جامعة الشهيد حمه لخضر- الـــــوادي
كلية العلوم الدقيقة

جامعة الشهيد حمّه لخضر - الوادي
Université Echahid Hamma Lakhdar - El-Oued

جامعة الشهيد حمّه لخضر - الوادي
Université Echahid Hamma Lakhdar - El-Oued

قسم: الرياضيات

السنة: ثانية رياضيات

مقياس

تحليل عددي1

الأستـــــاذ:

✓**بقـــاص محمـد**

الموسم الدراسي : 2023/2022

مقدمة عامة

علم التحليل العددي يختلف على تعريفه الكثير، ولكن الأغلبية يتفقون على أنه علم استخدام الخوارزميات العددية للحصول على حلول تقريبية للمسائل الحسابية المعقدة، على العكس من الحلول التحليلية التي تعطى حلولا صحيحة تامة وغير تقريبية.
لذلك فإن الهدف العام من علم التحليل العددي هو تصميم خوارزميات – طرق- تقريبية لحل المسائل الصعبة التي يصعب حلها يدويا مثل أن تجد حلا لألف من المعادلات في ألف من المجاهيل أو تحسب معكوس مصفوفة مربعة من ألف صف وألف عمود مثلا.
على الرغم من امتداد أصول التحليل العددي في التاريخ إلا أن الطفرة التي حدثت في الحاسبات في نهاية القرن الماضي كان لها أكبر الأثر في استخدام هذا العلم في الكثير من التطبيقات الهندسية والعلمية والطبية والحيوية وشتى نواحي العلوم التي نعرفها هذه الأيام.
هذه الطفرة التي نعيشها الآن لن تمنعنا من إلقاء نظرة سريعة على تاريخ هذا العلم وبالذات على تاريخ كلمة خوارزم – *Aalgorithm* - التي لا تخلو صفحة تقريبا من صفحات أي كتاب في التحليل العددي من ذكرها ومفهوم الخوارزميات هو :
خطوات حسابية منظمة تعطى في عدد محدد من الخطوات إجابة لسؤال أو حلا لمشكلة.
يعود تاريخ هذا العلم الي القرن التاسع الميلادي بواسطة عالم الرياضيات محمد بن موسى الخوارزمي وهو من خوارزم بجنوب آسيا صاحب كتاب "المختصر في حساب الجبروالمقابلة" ولقد أطلق إسم الخوارزم - *Algorithm*- نسبة لهذا العالم وهو المنشئ الأساسي لعلم الجبر *algebra* .
الفصول مرتبة كالتالي

- الفصل الاول يتناول دراسة الاخطاء التعريف بالخطأ والدقة والانضباط والفرق بين كل منها والأنواع المختلفة للأخطاء ومصادرها وكيفية التقليل من آثارها وقد تضمن ايضا الطرق العددية المختلفة لتقريب التوابع بواسطة كثيرات حدود الاستقطاب.
- الفصل الثاني يتطرق إلى الطرق العددية في الاشتقاق والتكامل العددين.
- الفصل الثالث ويتضمن علي الطرق العددية لحل المعادلات الجبرية غير الخطية .

المحتويات

..................الفصل الأول............

دراسة الاخطاء

1- مقدمة:

عند استخدام الطرق العددية لحل مسائل لا يمكن حلها تحليليا نحصل على نتائج تقريبية مما يعني وجود أخطاء وعلينا إيجاد تقريب لهذا الخطأ اذ تتلخص مهمتنا في:

- **إيجاد الحل التقريبي للمسألة وتقويم الخطأ.**

<u>2- مصادر الأخطاء:</u>

يمكن تصنيف هذه الأخطاء المرتكبة الى خمسة أصناف أساسية:

أ - أخطاء ناتجة عن وضعية المسألة:
عند دراسة ظاهرة طبيعية فإننا مرغمين على تبسيط المسألة وقبول بعض الشروط مما يؤدي الى عدة أخطاء (أخطاء المسألة) وقد يصعب حل المسألة فنعوضها بمسألة مقربة مما ينتج عنه أخطاء تسمى (أخطاء الطريقة).

ب- أخطاء البتر:
أخطاء ناتجة عن وضع حدا للمسألة تعتمد عل حسابات غير منتهية (دوال تظهر في مسألة مثل متتاليات وسلاسل او كطريقة تكرارية تقرب المسألة) وبهذا تسبب أخطاء تسمى : أخطاء البتر.

ج- أخطاء ناتجة عند وجود أوسطه عددية في علاقات رياضية حيث قيمتها تكون تقريبية كثوابت فيزيائية تؤدي الى أخطاء تسمى : (أخطاء بدائية)
د- أخطاء ناتجة عن تدوير عدد.
ه- أخطاء متراكمة ناتجة عن الأخطاء السابقة .

<u>3- التقريب:</u>

يتم التقريب من خلال التدوير او الاقتطاع

<u>- التدوير:</u>

هو استعمال المدورة بدلا من القيمة المضبوطة للعدد.

- قاعدة التدوير:

عند تدوير عدد لغاية n رقم معبر نحذف كل الأرقام الموجودة على يمين رقم ذا الرتبة n ولهذا الحذف شروط:

1) اذا كان أول رقم معبر محذوف أكبر من 5 نظيف 1 الى الرقم الأخير المعبر.
2) اذا كان اول رقم اقل تماما من 5 فإن الرقم الأخير يبقى على حاله.
3) اذا كان اول رقم معبر محذوف مساويا الى 5 وكل الأرقام المحذوفة اصفار فإن:
- الرقم الأخير لا يتغير اذا كان زوجي.
- نضيف له 1 اذا كان فردي.

مثال: 1) تدوير العدد $\pi=3.141592$ الى 4 ثم 6 ارقام معبر نحصل على:

- 3.142 (اربع ارقام معبرة) تطبيق 01
- 3.14159 (ستة ارقام معبرة) تطبيق 02

1) تدوير العدد 1.2500 الى عددين معيرين نحصل على العدد المقرب 1.2 (تطبيق03)

<u>- الاقتطاع:</u>

تستعمل الآلة الحاسبة او الحاسوب قاعدة الاقتطاع أي الاكتفاء بإظهار عدد منته بعد الفاصلة.

- مثلا $a=0.126748$ تظهر فقط $a'=0.12674$
- الامر $Format$ في الماتلاب يحدد كيفية عرض النتيجة على الشاشة وهناك نوعان:
  - ✓ الأول: $Format\ short$ يعرض النتيجة في خمس خانات فقط (خانات عشرية)
  - ✓ الثاني: $Format\ long$ يعرضها في 16 خانة عشرية وهذا اقصى عدد من الخانات في الماتلاب.

وهذا اقصى عدد من الخانات في الماتلاب.

يمكن إدراج الخطأ الناتج عن البتر كخطأ اقتطاع عند استعمال البتر في سلاسل تايلور.

<u>4- أنواع الأخطاء:</u>

من خلال الخطأ نتعرف على مدى دقة وسرعة الطرق العددية والمفاضلة بينهما.

