الفصل الثاني: مفاهيم أساسية في الاحتمالات
Chapter 2: Basic concepts in probability

الكلمات المفتاحية:

تجربة عشوائية، فضاء العينة، حدث، حدث بسيط، متمم حدث، اجتماع حدثين، تقاطع حدثين، المبدأ الأساسي في العد، التباديل، التوافيق، احتمال حدث، تجزئة، احتمال شرطي، أحداث مستقلة، مبرهنة بايز، قانون الاحتمال الكلي.

ملخص:

يهدف هذا الفصل بتوضيح المفاهيم الأساسية لنظرية الاحتمال وخواصها وقوانينها، الحدث وأنواع الأحداث والتمييز بين قاعدة الجمع وقاعدة الجداء والأحداث المستقلة والمتنافية والمبادئ الأساسية لنظرية العد و**التمييز** بين عدد طرق الاختيار المرتب التي يمكن تكوينها من عدة أشياء (التباديل) وبين عدد طرق الاختيار غير المرتب التي يمكن تكوينها من عدة أشياء (التوافيق)، والاحتمال الشرطي ونظرية بايز.

الأهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- المفاهيم الأساسية لنظرية الاحتمال
- الأحداث البسيطة والمركبة
- المبدأ الأساسي في العد والتباديل والتوافيق
- احتمال الحدث
- الاحتمال الشرطي والأحداث المستقلة
- مبرهنة بايز وقانون الاحتمال الكلي

تلعب الاحتمالات دوراً كبيراً في الحياة اليومية وفي كثير من العلوم فهي تُستخدم في قياس حادثة معينة غير مؤكدة الحدوث، فكثيرا ما نتخذ قرارات بناءً على معلومات ناقصة وتساعدنا الاحتمالات على ذلك، فمثلاً: قد يهمل الطالب دراسة جزء صغير من المقرر لأن احتمال أن يأتي منه سؤال في الامتحان صغير. وقد نلغي رحلة رتبنا لها منذ فترة لأن احتمال أن يكون الجو رديء كبير.

ونظرية الاحتمالات هي فرع من فروع الرياضيات التطبيقية الذي يهتم بدراسة تأثير الصدفة على الظواهر والأشياء. فإذا ألقيت قطعة نقود إلى الأعلى فإنه من المؤكد سقوطها على الأرض، ولكن لا نعلم على أي وجه سوف تسقط أو أي الوجهين سوف يظهر وهذا يسمى بـــالصدفة.

1. تعاريف أساسية basic definitions:

1.1. التجربة العشوائية random experience:

التجربة هي إجراء يمكن وصفه وصفا دقيقاً وملاحظة ما ينتج عنه، وهناك نوعان من التجارب: التجارب المحددة (بمعنى أنه إذا تكررت التجربة نفسها تحت نفس الظروف فمن المؤكد الحصول على النتيجة نفسها مثل إلقاء تفاحة في الهواء فإنه لابد من أن تسقط على الأرض)، والتجارب العشوائية.

تعريف 1: التجربة العشوائية هي تجربة يمكن إجراؤها في كل مكان وزمان بنفس الظروف الذاتية والموضوعية بحيث لا يُمكن التنبؤ بنتيجة التجربة بشكل قطعي ومؤكد قبل حدوثها، ولكن من الممكن معرفة كل النواتج المتوقعة مسبقاً، بالإضافة إلى أنه يمكن معرفة أو قياس فرصة حدوث (ظهور) كل نتيجة من نتائج التجربة قبل حدوثها. مثال إلقاء (رمي) قطعة نقود.

2.1. فضاء العينة sample space:

تعريف 2: فضاء العينة للتجربة العشوائية هي المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة للتجربة، ونرمز لفضاء العينة بالرمز Ω. نسمي كل نتيجة من نتائج التجربة العشوائية عنصر element في فضاء العينة أو نقطة العينة sample point.

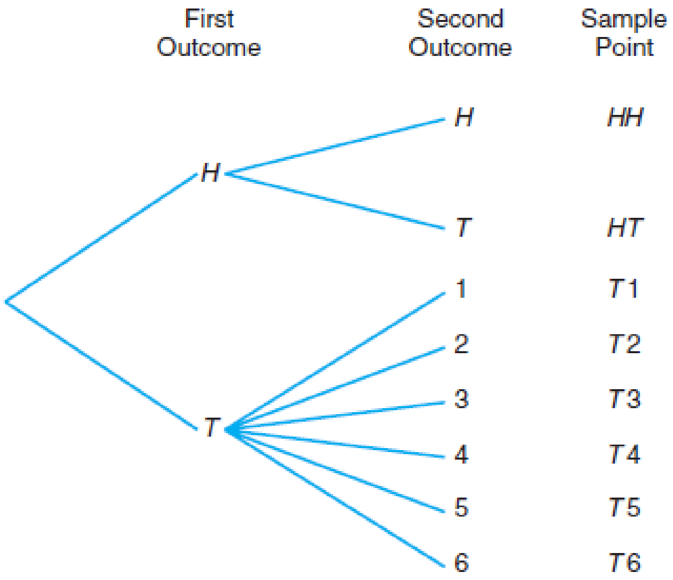
مثال 1: فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة من النقود مرة واحدة (وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي) هي $\Omega=\{H,\ T\}$، حيث H تمثل ظهور الكتابة و T تمثل ظهور الشعار.

مثال 2: فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة النرد مرة واحدة (وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي) هي $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

أما إذا كان اهتمامنا فقط إذا كان الناتج (الرقم الظاهر على الوجه العلوي) فردي odd أو زوجي $even$، فإن فضاء العينة هي $\Omega=\{odd,\ even\}$.

مثال 3: أوجد فضاء العينة للتجربة التالية: نرمي قطعة من النقود فإذا كان الناتج كتابة نرميها مرة ثانية، وإذا كان الناتج شعاراً نرمي قطعة النرد مرة واحدة.

