

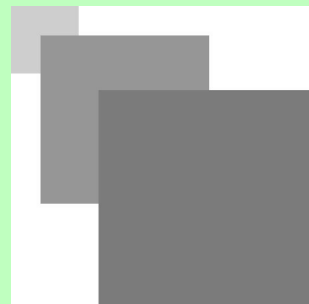
# Chap. 1. Rappels des Lois de Transfert de Chaleur

*Chap. 1. Rappels des Lois de Transfert de Chaleur*



Dr : Ferhat Mohammed Fouad

# Table des matières



<b>Objectifs</b>	3
<b>Introduction</b>	4
<b>I - Transfert de chaleur</b>	5
1. Qu'est-ce que le transfert de chaleur? .....	5
2. Comment la chaleur est-elle transférée? .....	5
<b>II - Conduction thermique</b>	7
1. Définition .....	7
2. La loi de Fourier (1822) .....	7
3. EXEMPLE 1.1 .....	9
<b>III - Convection de chaleur</b>	11
1. Définition .....	11
2. Classement .....	12
3. La loi du refroidissement de Newton .....	13
<b>IV - Rayonnement thermique</b>	15
1. Définition .....	15
2. Loi de Stefan-Biltzmann .....	15
3. EXEMPLE 1.2 .....	17
<b>V - Le concept de résistance thermique</b>	20
1. Résistance thermique .....	20
<b>VI - Résolution de problèmes: méthodologie</b>	21
1. Méthodologie .....	21
<b>VII - Exercice</b>	22
<b>Solutions des exercices</b>	23

# Objectifs



Dans ce chapitre, les bases du transfert de chaleur seront présentées et discutées.

# Introduction

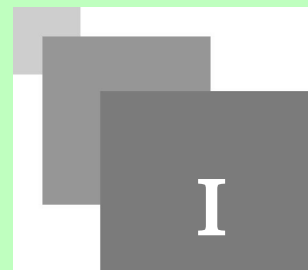


Dans ce chapitre, nous posons les bases d'une grande partie du matériel traité dans le texte. Nous le faisons en soulevant plusieurs questions:


Qu'est-ce que le transfert de chaleur? Comment la chaleur est-elle transférée? Pourquoi c'est important? Un objectif est de développer une appréciation des concepts et principes fondamentaux qui sous-tendent les processus de transfert de chaleur.

Un deuxième objectif est d'illustrer la manière dont une connaissance du transfert thermique peut être utilisée avec la première loi de la thermodynamique (conservation de l'énergie) pour résoudre des problèmes liés à la technologie et à la société.


# Transfert de chaleur



## 1. Qu'est-ce que le transfert de chaleur?

 *Définition : Transfert de chaleur?*

La science qui s'intéresse à la détermination des taux de transfert d'énergie résultant d'une différence de température.

 *Définition : Force motrice ?*

Différence de température comme différence de tension dans le courant électrique comme différence de pression dans le débit de fluide. Le taux dépend du gradient dT.

Chaque fois qu'une différence de température existe dans un milieu ou entre des médias, un transfert de chaleur doit se produire.

## 2. Comment la chaleur est-elle transférée?

Comme le montre la figure 1.1, nous désignons différents types de processus de transfert de chaleur comme des modes. Lorsqu'un gradient de température existe dans un milieu stationnaire, qui peut être un solide ou un fluide, nous utilisons le terme de conduction pour désigner le transfert de chaleur qui se produira à travers le milieu.

En revanche, le terme convection fait référence au transfert de chaleur qui se produira entre une surface et un fluide en mouvement lorsqu'ils sont à des températures différentes.

Le troisième mode de transfert de chaleur est appelé rayonnement thermique. Toutes les surfaces de température finie émettent de l'énergie sous forme d'ondes électromagnétiques. Par conséquent, en l'absence de milieu intermédiaire, il y a transfert thermique net par rayonnement entre deux surfaces à des températures différentes.

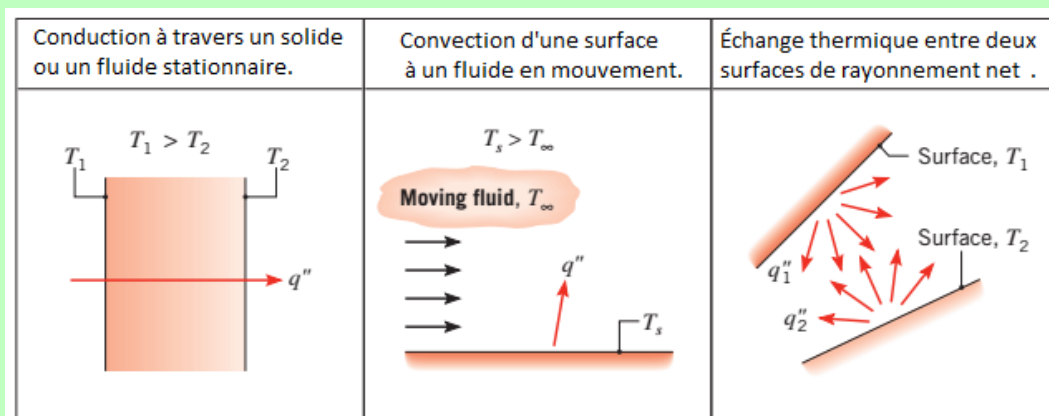


Figure 1.1: Modes de transfert de chaleur par conduction, convection et rayonnement.

# Conduction thermique



## 1. Définition

### Définition : Conduction

Transfert de chaleur (énergie) sans transport macroscopique de la matière

### Exemple : Vu comme

Le transfert d'énergie des particules les plus énergétiques vers les particules les moins énergétiques d'une substance en raison des interactions entre les particules.

Transfert net par mouvement aléatoires de molécules - diffusion d'énergie.

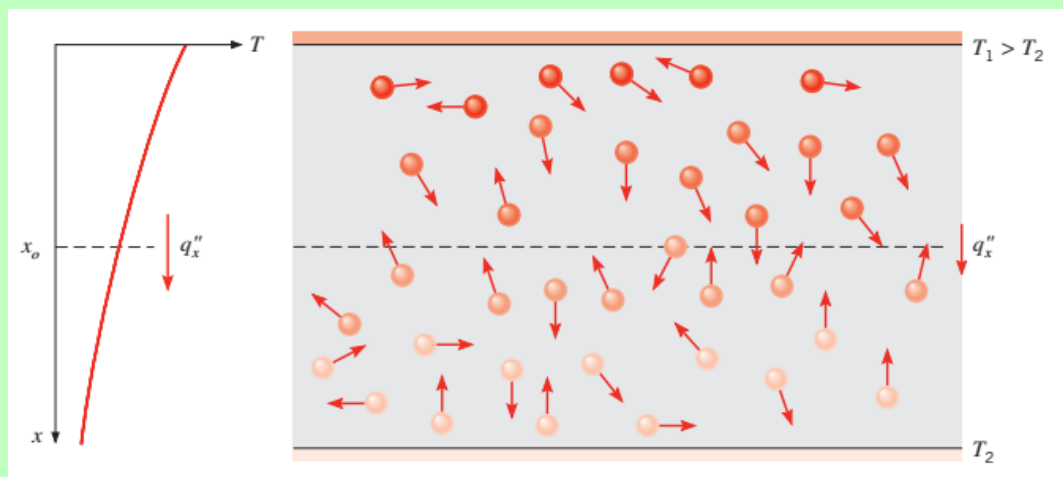


Figure 1.2 : Transfert de chaleur par conduction avec diffusion d'énergie due à l'activité moléculaire.

## 2. La loi de Fourier (1822)

Les processus de transfert de chaleur peuvent être quantifiés en termes d'équations des puissances transférées. Ces équations peuvent être utilisées pour calculer la quantité d'énergie transférée par unité de temps.

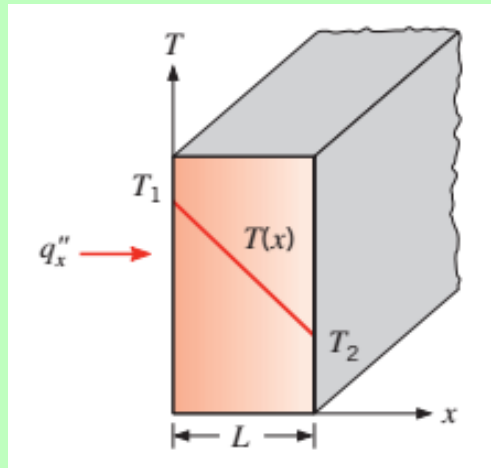


Figure 1.3 :Transfert de chaleur unidimensionnel par conduction (diffusion d'énergie).

Pour la conduction thermique, l'équation de la puissance transférée est connue sous le nom de loi de Fourier. Pour la paroi plane unidimensionnelle illustrée à la figure 1.3, ayant une distribution de température  $T(x)$ , l'équation de puissance est exprimée comme suit:

$$q_x'' = -k \frac{dT}{dx} \quad (1.1)$$

Le flux de chaleur  $q''$  (W / m<sup>2</sup>) est le taux de transfert de chaleur dans la direction  $x$  par unité de surface perpendiculaire à la direction de transfert, et il est proportionnel au gradient de température,  $dT / dx$ , dans cette direction.

Le paramètre  $k$  est une propriété de transport connue sous le nom de conductivité thermique (W/m.K) et est une caractéristique du matériau de la paroi.

Le signe moins est une conséquence du fait que la chaleur est transférée dans le sens de la diminution de la température.

Dans les conditions stationnaires indiquées à la figure 1.3, où la distribution de température est linéaire, le gradient de température peut être exprimé comme suit:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

et le flux de chaleur est alors

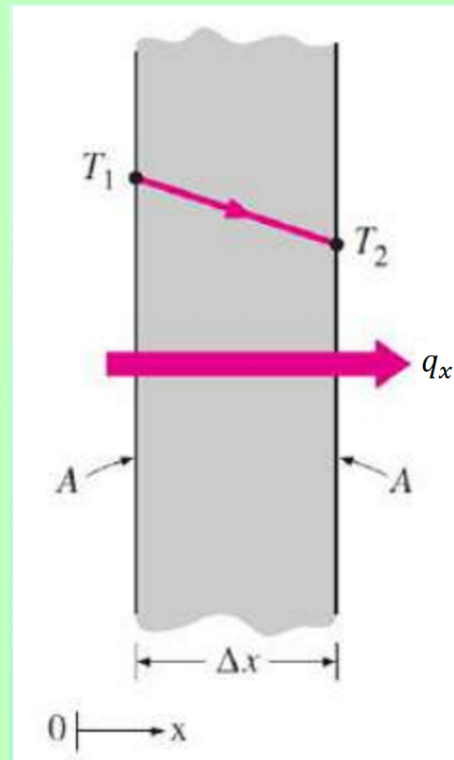
$$q_x'' = k \frac{T_1 - T_2}{L} = k \frac{\Delta T}{L} \quad (1.2)$$

#### Remarque

Notez que cette équation fournit la densité de flux de chaleur, c'est-à-dire le flux de transfert de chaleur par unité de surface.



Le flux de chaleur par conduction,  $q_x$  (W), à travers une paroi plane de la section  $A$  est alors le produit de la densité du flux et de la section (surface)  $A$ . (Figure 1.4)



$$q_{cond} = -kA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} = -kA \frac{dT}{dx}$$

Figure 1.4 : Équation flux de conduction thermique

### 3. EXEMPLE 1.1

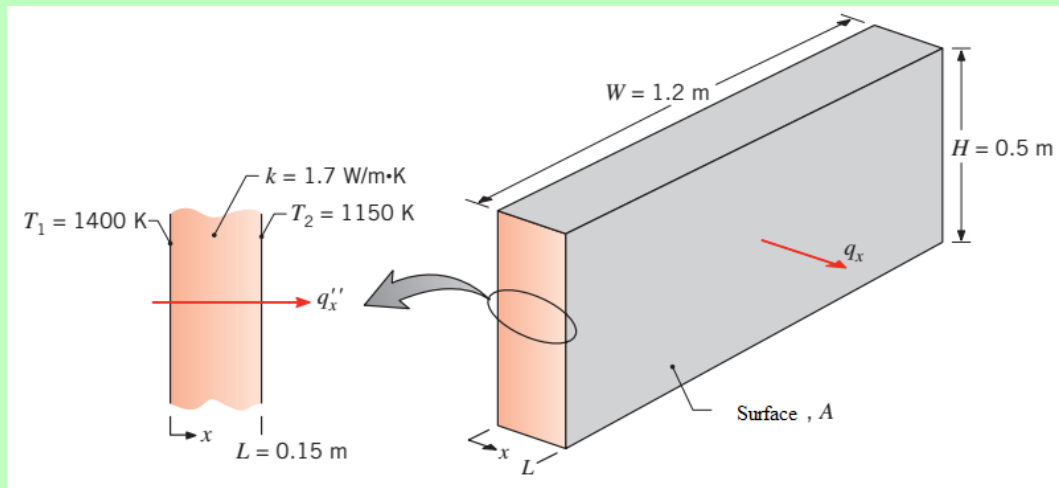
La paroi d'un four industriel est construite en brique réfractaire de 0,15 m d'épaisseur ayant une conductivité thermique de 1,7 W/m.K. Les mesures effectuées pendant le fonctionnement en régime permanent (stationnaire) révèlent des températures de 1400 et 1150 K sur les surfaces intérieure et extérieure, respectivement. Quel est la perte de flux de chaleur à travers un mur de 0,5 m 1,2 m de face?

SOLUTION

Données: Conditions à l'état stationnaire avec épaisseur de paroi, surface, conductivité thermique et températures de surface prescrites.

Trouver: Perte de chaleur du mur.

Schématique:



Hypothèses:

1. Conditions à l'état d'équilibre (stationnaire).
2. Conduction unidimensionnelle à travers le mur.
3. Conductivité thermique constante.

Analyse:

Le transfert de chaleur à travers la paroi se faisant par conduction, la densité de flux thermique peut être déterminé à partir de la loi de Fourier. En utilisant l'équation 1.2, nous avons

$$q_x'' = k \frac{\Delta T}{L} = 1.7 \text{ W/m} \cdot \text{K} \times \frac{250 \text{ K}}{0.15 \text{ m}} = 2833 \text{ W/m}^2$$

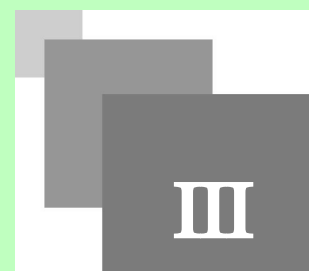
Le flux de chaleur (puissance) représente le flux de transfert de chaleur à travers une section de surface unitaire, et il est uniforme (invariant) sur la surface du mur.

La perte de chaleur à travers le mur de la zone  $A = H \times W$  est alors :

$$q_x = (HW) q_x'' = (0.5 \text{ m} \times 1.2 \text{ m}) 2833 \text{ W/m}^2 = 1700 \text{ W}$$

Commentaires: Notez la direction du flux de chaleur et la distinction entre le flux de chaleur et le taux de chaleur.

# Convection de chaleur



## 1. Définition

### *Définition : Convection*

Transfert de chaleur (énergie) avec transport macroscopique de la matière

### *Attention*

Composé de deux mécanismes

Transfert d'énergie dû à un mouvement moléculaire aléatoire - diffusion.

Transfert d'énergie par le mouvement de masse du fluide - advection.

### *Exemple : Vu comme*

Nous nous intéressons particulièrement au transfert de chaleur par convection, qui se produit entre un fluide en mouvement et une surface limite lorsque les deux sont à des températures différentes. Considérez l'écoulement du fluide sur la surface chauffée de la figure 1.4.

Une conséquence de l'interaction fluide-surface est le développement d'une région dans le fluide à travers laquelle la vitesse varie de zéro à la surface à une valeur finie  $U$  associée à l'écoulement. Cette région du fluide est connue sous le nom de couche limite hydrodynamique ou de vitesse. De plus, si les températures de surface et d'écoulement diffèrent, il y aura une région du fluide à travers laquelle la température varie de  $(T_s, y = 0)$  à  $T_\infty$  dans l'écoulement extérieur. Cette région, appelée couche limite thermique, peut être plus petite, plus grande ou de la même taille que celle à travers laquelle la vitesse varie.

Dans tous les cas, si  $T_s > T_\infty$ , un transfert de chaleur par convection se produira de la surface vers l'écoulement extérieur.

Le mode de transfert de chaleur par convection est soutenu à la fois par un mouvement aléatoire moléculaire et par le mouvement de masse du fluide à l'intérieur de la couche limite.

La contribution due au mouvement aléatoire moléculaire (diffusion) domine près de la surface où la vitesse du fluide est faible. En fait, à l'interface entre la surface et le fluide, la vitesse du fluide est nulle et la chaleur est transférée par ce mécanisme uniquement. La contribution due au mouvement du fluide en masse provient du fait que la couche limite croît au fur et à mesure que l'écoulement progresse dans la direction  $x$ .

En effet, la chaleur qui est conduite dans cette couche est balayée en aval et est finalement transférée au fluide à l'extérieur de la couche limite. L'appréciation des phénomènes de la couche limite est essentielle pour comprendre le transfert de chaleur par convection. Pour cette raison, la discipline de la mécanique des fluides jouera un rôle essentiel dans notre analyse ultérieure de la convection.

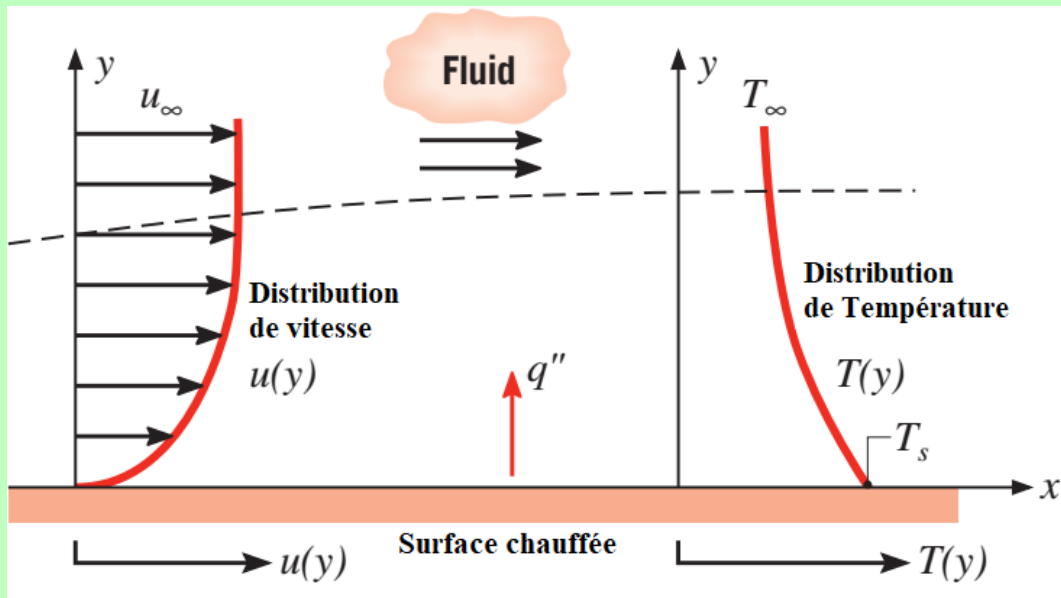


Fig1.4 : Développement de la couche limite dans le transfert de chaleur par convection.

## 2. Classement

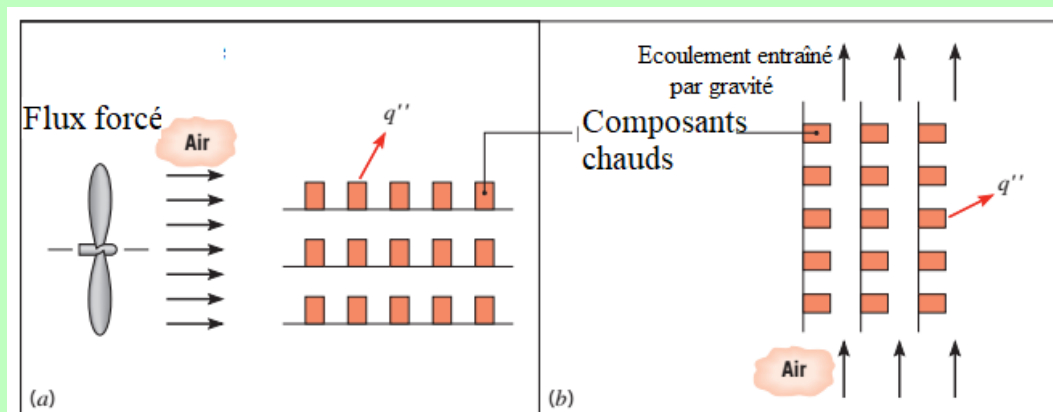


FIGURE 1.5 Processus de transfert de chaleur par convection. (a) Convection forcée. (b) Convection naturelle.