<u>4-1- الخطأ المطلق:</u>

لتكن a القيمة المقربة لقيمة دقيقة A نعرف الخطأ المطلق لـ a على A ورمزه Δ

المقدار: $\Delta = |A - a|$

- تعريف:

نسمي الحد الأعلى للخطأ المطلق كل عدد Δa حيث : $\Delta = |A - a| \leq \Delta a$

أي : $a - \Delta a \leq A \leq a + \Delta a$ وبالتالي : $A = a \pm \Delta a$

مثال: اوجد الحد الأعلى للخطأ المطلق لـ $a = 3.14$ التي تعوض قيمة $A = \pi$

الحل :

- لدينا : $3.14 < \pi < 3.15$

اذن $|a - \pi| \leq 0.01$ ومنه يمكن أخذ $\Delta a = 0.01$

- اذا أخذنا $3.140 < \pi < 3.142$ فإن : $\Delta a = 0.002$

4-2- الخطأ النسبي:

الخطأ المطلق لا يعطي فكرة حقيقية عن دقة القياس، مثلا لو قسنا طول القاعة وطول المسافة بين الوادي والعاصمة وكان الخطأ المطلق نفسه فالسؤال هو أي القياسين أدق؟

طبعا المسافة بين الوادي و العاصمة أدق وبالتالي لمعرفة ذلك تم إدخال الخطأ النسبي المعرف كما يلي : $E = \frac{\Delta}{|A|}$

تعريف: الحد الأعلى للخطأ النسبي Ea لعدد مقرب a معطى هو عدد كيفي يحقق:

$E \leq Ea$

أي ان $\frac{\Delta}{|A|} \leq Ea$ أي $\Delta \leq |A|Ea$

ومنه: $\Delta a = |A|.Ea$ اذن $Ea = \frac{\Delta}{|A|}$

مثال: وزن 1 دم^3 من الماء في درجة حرارة $OC°$ هي :

$$P = 999.847 \pm 0.001$$

اوجد حدا للخطأ النسبي.

الحل: $\Delta P = 0.001$ لدينا $P = 999.847$

ومنه : $Ep = \frac{0.001}{999.847} = 10^{-4}\%$

5- العمليات الجبرية على الأخطاء:

لتكن a و b القيمتان التقريبيتان للعددين A و B على التوالي حيث:

- $\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b$

$$E_{(a+b)} = \frac{1}{|A+B|}(A.E_a + B.E_b)$$

$$\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b$$ ❖

$$E_{(a-b)} = \frac{1}{|A-B|}(A.E_a + B.E_b)$$

$$\Delta(a.b) = b\Delta a + a\Delta b$$ ❖

$$E_{(a.b)} = E_a + E_b$$

$$\Delta\left({}^{a}/_{b}\right) = \frac{A}{B}\left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}\right)$$ ❖

$$E\left({}^{a}/_{b}\right) = E_a - E_b$$

تقريب التوابع

تمهيد

الغرض من تقريب التوابع بواسطة كثير حدود من المرتبة n لكون كثيرات الحدود عبارة عن توابع بسيطة تسمح لنا بإجراء مختلف العمليات (التكامل، الانشقاق،...) لكن التوابع قد لانعرف صيغتها التحليلية أو هناك صعوبة في تناولها ويكون هذا التقريب في عدد محدود من النقاط ووفق شروط معينة سيتم التعرض لها لاحقا.

I. 1- التقريب بواسطة سلسلة تايلور:

- **تعريف01:**

نرمز بـ $C^n([a,b])$: مجموعة التوابع الحقيقية f والقابلة للاشتقاق n مرة على المجال $[a,b]$

بحيث المشتق من الرتبة n يكون مستمرا على هذا المجال.

من خلال التعريف فإن:

$C([a,b])$: مجموعة التوابع الحقيقية والمستمرة على $[a,b]$.

نظرية تايلور (سلسلة تايلور):

اذا كان $f \in C^n([a,b])$ و $f^{(n+1)}$ موجود ضمن $]a,b[$ اذن:

$\forall\ a,b, \in [a,b]$ فإنه يوجد على الأقل عدد C محصور بين a و b حيث :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(b-a)^{\mathrm{n}} + R(f)$$

مع الباقي $R(f)$ معطى على الشكل:

$$R(f) = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

ملاحظة :

صيغة تايلور مع الباقي على شكل تكامل بالعلاقة التالية:

$$R(f) = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt$$

نتيجة:

ليكن $f \in C^n([a,b])$ و $x_0 \in [a,b]$، اذا وجد المشتق $f^{(n+1)}$ على المجال $]a,b[$ ووجد عدد حقيقي M بحيث :

$$\forall\, x \in\ ]a,b[\,, \left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M$$

فإن كثير الحدود $P_n(x)$ حيث:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(x)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

يحقق المتراجحة التالية:

$$\forall\, x \in\ ]a,b[\ :\ |f(x) - P_n(x)| \le M.\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

البرهان:

بما ان $x, x_0 \in [a,b]$ يمكن تطبيق نظرية تايلور ومنه:

$$|f(x) - P_n(x)| = |R(f)| = \left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|.\left|f(x)^{(n+1)}\right|$$

لدينا: $\left|\frac{x-x_0}{(n+1)!}\right| \le \frac{|b-a|}{(n+1)!}$ و $\left|f(x)^{(n+1)}\right| \le M$

اذن: $|f(x) - P_n(x)| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.M$

$P_n(x)$: هو تقريب للتابع f و $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.M$ هو الخطأ المرتكب.

يمكن كتابة $P_n(x)$ على الشكل:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

حيث $P_n(x)$ يمثل كثير حدود تايلور النوني من أجل f حول النقطة x_0 و $R(f)$ يسمى الحد الباقي (او الخطأ) المرافق لـ $P_n(x)$ السلسلة اللانهائية التي نحصل عليها من النهاية $\lim_{n\to+\infty} P_n(x)$ تسمى سلسلة تايلور لـ f حول x_0.

- **حالة خاصة:**

اذا كان $x_0 = 0$ كثير حدود تايلور يسمى كثير حدود " ماك لوران" أيضا سلسلة تايلور تسمى سلسلة " ماك لوران".

الاستقطاب

يحتاج المتعاملون مع البيانات ان يمثلوا العلاقة بين متغيرين او اكثر مثلا يتم تسجيل درجة الحرارة على مدار الساعة كل نصف ساعة في صورة جدول في عملية صناعية.

المطلوب عادة هو إيجاد علاقة بين درجة الحرارة والزمن بحيث يمكن تقدير درجة الحرارة عند ازمنة غير مدرجة في الجدول وهنا تكمن الحاجة الى علاقة في صورة كثير حدود لمعرفة معلومات وسلوك هذه العلمية وهذا ما نسميه: **الاستقطاب** بحيث يمكننا رسم منحني تقريبي يمر بأغلب هذه النقاط مع نسبة خطأ معينة وهذا ما نسميه: **تقريب المنحنيات**.

