الفصل الثاني

المتغيرات العشوائية ذات متغير واحد

مقدمة: يهتم هذا الفصل بدراسة المتغيرات العشوائية ذات متغير واحد من حيث تعريفها و أنواعها و التوزيعات الاحتمالية لها، و خصائص هذه التوزيعات.

1.2 مفاهيم عامة

1.1.2 المتغير العشوائي: نسمي متغيرا عشوائيا حقيقيا كل تطبيق معرف على مجموعة أساسية Ω نحو $\mathbb{R}$، و نرمز له بالرمز X، Y، Z، ...

$$\begin{array}{rccc} X: & \Omega & \to & \mathrm{R} \\ & w & \mapsto & X(w) \end{array}$$

و تكون في هذه الحالة مجموعة كل قيم X هي $X(\Omega)$ حيث:

$$X(\Omega)=\{X(w), \quad w\in\Omega\}$$

حالات خاصة:

1/ إذا كانت $X(\Omega)$ منتهية أو قابلة للعد، فإن X يسمى متغيرا عشوائيا متقطعا أو منفصلا.

2/ إذا كانت $X(\Omega)$ تحوي مجالا، فإن X يسمى متغيرا عشوائيا مستمرا.

مثال1:

$$\Omega=\{(i, j),\ i, j\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$$

نعرف على Ω المتغير العشوائي X كالآتي:

$$X(i, j)=i+j,\ \forall(i, j)\in\Omega$$

X متغيرا عشوائيا متقطعا لأن $X(\Omega)=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ منتهية.

مثال2:

$$\Omega=\{P, N\}$$

نعرف على Ω المتغير العشوائي X كالآتي:

$$X(w)=\begin{cases}1 & si\ \ w=P\\ 0 & si\ \ w=N\end{cases}$$

X متغيرا عشوائيا متقطعا لأن $X(\Omega)=\{0, 1\}$ منتهية.

مثال3:

$$\Omega=\mathbb{R},\ I=[a,b],\ 0<a<b$$

نعرف على Ω المتغير العشوائي X كالآتي:

$$X(w)=\begin{cases}w & si\ \ w\in I\\ 0 & si\ \ w\notin I\end{cases}$$

X متغيرا عشوائيا مستمرا لأن $X(\Omega)=I\cup\{0\}$ تحوي مجالا.

2.1.2 عمليات على المتغيرات العشوائية:

- إذا كان X متغيرا عشوائيا حقيقيا معرفا على Ω و f دالة حقيقية معرفة على $\mathbb{R}$ فإن $f(X)$ هو متغير عشوائي حقيقي معرف على Ω أيضا.

- إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين حقيقيين معرفين على Ω فإن $X+Y,\ X-Y,\ X\times Y,\ X/Y\ (Y\neq 0)$ كلها متغيرات عشوائية حقيقية معرفة على Ω.

3.1.2 ترميز:

ليكن X متغيرا عشوائيا حقيقيا معرفا على Ω و A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ فإن الحدث $\{w\in\Omega,\ X(w)\in A\}$ نرمز له بالرمز $\{X\in A\}$ أي

$$\{X\in A\}:=\{w\in\Omega,\ X(w)\in A\}$$

<u>حالات خاصة:</u>

1/ من أجل $A=\{a\}$ فإن $\{X\in A\}=\{X=a\}=\{w\in\Omega, X(w)=a\}$

2/ من أجل $A=]-\infty,a]$ فإن

$$\{X\in A\}=\{X\leq a\}=\{w\in\Omega, X(w)\leq a\}$$

3/ من أجل $A=]a,b[$ فإن

$$\{X\in A\}=\{a\leq X\leq b\}=\{w\in\Omega, a\leq X(w)\leq b\}$$

4.1.2 قانون الاحتمال: ليكن (Ω, P) فضاء احتمال و X متغير عشوائي حقيقي معرف على Ω، نسمي قانون احتمال للمتغير X ، التطبيق P_X المعرف كما يلي:

$$\begin{array}{rccc} P_X : & \wp(\mathrm{R}) & \rightarrow & [0,1] \\ & A & \mapsto & P_X(A) = P(\{X \in A\}) \end{array}$$

$\wp(\mathrm{R})$ هي مجموعة كل أجزاء $\mathbb{R}$.