### Définition : Convection forcée (provoquée)

Le transfert de chaleur par convection peut être classé en fonction de la nature du flux. On parle de convection forcée lorsque le débit est provoqué par des moyens externes, comme par exemple un ventilateur, une pompe ou des vents atmosphériques.

### Exemple : Convection forcée

À titre d'exemple, considérons l'utilisation d'un ventilateur pour fournir un refroidissement par air par convection forcée des composants électriques chauds sur une pile de cartes de circuits imprimés (Figure 1.5a).

### Définition : Convection libre (naturelle)

la convection libre (ou naturelle), l'écoulement est induit par des forces de gravité, qui sont dues aux différences de densité provoquées par les variations de température dans le fluide.

### Exemple : Convection libre (naturelle)

Un exemple est le transfert de chaleur par convection libre qui se produit à partir de composants chauds sur un réseau vertical de cartes de circuits imprimés dans l'air (Figure 1.5b). L'air qui entre en contact avec les composants subit une augmentation de température et donc une réduction de densité. Comme il est maintenant plus léger que l'air ambiant, les forces de gravité induisent un mouvement vertical pour lequel l'air chaud remontant est remplacé par un flux d'air ambiant plus frais.

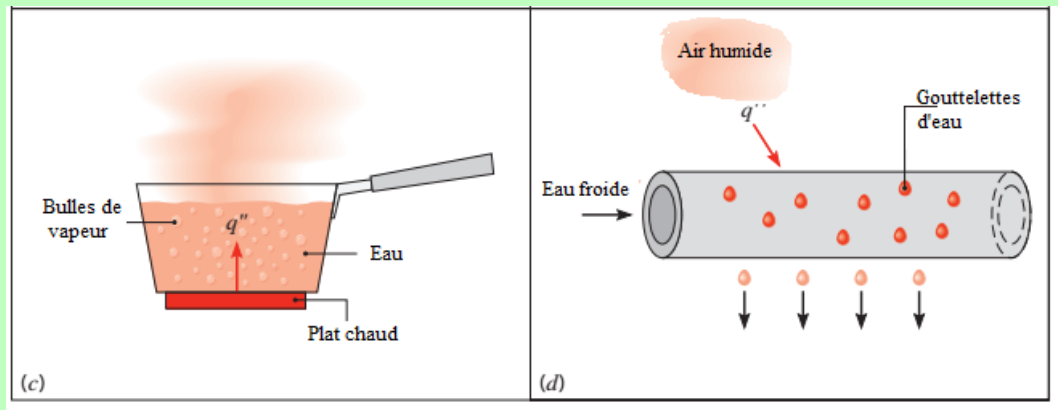


FIGURE 1.5 Processus de transfert de chaleur par convection. (c) Ébullition. (d) Condensation.

Cependant, pour certains procédés de convection, il existe, en plus, un échange de chaleur latente. Cet échange de chaleur latente est généralement associé à un changement de phase entre les états liquide et vapeur du fluide.

Deux cas particuliers d'intérêt dans ce texte sont l'ébullition et la condensation.

### Exemple : Ébullition et Condensation


Par exemple, le transfert de chaleur par convection résulte d'un mouvement de fluide induit par des bulles de vapeur générées au fond d'une casserole d'eau bouillante (Figure 1.5c) ou par la condensation de vapeur d'eau sur la surface extérieure d'un tuyau d'eau froide (Figure 1.5d).

## 3. La loi du refroidissement de Newton

Quelle que soit la nature du processus de transfert de chaleur par convection, l'équation de flux de chaleur transmis est donnée par la relation dite loi de Newton :

$$q'' = h(T_s - T_\infty) \quad (1.3a)$$

Où, le flux de chaleur convectif ( $W/m^2$ ), est proportionnel à la différence entre les températures de surface et du fluide,  $T_s$  et  $T_\infty$ , respectivement. Cette expression est connue sous le nom de loi de Newton du refroidissement, et le paramètre  $h$  ( $W/m^2.K$ ) est appelé coefficient de transfert de chaleur par convection. Ce coefficient dépend des conditions de la couche limite, qui sont influencées par la géométrie de la surface, la nature du mouvement du fluide et un assortiment de propriétés thermodynamiques et de transport des fluides.

 **Attention**

Lorsque l'équation 1.3a est utilisée, le flux de chaleur de convection est présumé positif si la chaleur est transférée de la surface  $T_s > T_\infty$ , et négatif si la chaleur est transférée vers la surface  $T_\infty > T_s$ . Cependant, rien ne nous empêche d'exprimer la loi du refroidissement de Newton comme :

$$q'' = h(T_\infty - T_s) \quad (1.3b)$$


Le flux de chaleur par convection,  $q_x$  (W), est alors le produit de la densité de flux et de la surface (section)  $A$ .

$$q_{conv} = hA_s (T_s - T_\infty)$$

# Rayonnement thermique


IV

## 1. Définition

 *Définition : Rayonnement*

Énergie émise par la matière qui est à une température non nulle (supérieure à 0 K) transportée par des ondes électromagnétiques (ou photons).

## 2. Loi de Stefan-Boltzmann


 *Définition : L'émittance (Énergie émissive de surface)*

Considérez les processus de transfert de rayonnement pour la surface de la figure 1.6a. Le rayonnement émis par la surface provient de l'énergie thermique de la matière délimitée par la surface et la vitesse à laquelle l'énergie est libérée par unité de surface ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) est appelée énergie émissive de surface,  $E$ .

Il y a une limite supérieure à la puissance émissive, qui est prescrite par la loi de Stefan-Boltzmann:

$$E_b = \sigma T_s^4 \quad (1.4)$$

Où  $T_s$  est la température absolue (K) de la surface et  $\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}^4$ ). Une telle surface est appelée un radiateur idéal ou un corps noir.

 *Définition : Émissivité*

$\epsilon$  est une propriété radiative de la surface appelée *émissivité*. Avec des valeurs dans l'intervalle  $0 \leq \epsilon \leq 1$ , cette propriété fournit une mesure de l'efficacité avec laquelle une surface émet de l'énergie par rapport à un corps noir.

Le flux de chaleur émis par une surface réelle est inférieur à celui d'un corps noir à la même température et est donné par :

$$E = \epsilon \sigma T_s^4 \quad (1.5)$$

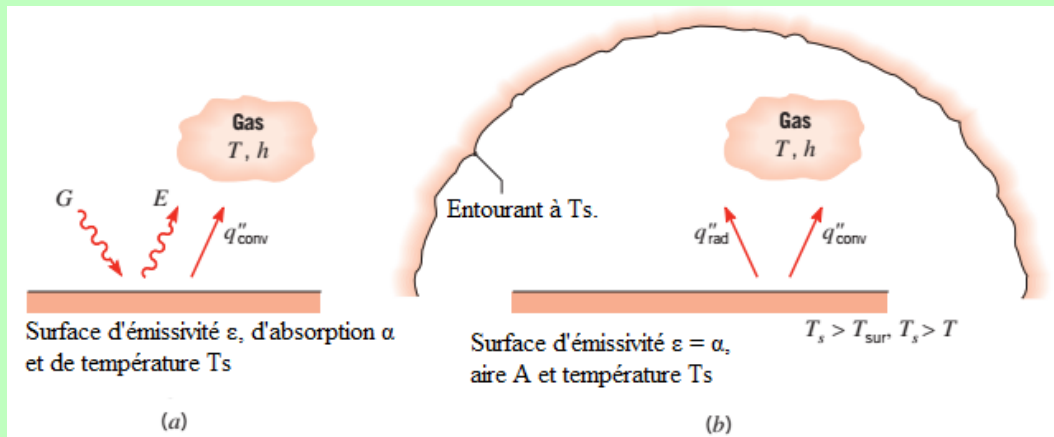


Figure 1.6 : Échange de rayonnement: (a) à une surface et (b) entre une surface et un grand environnement.

### Complément : l'irradiation $G$

Le rayonnement peut également être incident sur une surface à partir de son environnement. Le rayonnement peut provenir d'une source spéciale, telle que le soleil, ou d'autres surfaces auxquelles la surface d'intérêt est exposée. Indépendamment de la ou des sources, nous désignons le flux à laquelle tout ce rayonnement est incident sur une unité de surface de la surface comme l'irradiation  $G$  (figure 1.6a).

Une partie, ou la totalité, de l'irradiation peut être absorbée par la surface, augmentant ainsi l'énergie thermique du matériau. Le flux à laquelle l'énergie radiante est absorbée par unité de surface peut être évaluée à partir de la connaissance d'une propriété radiative de surface appelée absorption  $\alpha$ . C'est :

$$G_{\text{abs}} = \alpha G \quad (1.6)$$

Où  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Si  $\alpha < 1$  et que la surface est opaque, des parties de l'irradiation sont réfléchies. Si la surface est semi-transparente, des parties de l'irradiation peuvent également être transmises.

Cependant, alors que les rayonnements absorbés et émis augmentent et réduisent respectivement l'énergie thermique de la matière, les rayonnements réfléchis et transmis n'ont aucun effet sur cette énergie.

### Remarque

Notez que la valeur de  $\alpha$  dépend de la nature de l'irradiation, ainsi que de la surface elle-même. Par exemple, l'absorptivité d'une surface au rayonnement solaire peut différer de sa capacité d'absorption au rayonnement émis par les parois d'un four.

### Méthode : Un cas particulier

Un cas particulier qui se produit fréquemment implique l'échange de rayonnement entre une petite surface à  $T_s$  et une surface isotherme beaucoup plus grande  $T_{\text{sur}}$  qui entoure complètement la plus petite (figure 1.6b).

L'environnement pourrait par exemple être les parois d'une chambre ou d'un four dont la température  $T_{\text{sur}}$  diffère de celle d'une surface fermée ( $T_{\text{sur}} \neq T_s$ ).



$$G = \sigma T_{\text{sur}}^4$$

Si la surface est supposée être une pour laquelle  $\alpha = \varepsilon$  (une surface grise), le flux net de transfert de chaleur par rayonnement depuis la surface, exprimé par unité de surface comme suivant :

$$q''_{\text{rad}} = \frac{q}{A} = \varepsilon E_b(T_s) - \alpha G = \varepsilon \sigma (T_s^4 - T_{\text{sur}}^4) \quad (1.7)$$

Cette expression fournit la différence entre l'énergie thermique qui est libérée en raison de l'émission de rayonnement et celle acquise en raison de l'absorption de rayonnement.

Pour de nombreuses applications, il est pratique d'exprimer l'échange thermique de rayonnement net sous la forme :

$$q_{\text{rad}} = h_r A (T_s - T_{\text{sur}}) \quad (1.8)$$

Où, d'après l'équation 1.7, le coefficient de transfert de chaleur par rayonnement  $h_r$  est

$$h_r \equiv \varepsilon \sigma (T_s + T_{\text{sur}})(T_s^2 + T_{\text{sur}}^2) \quad (1.9)$$

Ici, nous avons modélisé le mode de rayonnement d'une manière similaire à la convection. En ce sens, nous avons linéarisé l'équation du taux de rayonnement, rendant le flux de chaleur proportionnel à une différence de température plutôt qu'à la différence entre deux températures à la quatrième puissance.

Notez, cependant, que  $h_r$  dépend fortement de la température, alors que la dépendance à la température du coefficient de transfert de chaleur par convection  $h$  est généralement faible.

Les surfaces de la figure 1.6 peuvent également transférer simultanément de la chaleur par convection à un gaz adjacent. Pour les conditions de la figure 1.6b, le flux total de transfert de chaleur depuis la surface est alors

$$q = q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}} = hA(T_s - T_{\infty}) + \varepsilon A \sigma (T_s^4 - T_{\text{sur}}^4) \quad (1.10)$$

### 3. EXAMPLE 1.2

#### EXAMPLE 1.2

Une conduite de vapeur non isolé traverse une chambre dans laquelle l'air et les murs sont à 25 °C.

Le diamètre extérieur de la conduite est de 70 mm et sa température de surface et son émissivité sont de 200 °C et 0,8, respectivement.

Quelle est la puissance émissive de surface (Émissivité) et l'irradiation?

Si le coefficient associé au transfert de chaleur par convection libre de la surface à l'air est de 15 W / m<sup>2</sup>.K, quel est le flux de perte de chaleur de la surface par unité de longueur de la conduite?

SOLUTION

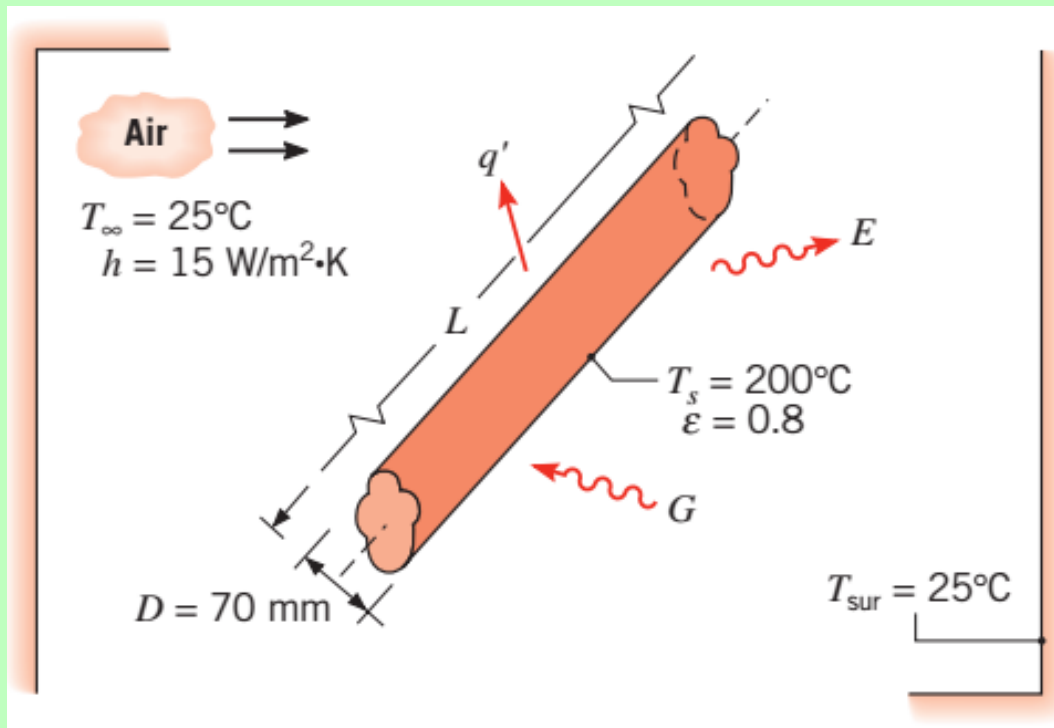
Données

Une conduite non isolé de diamètre, d'émissivité et de température de surface prescrite dans une chambre avec des températures de paroi et d'air fixes.

Trouver

1. Puissance émissive de surface et irradiation.
2. Perte de chaleur de la conduite par unité de longueur,  $q'$ .

Schématique:



Hypothèses:

1. Conditions à l'état d'équilibre (stationnaire).
2. L'échange de rayonnement entre la conduite et la chambre se fait entre une petite surface et une enceinte beaucoup plus grande.
3. L'émissivité et l'absorbance de surface sont égales.

Analyse:

1. La puissance émissive de surface peut être évaluée à partir de l'équation 1.5, tandis que l'irradiation correspond à  $G = \sigma T_{\text{sur}}^4$ . Par conséquent

$$E = \epsilon \sigma T_s^4 = 0.8(5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4)(473 \text{ K})^4 = 2270 \text{ W/m}^2$$

$$G = \sigma T_{\text{sur}}^4 = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4 (298 \text{ K})^4 = 447 \text{ W/m}^2$$

2. La perte de chaleur de la conduite se fait par convection dans l'air ambiant et par échange de rayonnement avec les murs. à partir de l'équation 1.10, avec  $A=\pi DL$ ,

$$q = h(\pi DL)(T_s - T_\infty) + \varepsilon(\pi DL)\sigma(T_s^4 - T_{\text{sur}}^4)$$

La perte de chaleur par unité de longueur de conduite est alors :

$$\begin{aligned} q' = \frac{q}{L} &= 15 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}(\pi \times 0.07 \text{ m})(200 - 25)^\circ\text{C} \\ &\quad + 0.8(\pi \times 0.07 \text{ m}) 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4 (473^4 - 298^4) \text{ K}^4 \\ q' &= 577 \text{ W/m} + 421 \text{ W/m} = 998 \text{ W/m} \end{aligned}$$

Commentaires:

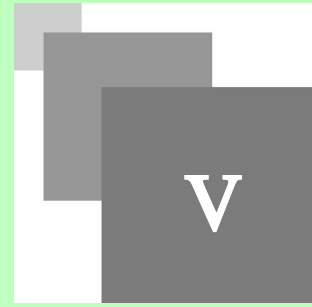
1. Notez que la température peut être exprimée en unités de °C ou K lors de l'évaluation de la différence de température pour un taux de transfert de chaleur par convection (ou conduction). Cependant, la température doit être exprimée en kelvins (K) lors de l'évaluation d'un flux de transfert de rayonnement.
2. Le flux net de transfert de chaleur par rayonnement de la conduite peut être exprimé comme :

$$\begin{aligned} q'_{\text{rad}} &= \pi D (E - \alpha G) \\ q'_{\text{rad}} &= \pi \times 0.07 \text{ m} (2270 - 0.8 \times 447) \text{ W/m}^2 = 421 \text{ W/m} \end{aligned}$$

3. Dans cette situation, les flux de transfert de chaleur de rayonnement et de convection sont comparables car  $T_s$  est grand par rapport à  $T_{\text{sur}}$  et le coefficient associé à la convection libre est petit.

Pour des valeurs plus modérées de  $T_s$  et des valeurs plus élevées de  $h$  associées à la convection forcée, l'effet du rayonnement peut souvent être négligé. Le coefficient de transfert de chaleur par rayonnement peut être calculé à partir de l'équation 1.9. Pour les conditions de ce problème, sa valeur est :  $h_r=11 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$

# Le concept de résistance thermique



## 1. Résistance thermique

Les trois modes de transfert de chaleur ont été introduits dans les sections précédentes. Comme il ressort des équations 1.2, 1.3 et 1.8, le flux de transfert de chaleur peut être exprimé sous la forme :

$$q = q''A = \frac{\Delta T}{R_t} \quad (1.11)$$

Où  $\Delta T$  est une différence de température pertinente et  $A$  est la section normale à la direction du transfert de chaleur.

La quantité  $R_t$  est appelée *résistance thermique* et prend différentes formes pour les trois modes de transfert de chaleur.

### Exemple

Par exemple, l'équation 1.2 peut être multipliée par la surface  $A$  et réécrite comme :

$$R_{(t,c)} = L / (k \cdot A)$$

$R_{(t,c)}$  est une résistance thermique associée à la conduction, ayant les unités K/W.

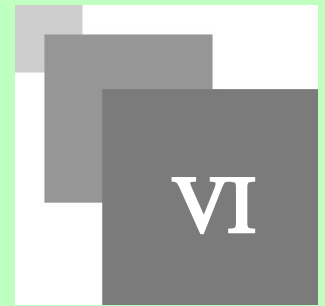
$$q_x = \Delta T / R_{t,c}$$

Où

$$R_{t,c} = L / kA$$

$R_{(t,c)}$  est une résistance thermique associée à la conduction, ayant les unités K/W.


# Résolution de problèmes: méthodologie



## Objectifs

L'analyse de différents problèmes vous donnera une appréciation plus approfondie des principes fondamentaux du sujet et vous gagnerez en confiance en votre capacité à appliquer ces principes fondamentaux à la solution de problèmes d'ingénierie.