هناك عدة طرق للاستقطاب لكن في عرضنا سنكتفي بكثيري حدود: لاغرانج ونيوتن

1. كثير حدود لاغرانج

لتكن $x_0, x_1, \dots x_n$ $(n+1)$ نقطة مختلفة f دالة حيث قيمها في هذه النقاط هي:

$f(\,x_0), f(\,x_1), \dots f(\,x_n)$ فإنه يوجد كثير حدود وحيد درجته n حيث:

$f(x_k) = P_n(x_k) \;\; k = 0,1, \dots n$ ويعطي على الشكل:

$$P_n(x_k) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x)$$

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k-1})\dots(x_k-x_n)} \quad k = 0,1,\dots,n$$

ملاحظات:

- ترتيب النقاط عند حساب $L_k(x)$ لايؤثر على النتيجة.
- يمكن كتابة على الشكل التالي:

من اجل $k = 0$:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}$$

من اجل $k = 1$:

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$$

من اجل $k=n$:

$$L_n(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

من خلالا التعريف نستنتج أن :

$$L_k(x_j)=\delta_{kj}=\begin{cases}1 & k=i\\ 0 & k\neq j\\ k,j=1,2,\dots n\end{cases}$$

مثال:

عين كثير حدود لاغرانج للاستقطاب الذي يمر بالنقاط التالية:

$$.\ (x_i,y_i)=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{-5}{4}\right);(-1,-2);(0,-2)\quad y_i=f(x_i)\right\}$$

الحل

نقوم أولا بحساب $L_k(x)$ من اجل $k=0,1,2$:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(0+1)\left(0-\frac{1}{2}\right)}=-2x^2-x+1$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{1}{3}(2x^2-x)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{4}{3}(x^2+3)$$

بما ان $n=2$ اذن كثير حدود الاستقطاب يكون على الشكل:

$$P_2(x)=\sum_{k=0}^{2}f\,(x_k).\,L_k(x)$$

$$P_2(x)=-2L_0(x)-2L_1(x)-\frac{5}{4}L_2(x)$$

ومنه: $P_2(x) = x^2 + x - 2$

2. طريقة نيوتن

الفروق المقسومة المتقدمة

لدينا مجموعة نقاط (x_i, y_i) ونريد إيجاد كثير حدود حيث:

$$P(x_i) = y_i \quad i = 0,1, \dots, n.$$

سوف نتعرض لحالات بسيطة من أجل $n = 1,2$ ثم نقوم بالعتميم بإستعمال الفروق المقسمة لإيجاد كثير الحدود $P(x)$.

- $n = 1$:

أي إيجاد مستقيم يمر بالنقطتين (x_0, y_0) ; (x_1, y_1) ويعطى على الشكل التالي:

$$P(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

- $n = 2$:

إيجاد كثير حدود من المرتبة الثانية ويمر بالنقاط : (x_0, y_0) ; (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) وتعطى معادلته بالشكل التالي:

$$P(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} + a(x - x_0)(x - x_1)$$

حيث : $a = \frac{1}{(x_2 - x_0)}\left(\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}\right)$

- التعميم

الفروق المقسمة

نعرف الفروق المقسمة لدالة f معرفة على النقاط:

$i = 0,1, \dots, n$ (x_i) . ب : $[x_i] = y_i = f(x_i)$.

- الفروق المقسمة الاولي:

$$[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

مثلا:

$$[x_0 - x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

- الفروق المقسمة الثانية:

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}] - [x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

مثلا:

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_0 - x_0} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

- الفروق المقسمة من الرتبة n:

الفروق المقسمة من الرتبة n تستنتج من سابقتها أي من الرتبة $(n-1)$:

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] = \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] - [x_i\ , \dots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

مثلا:

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{[x_1, \dots, x_n] - [x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

جدول الفروق المقسمة

$x_0 \quad y_0$
$\dots\dots\dots\dots [x_0, x_1]$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots [x_0, x_1, x_2]$
$x_1 \quad y_1$
$\dots\dots\dots\dots [x_1, x_2]$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots [x_0, x_1, x_2, x_3]$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots [x_1, x_2, x_3]$
$x_2 \quad y_2$
$\dots\dots\dots\dots [x_2, x_3]$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
$x_3 \quad y_3$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots [x_1, x_2, x_3, x_4]$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots [x_2, x_3, x_4]$
$\dots\dots\dots\dots [x_3, x_4]$
$x_4 \quad y_4$

نظرية

كثير الحدود الذي يستقطب الدالة f في النقاط المنفصلة مثني مثني (x_i, y_i) يسمي كثير حدود في أساس نيوتن وهو وحيد ويكتب على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} P(x) = [x_0] + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x_0, x_1)(x - x_1) \\ + [x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots \\ + [x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots ([x - x_{n-1}]) \end{aligned}$$

مثال:

اوجد كثير الحدود الذي يستقطب الدالة f في النقاط التالية:

$$\left(x_i, y_i\right) = \{(2,3), (3,2), (4, -1), (5, -6)\}$$

اذن جدول الفروق المقسمة يكون على النحو التالي:

3 2

1-

1- 2 3

0 3-

1- 1- 4

5-

6- 5

ومنه كثير الحدود المطلوب يكون على الشكل التالي:

$$P(x) = 3 - 1(x - 2) - 1(x - 2)(x - 3) + 0(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

اذن :

$$P(x) = -x^2 + 4x - 1$$

تمارين مقترحة

التمرين الاول:

دور الاعداد التالية الى اربع ارقام معبرة دقيقه واذكر الخطأ المرتكب.

c =0.0023417 , b =-5.357500 , a =456.872

التمرين الثاني:

إذا كان كل الارقام المعبرة للعددين **476.6** و **3.11918** دقيقة

ما هو الخطأ المطلق والنسبي لمجموعهما.

التمرين الثالث:

أوجد تقريب للدالة $\boldsymbol{f(x) = e^x \sin x}$ علي المجال $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ مستعملا كثير حدود تايلور من المرتبة الثالثة.

التمرين الرابع:

برهن ان كثيرات الحدود $(P_i(x))_{i=0.1.2}$ متعامدة علي المجال $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$ من أجل $\boldsymbol{w(x) = 1}$ حيث $P_1(x) = x$; $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$; $P_0(x) = 1$

تعريف

تكون $\boldsymbol{P_i}$ حيث $\boldsymbol{i = 1, \dots, n}$ كثيرات حدود متعامدة علي المجال $[\boldsymbol{a, b}]$ إذا تحقق

$$\int_a^b w(x)\, P_i(x) P_j\,(x)\, dx = 0 \qquad i \neq j$$

$$\int_a^b w(x)\, P_i(x) P_j\,(x)\, dx \neq 0 \qquad i = j$$

..............الفصل الثاني......................

التكامل العددي

في هذا المحور نحاول إعطاء بعض الطرق العددية لحساب التكامل لدالة قد لا نعرف عنها سوى القيم عند نقاط معينة وبالتالي يكون من الصعب حساب تكاملها او لدالة معروفة لكن من الصعب أيضا حساب تكاملها.