الحل: فضاء العينة هي $\Omega=\{HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$، والتي يمكن تمثيلها بمخطط الشجرة كما يلي:

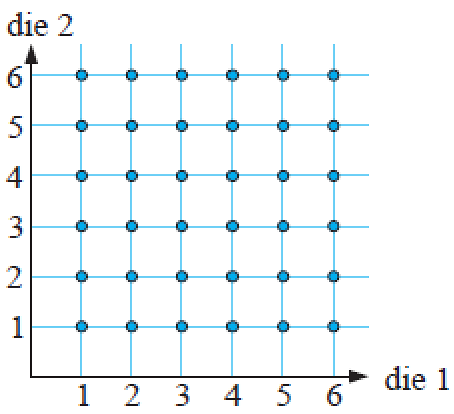


مثال 4: أوجد فضاء العينة لتجربة رمي قطعة النرد مرتين متتاليتين.

الحل:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\\ &(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\\ &(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\\ &(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\\ &(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\\ &(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}\end{aligned}$$

والتي يمكن تمثيلها باستخدام الشبكة grid كما يلي:



ISSN: 2617-989X

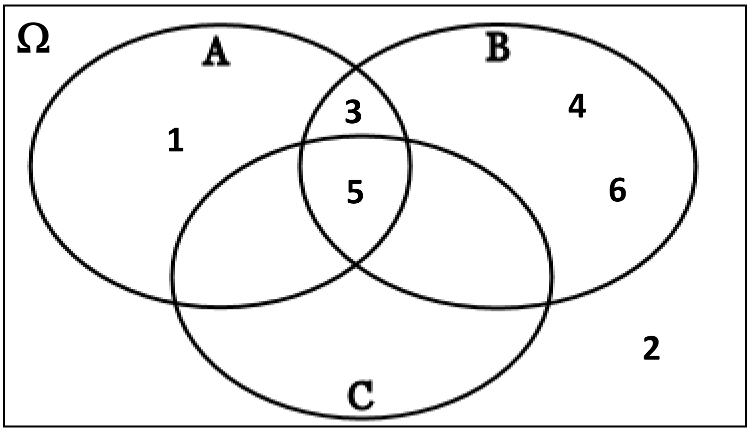
2. الأحداث events:

تعريف 3: نعرف الحدث على أنه مجموعة جزئية من فضاء العينة Ω. أي أن A حدث إذا وفقط إذا كانت $A \subseteq \Omega$.

مثال 5: ليكن لدينا تجربة رمي قطعة النرد مرة واحدة، المجموعات التالية تشكل أحداث لأنها مجموعات جزئية من فضاء العينة Ω:

- ظهور عدد فردي $A = \{1, 3, 5\}$.
- ظهور عدد أكبر تماماً من 2 $B = \{3, 4, 5, 6\}$.
- ظهور العدد 5 $C = \{5\}$. نسمي هذا الحدث بالحدث البسيط simple event (الحدث المكون من عنصر واحد).
- ظهور عدد سالب $\Phi = \{\}$. نسمي هذا الحدث بالحدث المستحيل impossible event (الحدث الذي لا يحتوي على أية نتيجة).
- ظهور عدد موجب $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. نسمي هذا الحدث بالحدث الأكيد sure event (الحدث المكون من جميع النتائج الممكنة للتجربة).

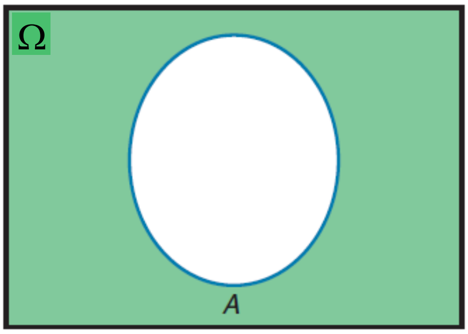
ملاحظة 1: بما أن الأحداث عبارة عن مجموعات بالتالي يمكن استخدام مخططات فن لتمثيل الأحداث. يبين الشكل التالي كل من الأحداث A, B, C.



1.2. العمليات على الأحداث operations on events:

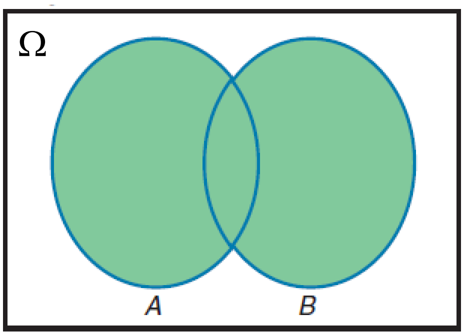
1.1.2. متمم حدث Complement:

تعريف 4: نعرف متمم الحدث A بالنسبة إلى Ω، الحدث المكون من جميع عناصر فضاء العينة التي لا تنتمي إلى A. ونرمز لمتتم حدث A بالرمز $\overline{A}$ أو A'، $A' = \{x \in \Omega : x \notin A\}$. يبين الشكل التالي مخطط فن.



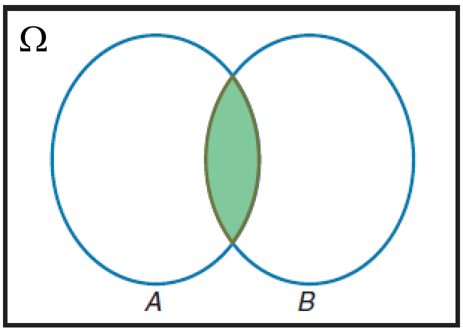
2.1.2. اجتماع حدثين union:

تعريف 5: نعرف اجتماع حدثين A و B، يرمز له بالرمز $A\cup B$، الحدث المكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B أو تنتمي إلى كليهما، $A\cup B=\{x\in\Omega : x\in A \ or \ \ x\in B\}$.
يبين الشكل التالي مخطط فن الموافق.



3.1.2. تقاطع حدثين intersection:

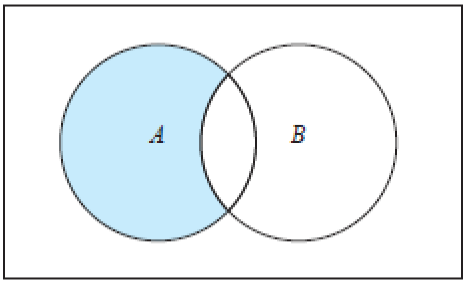
تعريف 6: نعرف تقاطع حدثين A و B، يرمز له بالرمز $A\cap B$، الحدث المكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى A و B في آن واحد، $A\cap B=\{x\in\Omega : x\in A \ and \ \ x\in B\}$. يبين الشكل التالي مخطط فن الموافق.