## 1. Méthodologie

 *Conseil : Soyez cohérent en suivant ces étapes:*

---

- 1 Connu
- 2 Trouver
- 3 Schéma
- 4 hypothèses
- 5 propriétés
- 6 Analyse
- 7 commentaires

# Exercice



# Solutions des exercices

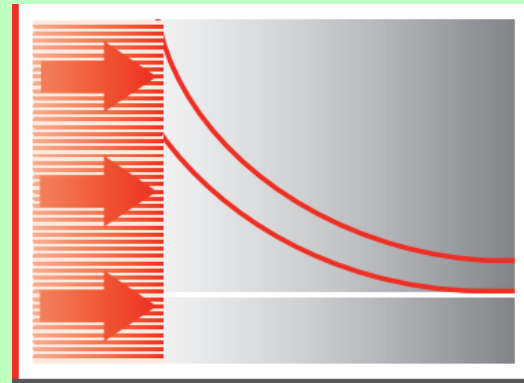


> **Solution n°1**

Exercice p. 22

# Chap. 2. Équation de diffusion de chaleur

*Chap. 2. Équation de diffusion de chaleur*



Dr. Ferhat Mohammed Fouad



# Table des matières



<b>Objectifs</b>	4
<b>Introduction</b>	5
<b>I - Problème et application</b>	6
<b>II - 2.1 Transfert de chaleur en Régime stationnaire vs transitoire</b>	7
1. Régime stationnaire vs transitoire .....	7
<b>III - 2.2 Production (génération) de chaleur &amp; Stockage d'énergie</b>	9
1. 2.2.1 Production de chaleur (Source) .....	9
2. 2.2.2 Stockage d'Energie .....	10
<b>IV - 2.3 Transfert de chaleur multidimensionnel</b>	11
1. 2.3.1 Coordonnées rectangulaires (ou cartésienne) .....	11
2. 2.3.2 Coordonnées cylindriques .....	13
3. 2.3.3 Coordonnées sphériques .....	14
<b>V - EXEMPLE 2.1</b>	16
1. Distribution de température $T(x)$ à un instant $t$ dans une paroi unidimensionnelle avec source (génération) de chaleur uniforme. .....	17
1.1. La distribution de température à travers un mur de 1 m d'épaisseur à un certain instant de temps est donnée par : .....	17
1.2. SOLUTION .....	17
<b>VI - 2.4 Les conditions aux limites et la condition initiale pour la conduction</b>	21
1. 2.4.1 Les conditions aux limites .....	21
2. 2.4.2 La condition initiale .....	21
3. 2.4.3 Condition aux limites de température imposée (Dirichlet) .....	21
4. 2.4.4 Condition aux limites de flux thermique imposé (Neumann) .....	22
5. 2.4.5 Cas particulier: frontière isolée .....	23

6. 2.4.6 Cas particulier: la symétrie thermique .....	24
<b>VII - 2.5 Condition aux limites de convection</b>	<b>26</b>
1. Bilan d'énergie de surface .....	26
<b>VIII - EXEMPLE 2.2</b>	<b>29</b>
1. Comment déterminer la température en fonction de la position et du temps .....	30
1.1. Problème .....	30
1.2. Solution .....	30
<b>IX - 2.6 Transfert de chaleur par conduction en régime transitoire</b>	<b>32</b>
1. 2.6.1 introduction .....	32
2. 2.6.2 Méthode du gradient nul (décharge d'une capacité) .....	32
2.1. Validation de la Méthode du gradient nul (décharge d'une capacité) .....	35
3. 2.6.3 Solide semi-infini .....	
4. 2.6.4 Transfert unidimensionnel dans les milieux fini .....	
<b>X - EXEMPLE 2.3</b>	<b>39</b>
1. Comment calculer le temps .....	40
1.1. EXEMPLE 2.3 .....	40
1.2. Solution .....	40

# Objectifs



Apprendre de nouvelles notions telles que le transfert thermique en régime transitoire

# Introduction



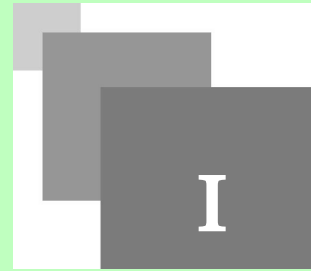
Dans ce chapitre, nous allons étudier l'équation de conduction thermique et ses solutions. On dit que la conduction thermique dans un milieu est stationnaire (permanent) lorsque la température ne varie pas avec le temps et transitoire lorsqu'elle le fait.

La conduction thermique dans un milieu est dite unidimensionnelle lorsque la conduction est significative dans une seule dimension et négligeable dans les deux autres dimensions.

On dit qu'elle est bidimensionnelle lorsque la conduction dans la troisième dimension est négligeable et tridimensionnelle lorsque la conduction dans toutes les dimensions est significative.

Dans l'analyse du transfert de chaleur, la conversion d'énergie électrique, chimique ou nucléaire en énergie thermique est caractérisée comme une génération de chaleur.

# Problème et application



Déterminer la distribution de température dans un système résultant des conditions imposées à ses limites.

Le flux de chaleur de conduction en tout point du système ou de la surface peut être calculé à partir de la loi de Fourier.

Ces informations pourraient être utilisées pour déterminer les contraintes thermiques, les dilatations, les déformations

La distribution de température peut également être utilisée pour optimiser l'épaisseur d'un matériau isolant ou pour déterminer la compatibilité de revêtements spéciaux ou d'adhésifs utilisés avec le matériau.

# 2.1 Transfert de chaleur en Régime stationnaire vs transitoire



## 1. Régime stationnaire vs transitoire

Les problèmes de transfert de chaleur sont souvent classés comme étant stationnaire (également appelés permanant) ou transitoires (également appelés non permanant).

Le terme stationnaire n'implique aucun changement avec le temps à aucun point dans le système, tandis que transitoire implique une variation avec le temps ou la dépendance du temps.

Par conséquent, la température ou le flux de chaleur reste inchangé avec le temps pendant le transfert de chaleur stationnaire à travers un milieu à n'importe quel endroit, bien que les deux quantités puissent varier d'un endroit à l'autre (Fig. 2-1).

Par exemple, le transfert de chaleur à travers les murs d'une maison sera stationnaire lorsque les conditions à l'intérieur de la maison et à l'extérieur restent constantes pendant plusieurs heures. Mais même dans ce cas, les températures sur les surfaces intérieures et extérieures du mur seront différentes à moins que les températures à l'intérieur et à l'extérieur de la maison soient les mêmes.

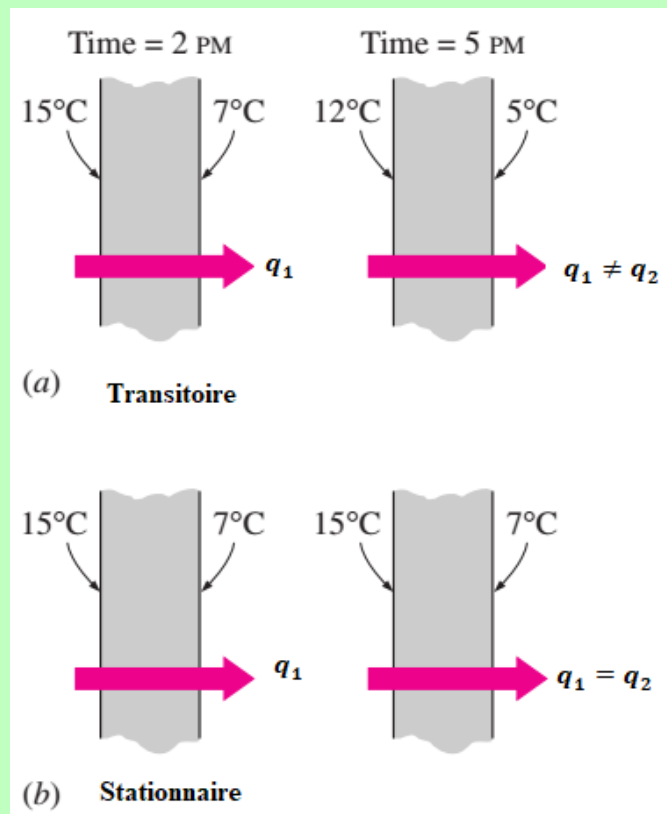
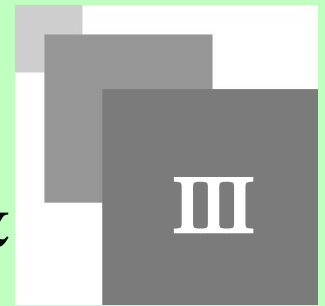


Figure 2.1 : Conduction thermique stationnaire et transitoire dans une paroi plane.

# 2.2 Production (génération) de chaleur & Stockage d'énergie



## 1. 2.2.1 Production de chaleur (Source)

Un système à travers lequel la chaleur est conduite peut impliquer la conversion d'énergie électrique, nucléaire ou chimique en énergie thermique. Dans l'analyse par conduction thermique, de tels processus de conversion sont caractérisés comme une génération de chaleur.

Par exemple, la température d'un fil de résistance augmente rapidement lorsque le courant électrique le traverse en raison de la conversion de l'énergie électrique en chaleur à un flux de  $I^2.R$ , où  $I$  est le courant et  $R$  est la résistance électrique du fil. L'élimination sûre et efficace de cette chaleur des sites de génération de chaleur (les circuits électroniques) fait l'objet du refroidissement électronique, qui est l'un des domaines d'application modernes du transfert de chaleur.

De même, une grande quantité de chaleur est générée dans les éléments combustibles des réacteurs nucléaires à la suite de la fission nucléaire qui sert de source de chaleur aux centrales nucléaires. La désintégration naturelle des éléments radioactifs dans les déchets nucléaires ou d'autres matières radioactives entraîne également la génération de chaleur dans tout le corps.

La chaleur générée par le soleil à la suite de la fusion de l'hydrogène en hélium fait du soleil un grand réacteur nucléaire qui fournit de la chaleur à la terre.

Les réactions chimiques exothermiques qui peuvent se produire dans tout le milieu constituent une autre source de génération de chaleur dans un système. La réaction chimique dans ce cas sert de source de chaleur pour le système. Dans le cas des réactions endothermiques, cependant, la chaleur est absorbée au lieu d'être libérée pendant la réaction, et ainsi la réaction chimique sert de dissipateur thermique. Le terme de génération de chaleur devient une quantité négative dans ce cas.

Souvent, il est également pratique de modéliser l'absorption d'un rayonnement tel que l'énergie solaire ou les rayons gamma en tant que génération de chaleur lorsque ces rayons pénètrent profondément dans le corps tout en étant absorbés progressivement. Par exemple, l'absorption d'énergie solaire dans de grandes masses d'eau peut être traitée comme une production de chaleur dans toute l'eau à un flux égal au flux d'absorption, qui varie avec la profondeur (Fig. 2–10). Mais l'absorption d'énergie solaire par un corps opaque se produit à quelques microns de la surface, et l'énergie solaire qui pénètre dans le milieu dans ce cas peut être traitée comme un flux de chaleur spécifié sur la surface.

Notez que la génération de chaleur est un phénomène volumétrique. Autrement dit, il se produit dans tout le corps d'un médium. Par conséquent, le flux de génération de chaleur dans un système est généralement spécifié par unité de volume et est désigné par  $(E_g^*)$ , dont l'unité est  $W/m^3$  ou  $Btu/h \cdot ft^3$ .



Le flux de génération de chaleur dans un système peut varier avec le temps ainsi que la position dans le système. Lorsque la variation de la génération de chaleur avec la position est connue, le flux total de génération de chaleur dans un système de volume  $V$  peut être déterminé à partir de :

$$\dot{E}_g = \dot{q} \, dx \, dy \, dz \quad (2.1)$$

### 2. 2.2.2 Stockage d'Energie

De plus, des changements peuvent survenir dans la quantité d'énergie thermique interne stockée par le matériau dans le volume de contrôle. Si le matériau ne subit pas de changement de phase, les effets d'énergie latente ne sont pas pertinents et le terme de stockage d'énergie peut être exprimé comme :

$$\dot{E}_{st} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \, dx \, dy \, dz \quad (2.2)$$

Où  $\rho c_p (\partial T)/(\partial t)$  est le flux de changement dans le temps de l'énergie sensible (thermique) du système par unité de volume.

Encore une fois, il est important de noter que les termes  $(E_g)$  et  $(E_{st})$  représentent des processus physiques différents. Le terme est positif (une source) si de l'énergie thermique est générée dans le matériau aux dépens d'une autre forme d'énergie; il est négatif (un puits) si de l'énergie thermique est consommée. En revanche, le terme de stockage d'énergie fait référence au flux de changement de l'énergie thermique stockée par la matière.

## 2.3 Transfert de chaleur multidimensionnel

IV

Les problèmes de transfert de chaleur sont également classés comme étant unidimensionnels, bidimensionnels ou tridimensionnels, en fonction des valeurs relatives des flux de transfert de chaleur dans différentes directions et du niveau de précision souhaité. Dans le cas le plus général, le transfert de chaleur à travers un système est tridimensionnel.

Autrement dit, la température varie le long des trois directions principales dans le système pendant le processus de transfert de chaleur. La distribution de la température dans tout le système à un moment spécifié ainsi que le flux de transfert de chaleur à n'importe quel endroit dans ce cas général peuvent être décrits par un ensemble de trois coordonnées telles que  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans la coordonnée rectangulaire (ou cartésienne) système; les  $r$ ,  $\Phi$  et  $z$  dans le système de coordonnées cylindriques; et le  $r$ ,  $\Phi$  et  $\theta$  dans le système de coordonnées sphérique (ou polaire). La distribution de température dans ce cas est exprimée par  $T(x, y, z, t)$ ,  $T(r, \Phi, z, t)$  et  $T(r, \Phi, \theta, t)$  dans les systèmes de coordonnées respectifs.

La forme générale de l'équation de conservation d'énergie est :

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \dot{E}_{st} \quad (2.3)$$

### 1. 2.3.1 Coordonnées rectangulaires (ou cartésienne)

Considérons un milieu homogène dans lequel il n'y a pas de mouvement de masse (advection) et la distribution de température  $T(x, y, z)$  est exprimée en coordonnées cartésiennes. En suivant la méthodologie d'application de l'équation de conservation de l'énergie (2.3), nous définissons d'abord *un volume de contrôle (différentiel)* infiniment petit,  $dx dy dz$ , comme le montre la figure 2.2.

En choisissant de formuler la première loi à un instant du temps, la deuxième étape consiste à considérer les processus énergétiques pour ce volume de contrôle.

En l'absence de mouvement (ou avec un mouvement uniforme), il n'y a aucun changement d'énergie mécanique et aucun travail n'est effectué sur le système. Seules les formes d'énergie thermique doivent être prises en compte. Plus précisément, s'il existe des gradients de température, un transfert de chaleur par conduction se produira à travers chacune des surfaces de contrôle.

Les flux de chaleur de conduction perpendiculaires à chacune des surfaces de contrôle aux emplacements des coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont indiqués par les termes  $q_x$ ,  $q_y$  et  $q_z$ , respectivement.

Les flux de chaleur de conduction aux surfaces opposées peuvent alors être exprimés comme une expansion en série de *Taylor* où, en négligeant les termes d'ordre supérieur,

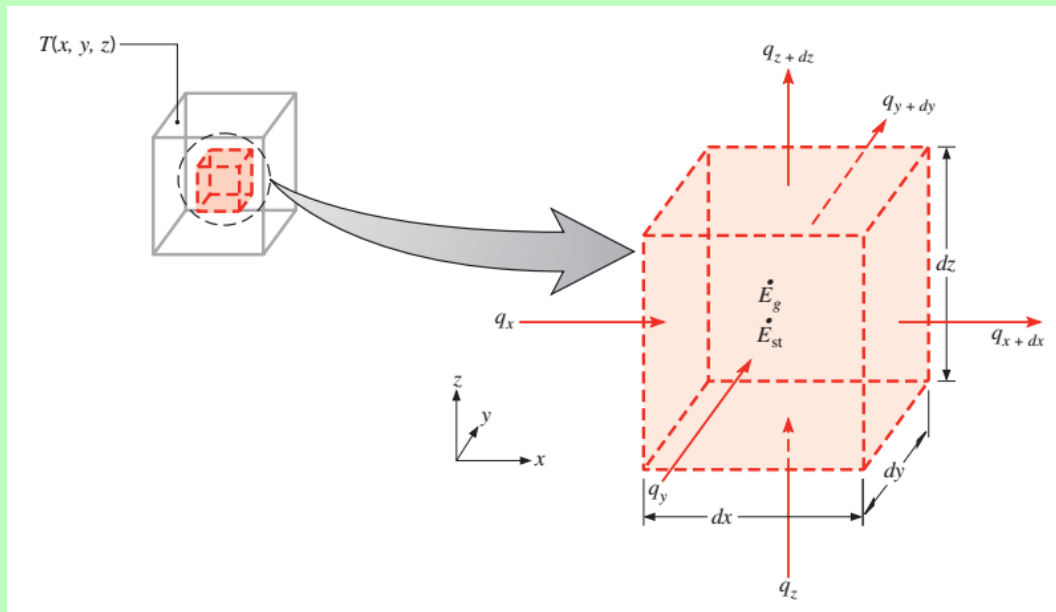


Figure 2.2 : Volume de contrôle différentiel,  $dx \, dy \, dz$ , pour l'analyse de conduction en coordonnées cartésiennes.

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (2.4.a)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (2.4.b)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (2.4.c)$$

En mots, l'équation 2.4.a indique simplement que la composante-x du flux de transfert de chaleur à  $x + dx$  est égale à la valeur de cette composante à  $x$  plus la quantité par laquelle elle change par rapport à  $x$  et fois  $dx$ .

D'après l'équation (2.3)

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q} \, dx \, dy \, dz - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx \, dy \, dz \quad (2.5)$$

En se substituant aux équations 2.4, il s'ensuit que

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q} dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (2.6)$$

Les flux de chaleur de conduction dans un matériau isotrope peuvent être évalués à partir de la loi de Fourier,

$$q_x = -k dy dz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.7.a)$$

$$q_y = -k dx dz \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.7.b)$$

$$q_z = -k dx dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.7.c)$$

Où chaque composante de flux thermique a été multipliée par la surface de contrôle appropriée (différentielle) pour obtenir le flux de transfert de chaleur. En substituant les équations 2.7 à l'équation 2.6 et en divisant les dimensions du volume de contrôle ( $dx dy dz$ ), nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.8)$$

Il est souvent possible de travailler avec des versions simplifiées de l'équation 2.8. Par exemple, si la conductivité thermique est constante, l'équation thermique est

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.9)$$

où  $\alpha = k / \rho c_p$  est la diffusivité thermique.

### 2. 2.3.2 Coordonnées cylindriques

L'équation générale de conduction thermique en coordonnées cylindriques peut être obtenue à partir d'un bilan d'énergie sur un élément de volume en coordonnées cylindriques, illustré à la Fig. 2-3, en suivant les étapes décrites ci-dessus. Il peut également être obtenu directement à partir de l'Eq. 2-8 par transformation de coordonnées en utilisant les relations suivantes entre les coordonnées d'un point dans les systèmes de coordonnées rectangulaires et cylindriques:

$x=r \cos\Phi$ ,  $y=r \sin\Phi$  et  $z=z$

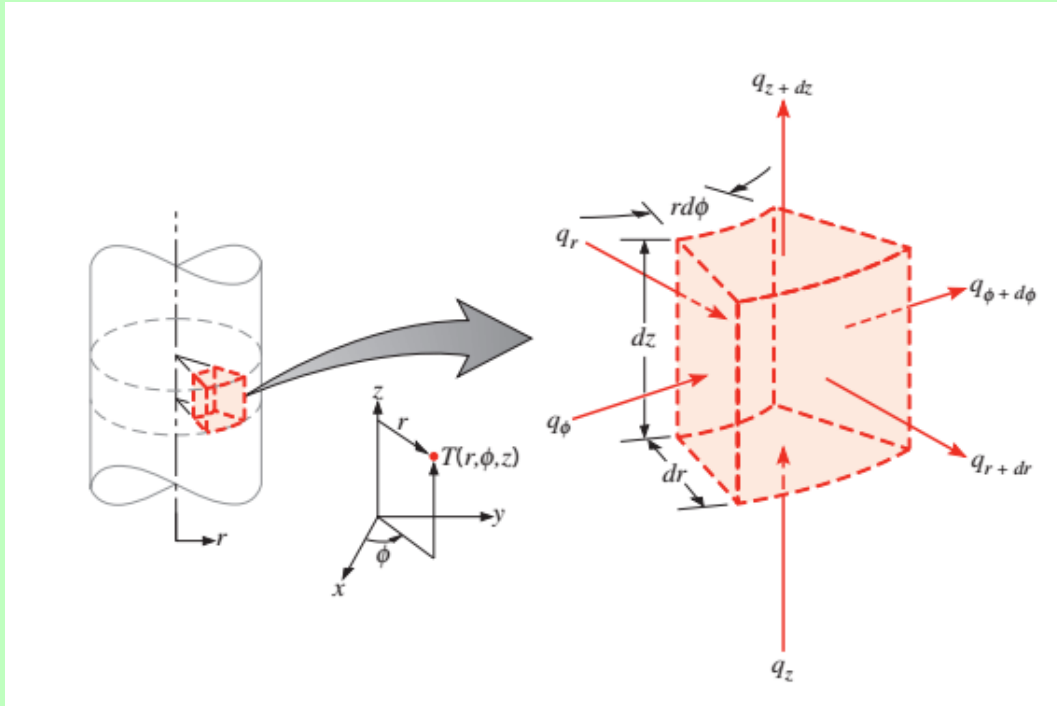


Figure 2.3: Volume de contrôle différentiel,  $dr$ ,  $r d\Phi$ ,  $dz$ , pour l'analyse de conduction en coordonnées cylindriques ( $r$ ,  $\Phi$ ,  $z$ ).