سوف نستعرض في هذا الدرس طريقة شبه المنحرف البسيطة والمركبة ثم نتناول طريقة سيمسون البسيطة والمركبة أو الموسعة .

1. طريقة شبه المنحرف

- **طريقة شبه المنحرف البسيطة:**

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[a, b]$

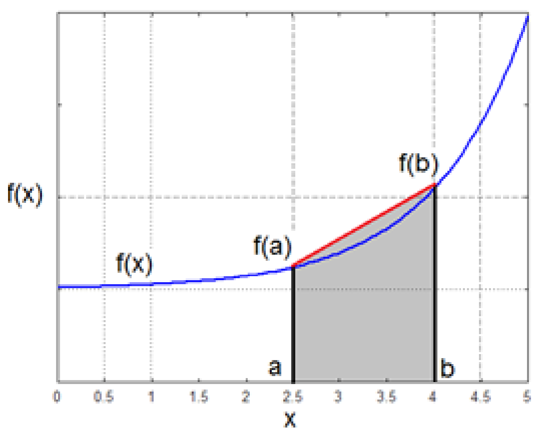
تمثيلها البياني يشمل النقطتين $\big(a, f(a)\big), \big(b, f(b)\big)$.

الطريقة تعتمد على تقريب مساحة الحيز المعرف بـ: $\int_a^b f(x)dx$ بواسطة مساحة شبه منحرف كما هو مبين في الشكل.

إرتفاع شبه المنحرف هو $b - a$

قاعدته الصغرى $f(a)$

قاعدته الكبرى $f(b)$



فنحصل على التقريب التالي

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\{f(a)+f(b)\}$$

لاحظ أننا نستخدم علامة التساوي التقريبي ($\approx$) مما يعني أن هناك نسبة خطأ في هذا التكامل.

- **طريقة شبه المنحرف المركبة:**

نقوم بتقسيم المجال $[a,b]$ الى n مجال جزئ

حيث: $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$

ثم نطبق الطريقة البسيطة على كل مجال جزئ ومن ثم نقوم بجمعها أي:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\{f(x_i)+f(x_{i+1})\}$$

- الخطوة الأولى:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a=x_0}^{x_i} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)dx$$

- الخطوة الثانية:

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b} f(x)dx \approx{}& \frac{x_1-x_0}{2}\{f(x_0)+f(x_1)\} \\ &+ \frac{x_2-x_1}{2}\{f(x_0)+f(x_1)\} + \cdots \\ &+ \frac{x_n-x_{n-1}}{2}\{f(x_{n-1})+f(x_n)\}\end{aligned}$$

نعتبر ان التقسيم منظم أي: $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$ ومنه نحصل على:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\big(f(x_1)\big) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

يمكن العبارة السابقة على النحو التالي:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left\{f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{i=n-1} f(x_i)\right\}$$

مثال:

احسب التكامل التالي مستعملا طريقة شبه المنحرف المركبة: $I = \int_0^\pi \sin x dx$

الحل:

أولا الحل التحليلي لهذا التكامل هو:

$$I = [-\cos\pi]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$$

ثانيا: طريقة شبه المنحرف المركبة نضع $h = \frac{\pi}{2}$

$$x_0 = 0, x_1 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

ومنه نجد:

$$\int_0^\pi sin\, x dx = \frac{\frac{\pi}{2}}{2}\left\{sin(0) + sin(\pi) + 2sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

ومنه:

$$I \approx \frac{\pi}{4}\{0 + 0 + 2\} = \frac{\pi}{2}$$

2. خطأ التقريب

يعطي خطأ تقريب تكامل دالة f معرفة على مجال $[a, b]$ بواسطة المتراجحة التالية:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_n(f)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \times M$$

حيث:

$$T_n(f) = \frac{h}{2}\left\{f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{i=n-1} f(x_i)\right\}$$

و

$$M = max_{[a,b]}|f''(x)|$$

3. طريقة سمبمسون

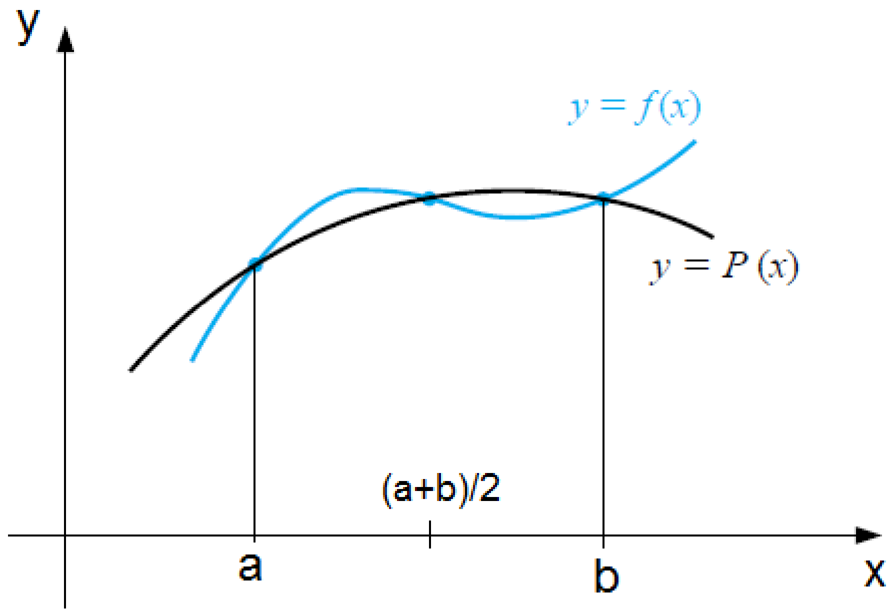
- **طريقة سيمسون البسيطة:**

حساب التكامل بطريقة سيمسون يستدعي وجود ثلاث نقاط اذا كانت الدالة f معرفة على المجال $[a,b]$ مما يعني أن كثير حدود الاستقطاب للدالة من الدرجة الثانية – كما هو مبين في الشكل-

بينما كثير حدود الاستقطاب في طريقة شبه المنحرف البسيطة من الدرجة الاولى

نضع:

$$x_0 = a \quad ; \quad x_1 = \frac{b+a}{2} = c \quad ; \quad x_2 = b.$$



ثم نقرب منحنى الدالة f بواسطة كثير حدود من الدرجة الثانية يمر بالنقاط الثلاث حيث نستعمل كثير حدود الاستقطاب (لانغرانج) نجد:

$$P_2(x) = f(a)L_0(x) + f(c)L_1(x) + f(b)L_2(x)$$

ومنه: $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx$

بما ان:

$$\int_a^b P_2(x)dx = f(a)\int_a^b L_0(x)dx + f(c)\int_a^b L_1(x)dx + f(b)\int_a^b L_2(x)dx$$

ومن خلال قيم L_0, L_1, L_2 المعرفة سابقا نحصل على :

$$\int_a^b L_0(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}$$

$$\int_a^b L_1(x)dx \approx 4\frac{(b-a)}{6}$$

$$\int_a^b L_2(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}$$

بعد التعويض فإننا نحصل على التقريب التالي:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}[f(a) + 4f(c) + f(b)]$$

ملاحظة: اذا أعطيت ثلاث نقاط x_i, x_{i+1}, x_{i+2} حيث:

$$x_{i+2} - x_{i+1} = x_{i+1} - x_i = h$$

فإن التقريب يكون على الشكل التالي:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]$$

مثال:

حساب التكامل المعطى في المثال السابق باستعمال طريقة سيمسون:

$$I = \int_0^\pi sinxdx$$

نضع $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \pi$ أي: $h = \frac{\pi}{2}$

ومنه نحصل على التقريب التالي:

$$I \approx \frac{x_{i+2} - x_i}{6}\left[sin(0) + 4sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + sin(\pi)\right]$$

اذن:

$$I \approx \frac{2\pi}{3}$$

من خلال النتيجتين نلاحظ ان طريقة سمبسون أدق أي اقرب للقيمة الحقيقية لـ I.