تعريف 7: نقول عن حدثين A و B أنهما متنافيان mutually exclusive أو منفصلان disjoint إذا كانا غير متقاطعين، أي أن $A \cap B = \Phi$. وهذا يعني أنه لا يوجد عناصر مشتركة بينهما لا يمكن وقوعهما معاً، أي أن وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر.

4.1.2. فرق حدثين difference:

تعريف 8: نعرف فرق حدثين A و B، يرمز له بالرمز $A \setminus B$، الحدث المكون من جميع العناصر الموجودة في A غير الموجودة في B، $A \setminus B = \{x \in \Omega : x \in A \ and \ x \notin B\}$. يبين الشكل التالي مخطط فن الموافق.



ملاحظة 2: يمكن البرهان على أن: $A \setminus B = A \cap B'$.

مثال 6: ليكن لدينا المثال السابق، أوجد كل من A' و $A \cap B$ و $A \cup B$ و $A \setminus B$.

الحل:

$$A' = \{2, 4, 6\}$$
$$A \cap B = \{3, 5\}$$
$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$
$$A \setminus B = \{4, 6\}$$

3. تعداد نقاط العينة counting sample points:

في كثير من الحالات، يجب أن نكون قادرين على حل مسائل احتمالية عن طريق حساب عدد عناصر فضاء العينة دون الحاجة إلى سرد عناصرها. المبدأ الأساسي للعد، غالبا ما يشار باسم قاعدة الضرب، سيكون الحل لهذه المسائل.

1.3. المبدأ الأساسي في العد the fundamental principle of counting:

إذا كانت العملية p تُنجز بـ n مرحلة متتالية $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (n عدد طبيعي موجب)، حيث يُمكن أن تُنجز المرحلة الأولى S_1 بـ r_1 طريقة مختلفة، ويُمكن أن تُنجز المرحلة الثانية S_2 بـ r_2 طريقة مختلفة مقابل كل طريقة من طرق إنجاز المرحلة الأولى S_1، وهكذا ...، ويُمكن أن تُنجز المرحلة S_n بـ r_n طريقة مختلفة مقابل كل طريقة من طرق إنجاز المراحل السابقة جميعها، فيكون عدد طرق إنجاز العملية p يساوي $r_1 \text{ x } r_2 \text{ x} \ldots \text{x } r_n$.

مثال 7: يوجد في إحدى المحلات الرياضية المواصفات التالية لحذاء كرة القدم:

اللون: أبيض، أزرق، بني، أسود

المقاس: 40، 41، 42، 43، 44، 45 (من كل لون). كم عدد الأنواع المختلفة المعروضة في المحل؟

الحل:

باستخدام المبدأ الأساسي في العد، فإن عدد الأنواع المختلفة المعروضة في المحل = 4 (اللون) × 6 (المقاسات) = 24 نوع مختلف.

مثال 8: ما هو عدد عناصر فضاء العينة عندما نرمي زوج من النرد مرة واحدة؟

الحل:

يُمكن لقطعة النرد الأولى أن يكون خرجها أياً من الأرقام من 1 إلى 6 $(r_1 = 6)$، ومن أجل أي قيمة من هذه القيم الستة، يُمكن لقطعة النرد الثانية أن يكون خرجها أيضاً أياً من الأرقام من 1 إلى 6 $(r_2 = 6)$. بالتالي يُمكن لزوج النرد أن يظهر بـ 36 = 6 x 6 طريقة مختلفة، بالتالي عدد عناصر فضاء العينة عندما نرمي زوج من النرد مرة واحدة هو 36.

مثال 9: كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام 5 ,4 ,3 ,2 ,1 في الحالتين التاليتين:

a) إذا سمح بالتكرار؟ **b)** إذا لم يسمح بالتكرار؟

الحل:

a) عدد الطرق $5 \text{ x } 5 \text{ x } 5 = 125$.

b) عدد الطرق $3 \text{ x } 4 \text{ x } 5 = 60$.

مثال 10: كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام 4 ,3 ,2 ,1 ,0 في الحالتين التاليتين:

a) إذا سمح بالتكرار؟

b) إذا لم يسمح بالتكرار؟

الحل:

a) عدد طرق اختيار المئات هو $r_1 = 4$ (لا يُمكن اختيار الصفر)، أما عدد طرق اختيار العشرات والآحاد هو $r_2 = r_3 = 5$. بالتالي العدد الكلي للطرق هو $4 \text{ x } 5 \text{ x } 5 = 100$.

b) عدد طرق اختيار المئات هو $r_1 = 4$ (لا يُمكن اختيار الصفر)، أما عدد طرق اختيار العشرات فهو $r_2 = 4$ والآحاد هو $r_3 = 3$. بالتالي العدد الكلي للطرق هو $4 \text{ x } 4 \text{ x } 3 = 48$.

مثال 11: كم عددا زوجياً مكوناً من أربعة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام 9 ,6 ,5 ,2 ,1 ,0 إذا لم يسمح بتكرار الرقم أكثر من مرة واحدة؟

الحل:

بما أن العدد زوجي فإن عدد طرق اختيار الآحاد هو $r_1 = 3$، وبما أن العدد مكون من أربعة أرقام فإن الآلاف لا يُمكن أن يكون 0. بالتالي علينا تمييز حالتين للآحاد الأولى 0 والثانية مختلفة عن الصفر. في الحالة الأولى عندما يكون الآحاد مساوياً للصفر يكون $r_1 = 1$، ويكون عدد طرق اختيار الآلاف هو $r_4 = 5$ وعدد طرق اختيار المئات هو $r_3 = 4$ وعدد طرق اختيار العشرات هو $r_2 = 3$، بالتالي في هذه الحالة يكون لدينا العدد الكلي للطرق هو 60 = 3 x 4 x 5 x 1 طريقة.

أما في الحالة الثانية وعندما يكون الآحاد مختلفاً عن الصفر يكون $r_1 = 2$، ويكون عدد طرق اختيار الآلاف هو $r_4 = 4$ وعدد طرق اختيار المئات هو $r_3 = 4$ وعدد طرق اختيار العشرات هو $r_2 = 3$، بالتالي في هذه الحالة يكون لدينا العدد الكلي للطرق هو 96 = 3 x 4 x 4 x 2 طريقة.

وبما أن الحالتين متنافيتان فإن العدد الكلي للطرق المختلفة هو 154 = 96 + 60.