Après de longues manipulations, on obtient

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.10)$$

### 3. 2.3.3 Coordonnées sphériques

Les équations générales de conduction thermique en coordonnées sphériques peuvent être obtenues à partir d'un bilan d'énergie sur un élément de volume en coordonnées sphériques, illustré à la Fig. 2-4, en suivant les étapes décrites ci-dessus. Il peut également être obtenu directement à partir de l'Eq. 2-8 par transformation de coordonnées en utilisant les relations suivantes entre les coordonnées d'un point dans les systèmes de coordonnées rectangulaires et sphériques:

$x=r \cos\Phi \sin\theta$ ,  $y=r \sin\Phi \sin\theta$  et  $z=r \cos\theta$

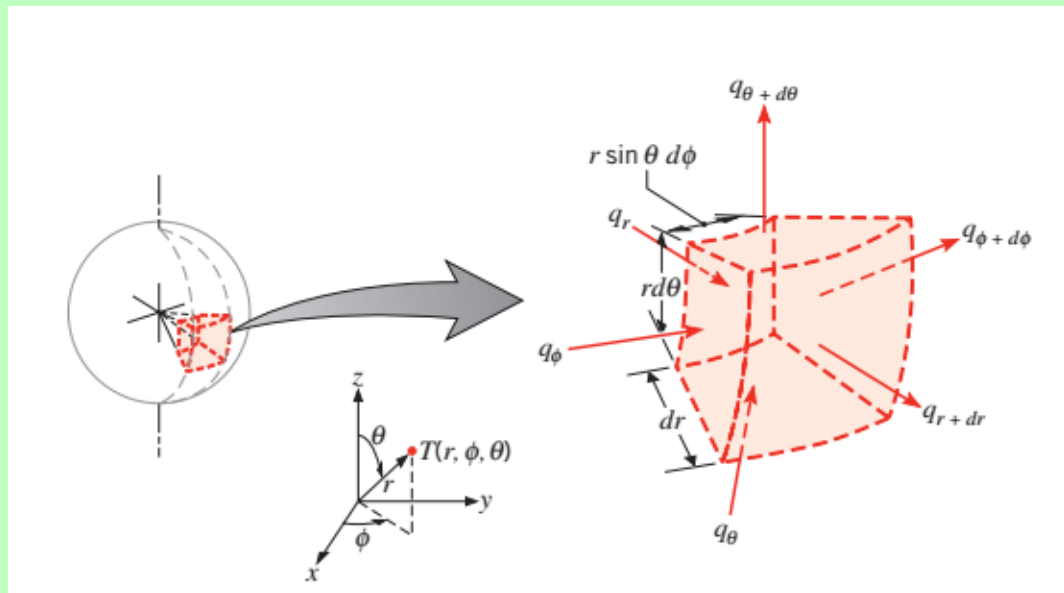
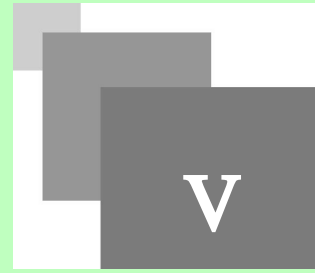


Figure 2.4 : Volume de commande différentiel,  $dr.r\sin\theta d\Phi.rd\theta$ , pour analyse de conduction en coordonnées sphériques  $(r,\Phi,\theta)$ .

Après de longues manipulations, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \\ + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.11)$$

# EXEMPLE 2.1



# 1. Distribution de température $T(x)$ à un instant $t$ dans une paroi unidimensionnelle avec source (génération) de chaleur uniforme.

1.1. La distribution de température à travers un mur de 1 m d'épaisseur à un certain instant de temps est donnée par :

$$T(x) = a + bx + cx^2$$

Où  $T$  est en degrés Celsius et  $x$  en mètres, tandis que  $a = 900 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $b = -300 \text{ }^\circ\text{C/m}$  et  $c = -50 \text{ }^\circ\text{C/m}^2$ .

Une génération de chaleur uniforme,  $q' = 1000 \text{ W/m}^3$ , est présente dans le mur de surface  $10 \text{ m}^2$  ayant les propriétés  $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$ ,  $k = 40 \text{ W/m.K}$  et  $c_p = 4 \text{ kJ/kg.K}$ .

1. Déterminez le flux de transfert de chaleur entrant dans le mur ( $x = 0$ ) et quittant le mur ( $x = 1 \text{ m}$ ).
2. Déterminez le flux de changement du stockage d'énergie dans le mur.
3. Déterminez la vitesse de changement de température à  $x = 0, 0,25$  et  $0,5 \text{ m}$ .

## 1.2. SOLUTION

Connu:

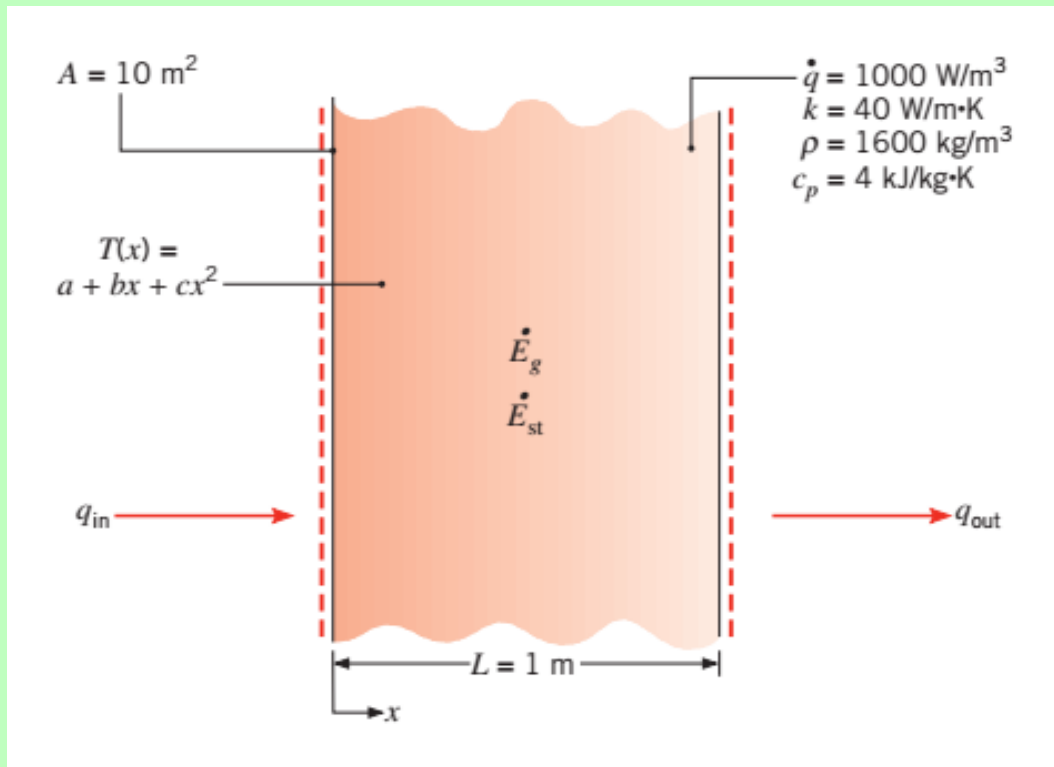
Distribution de température  $T(x)$  à un instant  $t$  dans une paroi unidimensionnelle avec génération de chaleur uniforme.

Trouver:

1. Taux de chaleur entrant,  $q_{in}(x = 0)$ , et quittant,  $q_{out}(x = 1 \text{ m})$ , le mur.
2. Taux de variation du stockage d'énergie dans le mur,
3. Vitesse de changement de température à  $x = 0, 0,25$  et  $0,5 \text{ m}$ .

Schématique:





Hypothèses:

1. Conduction unidimensionnelle dans la direction  $x$ .
2. Milieu isotrope à propriétés constantes.
3. Génération de chaleur interne uniforme,  $q'$  (W/m<sup>3</sup>).

Analyse:

1. Rappelons qu'une fois la distribution de température connue pour un système, il est simple de déterminer le flux de transfert de chaleur par conduction en tout point du système ou à ses surfaces en utilisant la loi de Fourier.

$$q_{in} = q_x(0) = -kA \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -kA(b + 2cx)_{x=0}$$

$$q_{in} = -bkA = 300^\circ\text{C/m} \times 40 \text{ W/m}\cdot\text{K} \times 10 \text{ m}^2 = 120 \text{ kW}$$

De même,

$$q_{out} = q_x(L) = -kA \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = -kA(b + 2cx)_{x=L}$$

$$q_{out} = -(b + 2cL)kA = -[-300^\circ\text{C/m}$$

$$+ 2(-50^\circ\text{C/m}^2) \times 1 \text{ m}] \times 40 \text{ W/m}\cdot\text{K} \times 10 \text{ m}^2 = 160 \text{ kW}$$

2. Le flux de variation du stockage d'énergie dans le mur peut être déterminé en appliquant un bilan énergétique global au mur. En utilisant l'équation 2.3 pour un volume de contrôle autour du mur,

$$\dot{E}_{\text{in}} + \dot{E}_g - \dot{E}_{\text{out}} = \dot{E}_{\text{st}}$$

Où,  $\dot{E}_g = \dot{q} A L$  il s'ensuit que

$$\dot{E}_{\text{st}} = \dot{E}_{\text{in}} + \dot{E}_g - \dot{E}_{\text{out}} = q_{\text{in}} + \dot{q} A L - q_{\text{out}}$$

$$\dot{E}_{\text{st}} = 120 \text{ kW} + 1000 \text{ W/m}^3 \times 10 \text{ m}^2 \times 1 \text{ m} - 160 \text{ kW}$$

$$\dot{E}_{\text{st}} = -30 \text{ kW}$$

3. La vitesse de variation de la température en tout point du système peut être déterminée à partir de l'équation de la chaleur, équation 2.9, réécrite comme

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\rho c_p}$$

De la distribution de température prescrite, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (b + 2cx) = 2c = 2(-50^\circ\text{C/m}^2) = -100^\circ\text{C/m}^2 \end{aligned}$$

Notez que cette dérivée est indépendante de la position dans le système. Par conséquent, le flux de changement de température est également indépendant de la position et est donné par

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{40 \text{ W/m} \cdot \text{K}}{1600 \text{ kg/m}^3 \times 4 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}} \times (-100^\circ\text{C/m}^2)$$

$$+ \frac{1000 \text{ W/m}^3}{1600 \text{ kg/m}^3 \times 4 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -6.25 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C/s} + 1.56 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C/s}$$

$$= -4.69 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C/s}$$

Commentaires:

1. D'après ce résultat, il est évident que la température à chaque point à l'intérieur du mur diminue avec le temps.
2. La loi de Fourier peut toujours être utilisée pour calculer le taux de chaleur de conduction à partir de la connaissance de la distribution de température, même pour des conditions instables avec génération de chaleur interne.

# 2.4 Les conditions aux limites et la condition initiale pour la conduction

VI

## 1. 2.4.1 Les conditions aux limites

Les équations de conduction thermique ci-dessus ont été développées en utilisant un bilan énergétique sur un élément différentiel à l'intérieur du milieu, et elles restent les mêmes quelles que soient les conditions thermiques sur les surfaces du milieu. Autrement dit, les équations différentielles n'intègrent aucune information relative aux conditions sur les surfaces telles que la température de surface ou un flux thermique imposé. Pourtant, nous savons que le flux de chaleur et la distribution de la température dans un milieu dépendent des conditions aux surfaces, et la description d'un problème de transfert de chaleur dans un milieu n'est pas complète sans une description complète des conditions thermiques aux surfaces limites du milieu. Les expressions mathématiques des conditions thermiques aux limites sont appelées *les conditions aux limites*.

Nous considérons un mur de briques. La température en tout point du mur à un moment spécifié dépend également de l'état du mur au début du processus de conduction thermique. Une telle condition, qui est généralement imposée au temps  $t=0$ , est appelée la condition initiale, qui est une expression mathématique de la distribution de température du milieu initialement. Notez que nous n'avons besoin que d'une condition initiale pour un problème de conduction thermique quelle que soit la dimension puisque l'équation de conduction est du premier ordre dans le temps (elle implique la première dérivée de la température par rapport au temps).

## 2. 2.4.2 La condition initiale

Nous considérons un mur de briques. La température en tout point du mur à un moment imposée dépend également de l'état du mur au début du processus de conduction thermique. Une telle condition, qui est généralement spécifiée au temps  $t=0$ , est appelée *la condition initiale*, qui est une expression mathématique de la distribution de température du milieu initialement. Notez que nous n'avons besoin que d'une condition initiale pour un problème de conduction thermique quelle que soit la dimension puisque l'équation de conduction est du premier ordre dans le temps (elle implique la première dérivée de la température par rapport au temps).

## 3. 2.4.3 Condition aux limites de température imposée (Dirichlet)

La température d'une surface exposée peut généralement être mesurée directement et facilement. Par conséquent, l'un des moyens les plus simples de spécifier les conditions thermiques sur une surface est de imposer la température. Pour un transfert de chaleur unidimensionnel à travers une paroi plane d'épaisseur  $L$ , par exemple, les conditions aux limites de température imposées peuvent être exprimées comme (Fig. 2-5)

$$\begin{aligned} T(0, t) &= T_1 \\ T(L, t) &= T_2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

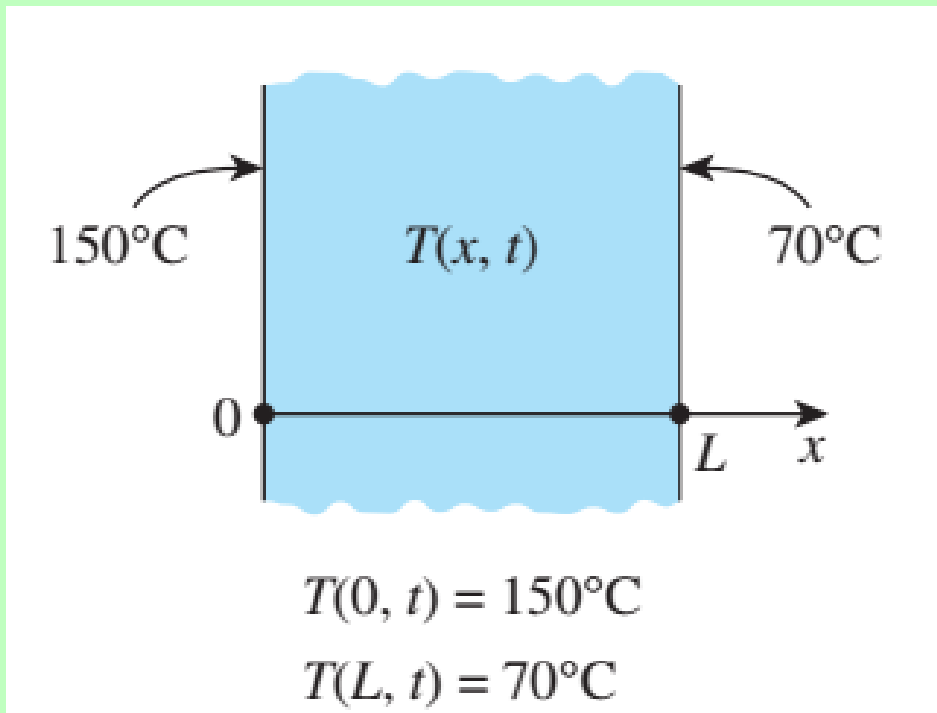


Figure 2.5 : Conditions aux limites de température imposées sur les deux surfaces d'un mur plan.

Où  $T_1$  et  $T_2$  sont les températures imposées aux surfaces à  $x = 0$  et  $x = L$ , respectivement.

Les températures imposées peuvent être constantes, ce qui est le cas pour une conduction thermique constante, ou peuvent varier avec le temps

#### 4. 2.4.4 Condition aux limites de flux thermique imposé (Neumann)

Lorsqu'il y a suffisamment d'informations sur les interactions énergétiques à une surface, il peut être possible de déterminer le flux de transfert de chaleur et donc la densité de flux de chaleur (flux de transfert de chaleur par unité de surface,  $\text{W/m}^2$ ) sur cette surface, et ces informations peuvent être utilisées comme l'une des conditions aux limites. Le flux de chaleur dans la direction  $x$  positive n'importe où dans le milieu, y compris les limites, peut être exprimé par la loi de Fourier de la conduction thermique comme :

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q_s \quad (\text{W/m}^2)$$

Ensuite, la condition aux limites à une frontière est obtenue en fixant le flux de chaleur imposé égal à  $-k \partial T/\partial x$  à cette limite. Le signe du flux thermique imposé est déterminé par contrôle: positif si le flux thermique est dans le sens positif de l'axe des coordonnées, et négatif s'il est dans le sens opposé.

Notez qu'il est extrêmement important d'avoir le bon signe pour le flux de chaleur imposé car un mauvais signe inversera la direction du transfert de chaleur et entraînera le gain de chaleur à interpréter comme une perte de chaleur (Fig. 2-6).

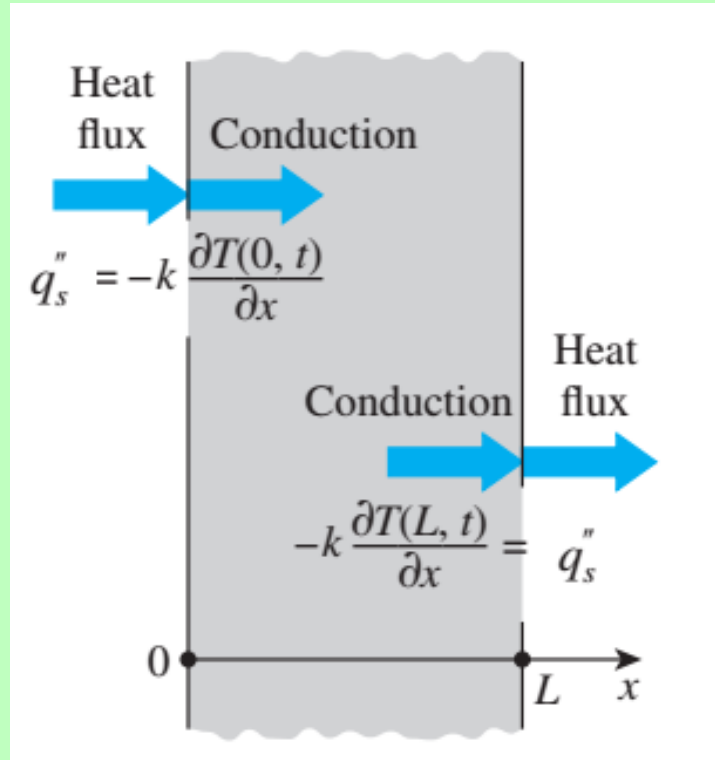


Figure 2.6 : Conditions aux limites de flux thermique spécifiées sur les deux surfaces d'une paroi plane.