- **طريقة سيمسون المركبة:**

لزيادة الدقة يمكن تقسيم مجال التكامل الى مجالات جزئية كما في طريقة شبه المنحرف المركبة وتجميع هذه التكاملات مع الاخذ في الاعتبار ان كل مجال جزئ يكون من الشكل: $[x_{i-1}, x_{i+1}]$

لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

حيث:

$x_n = b,\ x_0 = a$ و $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_{i+1} - x_i = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$

بتطبيق التقريب على كل التكاملات الجزئية نجد:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \cdots + \frac{h}{3}[f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})] + \frac{h}{3}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

إذن:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\left(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k+1})\right) + 2\left(\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k})\right)\right]$$

لاحظ ان الصيغة تفترض ان عدد نقاط التقسيم تكون عدد فردي (عدد) لكي يكون هناك عدد زوجي من المجالات، اما اذا كان عدد نقاط التقسيم زوجي أي هناك عدد فردي من المجالات الجزئية فلا يمكن تطبيق هذه الصيغة وبالتالي نلجأ الى طريقة لسمبسون على اول اربع نقاط ثم نطبق الصيغة السابقة على ما تبقى من النقاط (سنتعرض لهذه الحالة في التمارين المقترحة).

4- خطأ التقريب

يعطي خطأ تقريب تكامل دالة f معرفة على مجال $[a, b]$ بواسطة المتراجحة التالية:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_n(f)\right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \times M_1$$

حيث:

$$S_n(f) \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\left(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k+1})\right) + 2\left(\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k})\right)\right]$$

و

$$M_1 = max_{[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

الاشتقاق العددي

تمهيد:

عند حل مسائل تطبيقية تصادفنا أحيانا حساب المشتقات من رتبة معينة لدالة f التي لا تعرف عنها سوى فيها المعطاة بجدول او تكون عبارتها معقدة حيث يكون من الصعب حساب مشتقاتها وفي هذه الحالة نلجأ الى الاشتقاق العددي المقرب.

1- تقريب المشتق الأول:

الهدف الأساسي يكمن في تقريب المشتق الأول للدالة f عند القيمة x حيث:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

من اجل h قريب من الصفر وغير معدوم، ومنه نحصل على تقريب الدالة f عند x:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

اذا كانت $f \epsilon C^2([0,1])$ يمكننا استنتاج التعريف السابقة من خلال نشر تايلور.

حيث:

$$f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2} f"(x)$$

من اجل $\vartheta \epsilon [x, x+h]$ نحصل على:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| \leq Ch$$

اين: $$C = \underset{\vartheta \epsilon [0,1]}{Sup} |f"(\vartheta)|$$

من اجل $\vartheta \epsilon [x-h, x]$

وبالتالي نحصل على التقريبات التالية:

المتقدم: $\boldsymbol{f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

المتأخر: $\boldsymbol{f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}}$

الخطأ المترتب عند هذا التقريب من الرتبة الأولى: (Ch^1)

التقريب المركزي:

اذا اردنا تحسين التقريب فنلجأ الى التقريب المركزي شريطة ان تكون الدالة f من الصنف $C3([0,1])$ من خلال نشر تايلور عند $(x-h)$ و $(x+h)$

نجد:

$$f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2}f"(x) + \frac{h^3}{6}f'''(\theta_1)$$

$$f(x-h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2}f"(x) - \frac{h^3}{6}f'''(\theta_2)$$

$$\theta, \epsilon[x, x+h]\ ;\ \theta_2\, \epsilon[x-h, x]$$

أين الطرح نحصل على:

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{2}(f'''(\theta_1) + f'''(\theta_2)$$

ومنه نجد:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - f'(x)\right| \leq C4h^2$$

حيث:

$$C' = Sup|f'''(y)|$$

$$y\epsilon[0,1]$$

إذن:

التقريب المركزي : $f'^{(x)} \approx \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

خطأ التقريب من الرتبة الثانية وهو اكثر دقة من المتأخر والمتقدم.

2- التقريب المركزي للمشتق الثاني:

اذا كانت الدالة f من الصف $C^4 = ([0,1])$ بمكننا تقريب المشتق الثاني عند القيمة x من المجال $[0,1]$فمن خلال نشر تايلور عند $(x-h)$ و $(x+h)$ نجد:

$$f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2}f"(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\theta_1)$$

$$f(x-h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2}f"(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\theta_2)$$

ومنه نجد:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + (x-h)}{h^2}$$

$$\left|\frac{f(x+h) - 2f(x) + (x-h)}{h^2} - f"(x)\right| \leq \frac{h^2}{12} Sup\left|f^{(4)}(\theta)\right| \theta\epsilon[0,1]$$

من اجل $x\epsilon[h, 1-h]$

التقريب المركزي هو الأكثر استعمالا لأنه الأكثر دقة حيث رتبة الخطأ هي من الرتبة الثانية.

تمارين مقترحة

التمرين الاول

1-أوجد كثير حدود الاستقطاب للاغرانج للدالة المعرفة علي النقاط التالية :

x_i	1	2	6	8
y_i	2	5	7	5

2- أحسب $P_3(3)$

التمرين الثاني

أوجد كثير حدود الاستقطاب لنيوتن ولاغرانج للدالة $\boldsymbol{f(x) = cosx}$

عند النقاط التالية $\boldsymbol{0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi}$

التمرين الثالث

مستعملا قيم الجدول المعطي أحسب $\boldsymbol{\int_{1.1}^{1.5} f(x)\ dx}$ **بواسطة :**

1-طريقة شبه المنحرف البسيطة.

2-طريقة سمبسون البسيطة.

3- أحسب المشتق الاول للدالة $\boldsymbol{f}$ عند $\boldsymbol{1.3}$ مستعملا التقريب المركزي.

4- أحسب المشتق الاول للدالة $\boldsymbol{f}$ عند $\boldsymbol{1.1}$ و **1.5** مستعملا التقريب المناسب.

$\boldsymbol{x}$	**1.1**	**1.3**	**1.5**
$\boldsymbol{f(x)}$	**3.0042**	**3.6693**	**4.4817**

التمرين الرابع

من خلال المعطيات المجدولة كما يلي:

X	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$	1.500	2.000	2.000	1.6364	1.250	0.9565

أحسب تكامل الدالة علي المجال $[0, 2.5]$ مستخدما طريقة سمبسون مع مراعاة عدد النقاط.