2.2 دالة توزيع الاحتمال:

1.2.2 تعريف: ليكن (Ω, P) فضاء احتمال و X متغير عشوائي حقيقي معرف على Ω، نسمي دالة توزيع احتمال X الدالة F_X المعرفة كما يلي:

$$\begin{array}{rccc} F_X : & \mathrm{R} & \rightarrow & [0,1] \\ & x & \mapsto & F_X(x) = P(X \le x) \end{array}$$

2.2.2 خصائص دالة توزيع الاحتمال:

1/ F_X متزايدة على $\mathbb{R}$.

2/ F_X مستمرة من اليمين دائما.

3/ $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

4/ $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

<u>نتائج:</u>

أ/ إذا كان X متقطعا أي $X(\Omega)=\{x_i,\ i\in \mathrm{N}\}$ ، فإن

$$\forall x\in \mathrm{R},\ F_X(x)=\sum_{i\ tel\ que\, x_i\leq x} P(X=x_i)$$

ب/ $\forall a,b\in \mathrm{R},\ a\leq b \Rightarrow P(a\leq X\leq b)=F_X(b)-P(X<a)$

ج/ $\forall a,b\in \mathrm{R},\ a<b \Rightarrow P(a< X\leq b)=F_X(b)-F_X(a)$

<u>تمرين:</u> أثبت صحة النتائج السابقة ثم أوجد عبارة كل من $P(a\leq X<b)$ و $P(a<X<b)$.

3.2.2 نظرية: لتكن F دالة معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_+$ تحقق الخصائص الاربعة من الفرع 2.2.2، فإنه يوجد متغير عشوائي حقيقي X و فضاء احتمال (Ω, P) بحيث تكون $F\equiv F_X$.

3.2 دالة كثافة الاحتمال و الاستمرار المطلق:

1.3.2 دالة الكثافة: لتكن f دالة معرفة من R نحو R ، نقول أن f دالة كثافة إذا و فقط إذا تحققت الشروط التالية:

1/ $\forall x\in \mathrm{R},\ f(x)\geq 0$

2/ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

<u>مثال1:</u>

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & si \quad -1\leq x\leq 1\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

مثال2:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & si \quad a\le x\le b\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

2.3.2 دالة كثافة الاحتمال: ليكن (Ω, P) فضاء احتمال و X متغيرا عشوائيا حقيقيا معرفا على Ω، نفرض أن F_X مستمرة و قابلة للاشتقاق (ما عدا عند عدد منته من النقاط)، فإن F'_X هي دالة كثافة تسمى كثافة احتمال المتغير العشوائي X ، و نرمز لها بالرمز f_X أي $F'_X \equiv f_X$.

3.3.2 تعريف: نقول عن متغير عشوائي حقيقي X أنه مستمر مطلقا إذا و فقط إذا كانت له دالة كثافة احتمال. و نقول في هذه الحالة أن X يتبع قانون الاحتمال المعرف ب f_X .

ملاحظة: إذا كان X متقطعا فإنه توجد له دالة كثافة الاحتمال المتقطعة حيث:

$$\forall a,\ f_X(a)=P(X=a)$$

4.3.2 خصائص: لتكن f_X دالة كثافة احتمال متغير عشوائي حقيقي X فإنه لدينا الخصائص الآتية:

/1 $$\forall x\in \mathbb{R},\ F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

/2

$$
\begin{aligned}
\forall a, b \in \mathrm{R},\ P(a < X \leq b) &= P(a \leq X < b) \\
&= P(a < X < b) \\
&= P(a \leq X \leq b) \\
&= F_X(b) - F_X(a)
\end{aligned}
$$

3/

$$\forall a \in \mathrm{R}, P(X > a) = \int_a^{+\infty} f_X(t)dt$$

4/

$$\forall a \in \mathrm{R}, P(X = a) = 0$$

5.3.2 نظرية: لتكن f دالة كثافة، فإنه يوجد متغير عشوائي حقيقي X مستمر مطلقا و فضاء احتمال (Ω, P) بحيث $f \equiv f_X$.