Pour une plaque d'épaisseur  $L$  soumise à un flux thermique de  $50 \text{ W/m}^2$  dans le milieu des deux côtés, par exemple, les conditions aux limites de flux thermique imposé peuvent être exprimées comme :

$$-k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 50 \quad \text{and} \quad -k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = -50$$

#### Remarque

Notez que le flux de chaleur à la surface à  $x = L$  est dans la direction  $x$  négative, et donc il est de  $-50 \text{ W/m}^2$ . Dans ce cas, la direction des flèches de flux thermique à  $x = L$  sur la figure 2-6 serait inversée.

### 5. 2.4.5 Cas particulier: frontière isolée

Pratiquement, certaines surfaces sont généralement isolées afin de minimiser les pertes de chaleur (ou gain de chaleur) à travers elles. L'isolation réduit le transfert de chaleur mais ne l'élimine totalement que si son épaisseur est infinie. Cependant, le transfert de chaleur à travers une surface correctement isolée peut être considéré comme nul, car une isolation adéquate réduit le transfert de chaleur à travers une surface à des

niveaux négligeables. Par conséquent, une surface bien isolée peut être modélisée comme une surface avec un flux thermique spécifié de *zéro*. Ensuite, la condition aux limites sur une surface parfaitement isolée (à  $x = 0$ , par exemple) peut être exprimée comme : (Fig. 2-7)

$$k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0$$

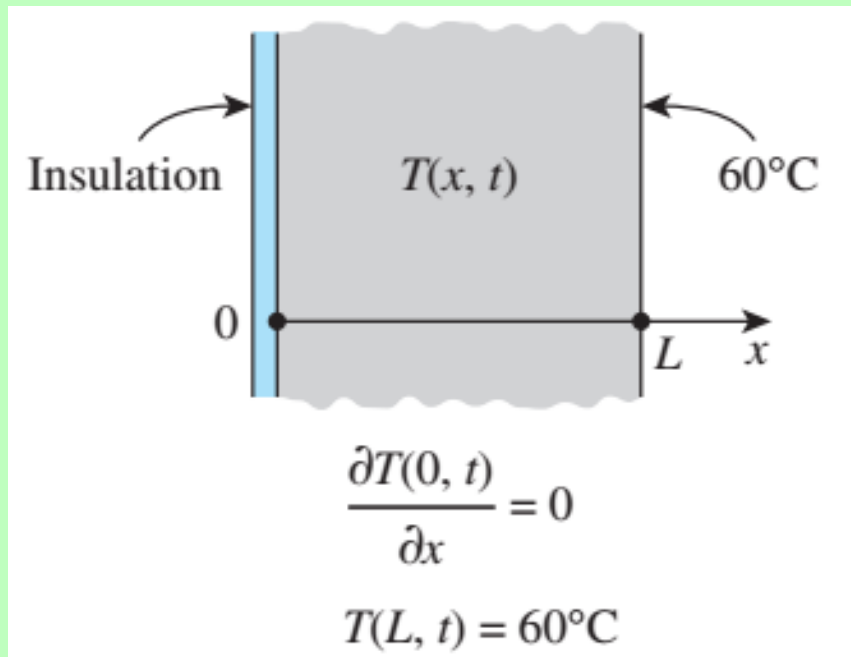


Figure 2.7 : Un mur plat avec isolation et conditions aux limites de température imposée.

C'est-à-dire que sur une surface isolée, la première dérivée de la température par rapport à la variable spatiale (le gradient de température) dans la direction normale à la surface isolée est nulle. Cela signifie également que la fonction de température doit être perpendiculaire à une surface isolée puisque la pente de température à la surface doit être nulle.

## 6. 2.4.6 Cas particulier: la symétrie thermique

Certains problèmes de transfert de chaleur possèdent une symétrie thermique en raison de la symétrie dans des conditions thermiques imposées. Par exemple, les deux surfaces d'une grande plaque chauffante d'épaisseur  $L$  suspendue verticalement dans l'air sont soumises aux mêmes conditions thermiques, et ainsi la distribution de température dans une moitié de la plaque est la même que dans l'autre moitié. Autrement dit, le problème de transfert de chaleur dans cette plaque possède une symétrie thermique autour du plan médian à  $x = L/2$ . En outre, la direction du flux de chaleur en tout point de la plaque est vers la surface plus proche du point, et il n'y a pas de flux de chaleur à travers le plan central. Par conséquent, le plan central peut être considéré comme une surface isolée, et la condition thermique à ce plan de symétrie peut être exprimée comme : (Fig. 2-8)

$$\frac{\partial T(L/2, t)}{\partial x} = 0$$

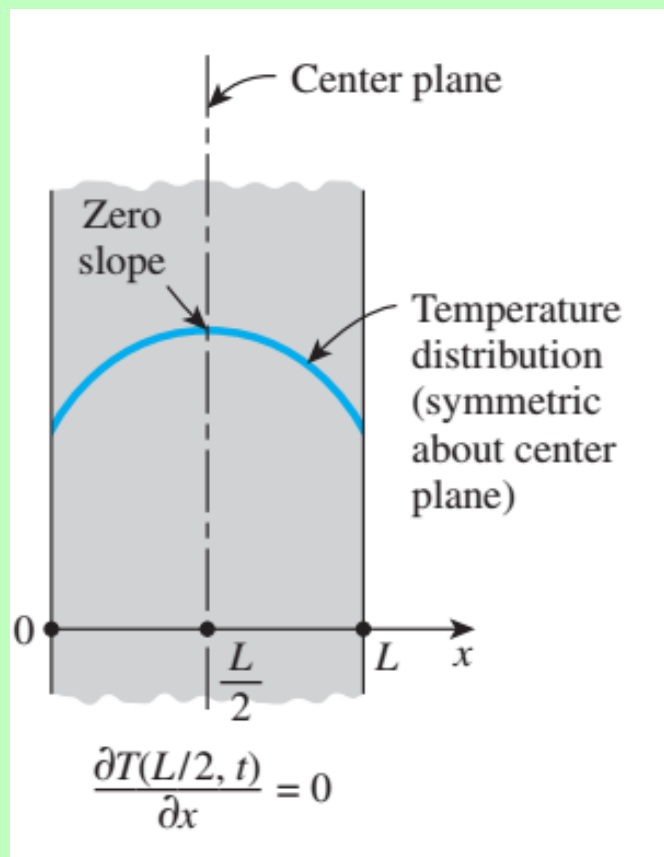


Figure 2.8 : Une Condition aux limites de symétrie thermique au plan médian d'un mur plan.

Qui ressemble à la condition aux limites d'isolation ou de flux thermique nul. Ce résultat peut également être déduit d'un tracé de distribution de température avec une pente maximale, et donc nulle, au plan médian.

Dans le cas de corps cylindriques (ou sphériques) ayant une symétrie thermique autour de la ligne médiane (ou point médian), la condition aux limites de symétrie thermique exige que la première dérivée de la température par rapport à  $r$  (la variable radiale) soit nulle à la ligne médiane (ou le milieu).



## 2.5 Condition aux limites de convection



### 1. Bilan d'énergie de surface

La convection est probablement la condition aux limites la plus courante rencontrée dans la pratique puisque la plupart des surfaces de transfert de chaleur sont exposées à un environnement à une température imposée. La condition aux limites de convection est basée sur *un bilan d'énergie de surface* exprimé comme :

(Conduction thermique à la surface dans une direction sélectionnée.) = (Convection thermique à la surface dans le même sens.)

Pour un transfert de chaleur unidimensionnel dans la direction  $x$  dans une plaque d'épaisseur  $L$ , les conditions aux limites de convection sur les deux surfaces peuvent être exprimées comme :

$$-k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = h_1 [T_{\infty 1} - T(0, t)] \quad (2.13)$$

et

$$-k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h_2 [T(L, t) - T_{\infty 2}] \quad (2.14)$$

Où  $h_1$  et  $h_2$  sont les coefficients de transfert de chaleur par convection et  $T_{\infty 1}$  et  $T_{\infty 2}$  sont les températures des milieux environnants sur les deux côtés de la plaque, comme le montrent la figure 2-9.

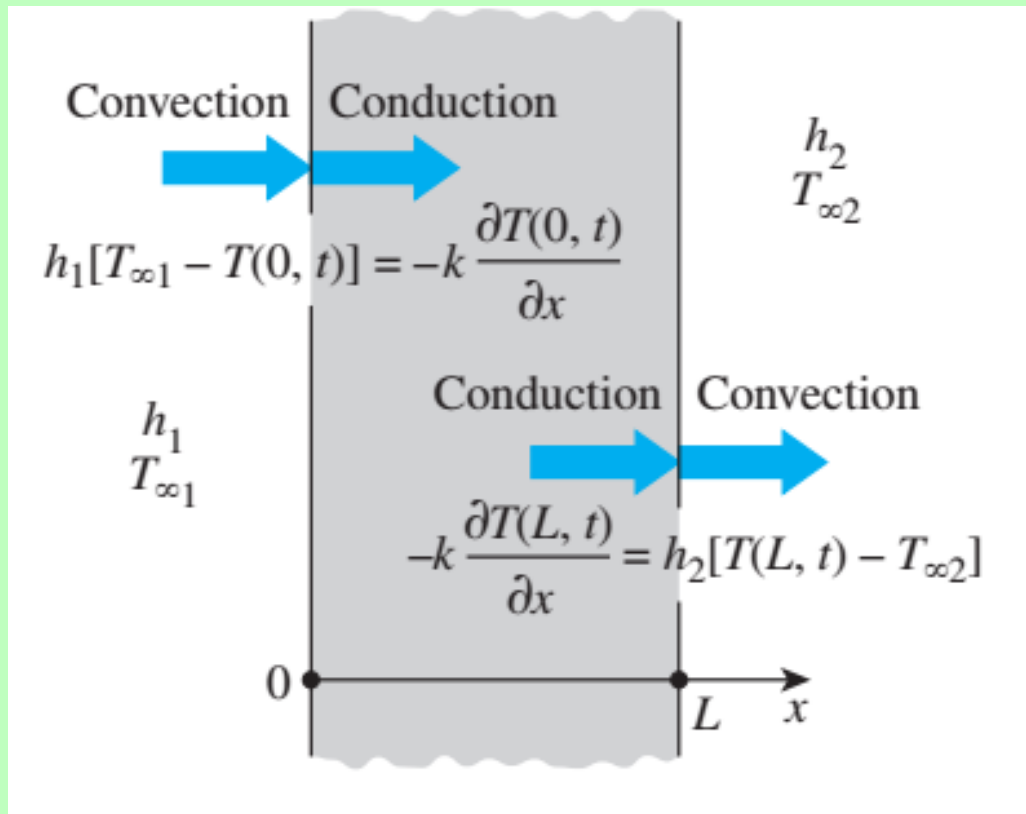


Figure 2.9 : Conditions aux limites de convection sur les deux surfaces d'un mur plan.

En écrivant Eqs. 2-13 et 2-14 pour les conditions aux limites de convection, nous avons choisi la direction du transfert de chaleur comme étant la direction  $x$  positive sur les deux surfaces. Mais ces expressions sont également applicables lorsque le transfert de chaleur se fait dans la direction opposée à une ou aux deux surfaces, car l'inversion de la direction du transfert de chaleur à une surface inverse simplement les signes des termes de conduction et de convection à cette surface. Cela équivaut à multiplier une équation par  $(-1)$ , ce qui n'a aucun effet sur l'égalité (Fig. 2-10). Le fait de pouvoir sélectionner l'une ou l'autre direction comme direction de transfert de chaleur est certainement un soulagement puisque souvent nous ne connaissons pas à l'avance la température de surface et donc la direction du transfert de chaleur sur une surface. Cet argument est également valable pour d'autres conditions aux limites telles que le rayonnement et les conditions aux limites combinées discutées brièvement.

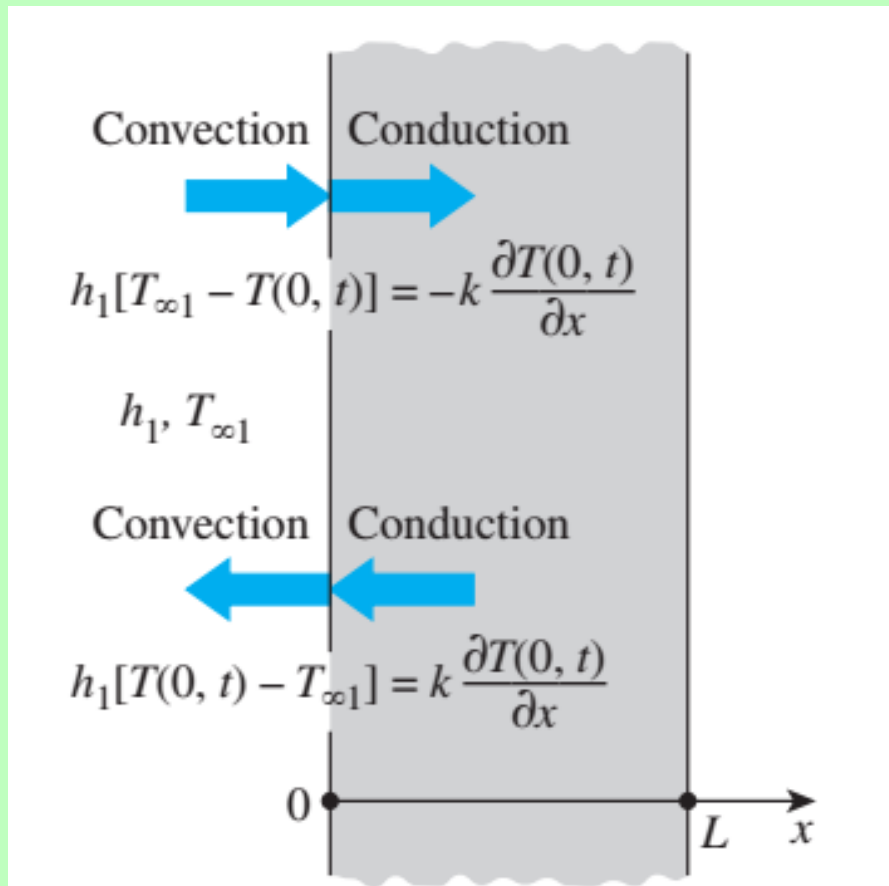



Figure 2.10: La direction supposée du transfert de chaleur à une limite n'a aucun effet sur l'expression de la condition aux limites.

 *Remarque*

Notez également que les températures de surface  $T(0, t)$  et  $T(L, t)$  ne sont pas connues (si elles étaient connues, nous les utiliserions simplement comme condition aux limites de température spécifiée et ne dérangerait pas la convection). Mais une température de surface peut être déterminée une fois que la solution  $T(x, t)$  est obtenue en substituant la valeur de  $x$  à cette surface dans la solution.

# EXEMPLE 2.2



# 1. Comment déterminer la température en fonction de la position et du temps

## 1.1. Problème

Une longue barre de cuivre de section rectangulaire, dont la largeur  $w$  est bien supérieure à son épaisseur  $L$ , est maintenue en contact avec un dissipateur thermique à sa surface inférieure, et la température dans toute la barre est approximativement égale à celle de l'évier,  $T_0$ . Soudainement, un courant électrique passe à travers la barre et un courant d'air de température  $T_\infty$  passe sur la surface supérieure, tandis que la surface inférieure continue à être maintenue à  $T_0$ . Obtenir l'équation différentielle et les conditions aux limites et initiales qui pourraient être résolues pour déterminer la température en fonction de la position et du temps dans la barre.

## 1.2. Solution

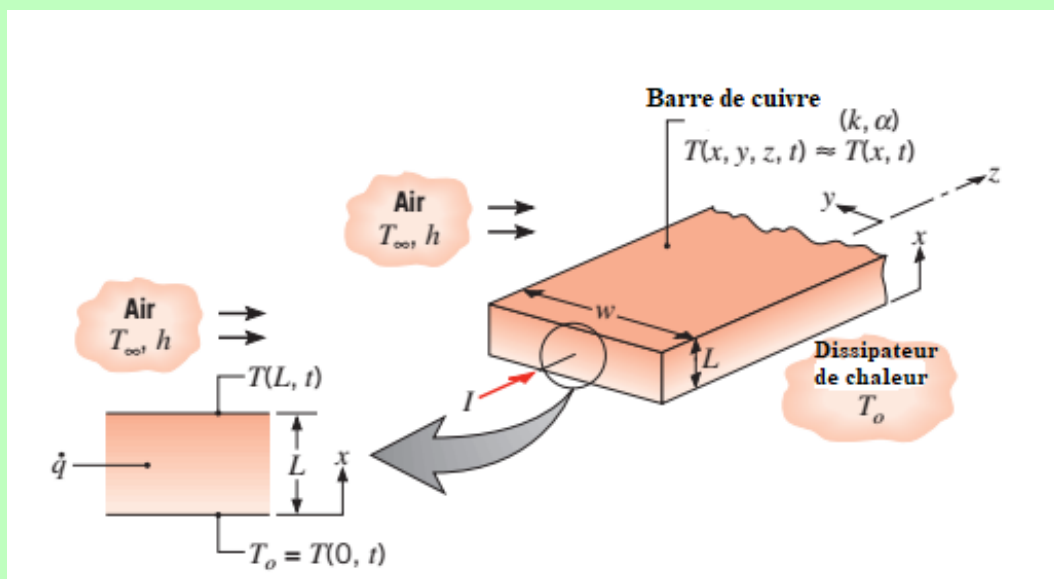
*Connu :*

La barre de cuivre initialement en équilibre thermique avec un dissipateur de chaleur est soudainement chauffée par passage d'un courant électrique.

*Trouver:*

Équation différentielle et conditions limites et initiales nécessaires pour déterminer la température en fonction de la position et du temps dans la barre.

*Schématique:*



*Hypothèses:*

1. Comme la barre est longue et  $w \gg L$ , les effets d'extrémité et secondaires sont négligeables et le transfert de chaleur à l'intérieur de la barre est principalement unidimensionnel dans la direction  $x$ .
2. Production de chaleur volumétrique uniforme,  $\dot{q}$

### 3. Propriétés constantes.

#### *Analyse:*

La distribution de température est régie par l'équation de la chaleur (équation 2.8), qui, pour les conditions de propriété unidimensionnelle et constante du présent problème, se réduit à

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Où la température est fonction de la position et du temps,  $T(x, t)$ . Étant donné que cette équation différentielle est du second ordre dans la coordonnée spatiale  $x$  et du premier ordre au temps  $t$ , il doit y avoir deux conditions aux limites pour la direction  $x$  et une condition, appelée condition initiale, pour le temps. La condition aux limites à la surface inférieure correspond au cas de Dirichlet.

En particulier, puisque la température de cette surface est maintenue à une valeur,  $T_0$ , qui est fixée avec le temps, il s'ensuit que :

$$T(0, t) = T_0 \quad (2)$$

L'état de surface de convection, cas condition aux limites de convection, est approprié pour la surface supérieure. Par conséquent :

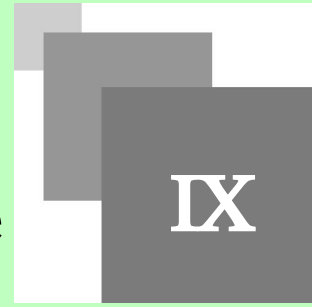
$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h[T(L, t) - T_\infty] \quad (3)$$

La condition initiale est déduite de la reconnaissance qu'avant le changement de conditions, la barre est à une température uniforme  $T_0$ . Par conséquent

$$T(x, 0) = T_0 \quad (4)$$

Si  $T_0$ ,  $T_\infty$ ,  $q$ . Et  $h$  sont connus, les équations 1 à 4 peuvent être résolues pour obtenir la distribution de température variant dans le temps  $T(x, t)$  suite à l'imposition du courant électrique.

# 2.6 Transfert de chaleur par conduction en régime transitoire



## 1. 2.6.1 introduction

La température d'un corps, en général, varie avec le temps ainsi que la position. En coordonnées rectangulaires, cette variation est exprimée par  $T(x, y, z, t)$ , où  $(x, y, z)$  indique une variation dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ , et  $t$  indique une variation avec le temps. Dans le chapitre précédent, nous avons considéré la conduction thermique dans des conditions stationnaire, pour lesquelles la température d'un corps en tout point ne change pas avec le temps. Cela a certainement simplifié l'analyse, surtout lorsque la température variait dans un seul sens, et nous avons pu obtenir des solutions analytiques. Dans cette section, nous considérons la variation de température avec le temps ainsi que la position .