التمرين الخامس

ليكن التكامل $\int_0^2 e^x \, dx$

- **أحسب القيمة الحقيقية للتكامل.**
- **أحسب التكامل مستعملا**

1– طريقة شبه المنحرف البسيطة

2– طريقة سمبسون البسيطة

3– طريقة شبه المنحرف المركبة وسمسون المركبة من أجل $h = 0.5$

- **أي تقسيم يعطينا نتيجة أدق؟**

الحل التقريبي للمعادلات غير الخطية

مقدمة

هناك عدة طرق عددية لا يجاد الحل التقريبي لمعادلة غير خطية , في هذا الفصل سوف نستعرض طريقتين عدديتين وهما:

1/ طريقة النقطة الثابتة

2/ طريقة نيوتن

اولا طريقة النقطة الثابتة: قبل تناول هده الطريقة سوف نتطرق الى تعريف عام للنقطة الثابتة لدالة .

<u>تعريف النقطة الثابتة:</u> نسمي العدد الحقيقي $\boldsymbol{\alpha}$ نقطة ثابتة لدالة $\boldsymbol{g}$ اذا تحقق: $\boldsymbol{g}(\propto) = \propto$
اي:

صورة $\propto$ بواسطة الدالة $\boldsymbol{g}$ هي نفسها .

<u>تعيين النقطة الثابتة</u> نعرف المتتالية (x_n)على النحو التالي $\begin{cases} x_0 \text{ معطى} \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$

من خلال المتتالية السابقة نستطيع حل المعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ وذلك بتحويلها الى معادلة مكافئة من الشكل $x = g(x)$

ملاحظة: الكتابة $x = g(x)$ ليست وحيدة وبالتالي اختيار الدالة $\boldsymbol{g}$ يخضع لمعايير سيتم تحديدها من خلال النظرية التالية :

نظرية التقارب لطريقة النقطة الثابتة :

لتكن $g: [a,b] \to [a,b]$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$ حيث:

$$\forall x \in [a,b]: \ |g'(x)| \leq k < 1$$

اذن المتتالية (x_n) المعرفة ب: $x_{n+1} = g(x_n)$ حيث: $n = 0,1, \dots n$

تتقارب مستقلة عن القيمة الابتدائية x_0 نحو النقطة الثابتة الوحيدة $\overline{X}$ للدالة g.

مثال

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{[a,b] = [2,4]}$$

هناك عدة إمكانيات لتحويل هذه المعادلة إلي الشكل

$$x = g(x)$$

1 $\quad x = g(x) = \sqrt{2x+3}$

2 $\quad x = h(x) = \dfrac{3}{x+2}$

3 $\quad x = k(x) = \frac{x^2-3}{2}$

بين الدالة التي تحقق شروط النقطة الثابتة مع التعليل

1 لدينا $\quad 4 \le 2x \le 8 \to 7 \le 2x+3 \le 11$

ومنه $\quad \to \quad \sqrt{7} \le g(x) \le \sqrt{11}$

إذن $\quad g([2,4]) \in [2,4]$ و

$$|g'(x)| = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \le 0.30 = k < 1$$

شروط النظرية محققة ومنه المتتالية تتقارب نحو الحل التقريبي.

2 حيث $\quad x \ne 2 \qquad h(x) = \frac{3}{x-2}$

أحد الشروط غير محقق ومنه المتتالية ليست متقاربة

3 لدينا $\quad \frac{1}{2} \le k(x) \le 6.5$

أحد الشروط غير محقق ومنه المتتالية ليست متقاربة

اذن حسب النظرية يجب اختيار الدالة الاولى.

نتيجة

إذا كانت g تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة فإن

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0| \qquad n \geq 1$$

هذه العلاقة تسمح لنا بإيجاد عدد التكرارات اللازمة من أجل تقريب الحل بالدقة المعطاة.

ثانيا طريقة نيوتن:

تعتبر طريقة نيوتن من أهم الطرق لحل المعادلات غير الخطية وهي عبارة عن حالة خاصة من طريقة النقطة الثابتة .

تعتمد هذه طريقة على نظرية تايلور انطلاقا من القيمة الابتدائية للحل نبحث عن الارتياب على النحو التالي:

$$f(x_0 + \Delta x) = 0$$

نقوم بنشر تايلور بجوار القيمة الابتدائية اي:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \ldots$$

يكفي ان نهمل الرتب اكبر من او تساوي 2 نجد:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) = 0$$

$$\Delta x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad f'(x_0) \neq 0$$

Δxالمقدار الذي نضيفه للقيمة الابتدائية x_0حتى تنعدم الدالة f

نضع $x_1 = (x_0 + \Delta x)$

ثم نعيد البحث عن الجذور التقريبية للدالة بخطأ جديد فنحصل على العلاقة التكرارية التالية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ملاحظات:

1/طريقه نيوتن هي حالة خاصة من طريقه النقطة الثابتة

2/بما اننا اهملنا الحدود ذات الرتب الاكبر من او يساوي 2 في نشر تايلور فان هذا الارتياب ليس الاحسن

نظريه التقارب لطريقه نيوتن:

اذا كانت f داله معرفه على المجال $[a, b]$ حيث تحقق الشروط التالية:

أ/ f مستمرة

ب/ $f(a).f(b) < 0$

ج/ الدالة المشتقة الاولى والدالة المشتقة الثانية للدالة f غير معدومتين واشارتهما ثابتة على المجال $[a, b]$.

فان طريقه نيوتن تشكل متتاليه تتقارب نحوى الحل الوحيد للمعادلة انطلاقا من القيمة الابتدائية التي تحقق

$$f(x_0).f''(x_0) > 0$$

اختبار التوقف:

توقف عملية التكرار يتم عندما يتحقق ما يلي:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

ε: درجه دقة معطاة

مثال $f(x)= x- e^{-x}$ $x \in [-6, 1]$

بين أن شروط طريقة نيوتن محققة

لدينا f مستمرة علي المجال المعطي و $f(-6).f(1) < 0$

$f''(x)= -e^{-x} < 0$ دوما و $f'(x)= 1+e^{-x} > 0$ دوما.

من اجل $x_0 = -6$ فان: $f(-6).f''(-6) > 0$

ومنه طريقه نيوتن تتقارب.

نضع $\begin{cases} x_0 = -6 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1+e^{-x_n}} \end{cases}$ المتتالية تتقارب نحو حل للمعادلة

تمارين مقترحة

تمرين1/

لتكن المعادلة المعرفة على المجال $[1,2]$ كما يلي:

$$x^3 - x - 1 = 0$$

أ/ نضع: $x = x^3 - 1 = h(x)$

$$x = \sqrt[3]{x+1} = g(x)$$

اي الدالتين تحقق شروط النقطة الثابتة ؟برر اجابتك.