مثال: نعتبر الدالة العددية الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} Cx & si \quad 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1/ أوجد C حتى تكون f دالة كثافة لمتغير عشوائي X .

2/ أحسب $P(1 < X \leq 2)$.

الحل:

1/ لدينا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{1}^{4} f(x)dx = \int_{1}^{4} Cxdx = 1$$

إذا $C = \frac{2}{15}$

/2

$$P(1 < X \leq 2) = \int_{1}^{2} f(x)dx = \frac{1}{5}$$

4.2 وسائط عددية للمتغيرات العشوائية:

1.4.2 الأمل الرياضي: ليكن (Ω, P) فضاء احتمال و X متغيرا عشوائيا حقيقيا معرفا على Ω، نسمي الأمل الرياضي و الذي نرمز له بالرمز $E(X)$ المقدار الآتي إن وجد:

أ/ حالة X متقطع

$$E(X) = \sum_{i} x_i P(X = x_i)$$

ب/ حالة X مستمر مطلقا

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

2.4.2 التباين: ليكن (Ω, P) فضاء احتمال و X متغيرا عشوائيا حقيقيا معرفا على Ω، نسمي تباينا و الذي نرمز له بالرمز $V(X)$ المقدار الآتي إن وجد:

أ/ حالة X متقطع

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_i (x_i - E(x))^2 P(X = x_i) \\ &= \sum_i {x_i}^2 P(X = x_i) - \left(\sum_i x_i P(X = x_i)\right)^2 \\ &= E(X^2) - (E(x))^2 \end{aligned}$$

ب/ حالة X مستمر مطلقا

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f_X(x) dx$$

3.4.2 الانحراف المعياري: ليكن (Ω, P) فضاء احتمال و X متغيرا عشوائيا حقيقيا معرفا على Ω، نسمي انحرافا معياريا و الذي نرمز له بالرمز $\sigma(X)$ المقدار الآتي إن وجد:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

4.4.2 العزم من الدرجة r $(r \in \mathrm{N})$**:** ليكن (Ω, P) فضاء احتمال و X متغيرا عشوائيا حقيقيا معرفا على Ω، نسمي عزما من الدرجة r و الذي نرمز له بالرمز $m_r(X)$ المقدار الآتي إن وجد:

أ/ حالة X متقطع

$$m_r(X) = \sum_i x_i^{\ r} P(X = x_i)$$
$$= E(X^r)$$

ب/ حالة X مستمر مطلقا

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x)dx$$

5.4.2 العزم المتمركز من الدرجة $r\,(r \in \mathrm{N})$**:** ليكن (Ω, P) فضاء احتمال و X متغيرا عشوائيا حقيقيا معرفا على Ω، نسمي عزما متمركزا من الدرجة r و الذي نرمز له بالرمز $\mu_r(X)$ المقدار الآتي إن وجد:

أ/ حالة X متقطع

$$\mu_r(X) = \sum_i (x_i - E(X))^r P(X = x_i)$$

ب/ حالة X مستمر مطلقا

$$\mu_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^r f_X(x)dx$$

5.2 الدالة المميزة:

1.5.2 تعريف: الدالة المميزة لمتغير عشوائي حقيقي هي دالة معرفة على R ذات قيم مركبة نرمز لها بالرمز $\varphi_X(t)$ و المعرفة كما يلي:

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right)$$

2.5.2 خاصية: إذا كان X مستمرا مطلقا فإن:

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) e^{itx} dx$$

6.2 متراجحات احتمالية:

1.6.2 متراجحة ماركوف (Markov) : ليكن (Ω, P) فضاء احتمال و X متغيرا عشوائيا حقيقيا معرفا على $\mathbf{\Omega}$، نفرض أن $X \geq 0$ فإن:

$$\forall a > 0,\ \ P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

2.6.2 متراجحة تشيبيشاف (Tchebychev) : ليكن (Ω, P) فضاء احتمال و X متغيرا عشوائيا حقيقيا معرفا على $\mathbf{\Omega}$، فإن:

$$\forall \alpha > 0,\ \ P\left(\left|X - E(X)\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

3.6.2 متراجحة جونسون (Jensen) : ليكن (Ω, P) فضاء احتمال و X متغيرا عشوائيا حقيقيا معرفا على Ω و f دالة محدبة ، فإن:

$$f(E(X)) \leq E(f(X))$$

تعريف: نقول عن دالة حقيقية f أنها محدبة إذا و فقط إذا كان:

$$\forall x_1, x_2, ..., x_n \in \mathrm{R}, \forall (\lambda_i)_{i=1}^{n} > 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, alors$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

جامعة الوادي كلية العلوم الدقيقة قسم الرياضيات

مقياس الاحتمالات السنة الثانية

السداسي الرابع السنة الجامعية: 2021/2020

سلسلة تمارين رقم 02 (المتغيرات العشوائية)

تمرين 01: ليكن X متغيرا عشوائيا حقيقيا قيمه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ نعرف قانون احتماله كالآتي:

$$\forall i = 1, \ldots, 5; \quad P(X = i) = K(7 - i), \; K > 0$$

1/ أوجد K.

2/ أحسب $P(X^2 - 5X + 6 = 0)$.

3/ أحسب $P(X^2 - 5X + 6 < 0)$.

تمرين 02: ليكن X متغيرا عشوائيا حقيقيا قيمه $\{1, \ldots, n\}$ نعرف قانون احتماله كالآتي:

$$\forall i = 1, \ldots, n; \quad P(X = i) = Ci, \; C > 0$$

1/ أوجد C.

2/ أوجد عبارة دالة توزيع احتمال X.

تمرين 03: ليكن X متغيرا عشوائيا حقيقيا معرفا بالقانون الآتي:

$$P(X = -1) = 0.2, \; P(X = 0) = 0.1, \; P(X = 2) = 0.5,$$
$$P(X = 2.5) = 0.2$$

1/ أوجد عبارة دالة توزيع احتمال X ثم أرسم بيانها.

2/ أحسب $E(X)$ ، $V(X)$ ، $\sigma(X)$ ، $m_3(X)$ ، $\mu_4(X)$

3/ أحسب $P(X \geq 1.6)$ ، $P(-1 < X \leq 2)$

تمرين 04: نعتبر $a > 0$ ، نضع :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right) & si \;\; x \in [0,a] \\ 0 & si \;\; x \notin [0,a] \end{cases}$$

1/ أثبت أن f تمثل دالة كثافة.

2/ نفرض أن f هي كثافة احتمال متغير عشوائي X :

أ/ أوجد عبارة F_X .

ب/ أحسب $P\left(\frac{a}{2} \leq X \leq a\right)$

ج/ حدد قانون احتمال المتغيرات العشوائية $Y = X^2, \;\; Z = e^{-\alpha X}$.

تمرين 05: نعتبر $\theta \in \left]0,1\right[$ ، نضع :

$$f(x)=\begin{cases} \theta e^{2+x} & si \quad x \leq -2 \\ 0 & si \quad -2 < x < -1 \\ (1-\theta)e^{-1-x} & si \quad x \geq -1 \end{cases}$$

أثبت أن f تمثل دالة كثافة ثم أوجد عبارة F_X حيث $F_X' \equiv f$.