أعمال موجهة في وحدة القياس

مستوى ثالثة رياضيات

تطبيقات نظرية فوبيني

تمرين 22. لتكن $(v_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ متتالية أعداد حقيقية ذات دليلين n و k.

1. باستعمال نظرية فوبيني، أعط شرط كافي من أجل أن تكون السلسلة

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} v_{n,k}$$

متقاربة ويكون لدينا

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} v_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{n,k}\right)$$

<u>إرشاد</u> تذكر تمرين 16

2. بين أن السلسلة العددية

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n^k}$$

متقاربة مطلقا ثم أحسب قيمتها.

3. نفس السؤال 2، من أجل السلسة

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+k}\,\frac{n^k}{n!\times k!}$$

تمرين 23

1. تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ أن

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^n\left(\int_0^{\infty} e^{-xy}\,dy\right)\sin x\,dx$$

2. استعمل التكامل بالتجزئة مرتين لتثبت أن

$$\int_0^n e^{-xy}\sin x\,dx = \frac{1-ye^{-ny}\sin n - e^{-ny}\cos n}{y^2+1}$$

من أجل كل $n \geq 1$ و $y \in \mathbb{R}$.

3. نضع

$$F_n(y) = \frac{1-ye^{-ny}\sin n - e^{-ny}\cos n}{y^2+1}$$

أحسب $lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} F_n(y)\,dy$

4. استنتج أن

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

حل تمرين 22.

1. نشير إلى أن $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2) = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$ و $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

نطبق نظرية فوبيني على الفضاء $\left(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2), \mu \otimes \mu\right)$ حيث μ يمثل قياس العد، لاحظ ت 16، نحصل على

$$\int_{\mathbb{N}^2} v_{n,k}\, d\mu \otimes \mu = \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} v_{n,k} = \sum_{n,k=0}^{\infty} v_{n,k}$$

حالة $\left(v_{n,k}\right)$ موجبة نستعمل نظرية فوبيني 1، الشرط الكافي للحصول على $\sum_{n,k=0}^{\infty} v_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_{n,k}\right)$ هو $\left(v_{n,k}\right)$ قيوسة.

و هذا الشرط محقق لأنه باعتبار $v_{n,k}$ كتابع معرف من $\left(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)\right)$ نحو $\left(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\right)$ نجد أن الصورة العكسية لكل مجموعة قيوسة تكون موجودة حتما في $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$.

حالة $\left(v_{n,k}\right)$ إشارتها كيفية، نستعمل نظرية فوبيني2 ، يكفي تحقق الشرط

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} \left|v_{n,k}\right| < \infty$$

أو اذا استعملنا نظرية فوبيني 3، يكفي أن نتحقق من تقارب أحد السلاسل التالية $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|v_{n,k}\right|\right)$ ، $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|v_{n,k}\right|\right)$ أو $\sum_{n,k=0}^{\infty}\left|v_{n,k}\right|$.

2.

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{1}{n^k}\right| = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\right)\right\}$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left\{1 - \frac{1}{r}\right\} = 1 < \infty$$

استخدمنا في المساوات الثانية نظرية فوبيني 1، في المساواة الثالثة ما بين قوسين عبارة عن سلسلة حدود متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{n}$ وحدها الأول $\frac{1}{n^2}$، و في باقي الخطوات حسابات.

ومنه نستنتج أن السلسلة متقاربة مطلقا. حسب فوبيني 2 نكتب

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\ \frac{1}{n^k}=\sum_{n=2}^{\infty}\left\{(-1)^n\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}\right)\right\}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n-1}-\frac{(-1)^n}{n}\right\}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n-1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}\qquad(*)$$

نعلم أن $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)$ ، خذ $x=1$ لتحصل على $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln(2)$ ، ومنه المساواة $(*)$ تصبح

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n-1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$=\ln(2)+\ln(2)-1$$

$$=2\ln(2)-1$$

وهي قيمة السلسلة.