2.3.التباديل permutations:

تعريف 9: لتكن S مجموعة غير خالية ذات n عنصراً، كل مجموعة جزئية مرتبة منها ذات r عنصراً ($0 \le r \le n$) تُسمى تبديلاً ل n عنصراً مأخوذاً r في كل مرة، ونرمز لها بالرمز $P(n, r)$.

مبرهنة 1: عدد تباديل n عنصراً مأخوذة r في كل مرة يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

مثال 12: بكم طريقة يمكن توزيع ثلاث ميداليات مختلفة على ثلاث طلاب فائزين في أولمبياد الرياضيات من بين 8 طلاب مشاركين؟

الحل:

عدد الطرق المختلفة يساوي إلى عدد تباديل 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة، أي:

$$P(8,\ 3)=8x7x6=336$$

تعريف 10: من أجل أي عدد صحيح n غير سالب، نعرف $n!$ (n عاملي) كما يلي:

$$n!=n(n-1)...(2)(1)$$

مع حالة خاصة $0!=1$.

مثال 13:

$$2!=2x1=2$$

$$3!=3x2x1=6$$

$$4!=4x3x2x1=24$$

$$n!=n(n-1)!$$

مبرهنة 2: عدد تباديل n عنصر هو $n!=P(n,n)$.

مثال 14: بكم طريق يُمكن ترتيب 5 كتب فوق بعضها البعض موضوعة على الرف؟

الحل:

عدد الطرق يساوي عدد تباديل 5 عناصر، أي $5!=120$

مبرهنة 3: عدد تباديل n عنصراً مأخوذة r في كل مرة يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال 15: بكم طريقة يُمكن جلوس 4 شباب و3 صبايا في الحالات التالية:

a) لا يوجد أية قيود
b) تناوب الشباب والصبايا
c) الشباب والصبايا في مجموعات منفصلة
d) فادي F ولميس L يريدان الجلوس بجانب بعضهما البعض

الحل:

a) عدد الطرق المختلفة يساوي $P(7,7)=7!=5040$.
b) بما أن عدد الشباب أكثر من عدد الصبايا بالتالي سيكون شب على كل طرف BGBGBGB، وعدد الطرق المختلفة يساوي $4!x3!=24x6=144$.

c) أي سيكونان على الشكل GGG & BBBB أو BBBB & GGG، بالتالي عدد الطرق المختلفة يساوي $2x4!x3! = 288$.

d) أي سيكونان على الشكل FLXXXXX أو LFXXXXX، حيث X يمثل شب أو صبية بالتالي عدد الطرق المختلفة يساوي $2x5! = 240$.

مبرهنة 4: عدد تباديل n عنصراً مرتبة على دائرة circular arrangement يساوي $(n-1)!$.

3.3. التوافيق combinations:

تعريف 11: لتكن S مجموعة غير خالية ذات n عنصراً، كل مجموعة جزئية منها ذات r عنصراً $(0 \le r \le n)$ تُسمى توافيق لــ n عنصراً مأخوذاً r في كل مرة، ونرمز لها بالرمز $C(n, r)$.

مبرهنة 5: عدد توافيق n عنصراً مأخوذة r في كل مرة يعطى بالعلاقة التالية:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال 16: يوجد في أحد الصفوف 8 طلاب و5 طالبات، بكن طريقة يُمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من 3 طلاب وطالبتين من هذا الصف؟

الحل:

يُمكن اختيار الطلاب الثلاثة بــ $C(8, 3)$ طريقة مختلفة، ويُمكن اختيار طالبتين بــ $C(5, 2)$ طريقة مختلفة لكل طريقة من طرق اختيار الطلاب الثلاثة. إذن يكون عدد طرق تشكيل اللجنة هو:

$$C(8, 3)xC(5, 2) = 56x10 = 560$$

مثال 17: علينا اختيار فريق مكون من 4 أشخاص بشكل عشوائي من بين 5 نساء و6 رجال. ما هو عدد الطرق المختلفة في الحالتين:

a) لا يوجد أية قيود.

b) عدد الرجال أكبر من عدد النساء.

الحل:

a) علينا اختيار 4 أشخاص من بين 11، بالتالي عدد الطرق المختلفة هو:

$$C(11, 4) = 330$$

b) عدد الذكور أكثر من الإناث، بالتالي إما 3 ذكور وامرأة واحدة، أو 4 ذكور:

عدد طرق اختيار 3 ذكور وامرأة واحدة هو:

$$C(6,3)\text{x}C(5,1)=20\text{x}5=100$$

عدد طرق اختيار 4 ذكور هو:

$$C(6,4)=15$$

عدد طرق اختيار الفريق بحيث يكون عدد الرجال أكبر من عدد النساء هو: 115 = 15 + 100.

مثال 18: عائلة مؤلفة من أب وأم و10 أولاد. تم دعوة لمجموعة من العائلة مكونة من 4 أشخاص، ما هو عدد الطرق المختلفة لتشكيل المجموعة في الحالات التالية:

a) تحوي الأب والأم حصراً.

b) تحوي على أحد الأبوين (الأب أو الأم فقط).

c) لا تحوي على الابوين.

الحل:

a) علينا اختيار ولدين من بين 10، بالتالي عدد الطرق المختلفة هو:

$$C(10,2)=45$$

b) علينا اختيار ثلاث أولاد من بين 10 وأحد الأبوين من بين 2، بالتالي عدد الطرق المختلفة هو:

$$C(10,3)\text{x}C(2,1)=120\text{x}2=240$$

c) علينا اختيار أربعة أولاد من بين 10، بالتالي عدد الطرق المختلفة هو:

$$C(10,4)=210$$

4. احتمال الحدث probability of an event:

احتمال حدث A هو قيمة عددية يرمز له بالرمز $P(A)$ تعبر عن فرصة وقوع الحدث A عند إجراء التجربة، وتتراوح هذه القيمة بين الصفر والواحد.

1.4. النتائج متساوية الاحتمال equally likely outcomes:

إذا كان احتمال ظهور أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية مساوية لاحتمال ظهور أي نتيجة أخرى فإننا نقول بأن نتائج هذه التجربة متساوية الاحتمال. مثال في تجربة رمي قطعة النرد المتزن مرة واحدة فإن احتمال ظهور الرقم 1 يساوي احتمال ظهور الرقم 2 ويساوي احتمال ظهور الرقم 3 ويساوي احتمال ظهور الرقم 4 ويساوي احتمال ظهور الرقم 5 ويساوي احتمال ظهور الرقم 6.