ب/نضع $x_0 = 1.5$

اوجد عدد التكرارات اللازمة برتبة خطا مقدارها $\varepsilon = 0.5 * 10^{-2}$

ج/ اوجد الجذر التقريبي

التمرين2/ لتكن المعادلة : $2x - \cos x\ 0$ على المجال $[0, 0.5]$

أ/بين ان الدالة $g(x)$حيث:

$$x = 0.5 \cos x = g(x)$$

تحقق شروط طريقة النقطة الثابتة.

التمرين3/ لتكن المعادلة $x^4 - 8x + 1 = 0$ على المجال $[1.6, 2]$

أ/ بين ان شروط تطبيق طريقة نيوتن محققة

ب/ باستعمال تكرارين متتاليين اوجد القيمة المقربة للجذر مع اخذ $x_0 = 2$

التمرين4/ اوجد الجذر لمقرب للمعادلة $\boldsymbol{x^3 + x^2 - 11 = 0}$ على المجال $[\mathbf{1}, \mathbf{2}]$

بخطأ $\boldsymbol{\varepsilon = 0.5 * 10^{-2}}$

بطريقة نيوتن بعد التحقق من شروط تطبيقهما.

التمرين 5/

باستعمال نشر تايلور أوجد تقريبا للدالة المشتقة الاولي حسب الحالات

1- الفروق المتقدمة.
2- الفروق المتأخرة.
3- الفروق المركزية.
ثم أوجد تقريبا للدالة المشتقة الثانية في حالة الفرق المركزي.

تطبيق

$$\boldsymbol{f(x) = lnx \quad , \quad x = 1 \quad , \quad h = 0.1}$$

حلول التمارين المقترحة

الفصل الاول

التمرين الاول:

التدوير الى اربعة ارقام معبرة دقيقة.

العدد	التدوير	الخطأ
456.872	456.9	0.5×10^{-1}
456.872	-5.358	0.5×10^{-3}
0.0023417	0.002342	0.5×10^{-6}

التمرين الثاني:

الخطأ المطلق للعدد $a = 476.6$ هو $\Delta a = 0.05$

الخطأ المطلق للعدد $b = 3.11918$ هو $\Delta b = 0.00005$

اذن: $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$

الخطأ المطلق للمجموع هو: $\Delta_{(a+b)} = 0.050005$

الخطأ النسبي للمجموع هو: $\frac{\Delta_{(a+b)}}{|a+b|}$ أي : $\frac{0.050005}{479.71918} = 0.0001$

التمرين الثالث:

تقريب الدالة: $f(x) = e^x \sin x$ على المجال $[0.1]$

نشر تايلور من المرتبة الثالثة:

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

نقوم بحساب المشتقات: $f(0) = 0$

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) \ : \ f'(0) = 1$$

$$f''(x) = 2e^x \cos x \ : \ f''(0) = 2$$

$$f^{(3)}(x) = 2e^x(\cos x - \sin x) \ : \ f^{(3)}(0) = 2$$

اذن: كثير حدود تايلور يكون من الشكل :

$$P_3(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

- الخطأ المرتكب في هذا التقريب يعطى على الشكل:

$$\forall x \in [0,1]: |f(x) - P_3(x)| \leq M.\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

اذن: $|f(x) - P_3(x)| \leq \frac{M}{24}$

حيث: $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq M$

التمرين الرابع:

حتى تكون كثيرات الحدود $(P_i(x))_{i=0.1.2}$ متعامدة يجب تحقيق:

$$\int_{-1}^{1} P_i(x)\, P_j(x) dx = 0 \qquad i \neq j$$

و $w(x) = 1$

$$\int_{-1}^{1} P_i(x)\, P_i(x) dx \neq 0$$

لدينا:

- $\int_{-1}^{1} P_0(x)\, P_1(x) dx = \int_{-1}^{1} x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 0$
- $\int_{-1}^{1} P_0(x)\, P_2(x) dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{3}{6}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1} = 0$
- $\int_{-1}^{1} P_1(x)\, P_2(x) dx = \int_{-1}^{1} x\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) dx \left[\frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1} = 0$

و

- $\int_{-1}^{1} P_0(x)\, P_0(x) dx = 2$

- $\int_{-1}^{1} P_1(x)\, P_1(x)dx = \frac{2}{3}$
- $\int_{-1}^{1} P_2(x)\, P_2(x)dx = \frac{2}{5}$

ومنه كثيرات الحدود P_2, P_1, P_0 متعامدة

التمرين الخامس:

لدينا:

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{i=3} Y_i\, L_i(x)$$

حيث:

$$y_0 \mathrm{L}_0(x) = \frac{(-2)(x-2)(x-6)(x-8)}{35}$$

$$y_1 \mathrm{L}_1(x) = \frac{(5)(x-1)(x-6)(x-8)}{24}$$

$$y_2 \mathrm{L}_2(x) = \frac{(-7)(x-1)(x-2)(x-8)}{40}$$

$$y_3 \mathrm{L}_3(x) = \frac{(5)(x-1)(x-2)(x-6)}{84}$$

ومنه:

$$P_3(x) = y_0 \mathrm{L}_0(x) + y_1 \mathrm{L}_1(x) + y_2 \mathrm{L}_2(x) + y_3 \mathrm{L}_3(x)$$

حساب : $P_3(x)$: بتعويض قيم x بالعدد 3

نجد:

$$P_3(x) = \frac{-30}{35} + \frac{150}{24} + \frac{70}{40} - \frac{30}{84}$$

ومنه:

$$P_3(x) = \frac{-6}{7} + \frac{25}{4} + \frac{7}{4} - \frac{5}{14}$$

اذن:

$$P_3(x) \approx 6.7$$

بما ان قيم الجدول مأخوذة للعدد واحد دقيق معبر ولدينا: $P_3(x6) = 7$ و $P_3(2) = 5$

نأخذ:

$$P_3(3) \approx 6$$

التمرين السابع:

1) طريقة شبه المنحرف البسيطة:

$$\int_{1.1}^{1.5} f(x)dx \approx \frac{1.5 - 1.1}{2}\big(f(1.5) + f(1.1)\big)$$

$$\approx \frac{0.4}{2}(3.0042 + 4.4817)$$

$$\approx 1.4972$$

2) طريقة سمبسون البسيطة:

$$\int_{1.1}^{1.5} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$\approx \frac{0.4}{6}(f(1.1) + 4f(1.3) + f(1.5))$$

$$\approx \frac{0.2}{3}(3.0042 + 4 \times (3.6693) +$$

$$4.4817)$$

$$\approx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

التمرين الثامن:

بما ان عدد النقاط زوجي (ستة) فإنه لا يمكننا استخدام القانون $1/_3$ لسمبسون وحده، فيتم

استخدام قانون $3/_8$ لسمبسون في النقاط الاربع الاولى ثم قانون $1/_3$ للنقاط الثلاث المتبقية.