3. نتبع نفس الخطوات

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^{n+k}\ \frac{n^k}{n!\times k!}\right|=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\ \frac{n^k}{n!\times k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(e^n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{n!}=e^e<\infty$$

يعني أن السلسلة متقاربة مطلقا، حسب نظرية فوبيني 2 نستنتج

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+k}\ \frac{n^k}{n!\times k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k n^k}{k!}\right)\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)^k}{k!}\right)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(e^{-n})$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-e^{-1})^n}{n!}=e^{-e^{-1}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$$

حل تمرين 23.

5. المطلوب إثبات

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^n e^{-xy} \sin x \, dx \right) dy \quad \forall n \geq 1$$

نضع

$$R = [0,n] \times [0,+\infty[\quad و \quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = e^{-xy} \sin x$$

التابع f قيوس، لأنه مستمر.

R مجموعة قيوسة في $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ، لكونها مستطيل.

نرمز بـ μ_x ، μ_y الى قياس لوبيغ على $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ نسبة إلى x ، y على التوالي.

أولا، كون الدالة $|f|$ قيوسة وموجبة، نستطيع تطبيق نظرية فوبيني 1 على $|f|$،

$$\begin{aligned}
\int_R |f| \, d\mu_x \otimes \mu_y &= \int_R |e^{-xy} \sin x| \, d\mu_x \otimes \mu_y \\
&= \int_{[0,n]} |\sin x| \left(\int_{[0,+\infty[} e^{-xy} \, d\mu_y \right) d\mu_x \\
&= \int_0^n |\sin x| \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} \, dy \right) dx \\
&= \int_0^n |\sin x| \left(\left[-\frac{e^{-xy}}{x} \right]_{y=0}^{y=+\infty} \right) dx = \int_0^n \frac{|\sin x|}{x} dx
\end{aligned}$$

الدالة k حيث $k(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ ليست معرفة عند 0 لكنها قابلة للتمديد بالاستمرار عند 0، ذلك لأن نهايتها عند 0 موجودة تساوي 1، نستنتج أن الدالة k قابلة للمكاملة على المتراص $[0,n]$، لأجل كل $n \geq 1$. أي أن $\int_0^n \frac{|\sin x|}{x} dx < \infty$، ونحصل بذلك على

$$\int_R |f| \, d\mu_x \otimes \mu_y < \infty \qquad (**)$$

ثانيا، العلاقة $(**)$ تعني $f \in L^1(R, \mu_x \otimes \mu_y)$ ، ومنه يمكننا تطبيق نظرية فوبيني 2، على f ، لنحصل من جهة على

$$\int_R f \, dxdy = \int_0^n \left(\int_0^{+\infty} f \, dy \right) dx =$$
$$\int_0^n \sin x \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} \, dy \right) dx = \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx$$

ومن جهة أخرى على

$$\int_R f \, dxdy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^n e^{-xy} \sin x \, dx \right) dy$$

ومنه الحصول على المساواة

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^n e^{-xy} \sin x \, dx \right) dy \quad \forall n \geq 1$$

6. لعدم إطالة هاته الورقة بالحسابات سنتجاوز هذا السؤال.

7. نطبق نظرية التقارب بالهيمنة للوبيغ

شرط 1: F_n متتالية توابع قيوسة، لأنها مستمرة.

شرط 2:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y^2+1}, & y \in]0,+\infty[\\ \nexists \quad , & y = 0 \end{cases}$$

نضع $F(y) = \frac{1}{y^2+1}$ ، نجد $\lim_{n\to\infty} F_n(y) = F(y)$ μ_y–شبه كليا على $[0,+\infty[$.

شرط 3:

$$|F_n(y)| \leq \frac{3}{y^2+1} \quad \forall n \geq 1$$

نضع $g(y) = \frac{3}{y^2+1}$، نلاحظ أن g قيوس على $[0,+\infty[$ وقابل للمكاملة حسب لوبيغ على $[0,+\infty[$، يعني $g \in L^1([0,+\infty[,\mu_y)$.

شروط النظرية محققة، نستنتج

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} F_n(y)\,dy = \int_0^{+\infty} F(y)\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1}\,dy = [arctg\, y]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

8. حسب سؤال 1، 2 و3 نكتب

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} F_n(y)\,dy = \frac{\pi}{2}$$