## 2. 2.6.2 Méthode du gradient nul (décharge d'une capacité)

Un problème de conduction transitoire simple mais courant est celui pour lequel un solide subit un changement soudain de son environnement thermique. Considérons un forgeage de métal chaud qui est initialement à une température uniforme  $T_1$  et qui est trempé en le plongeant dans un liquide de température plus basse  $T_\infty < T_1$  (Figure 2.11). Si l'on dit que la trempé commence au temps  $t = 0$ , la température du solide diminuera pendant le temps  $t > 0$ , jusqu'à ce qu'il atteigne finalement  $T_\infty$ . Cette réduction est due au transfert de chaleur par convection à l'interface solide-liquide. Cette méthode est basée sur l'hypothèse que la température du solide est spatialement uniforme à tout instant pendant le processus transitoire. Cette hypothèse implique que les gradients de température à l'intérieur du solide sont négligeables.

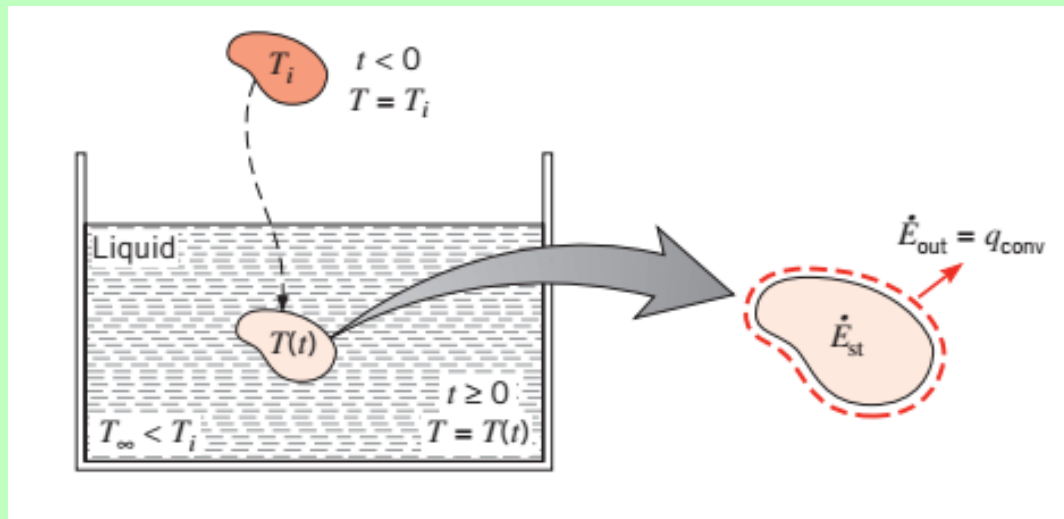


Figure 2.11: Refroidissement d'un forgeage de métal chaud

D'après la loi de Fourier, la conduction thermique en l'absence de gradient de température implique l'existence d'une conductivité thermique infinie. Une telle condition est clairement impossible. Cependant, la condition est très proche si la résistance à la conduction à l'intérieur du solide est faible par rapport à la résistance au transfert de chaleur entre le solide et son environnement.

Pour l'instant, nous supposons que c'est effectivement le cas. En négligeant les gradients de température au sein du solide, on ne peut plus considérer le problème dans le cadre de l'équation de la chaleur, puisque l'équation de la chaleur est une équation différentielle régissant la distribution spatiale de la température au sein du solide. Au lieu de cela, la réponse de température transitoire est déterminée en formulant un bilan énergétique global sur l'ensemble du solide. Cet équilibre doit relier le flux de perte de chaleur à la surface au flux de changement de l'énergie interne. En appliquant l'équation du bilan d'énergie au volume de contrôle de la figure 2.11, cette exigence prend la forme :

$$-\dot{E}_{\text{out}} = \dot{E}_{\text{st}}$$

ou

$$-hA_s(T - T_\infty) = \rho Vc \frac{dT}{dt} \quad (2.15)$$

En posant,

$$\theta \equiv T - T_\infty \quad (2.16)$$

Et reconnaissant que  $(d\theta/dt) = (dT/dt)$  si  $T_\infty$  est constant, il s'ensuit que :



$$\frac{\rho V c}{h A_s} \frac{d\theta}{dt} = -\theta$$

Séparer les variables et intégrer de la condition initiale, pour laquelle  $t = 0$  et  $T(0) = T_i$ , on obtient alors

$$\frac{\rho V c}{h A_s} \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = - \int_0^t dt$$

Où

$$\theta_i \equiv T_i - T_\infty \quad (2.17)$$

En évaluant les intégrales, il s'ensuit que

$$\frac{\rho V c}{h A_s} \ln \frac{\theta_i}{\theta} = t \quad (2.18)$$

Où

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp \left[ - \left( \frac{h A_s}{\rho V c} \right) t \right] \quad (2.19)$$

L'équation 2.18 peut être utilisée pour déterminer le temps nécessaire au solide pour atteindre une certaine température  $T$ , ou, inversement, l'équation 2.19 peut être utilisée pour calculer la température atteinte par le solide à un certain temps  $t$ .

Les résultats précédents indiquent que la différence entre les températures du solide et du fluide doit décroître de manière exponentielle jusqu'à zéro lorsque  $t$  approche de l'infini. Ce comportement est illustré à la figure 2.12. D'après l'équation 2.19, il est également évident que la quantité  $(\rho V c / h A_s)$  peut être interprétée comme une constante de temps thermique exprimée comme

$$\tau_t = \left( \frac{1}{h A_s} \right) (\rho V c) = R_t C_t$$

Où,  $R_t$  est la résistance au transfert de chaleur par convection et  $C_t$  est la capacité thermique localisée du solide. Toute augmentation de  $R_t$  ou  $C_t$  amènera un solide à répondre plus lentement aux changements de son environnement thermique. Ce comportement est analogue à la chute de tension qui se produit lorsqu'un condensateur est déchargé à travers une résistance dans un circuit électrique RC.

## 2.1. Validation de la Méthode du gradient nul (décharge d'une capacité)

### *Le nombre de Biot*

D'après les résultats précédents, il est facile de comprendre pourquoi il existe une forte préférence pour l'utilisation de la méthode du gradient nul. C'est certainement la méthode la plus simple et la plus pratique qui puisse être utilisée pour résoudre les problèmes de chauffage et de refroidissement transitoires. Il est donc important de déterminer dans quelles conditions il peut être utilisé avec une précision raisonnable.

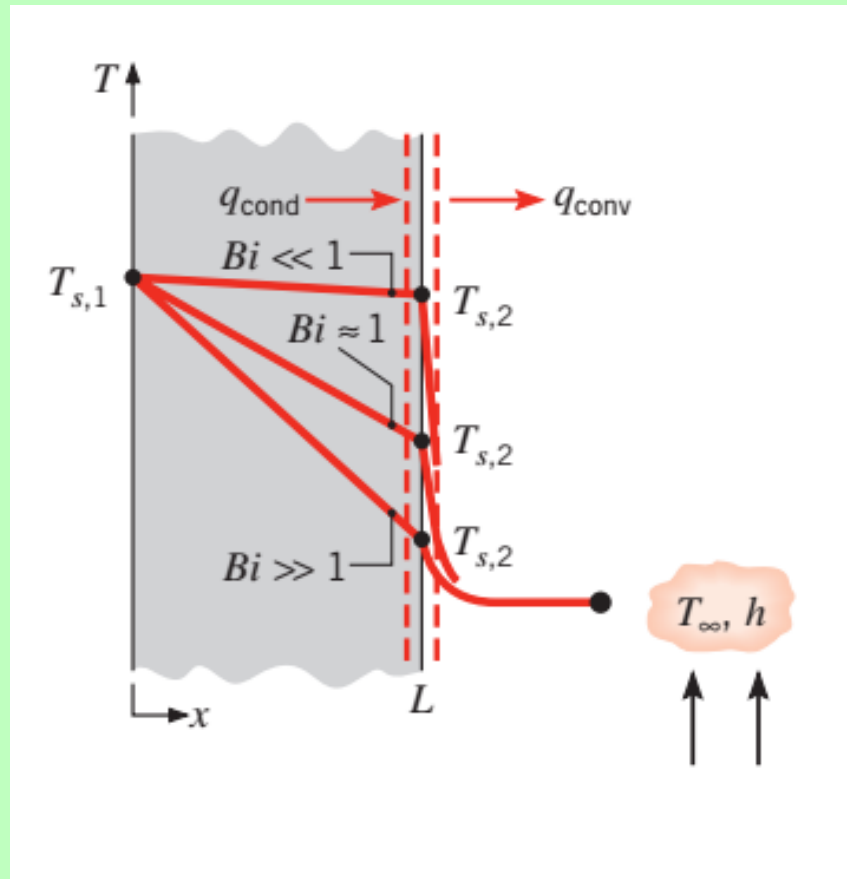


Figure 2.12: Effet du nombre de Biot sur la distribution de température en régime permanent dans une paroi plane avec convection de surface.

Pour développer un critère approprié, considérez la conduction en régime permanent à travers la paroi plane de la zone A (Figure 2.12). Bien que nous supposions des conditions de régime permanent, le critère suivant est facilement étendu aux processus transitoires. Une surface est maintenue à une température  $T_{s,1}$  et l'autre surface est exposée à un fluide de température  $T_{\infty} < T_{s,1}$ . La température de cette surface sera une valeur intermédiaire  $T_{s,2}$ , pour laquelle  $T_{\infty} < T_{s,2} < T_{s,1}$ . Par conséquent, en régime permanent, le bilan énergétique de surface, se réduit à :

$$-\dot{E}_{\text{out}} = \dot{E}_{\text{st}}$$

$$\frac{kA}{L} (T_{s,1} - T_{s,2}) = hA(T_{s,2} - T_{\infty}) \quad (2.20)$$

Où  $k$  est la conductivité thermique du solide. Réorganiser, on obtient alors :

$$\frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{T_{s,2} - T_{\infty}} = \frac{(L/kA)}{(1/hA)} = \frac{R_{t,cond}}{R_{t,conv}} = \frac{hL}{k} \equiv Bi \quad (2.21)$$

La quantité  $(hL/k)$  apparaissant dans l'équation 2.21 est un paramètre sans dimension. Il est appelé *le nombre de Biot*, et il joue un rôle fondamental dans les problèmes de conduction qui impliquent des effets de convection de surface. Selon l'équation 2.21 et comme illustré sur la figure 2.12, le nombre de Biot fournit une mesure de la chute de température dans le solide par rapport à la différence de température entre la surface du solide et le fluide. D'après l'équation 2.21, il est également évident que le nombre de Biot peut être interprété comme un rapport de résistances thermiques. En particulier, si  $Bi \ll 1$ , la résistance à la conduction au sein du solide est bien inférieure à la résistance à la convection à travers la couche limite de fluide. Par conséquent, l'hypothèse d'une distribution uniforme de la température dans le solide est raisonnable si le nombre de Biot est petit.

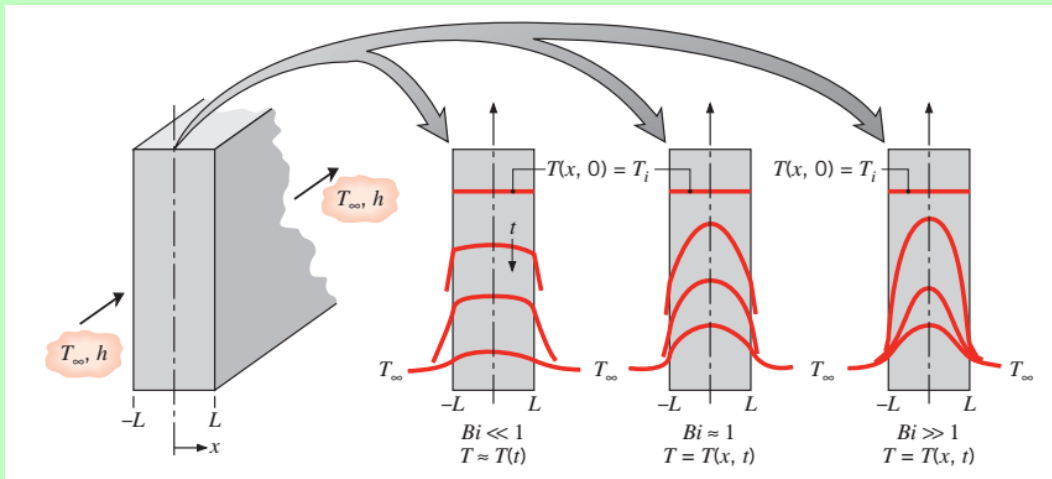


Figure 2.13: Distributions de température transitoire pour différents nombres de Biot dans une paroi plane refroidie symétriquement par convection.

Bien que nous ayons discuté du nombre de Biot dans le contexte des conditions d'équilibre, nous reconsidérons ce paramètre en raison de son importance pour les problèmes de conduction transitoire. Considérons la paroi plane de la figure 2.13, qui est initialement à une température uniforme  $T_i$  et subit un refroidissement par convection lorsqu'elle est immergée dans un fluide de  $T_{\infty} < T_i$ . Le problème peut être traité comme unidimensionnel en  $x$ , et nous nous intéressons à la variation de température en fonction de la position et du temps,  $T(x, t)$ . Cette variation est une fonction forte du nombre de Biot, et trois conditions sont illustrées à la figure 2.13. Là encore, pour  $Bi \ll 1$ , les gradients de température dans le solide sont petits et l'hypothèse d'une distribution de température uniforme,  $T(x, t) \approx T(t)$  est raisonnable. Presque toute la différence de température se situe entre le solide et le fluide, et la température du solide reste presque uniforme lorsqu'elle diminue jusqu'à  $T_{\infty}$ . Pour des valeurs moyennes à élevées de l'indice de Biot, cependant, les gradients de température à l'intérieur du solide sont significatifs. D'où  $T = T(x, t)$ . Notez que pour  $Bi \gg 1$ , la différence de température à travers le solide est beaucoup plus grande que celle entre la surface et le fluide.

Nous concluons cette section en soulignant l'importance de la méthode de la capacité localisée. Sa simplicité inhérente en fait la méthode préférée pour résoudre les problèmes de chauffage et de refroidissement transitoires. *Par conséquent, face à un tel problème, la toute première chose à faire est de calculer le nombre de Biot.* Si la condition suivante est satisfaisante l'erreur associée à l'utilisation de la méthode du gradient nul est faible.

$$Bi = \frac{hL_c}{k} < 0.1 \quad (2.22)$$

Pour plus de commodité, il est habituel de définir la longueur caractéristique de l'équation 2.22 comme le rapport du volume du solide à l'aire de surface  $L_c \equiv V/A_s$ . Une telle définition facilite le calcul de  $L_c$  pour des solides de forme compliquée et se réduit à la demi-épaisseur  $L$  pour une paroi plane d'épaisseur  $2L$  (figure 2.13), à  $ro/2$  pour un cylindre long, et à  $ro/3$  pour une sphère. Cependant, si l'on souhaite mettre en œuvre le critère de manière conservatrice,  $L_c$  doit être associé à l'échelle de longueur correspondant à la différence spatiale maximale de température. Par conséquent, pour une paroi plane symétriquement chauffée (ou refroidie) d'épaisseur  $2L$ ,  $L_c$  resterait égale à la demi-épaisseur  $L$ . Cependant, pour un cylindre ou une sphère long,  $L_c$  serait égal au rayon réel  $ro$ , plutôt que  $ro/2$  ou  $ro/3$ .

### *Le nombre de Fourier*

Le nombre de Fourier

Enfin, nous notons qu'avec  $L_c \equiv V/A_s$ , l'exposant de l'équation 2.19 peut être exprimé comme :

$$\frac{hA_s t}{\rho V c} = \frac{ht}{\rho c L_c} = \frac{hL_c}{k} \frac{k}{\rho c} \frac{t}{L_c^2} = \frac{hL_c}{k} \frac{\alpha t}{L_c^2} \quad (2.23)$$

Où

$$\frac{hA_s t}{\rho V c} = Bi \cdot Fo \quad (2.24)$$

Où

$$Fo \equiv \frac{\alpha t}{L_c^2} \quad (2.25)$$

$Fo$  est le nombre de Fourier. C'est un temps sans dimension, qui, avec le nombre de Biot, caractérise les problèmes de conduction transitoire. En substituant l'équation 2.24 à 2.19, nous obtenons :

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-Bi \cdot Fo) \quad (2.26)$$

# EXEMPLE 2.3



# 1. Comment calculer le temps

## 1.1. EXEMPLE 2.3

Une jonction de thermocouple, qui peut être approximée comme une sphère, doit être utilisée pour la mesure de la température dans un courant de gaz. Le coefficient de convection entre la surface de jonction et le gaz est  $h = 400 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ , et les propriétés thermophysiques de la jonction sont  $k = 20 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ,  $c = 400 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$  et  $\rho = 8500 \text{ kg/m}^3$ . Déterminez le diamètre de jonction nécessaire pour que le thermocouple ait une constante de temps de 1 s. Si la jonction est à  $25^\circ\text{C}$  et est placée dans un flux gazeux à  $200^\circ\text{C}$ , combien de temps faudra-t-il pour que la jonction atteigne  $199^\circ\text{C}$ ?

## 1.2. Solution

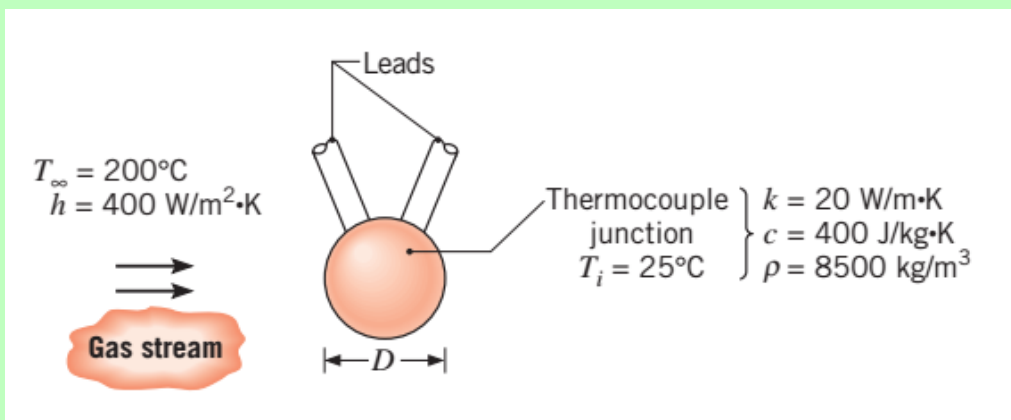
*Connu*

Propriétés thermophysiques de la jonction de thermocouple utilisée pour mesurer la température d'un flux gazeux.

*Trouver*

1. Diamètre de jonction nécessaire pour une constante de temps de 1 s.
2. Temps nécessaire pour atteindre  $199^\circ\text{C}$  dans un flux gazeux à  $200^\circ\text{C}$ .

*Schématique*



*Hypothèses*

1. La température de jonction est uniforme à tout instant.
2. L'échange de rayonnement avec l'environnement est négligeable.
3. Les pertes par conduction à travers les cordons sont négligeables.
4. Propriétés constantes.

## Analyses

1. Le diamètre de la jonction étant inconnu, il n'est pas possible de commencer la solution en déterminant si le critère d'utilisation de la méthode de la capacité localisée, l'équation 2.22, est satisfait. Cependant, une approche raisonnable consiste à utiliser la méthode pour trouver le diamètre et ensuite déterminer si le critère est satisfait. De l'équation ci-dessous et du fait que  $A_s = \pi D^2$  et  $V = \pi D^3/6$  pour une sphère, il s'ensuit que

$$\tau_t = \left( \frac{1}{hA_s} \right) (\rho V c) = R_t C_t$$

$$\tau_t = \frac{1}{h\pi D^2} \times \frac{\rho \pi D^3}{6} c$$

Réorganiser et remplacer les valeurs numériques,

$$D = \frac{6h\tau_t}{\rho c} = \frac{6 \times 400 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times 1 \text{ s}}{8500 \text{ kg/m}^3 \times 400 \text{ J/kg} \cdot \text{K}} = 7.06 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Avec  $L_c = r_o/3$ , il découle alors de l'équation 2.22 que

$$Bi = \frac{h(r_o/3)}{k} = \frac{400 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times 3.53 \times 10^{-4} \text{ m}}{3 \times 20 \text{ W/m} \cdot \text{K}} = 2.35 \times 10^{-3}$$

2. D'après l'équation 2.18, le temps nécessaire pour que la jonction atteigne  $T = 199^\circ \text{C}$  est

$$t = \frac{\rho(\pi D^3/6)c}{h(\pi D^2)} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty} = \frac{\rho D c}{6h} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}$$
$$t = \frac{8500 \text{ kg/m}^3 \times 7.06 \times 10^{-4} \text{ m} \times 400 \text{ J/kg} \cdot \text{K}}{6 \times 400 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}} \ln \frac{25 - 200}{199 - 200}$$
$$t = 5.2 \text{ s} \approx 5\tau_t$$

## Commentaires

Le transfert de chaleur dû à l'échange de rayonnement entre la jonction et l'environnement et à la conduction à travers les conducteurs affecterait la réponse temporelle de la jonction et donnerait en fait une température d'équilibre différente de  $T_\infty$ .