قانون $3/_8$ لسمبسون:

اذا كانت : x_0, x_1, x_2, x_3 اربع نقاط حيث : $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = h$ فإن:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

ومنه نجد:

$$\int_{0}^{2.5} f(x)dx = \int_{0}^{1.5} f(x)dx + \int_{1.5}^{2.5} f(x)dx$$

اذن بتطبيق قانون $3/_8$ نجد:

$$\int_{0}^{1.5} f(x)dx \approx \frac{3 \times 0.5}{8}[f(x0_0) + 3f(x_1 0.5) + 3f(1) + f(1.5)]$$

$$\approx \frac{1.5}{8}[1.5 + 6 + 6 + 1.6364]$$

وبتطبيق قانون $1/_3$ نجد:

$$\int_{1.5}^{2.5} f(x)dx \approx \frac{0.5}{3}(1.6364 + 4 \times 1.25 + 0.9565)$$

ومنه: $\int_0^{2.5} f(x)dx \approx 4.1036$

التمرين التاسع:

- حساب القيمة الحقيقية للتكامل:

$$I = \int_0^2 e^x dx = [e^x]_0^2$$

$$= e^2 - 1 = 6.389$$

1 - طريقة شبه المنحرف البسيطة

$$\int_0^2 e^x dx \approx \frac{2-0}{2}(e^0 + e^2) \approx 8.389$$

2- طريقة سمبسون البسيطة

$$\int_0^2 e^x dx \approx \frac{2-0}{6}(e^0 + 4e^1 + e^2) \approx 6.421$$

$$\boldsymbol{h = 0.5}$$

3- طريقة شبه المنحرف المركبة

نقوم اولا بتقسيم مجال التكامل الى مجالات جزئية مدى كل واحد منها 0.5 ومنه:

$$\int_0^2 e^x dx = \int_0^{0.5} e^x dx + \int_{0.5}^{1} e^x dx + \int_1^{1.5} e^x dx + \int_{1.5}^{2} e^x dx$$

$$\approx \frac{0.5}{2}(e^0 + e^2 + 2(e^{0.5} + e^1 + e^{1.5})) \approx 6.522$$

4 – طريقة سمبسون المركبة

نقوم بتقسيم مجال التكامل إلى مجالين مدى كل واحد منها 1 لان طريقة سمبسون تستدعي وجود ثلاث نقاط

$$\int_0^2 e^x dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx$$

$$\approx \frac{0.5}{3}\left(e^0 + e^2 + 2e^1 + 4(e^{0.5} + +e^{1.5})\right)$$

$$\approx 6.391$$

نلاحظ ان ادق قيمة تقريبية للتكامل هي الاخيرة (4) اي من اجل $h = 0.5$ وبالتالي كلما كانت الخطوة h اصغر زادت الدقة، لكن مع صعوبة الحساب اليدوي او استحالته وهنا تكمن اهمية البرمجة في الكومبيوتر فمن خلالها يمكننا حل مسائل معقدة في ظرف وجيز.

كما أن طريقة سمبيون أدق من طريقة شبه المنحرف بالنسبة للبسيطة وكذألك المركبة.

الفصل الثاني

التمرين الاول:

أ-
$$h(x) = x^3 - 1$$

نلاحظ أن: $h(2) = 7 \notin [1,2]$ ومنه الدالة h لا تحقق شروط نظرية النقطة الثانية.

- $g(x) = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{1/3}$

من أجل : $1 \le x \le 2$ فإن $2^{1/3} \le g(x) \le 3^{1/3}$

حيث: $g(2) \approx 1.25$ و $g(3) \approx 1.44$

ومنه : $g(x) \in [1,2] \quad : \quad \forall x \in [1,2]$

المشتق : $max_{[1,2]}|g'(x)| = max_{[1,2]}\left|\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}\right|$

$$= |g'(x)| \le \frac{1}{3 \times \sqrt[3]{4}} = 0.21 < 1$$

اي: $K = 0.21$

ومنه الدالة g تحقق شروط نظرية النقطة الثانية.

ب- نحسب أولا عدد التكرارات اللازمة من اجل خطا $0.5 \times 10^{-2} =$ ع اي:

حسب العلاقة: $\frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| \le$ ع

$$x_0 = 1.5 \quad : \quad x_1 = g(x_0) = \sqrt[3]{2.5} \approx 1.357$$

ومنه:

$$\frac{(0.21)^{\mathrm{n}}|1.357 - 1.500|}{1 - .021} \le 0.5 \times 10^{-2}$$

بادخال الدالة ln على طرفي المتناهية نجد:

$n \le 2.992$ ومنه نأخذ : $n = 3$

ت- الجذر التقريبي:

$$x_2 = g(x_1) = \sqrt[3]{2.357}$$

$$\approx 1.331$$

$$x_3 = g(x_2) = \sqrt[3]{2.331} \approx 1.326$$

اذن : $\bar{x} \approx 1.32 \pm 0.01$ الحل التقريبي.

التمرين الثاني:

لدينا: $x \in [0,0.5]: x = g(x) = 0.5\cos x$

1) شروط النقطة الثابتة:

- نعلم ان : $\forall x \in [0,0.5]: 0 \leq x\cos x \leq 1$

اذن: $0 \leq 0.5\cos x \leq 0.5$

ومنه: $\forall x \in [0,0.5]: g(x) \in [0,0.5]$

- $g'(x) = -0.5\sin x$

$$|g'(x)| \leq |g'(0.5)| < 0.5 < 1$$

اذن الدالة g تحقق شروط النقطة الثابتة.

التمرين الثالث:

$x^4 - 8x + 1 = 0$ على المجال $[1,6,2]$

شروط طريقة نيوتن:

- $f(1.6).f(1) < 0$: $f(1.6) = -5.246 < 0$

$f(2) = 1 > 0$

- $\forall x \in [1,6,2] : f'(x) = 4x^3 - 8 > 0$
- $\forall x \in [1,6,2] : f''(x) = 12x^2 > 0$

اذن شروط نظرية نيوتن محققة.

حسب العلاقة:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f(2).f"(2) > 0 \qquad و \qquad x = 2$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{24} \approx 1.96$$

$$x_2 = 1.956$$

اذن القيمة المقربة للجذر التقريبي هي:

$$\bar{x} = 1.96 \pm 0.07$$

التمرين الرابع:

$x^3 - x^2 - 11 = 0$ على المجال $[1,2]$

شروط تطبيق نظرية نيوتن.

- $f(1).f(2) = -9 \times 1 < 0$
- $\forall x \in [1,2] : f'(x) = 3x^2 + 2x > 0$
- $\forall x \in [1,2] : f^{"}(x) = 6x + 2 > 0$

$f'(x)$ و $f^{"}(x)$ مستمرتان على المجال [ ] ولا تغيران إشارتهما. إذن:

شروط طريقة نيوتن محققة.

نأخذ $x_0 = 2$ $\qquad f(2).f"(2) > 0$

حسب العلاقة نجد :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{16} \approx 1.9375$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.9375 - \frac{0.065}{15.172} \approx 1.9362$$

اذن: $|x_2 - x_1| < 0.0013 < 0.5 \times 10^{-2}$

ومنه: $\bar{x} = 1.936 \pm 0.05$