (τ=0).

La contrainte **tangentielle maximale** est donnée par (rayon du cercle) :

$$\tau_{max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

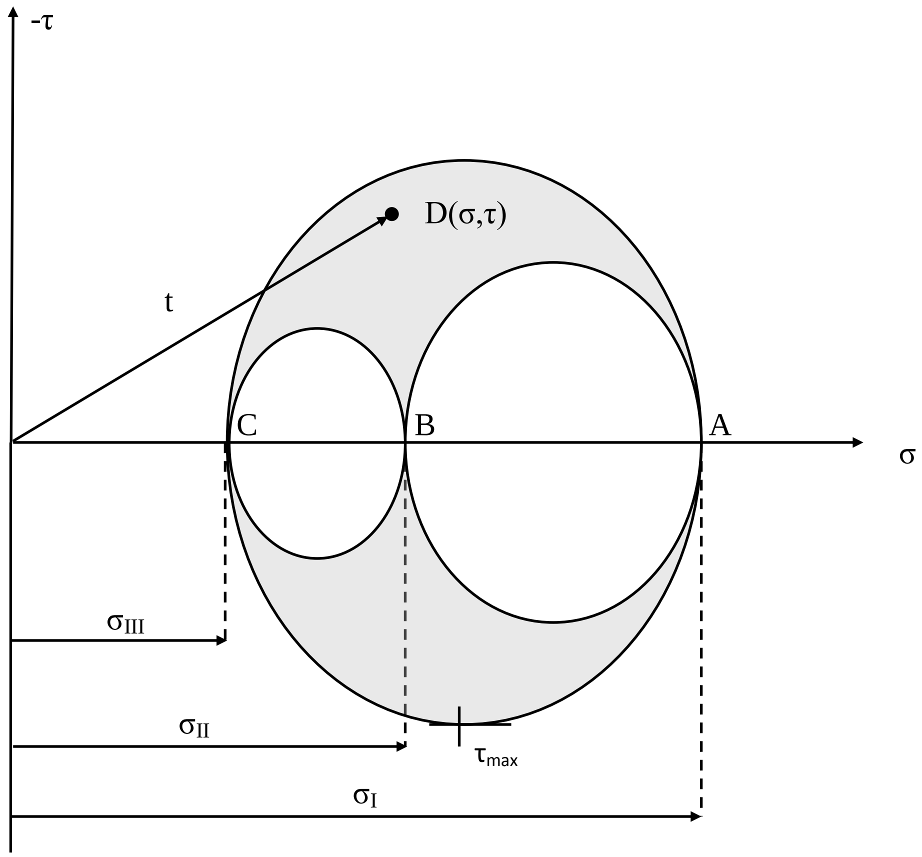


10) Tricercle de Mohr:

Dans un état de contraintes tridimensionnel, en un point O d'un solide, prenons les axes principaux comme axes de coordonnées. Les facettes des plans des coordonnées sont soumises aux contraintes principales σ_I , σ_{II} et σ_{III} . Considérons d'abord les facettes contenant l'axe z. Elles sont sous l'influence des contraintes principales σ_I et σ_{II} uniquement donc en état plan caractérisé par le cercle de Mohr de diamètre AB (voir figure ci-dessous). De même, tout facette contenant l'axe y (ou x) est représenter par le cercle de diamètre AC (ou BC). L'ensemble de ces trois cercles s'appelle le tricercle de Mohr.
On peut alors démontrer que les composantes σ_n et τ du vecteur contrainte agissant sur une facette d'inclinaison quelconque sont les coordonnées d'un point D situé dans l'aire ombrée du tricercle.
On en déduit aussi que la contrainte tangentielle maximale est représentée par le rayon du plus grand de trois cercles, soit

$$\tau_{max} = \pm \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

Elle agit sur les facettes contenant l'axe y et bissectrice des axes x et z.


-τ
D(σ,τ)
t
C
B
A
σ
σIII
σII
τmax
σI