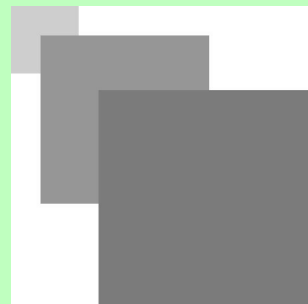
# Chapitre 3. Transfert de chaleur à partir de surfaces étendues (ailettes)

*Chapitre 3. Transfert de chaleur à partir de surfaces étendues (ailettes)*



Dr : Ferhat Mohammed Fouad

# Table des matières



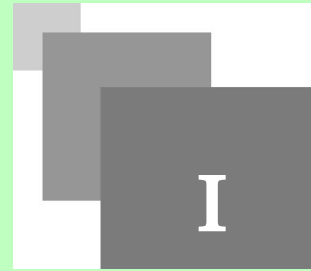
<b>Objectifs</b>	3
<b>I - 3.1 :Définitions</b>	4
1. Surface étendue .....	4
<b>II - 3.2 : Différentes configurations d'ailettes</b>	5
1. Surface nue et Surface à ailettes. ....	5
<b>III - 3.3:La distribution de température le long de l'ailette</b>	7
1. La distribution de température le long de l'ailette .....	7
<b>IV - 3.4 :Ailette à section transversale constante (uniforme)</b>	10
1. Résolution de l'équation 3.8 .....	10
2. le cas A (convection à l'extrémité de l'ailette) .....	11
3. le cas B (extrémité adiabatique de l'ailette) .....	13
4. le cas C (la température est prescrite à l'extrémité des ailettes) .....	14
5. le cas D (La très longue ailette) .....	14
<b>V - EXAMPLE 3.1</b>	16
1. Problème : .....	16
1.1. Solution .....	16
<b>VI - 3.5 : Performance d'une ailette</b>	20
1. 3.5.1 :l'efficacité d'une ailette $\eta_f$ .....	20
2. 3.5.2 :Rendement d'une ailette .....	20

# Objectifs



Nous considérons le cas particulier de la conduction unidimensionnelle en régime permanent pour des surfaces étendues. Dans leur forme la plus courante, ces surfaces sont appelées ailettes et sont utilisées pour améliorer le transfert de chaleur par convection vers un fluide adjacent. En plus de déterminer les distributions de température et les taux de chaleur associés, notre objectif est d'introduire des paramètres de performance qui peuvent être utilisés pour déterminer leur efficacité.

# 3.1 :Définitions



## 1. Surface étendue

Le terme surface étendue est couramment utilisé pour décrire un cas particulier important impliquant un transfert de chaleur par conduction à l'intérieur d'un solide et un transfert de chaleur par convection (et / ou rayonnement) à partir des limites du solide. Jusqu'à présent, nous avons considéré le transfert de chaleur depuis les frontières d'un solide comme étant dans le même sens que le transfert de chaleur par conduction dans le solide.

Considérons une barre qui relie deux parois à des températures différentes et à travers laquelle il y a un écoulement de fluide (Figure 3.1). Avec  $T_1 > T_2$ , les gradients de température dans la direction  $x$  soutiennent le transfert de chaleur par conduction dans la barre.

Cependant, avec  $T_1 > T_2 > T_\infty$ , il y a un transfert de chaleur simultané par convection vers le fluide, causant  $q_x$ , et le gradient de température,  $dT/dx$ , diminue avec l'augmentation de  $x$ .

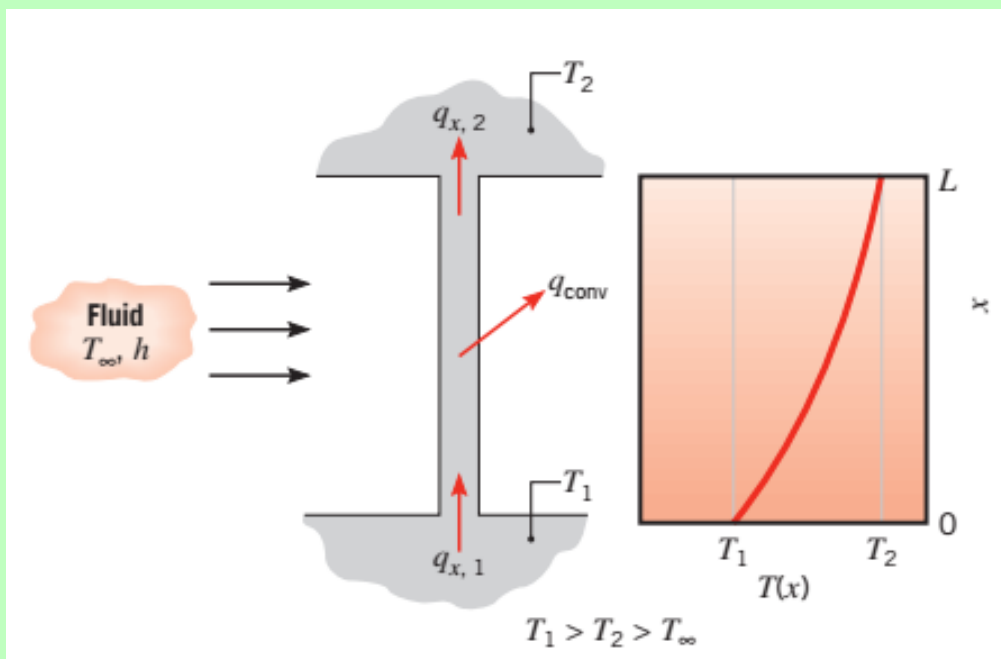
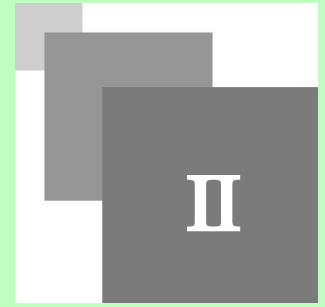


Figure 3.1: Conduction et convection combinées dans un élément structurel.

Bien qu'il existe de nombreuses situations différentes qui impliquent de tels effets combinés de conduction-convection, l'application la plus fréquente est celle dans laquelle une surface étendue est utilisée spécifiquement pour améliorer le transfert de chaleur entre un solide et un fluide adjacent. Une telle surface étendue est appelée une ailette.

## 3.2 : Différentes configurations d'ailettes



### 1. Surface nue et Surface à ailettes.

Considérons la paroi plane de la figure 3.2a. Si  $T_s$  est fixe, il existe deux façons d'augmenter le flux de transfert de chaleur. Le coefficient de convection  $h$  pourrait être augmenté en augmentant la vitesse du fluide, et/ou la température du fluide  $T_\infty$  pourrait être réduite.

Cependant, il existe de nombreuses situations pour lesquelles l'augmentation de  $h$  à la valeur maximale possible est soit insuffisante pour obtenir le flux de transfert thermique souhaité, soit les coûts associés sont prohibitifs. Ces coûts sont liés aux exigences de puissance de la soufflante ou de la pompe nécessaires pour augmenter le  $h$  grâce à un mouvement de fluide accru. De plus, la deuxième option de réduction de  $T_\infty$  n'est souvent pas pratique.

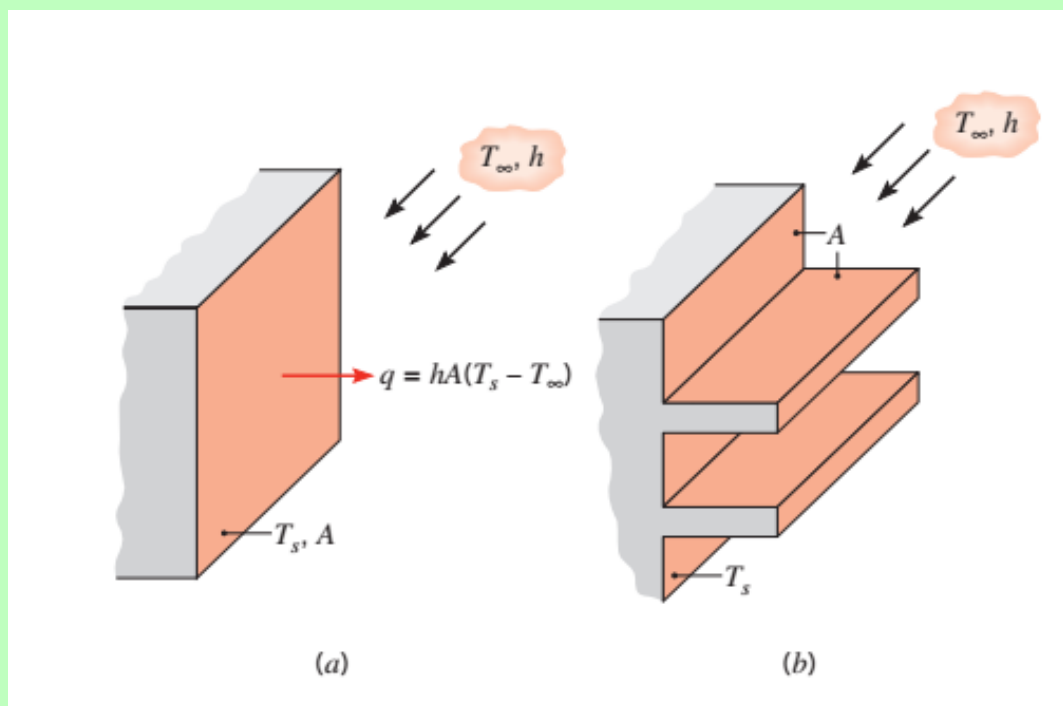


Figure 3.2: Utilisation d'ailettes pour améliorer le transfert de chaleur à partir d'une paroi plane. (a) Surface nue. (b) Surface à ailettes.

En examinant la figure 3.2b, cependant, nous voyons qu'il existe une troisième option. C'est-à-dire que la vitesse de transfert de chaleur peut être augmentée en augmentant la surface à travers laquelle la convection se produit. Cela peut être fait en utilisant des ailettes qui s'étendent du mur dans le fluide environnant.

Considérez également les tubes avec des ailettes attachées utilisées pour favoriser l'échange de chaleur entre l'air et le fluide de travail d'un climatiseur. Deux agencements courants de tubes à ailettes sont illustrés à la figure 3.3.

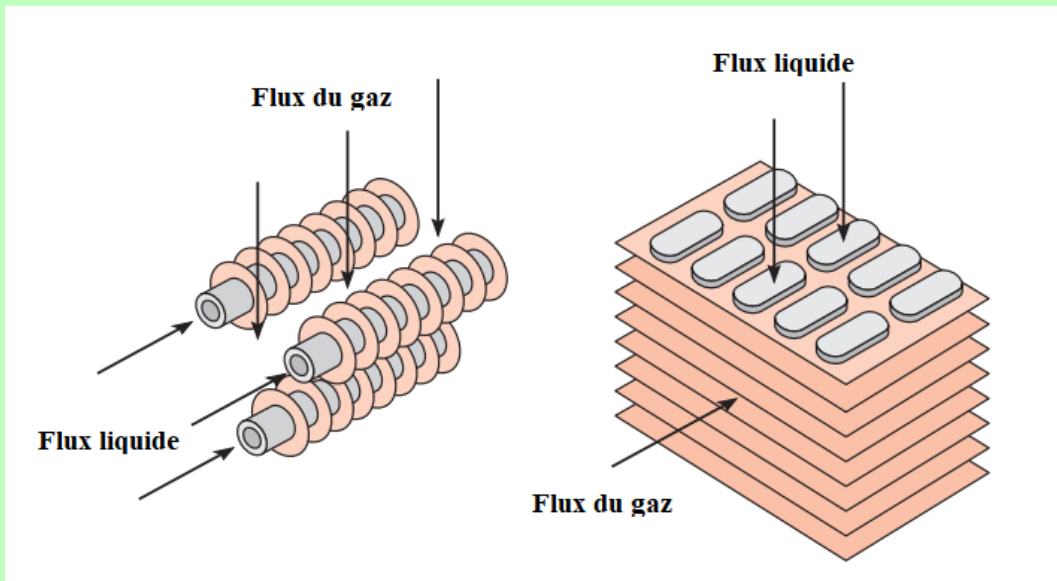


Figure 3.3:Schéma des échangeurs de chaleur à tubes à ailettes typiques.

Différentes configurations d'ailettes sont illustrées à la figure 3.4.

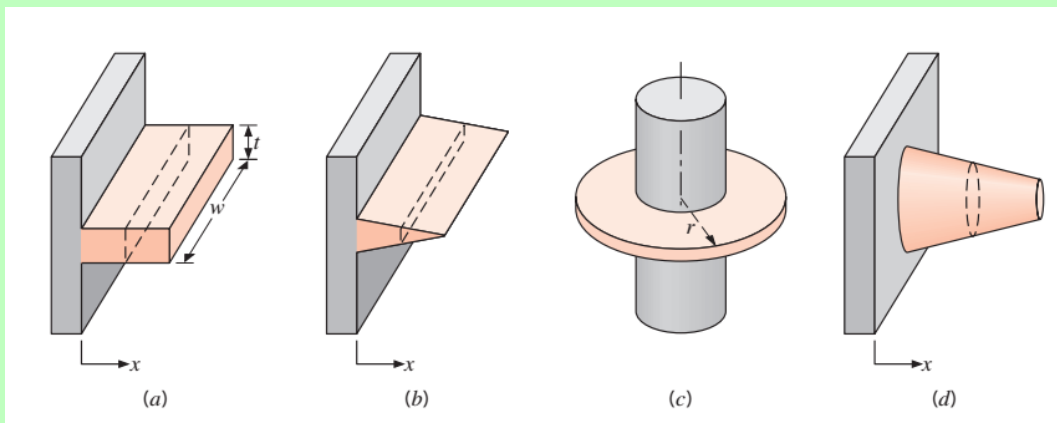


Figure 3.4:Différents types d'ailettes: (a) ailette droite à section constante, (b) ailette droite à section variable, (c) ailette annulaire, (d) ailette en forme d'aiguille à section variable.

## 3.3:La distribution de température le long de l'ailette



### 1. La distribution de température le long de l'ailette

Pour déterminer le flux de transfert de chaleur associé à une ailette, il faut d'abord obtenir la distribution de température le long de l'ailette.

Comme nous l'avons fait pour les systèmes précédents, nous commençons par effectuer un bilan énergétique sur un élément différentiel approprié.

Cependant, en pratique, l'ailette est mince et les variations de température dans la direction transversale à l'intérieur de l'ailette sont faibles par rapport à la différence de température entre l'ailette et l'environnement. Par conséquent, nous pouvons supposer que la température est uniforme sur toute l'épaisseur des ailettes, c'est-à-dire qu'elle n'est qu'une fonction de  $x$ . Nous considérerons les conditions de régime permanent et supposerons également que la conductivité thermique est constante, que le rayonnement de la surface est négligeable, que les effets de génération de chaleur sont absents et que le coefficient de transfert de chaleur par convection  $h$  est uniforme sur la surface.

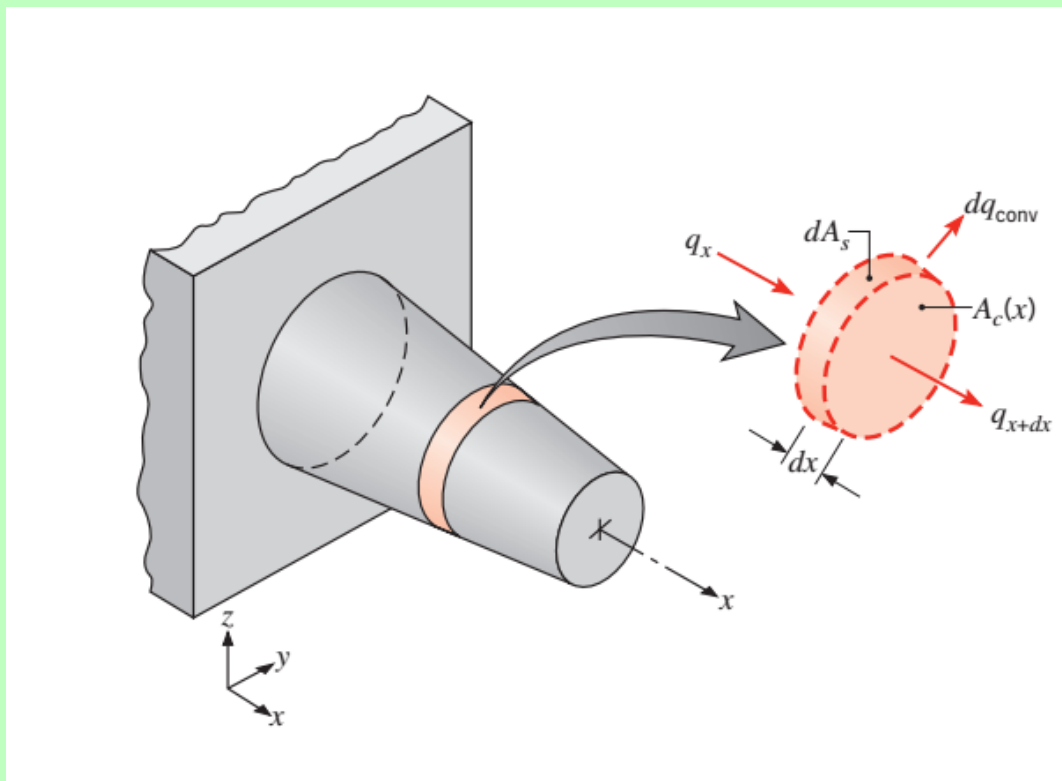


Figure 3.5: Bilan énergétique pour une surface étendue.

En appliquant l'équation 3.1 de conservation d'énergie à l'élément différentiel de la figure 3.5, nous obtenons :

$$\dot{E}_{st} \equiv \frac{dE_{st}}{dt} = \dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g \quad (3.1)$$

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{conv} \quad (3.2)$$

De la loi de Fourier, nous savons que :

$$q_x = -kA_c \frac{dT}{dx} \quad (3.3)$$

Où  $A_c$  est l'aire de la section transversale, qui peut varier avec  $x$ . Puisque le flux de chaleur de conduction à  $x + dx$  peut être exprimé comme :

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx \quad (3.4)$$

il s'ensuit que

$$q_{x+dx} = -kA_c \frac{dT}{dx} - k \frac{d}{dx} \left( A_c \frac{dT}{dx} \right) dx \quad (3.5)$$

Le flux de transfert de chaleur par convection peut être exprimé comme

$$dq_{conv} = h dA_s (T - T_\infty) \quad (3.6)$$

Où  $dA_s$  est la surface de l'élément différentiel. En remplaçant les équations de flux précédentes dans le bilan énergétique, l'équation 3.2, nous obtenons :

$$\frac{d}{dx} \left( A_c \frac{dT}{dx} \right) - \frac{h}{k} \frac{dA_s}{dx} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.7)$$

ou



$$\frac{d^2T}{dx^2} + \left( \frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \left( \frac{1}{A_c} \frac{h}{k} \frac{dA_s}{dx} \right) (T - T_\infty) = 0 \quad (3.8)$$

Ce résultat fournit une forme générale de l'équation d'énergie pour une surface étendue. Sa solution pour les conditions aux limites appropriées fournit la distribution de température, qui peut être utilisée avec l'équation 3.3 pour calculer le flux de conduction à n'importe quel  $x$ .