تعريف 12: احتمال الحدث A يساوي إلى مجموع احتمالات الأحداث البسيطة المكونة له. لذلك فإن:

$$0 \le P(A) \le 1, \quad P(\Phi) = 0, \quad \text{and} \quad P(\Omega) = 1$$

بالإضافة إلى ذلك إذا كانت $A_1, A_2, \ldots$ سلسلة من الأحداث المتنافية فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

مثال 19: نرمي قطعة من النقود مرتين. ما هو احتمال ظهور الكتابة H على الأقل مرة واحدة؟

الحل:

فضاء العينة للتجربة المذكورة هو $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$. فإذا كانت قطعة النقود متّزنة فإن احتمال ظهور أي نتيجة متساوي الاحتمال، بالتالي إذا كانت القيمة ω تمثل احتمال ظهور أي عنصر من فضاء العينة فإن $4\omega = 1$، أي $\omega = 1/4$. احتمال الحدث A (احتمال ظهور الكتابة على الأقل مرة واحدة) يتم حسابه كما يلي:

$$A = \{HH, HT, TH\} \text{ and } P(A) = 1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4$$

تعريف 13: إذا كان لدينا تجربة عشوائية متساوية الاحتمال لأي نتيجة من نتائجه الــ N المختلفة، وإذا كان n نتيجة منها توافق الحدث A، بالتالي فإن احتمال الحث A يساوي إلى $P(A) = n / N$.

مثال 20: يحتوي صندوق 4 كرات بيضاء و5 كرات حمراء و6 كرات صفراء، تسحب عشوائياً ثلاث كرات من الصندوق معاً. لتكن الأحداث التالية:

a) A الحصول على ثلاث كرات صفراء

b) B الحصول على ثلاث كرات لها نفس اللون

c) C الحصول على ثلاث كرات مختلفة الألوان

d) D الحصول على كرة صفراء واحدة على الأقل

احسب احتمال كل من الأحداث A, B, C, D .

الحل:

$$N = C(15,\ 3) = 455$$

a) $P(A) = \frac{n}{N} = \frac{C(6,3)}{C(15,3)} = \frac{20}{455}$

b) $P(B) = \frac{n}{N} = \frac{C(4,3)+C(5,3)+C(6,3)}{C(15,3)} = \frac{34}{455}$

c) $P(C) = \frac{n}{N} = \frac{C(4,1).C(5,1).C(6,1)}{C(15,3)} = \frac{120}{455}$

d) $P(D) = \frac{n}{N} = \frac{C(6,1).C(9,2)+C(6,2).C(9,1)+C(6,3)}{C(15,3)} = \frac{371}{455}$

مثال 21: يحتوي صندوق 6 كرات بيضاء و7 كرات سوداء وكرتان حمراوان.

(a نسحب من الصندوق كرتين على التتالي من دون إعادة، احسب احتمال أن تكون الكرتان حمراوان؟ الحدث (A).

(b نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع إعادة، احسب احتمال أن تكون الكرتان حمراوان؟ الحدث (B).

(c نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة، احسب احتمال أن تكون الكرات الثلاث المسحوبة مختلفة الألوان (كرة من كل لون)؟ (C)

(d نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع إعادة، احسب احتمال أن تكون الكرات الثلاث المسحوبة مختلفة الألوان (كرة من كل لون)؟ (D)

الحل:

(a $P(A) = \frac{2}{15}.\frac{1}{14} = \frac{1}{105}$

(b $P(B) = \frac{2}{15}.\frac{2}{15} = \frac{4}{225}$

(c احتمال أن تكون الكرات المسحوبة بالترتيب (بيضاء، سوداء، حمراء) يساوي $\frac{6}{15}.\frac{7}{14}.\frac{2}{13} = \frac{2}{65}$،

وبما أنه يوجد 6 = !3 تباديل ممكنة بين الألوان الثلاث بالتالي:

$$P(C) = \frac{2}{65}\text{x}(3!) = \frac{12}{65}$$

(a $$P(D)=\frac{6}{15}.\frac{7}{15}.\frac{2}{15}\text{x}(3!)=\frac{56}{375}$$

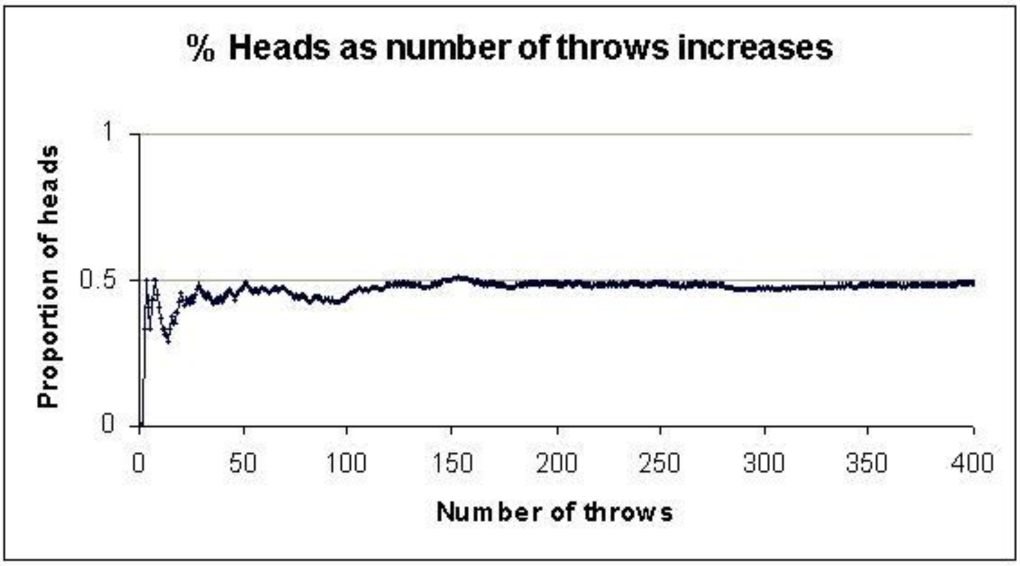
2.4. احتمال التكرار النسبي relative frequency probability:

إذا كررنا تجربة عشوائية n مرة تحت نفس الظروف وكان عدد مرات وقوع الحدث A في هذه التكرارات يساوي $r_n(A)$ فإن احتمال الحدث A يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{r(A)}{n}$$

مثال 22: ليكن الحدث A حدث ظهور الكتابة في تجربة رمي قطعة النقود المتزنة. وبفرض أننا كررنا هذه التجربة n مرة وليكن $r_n(A)$ هو عدد مرات ظهور الكتابة عند المحاولة رقم n، فإن:

$$P(A)=P(H)=\lim_{n\to\infty}\frac{r(A)}{n}=\frac{1}{2}$$



3.4. مبرهنات في الاحتمال probability theorems:

مبرهنة 6: أياً كان الحدثان A,B فإن:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

نتيجة 1: إذا كان الحدثان A,B متنافيان فإن:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

مثال 23: تم استجواب أحد المهندسين للحصول على عمل من قبل شركتين A و B. احتمال أن يتم قبوله في الشركة A هو 0.8 واحتمال أن يتم قبوله في الشركة B هو 0.6 وأن احتمال أن يتم قبوله في أحد الشركتين على الأقل هو 0.9، فما هو احتمال أن تيم قبوله من قبل الشركتين معاً؟

الحل:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$0.9=0.8+0.6-P(A\cap B) \quad \Rightarrow \quad P(A\cap B)=1.4-0.9=0.5$$

مثال 24: ما هو احتمال الحصول على مجموع مقداره 7 أو 11 في تجربة رمي زوج من النرد؟

الحل:

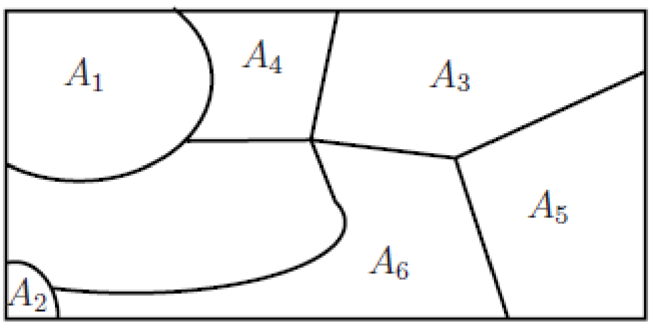
ليكن الحدث A الحصول على مجموع 7 والحدث B الحصول على مجموع 11. يُمكن الحصول على مجموع 7 بستة طرق مختلفة من أصل 36 طريقة ممكنة $\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$، بالتالي فإن $P(A)=6/36=1/6$. أما المجموع 11 فيمكن الحصول علية بطريقتين فقط $\{(5,6), (6,5)\}$، بالتالي $P(B)=2/36=1/18$. وبما أن الحدثان A و B متنافيان بالتالي:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{2}{9}$$

نتيجة 2: إذا كان الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ متنافية مثنى مثنى فإن:

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

تعريف 14: نقول عن الأحداث (غير الخالية) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ من فضاء العينة Ω أنها تشكل تجزئة partition لـــ Ω إذا كانت متنافية مثنى مثنى وأن $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\Omega$. يبين الشكل التالي تجزئة لفضاء العينة مكون من 6 أحداث.



مثال 25: في تجربة رمي قطعة النرد مرة واحدة، يشكل الحدثان $A=\{1,3,5\}$ (ظهور عدد فردي) و $B=\{2,4,6\}$ (ظهور عدد زوجي) تجزئة لفضاء العينة لأن:

$$A \cap B = \Phi$$
$$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} = \Omega$$

نتيجة 3: إذا كان الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تشكل تجزئة ل Ω فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = P(\Omega) = 1$$

يُمكن تعميم النظرية 6 على ثلاث مجموعات لتصبح كما يلي:

مبرهنة 7: أياً كانت الأحداث A, B, C فإن:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

مبرهنة 8: أياً الحدث A فإن:

$$P(A) + P(A') = 1$$

مثال 26: إذا كانت احتمالات ميكانيكي سيارات أن يخدم في أي يوم 3, 4, 5, 6, 7, 8, or more سيارة هي على الترتيب $0.12, 0.19, 0.28, 0.24, 0.10$, and 0.07، فما هو احتمال أن يخدّم 5 سيارات على الأقل؟

الحل:

ليكن E حدث تخديم 5 سيارات على الأقل فيكون الحدث E' تخديم أقل من 5 سيارات. وبما أن: $P(E') = 0.12 + 0.19 = 0.31$، بالتالي:

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - 0.31 = 0.69$$

مثال 27: يحتوي صندوق 4 كرات بيضاء و5 كرات حمراء و6 كرات صفراء، تسحب عشوائياً ثلاث كرات من الصندوق معاً. ما هو احتمال الحصول على كرة صفراء واحدة على الأقل؟

الحل:

ليكن A حدث الحصول على كرة صفراء واحدة على الأقل فيكون A' حدث عدم الحصول على أية كرة صفراء:

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{C(9, 3)}{C(15, 3)} = \frac{84}{455}$$

بالتالي:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{84}{455} = \frac{371}{455}$$

مبرهنة 9: أياً كان الحدثان A, B فإن:

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

مثال 28: إذا كان احتمال نجاح فادي في أحد الاختبارات يساوي 0.7 واحتمال نجاح فادي ولما معاً هو 0.2 فما هو احتمال نجاح فادي ورسوب لما؟

الحل:

ليكن الحدث A نجاح فادي في الاختبار والحدث B نجاح لما في الاختبار، بالتالي فالحدث نجاح فادي ورسوب لما هو $A \cap B'$، ولما كان $A \setminus B = A \cap B'$، بالتالي:

$$P(A \cap B') = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.2 = 0.5$$

5. الاحتمال الشرطي conditional probability:

من المسائل المهمة في حساب الاحتمال دراسة العلاقات الاحتمالية ما بين الاحداث، فإذا كان A, B حدثين متعلقين بتجربة معينة فإن وقوع أحد هذين الحدثين قد يؤثر على احتمال وقوع الحدث الآخر.

مثال 29: لتكن تجربة رمي قطعة النرد مرة واحدة، نعلم أن فضاء العينة هو $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
وليكن لدينا الحدثان التاليان: الحدث A ظهور الرقم 3، والحدث B ظهور عدد فردي. من الواضح أن $P(A) = 1/6$ وأن $P(B) = 1/2$.
بفرض الآن أن قطعة النرد قد رميت مرة واحدة، وأن هناك من أخبرنا عن وقوع الحدث B (ظهور عدد فردي) بدون أن يعلمنا عن نتيجة التجربة. عندئذ يصبح فضاء العينة الجديد هو $\{1, 3, 5\}$، ويصبح احتمال وقوع الحدث A علماً أن الحدث B قد وقع يساوي $1/3$.

تعريف 15: ليكن لدينا الحدثين A, B المعرفين على نفس فضاء العينة Ω، بحيث أن $P(B) \neq 0$. الاحتمال الشرطي للحدث A علماً بأن الحدث B قد وقع، ونرمز له بالرمز $P(A|B)$ أو $P_B(A)$، والمعرف كما يلي:

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مثال 30: احتمال اقلاع (مغادرة) رحلة طيران نظامية في الوقت المحدد لها هو $P(D) = 0.83$، واحتمال أن تصل في الوقت المحدد لها هو $P(A) = 0.82$، كما أن احتمال المغادرة والوصول في الوقت المحدد لها هو $P(A \cap D) = 0.78$. أوجد احتمال أن تكون طائرة:

a) تصل في الوقت المحدد علماً أنها أقلعت في الوقت المحدد.
b) تقلع في الوقت المحدد علماً أنها وصلت في الوقت المحدد.
c) تصل في الوقت المحدد علماً أنها لم تقلع في الوقت المحدد.

الحل:

a) $$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.78}{0.83} = 0.94$$

b) $$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0.78}{0.82} = 0.95$$

c) $$P(A|D') = \frac{P(A \cap D')}{P(D')} = \frac{P(A) - P(A \cap D)}{1 - P(D)}$$

$$P(A\,|\,D') = \frac{0.82-0.78}{1-0.83} = \frac{0.04}{0.17} = 0.24$$

مثال 31: لدى عائلة طفلان، ما هو احتمال كونهما ذكرين إذا علمت أن أحدهما ذكر؟

الحل:

يُمكن لأي من الطفلين أن يكون ذكراً B أو أنثى G. بالتالي يُمكن لفضاء العينة أن يكون على النحو التالي: $\Omega = \{BB, BG, GB, GG\}$، ونعرف قانون الاحتمال كما يلي:

$$P(BB) = P(BG) = P(GB) = P(GG) = 1/4$$

والحدث A أحد الطفلين ذكر هو: $\mathrm{A} = \{\mathrm{BB, BG, GB}\}$، والاحتمال المطلوب هو:

$$P(BB\,|\,A) = \frac{P(\{BB\} \cap \{BB, BG, GB\})}{P(\{BB, BG, GB\})} = \frac{P(\{BB\})}{P(\{BB, BG, GB\})} = \frac{1}{3}$$

نتيجة 4:

- $P(A'\,|\,B) = 1 - P(A\,|\,B)$
- $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2\,|\,B) - P(A_1 \cap A_2)$
- بفرض أن $P(A) \neq 0$ و $P(B) \neq 0$ فإن:

$$P(A \cap B) = P(B).P(A\,|\,B)$$
$$P(A \cap B) = P(A).P(B\,|\,A)$$

- يُمكن تعميم الخاصة الأخيرة على عدد منته من الأحداث، فمثلاً ليكن لدينا الأحداث A, B, C، وكان $P(A) \neq 0$ و $P(A \cap B) \neq 0$ فإن:

$$P(A \cap B \cap C) = P\big((A \cap B) \cap C)\big) = P(A \cap B).P(C\,|\,A \cap B)$$
$$= P(A).P(B\,|\,A).P(C\,|\,A \cap B)$$

- في حالة النتائج متساوية الاحتمال لدينا:

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

حيث $n(X)$ تمثل عدد عناصر X.

مثال 32: صندوق يحوي خمس كرات حمراء مرقمة بالأرقام 1 ,1 ,1 ,1 ,2 وثلاث كرات صفر مرقمة بالأرقام 1 ,1 ,2. نسحب من الصندوق كرتين بالتتالي من دون إعادة.

a) احسب احتمال الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي 2.

b) احسب احتمال الحصول على كرتين حمراوين مجموع رقميهما يساوي 2.

c) إذا علمت أن الكرتين المسحوبتين حمراوان، احسب احتمال أن يكون مجموع رقميهما يساوي 2.

d) إذا علمت أن مجموع رقمي الكرتين يساوي 2، فما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين.

الحل:

a) ليكن الحدث A: الحصول على كرة تحمل الرقم 1 بنتيجة السحب الأول، والحدث B: الحصول على كرة تحمل الرقم 1 بنتيجة السحب الثاني. عندئذ الحدث المطلوب هو: $C = A \cap B$.

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A).P\left(B \mid A\right) = \frac{4}{8}.\frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

b) ليكن الحدث E: الحصول على كرة حمراء تحمل الرقم 1 بنتيجة السحب الأول، والحدث F: الحصول على كرة حمراء تحمل الرقم 1 بنتيجة السحب الثاني. عندئذ الحدث المطلوب هو: $D = E \cap F$.

$$P(D) = P(E \cap F) = P(E).P(F \mid E) = \frac{6}{8}.\frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

c) ليكن الحدث R: الحصول على كرتين حمراوين، بالتالي $P(R) = \frac{5}{8}.\frac{4}{7} = \frac{5}{14}$. الحصول على كرتين مجموعهما يساوي 2 هو الحدث C، بالتالي المطوب هو حساب $P(C \mid R)$

$$P(C \mid R) = \frac{P(R \cap C)}{P(R)} = \frac{P(D)}{P(R)} = \frac{3/14}{5/14} = \frac{3}{5}$$

d) المطوب هو حساب $P(R \mid C)$

$$P(R \mid C) = \frac{P(R \cap C)}{P(C)} = \frac{P(D)}{P(C)} = \frac{3/14}{15/28} = \frac{2}{5}$$

1.5. الأحداث المستقلة independent events:

وجدنا في مثال سابق أن احتمال اقلاع رحلة طيران نظامية في الوقت المحدد لها هو $P(D) = 0.83$، واحتمال أن تقلع في الوقت المحدد علماً أنها وصلت في الوقت المحدد $P(D \mid A) = 0.95$. أي $P(D \mid A) \neq P(D)$، وهذا يعني أن الحدث D يعتمد على الحدث A.

ولكن في بعض الحالات يكون احتمال حدوث حادثة معينة A لا يتأثر مطلقًا بحدوث أو عدم حدوث حادثة أخرى. أي أنه لا فرق بين احتمال الحادثة A والاحتمال الشرطي للحادثة A علماً أن B حدثت، أي أن $P(A \mid B) = P(A)$ وفي هذه الحالة نقول بأن الحادثتين A و B مستقلتان.

تعريف 16: ليكن A و B حدثين معرفين على نفس فضاء العينة Ω. نقول عن الحدثين أنهما مستقلان إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين:

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{or} \quad P(B \mid A) = P(B)$$

مبرهنة 10: ليكن A و B حدثين معرفين على نفس فضاء العينة Ω. نقول عن الحدثين أنها مستقلان إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

مثال 33: في تجربة رمي قطعة نقود ثلاث مرات، ليمكن الحدث A ظهور شعار وكتابة والحدث B ظهور شعار واحد على الأكثر. برهن أن الحدثين A و B مستقلين.

الحل:

$\Omega = \{$(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH), (TTT)$\}$

$A = \{$(HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH)$\}$

$B = \{$(HHH), (HHT), (HTH), (THH)$\}$

$A \cap B = \{$(HHT), (HTH), (THH)$\}$

بالتالي فإن: $P(A) = 6/8 = 3/4$ و $P(B) = 4/8 = 1/2$ و $P(A \cap B) = 3/8$

وأن: $P(A \cap B) = P(A).P(B) = 3/8$ والحدثان مستقلان.

مثال 34: في تجربة إلقاء قطعة النرد مرة واحدة، ليكن A الحدث الموافق لظهور عدد زوجي وليكن B الحدث الموافق لظهور عدد يكون مربع لعدد صحيح، برهن أن الحدثين A و B مستقلين.

الحل:

$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{1, 4\} \qquad A \cap B = \{4\}$$

بالتالي:

$$P(A) = 1/2 \text{ و } P(B) = 1/3 \text{ و } P(A \cap B) = 1/6$$

من الواضح أن $P(A \cap B) = P(A).P(B) = 1/6$ والحدثان مستقلان.

مثال 35: في تجربة إلقاء قطعة النرد مرة واحدة، ليكن A الحدث الموافق لظهور عدد زوجي وليكن B الحدث الموافق لظهور عدد أولي، برهن أن الحدثين A و B غير مستقلين.

الحل:

$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{2, 3, 5\} \qquad A \cap B = \{2\}$$

بالتالي:

$$P(A) = 1/2 \text{ و } P(B) = 1/2 \text{ و } P(A \cap B) = 1/6$$

من الواضح أن $1/6 = P(A \cap B) \neq P(A).P(B) = 1/4$ والحدثان غير مستقلان.

مبرهنة 11: ليكن A و B حدثين معرفين على نفس فضاء العينة Ω. إذا كان الحدثان A و B مستقلين كان الحدثان A و B' مستقلين أيضاً.

نتيجة 5:

- إذا كان الحدثان A و B مستقلين كان الحدثان A' و B مستقلين أيضاً.
- إذا كان الحدثان A و B مستقلين كان الحدثان A' و B' مستقلين أيضاً.

مثال 36: يصوب راميان، كلّ على حده، طلقة واحدة على هدف. احتمال إصابة الهدف من قبل الرامي الأول يساوي 0.7 (الحدث A)، واحتمال احتمال إصابة الهدف من قبل الرامي الثاني يساوي 0.8 (الحدث B).

a) ما هو احتمال إصابة الهدف من قبل الراميان معاً؟

b) ما هو احتمال إصابة الهدف من قبل أحدهما على الأقل؟

c) ما هو احتمال عدم إصابة الهدف؟

d) ما هو احتمال أن يصيب أحدهما الهدف فقط؟

e) إذا علمت أن أحدهما على الأقل أصاب الهدف، فما احتمال أن يكون هو الرامي الأول فقط؟

الحل:

a) الحدثان A و B مستقلان لأن احتمال إصابة أحدهما للهدف لا يؤثر على احتمال إصابته من قبل الآخر، بالتالي: $P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{7}{10}.\frac{8}{10}=\frac{14}{25}$

b) احتمال إصابة الهدف من قبل أحدهما على الأقل هو احتمال الحدث $A\cup B$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{7}{10}+\frac{8}{10}-\frac{14}{25}=\frac{47}{50}$$

c) عدم إصابة الهدف هو احتمال الحدث $(A\cup B)'$:

$$P\left((A\cup B)'\right)=1-P(A\cup B)=1-\frac{47}{50}=\frac{3}{50}$$

يُمكن إيجاد النتيجة بطريقة أخرى: $(A\cup B)'=A'\cap B'$، حسب قانون دومرغان، والحدثان A' و B' مستقلان خطياً، بالتالي:

$$P(A'\cap B')\ =\ P(A').P(B')=\frac{3}{10}.\frac{2}{10}=\frac{3}{50}$$

d) ليكن الحدث C الموافق لإصابة أحدهما الهدف فقط: $C=(A\cap B')\cup(A'\cap B)$، وبما أن الحدثان A و B' مستقلان وكذلك الأمر بالنسبة للحدثان A' و B، بالتالي:

$$P(C)=P(A\cap B')+P(A'\cap B)=P(A).P(B')+P(A').P(B)$$

$$P(C)=\frac{7}{10}.\frac{2}{10}+\frac{3}{10}.\frac{8}{10}=\frac{19}{50}$$

e) الحدث الموافق لإصابة الرامي الأول فقط هو $A_1=A\cap B'$ ، وبما أن الحدثان A و B' مستقلان، بالتالي:

$$P(A_1)=P(A\cap B')=P(A).P\left(B'\right)=\frac{7}{10}.\frac{2}{10}=\frac{7}{50}$$

والاحتمال المطلوب هو $P\left(A_1\,|\,(A\cup B)\right)$:

$$P\left(A_1\,|\,(A\cup B)\right)=\frac{P((A\cup B)\cap A_1)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A_1)}{P(A\cup B)}=\frac{7/50}{47/50}=\frac{7}{47}$$