# 3.4 :Ailette à section transversale constante (uniforme)

IV

## 1. Résolution de l'équation 3.8

Pour résoudre l'équation 3.8, il est nécessaire d'être plus précis sur la géométrie. Nous commençons par le cas le plus simple des ailettes rectangulaires droites et à barres de section transversale uniforme (figure 3.6).

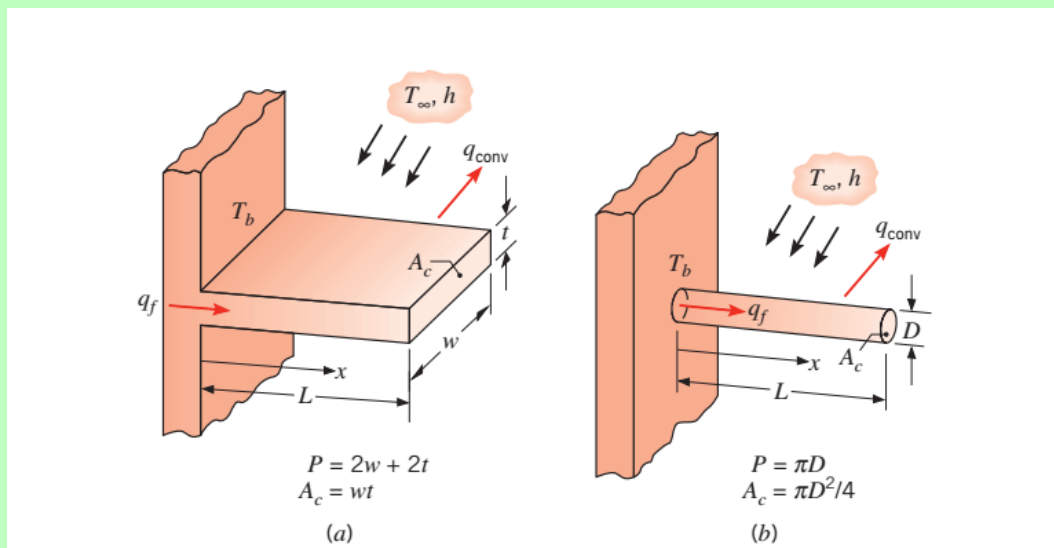


Figure 3.6: Ailette droite à section constante, (b) ailette en forme d'aiguille à section constante.

Chaque ailette est fixée à une surface de base de température  $T(0) = T_b$  et se prolonge dans un fluide de température  $T_\infty$ .

Pour les ailettes prescrites,  $A_c$  est une constante et  $A_s = P \cdot x$ , où  $A_s$  est la surface mesurée de la base à  $x$  et  $P$  est le périmètre des ailettes. En conséquence, avec  $dA_c / dx = 0$  et  $dA_s/dx = P$ , l'équation 3.8 se réduit

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_c} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.9)$$

Pour simplifier la forme de cette équation, nous transformons la variable dépendante en définissant un excès de température  $\theta$  comme

$$\theta(x) \equiv T(x) - T_{\infty} \quad (3.10)$$

Où, puisque  $T_{\infty}$  est une constante,  $d\theta/dx = dT/dx$ . En substituant l'équation 3.10 à l'équation 3.9, nous obtenons alors

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad (3.11)$$

Où

$$m^2 \equiv \frac{hP}{kA_c} \quad (3.12)$$

L'équation 3.11 est une équation différentielle linéaire, homogène, du second ordre à coefficients constants. Sa solution générale est de la forme :

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (3.13)$$

Par substitution, on peut facilement vérifier que l'équation 3.13 est bien une solution de l'équation 3.11.

Pour évaluer les constantes  $C_1$  et  $C_2$  de l'équation 3.13, il est nécessaire de spécifier les conditions aux limites appropriées. Une telle condition peut être spécifiée en termes de température à la base de l'ailette ( $x = 0$ ).

$$\theta(0) = T_b - T_{\infty} \equiv \theta_b \quad (3.14)$$

La deuxième condition, spécifiée à l'extrémité de l'ailette ( $x=L$ ), peut correspondre à l'une des quatre situations physiques différentes.

## 2. le cas A (convection à l'extrémité de l'ailette)

La première condition, le cas A, considère le transfert de chaleur par convection à partir de la pointe de l'ailette. En appliquant un bilan énergétique à une surface de contrôle autour de cette pointe (Figure 3.7), nous obtenons :

$$hA_c[T(L) - T_{\infty}] = -kA_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L}$$

$$h\theta(L) = -k \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} \quad (3.15)$$

Autrement dit, le flux à laquelle l'énergie est transférée au fluide par convection à partir de la pointe (extrémité) doit être égal au flux à laquelle l'énergie atteint la pointe (extrémité) par conduction à travers l'ailette. En substituant l'équation 3.13 aux équations 3.14 et 3.15, nous obtenons, respectivement,

$$\theta_b = C_1 + C_2 \quad (3.16)$$

et

$$h(C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}) = km(C_2 e^{-mL} - C_1 e^{mL})$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + (h/mk) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \quad (3.17)$$

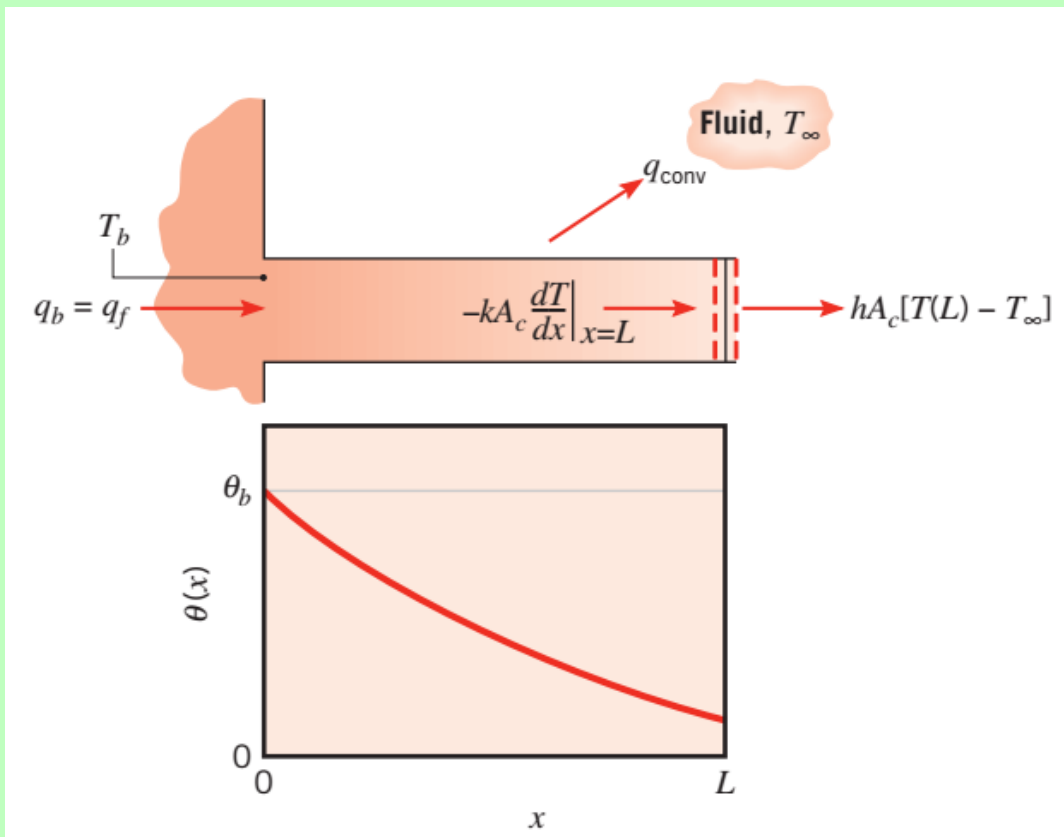


Figure 3.7: Conduction et convection dans une ailette de section uniforme.

La forme de cette distribution de température est représentée schématiquement sur la figure 3.7. Notez que l'amplitude du gradient de température diminue avec l'augmentation de  $x$ . Cette tendance est une conséquence de la réduction du transfert de chaleur par conduction  $q_x(x)$  avec l'augmentation de  $x$  due aux pertes par convection continue de la surface des ailettes.

D'après la figure 3.7, il est évident que le flux de transfert de chaleur des ailettes  $q_f$  peut être évalué de deux manières différentes, qui impliquent toutes deux l'utilisation de la distribution de température. La procédure la plus simple, et celle que nous utiliserons, consiste à appliquer la loi de Fourier à la base des ailettes.

C'est,

$$q_f = q_b = -kA_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -kA_c \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} \quad (3.18)$$

Par conséquent, connaissant la distribution de température,  $\theta(x)$ ,  $q_f$  peut être évalué, donnant :

$$q_f = \sqrt{hPkA_c} \theta_b \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \quad (3.19)$$

Cependant, la conservation de l'énergie dicte que le flux à laquelle la chaleur est transférée par convection à partir de l'ailette doit être égale au flux à laquelle elle est conduite à travers la base de l'ailette.

En conséquence, la formulation alternative pour  $q_f$  est

$$q_f = \int_{A_f} h[T(x) - T_\infty] dA_s$$

$$q_f = \int_{A_f} h\theta(x) dA_s \quad (3.20)$$

Où  $A_f$  est la surface totale, y compris la pointe (extrémité), de l'ailette. La substitution de l'équation 3.17 dans l'équation 3.20 donnerait l'équation 3.19.

### 3. le cas B (extrémité adiabatique de l'ailette)

La deuxième condition d'extrémité, le cas B, correspond à l'hypothèse que la perte de chaleur par convection de l'extrémité de l'ailette est négligeable, auquel cas la pointe peut être traitée comme adiabatique et

le cas C (la température est prescrite à l'extrémité des ailettes)

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.21)$$

En substituant l'équation 3.13 et en divisant par m, on obtient alors :

$$C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL} = 0$$

En utilisant cette expression avec l'équation 3.16 pour résoudre C1 et C2 et en remplaçant les résultats dans l'équation 3.13, nous obtenons :

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \quad (3.22)$$

En utilisant cette distribution de température avec l'équation 3.18, le taux de transfert de chaleur des ailettes est alors

$$q_f = \sqrt{hPkA_c} \theta_b \tanh mL \quad (3.23)$$

#### 4. le cas C (la température est prescrite à l'extrémité des ailettes)

De la même manière, nous pouvons obtenir la distribution de la température des ailettes et le taux de transfert de chaleur pour le cas C, où la température est prescrite à l'extrémité des ailettes. Autrement dit, la deuxième condition aux limites est  $\theta(L) = \theta_L$ , et les expressions résultantes sont de la forme :

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{(\theta_L/\theta_b) \sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL} \quad (3.24)$$

$$q_f = \sqrt{hPkA_c} \theta_b \frac{\cosh mL - \theta_L/\theta_b}{\sinh mL} \quad (3.25)$$

#### 5. le cas D (La très longue ailette)

La très longue ailette, Cas D, est une extension intéressante de ces résultats. En particulier, comme  $L \rightarrow \infty$ ,  $\theta_L \rightarrow 0$  et on vérifie facilement que

$$\frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx} \quad (3.26)$$

$$q_f = \sqrt{hPkA_c}\theta_b \quad (3.27)$$

\* \*

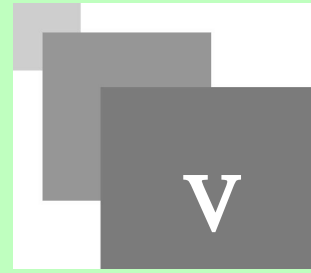
\*

Les résultats ci-dessus sont résumés dans le tableau 3.1.

Case	Tip Condition ( $x = L$ )	Temperature Distribution $\theta/\theta_b$	Fin Heat Transfer Rate $q_f$
A	Convection heat transfer: $h\theta(L) = -k d\theta/dx _{x=L}$	$\frac{\cosh m(L-x) + (h/mk) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$	$M \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$
B	Adiabatic: $d\theta/dx _{x=L} = 0$	$\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$	$M \tanh mL$
C	Prescribed temperature: $\theta(L) = \theta_L$	$\frac{(\theta_L/\theta_b) \sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL}$	$M \frac{(\cosh mL - \theta_L/\theta_b)}{\sinh mL}$
D	Infinite fin ( $L \rightarrow \infty$ ): $\theta(L) = 0$	$e^{-mx}$	$M$

$\theta \equiv T - T_\infty$        $m^2 \equiv hP/kA_c$   
 $\theta_b = \theta(0) = T_b - T_\infty$        $M \equiv \sqrt{hPkA_c}\theta_b$

# EXAMPLE 3.1



## 1. Problème :

Une tige très longue de 5 mm de diamètre a une extrémité maintenue à 100 °C. La surface de la tige est exposée à l'air ambiant à 25 °C avec un coefficient de transfert de chaleur par convection de 100 W/m<sup>2</sup>.K.

1. Déterminez les distributions de température le long des tiges construites à partir de cuivre pur, d'alliage d'aluminium 2024 et d'acier inoxydable de type AISI 316. Quelles sont les pertes de chaleur correspondantes des tiges?
2. Estimez la longueur des tiges pour que l'hypothèse d'une longueur infinie donne une estimation précise de la perte de chaleur.

### *Propriétés*

Cuivre:  $k = 398 \text{ W / m.K}$ , Aluminium 2024:  $k = 180 \text{ W / m .K}$ , Acier inoxydable, AISI 316:  $k = 14 \text{ W / m .K}$ .

## 1.1. Solution

### *Connus*

Une longue tige circulaire exposée à l'air ambiant.

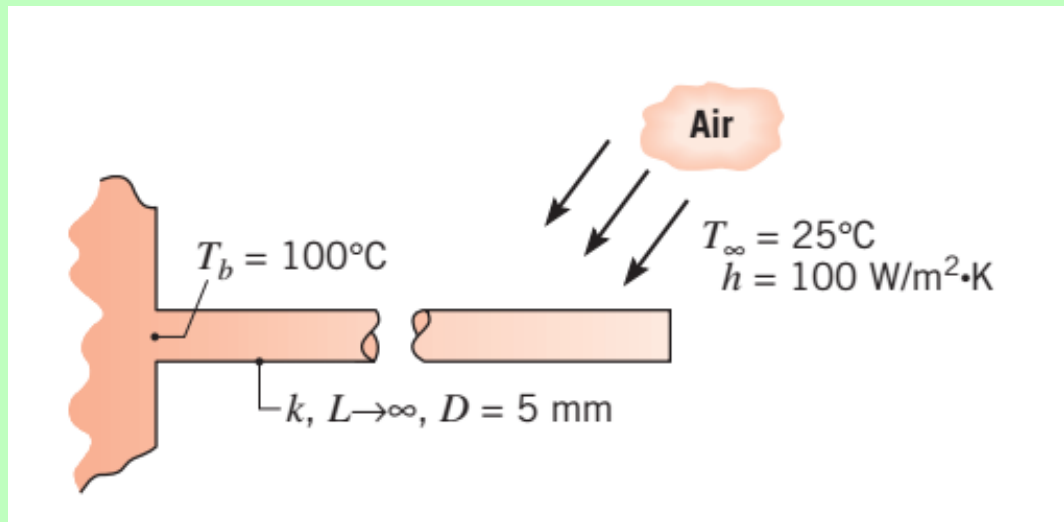
### *Trouver*

1. Distribution de la température et perte de chaleur lorsque la tige est fabriquée à partir de cuivre, d'un alliage d'aluminium ou d'acier inoxydable.
2. Quelle doit être la longueur des tiges pour prendre une longueur infinie.

### *Schéma*

Schématique





### *Hypothèses*

1. Conditions à l'état permanent.
2. Conduction unidimensionnelle le long de la tige.
3. Propriétés constantes.
4. Échange de rayonnement négligeable avec l'environnement.
5. Coefficient de transfert de chaleur uniforme.
6. Tige infiniment longue.

### *Analyses*

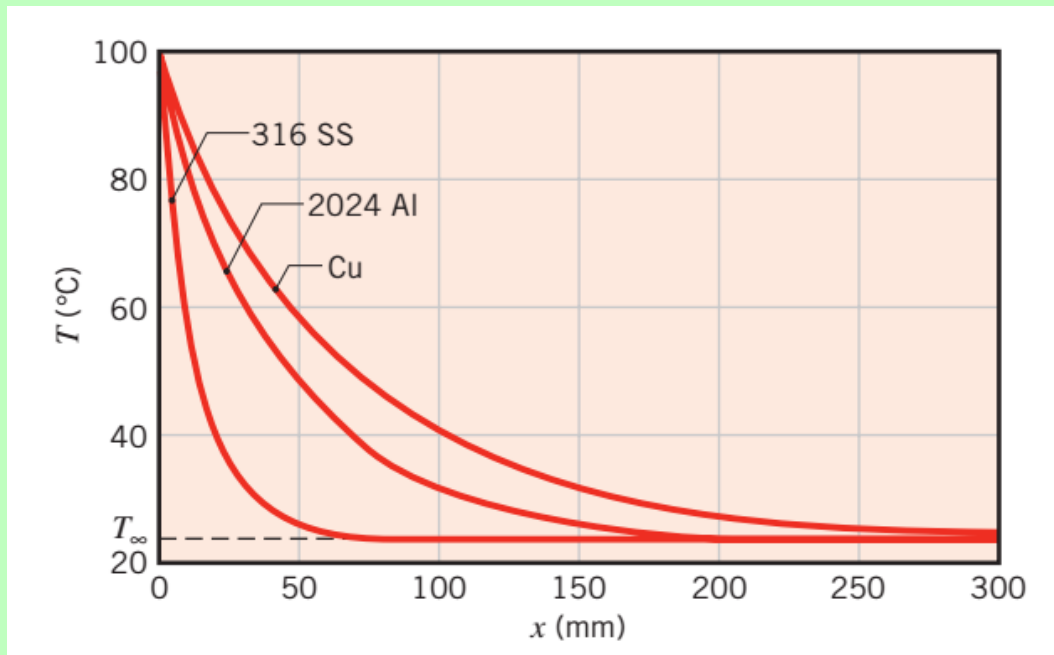
1. Sous réserve de l'hypothèse d'une ailette infiniment longue, les distributions de température sont déterminées à partir de l'équation 3.26, qui peut être exprimée comme

$$T = T_\infty + (T_b - T_\infty)e^{-mx}$$

Où

$$m = (hP/kA_c)^{1/2} = (4h/kD)^{1/2}$$

En remplaçant  $h$  et  $D$ , ainsi que pour les conductivités thermiques du cuivre, de l'alliage d'aluminium et de l'acier inoxydable, respectivement, les valeurs de  $m$  sont 14,2, 21,2 et 75,6  $\text{m}^{-1}$ . Les distributions de température peuvent ensuite être calculées et tracées comme suit:



A partir de ces distributions, il est évident qu'il y a peu de transfert de chaleur supplémentaire associé à l'extension de la longueur de la tige bien au-delà de 50, 200 et 300 mm, respectivement, pour l'acier inoxydable, l'alliage d'aluminium et le cuivre.

D'après l'équation 3.27, la perte de chaleur est

$$q_f = \sqrt{hPkA_c} \theta_b$$

Par conséquent pour le cuivre,

$$\begin{aligned}
 q_f &= \left[ 100 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times \pi \times 0.005 \text{ m} \right. \\
 &\quad \left. \times 398 \text{ W/m} \cdot \text{K} \times \frac{\pi}{4} (0.005 \text{ m})^2 \right]^{1/2} (100 - 25)^\circ\text{C} \\
 &= 8.3 \text{ W}
 \end{aligned}$$

De même, pour l'alliage d'aluminium et l'acier inoxydable, respectivement, les taux de chaleur sont  $q_f = 5,6 \text{ W}$  et  $1,6 \text{ W}$ .

2. Puisqu'il n'y a pas de perte de chaleur de la pointe d'une tige infiniment longue, une estimation de la validité de cette approximation peut être faite en comparant les équations 3.27 et 3.23. Pour une approximation satisfaisante, les expressions fournissent des résultats équivalents si  $\tanh(mL) = 0,99$  ou  $mL = 2,65$ . Par conséquent, une tige peut être supposée être infiniment longue si

$$L \geq L_{\infty} \equiv \frac{2.65}{m} = 2.65 \left( \frac{kA_c}{hP} \right)^{1/2}$$

Pour le cuivre,

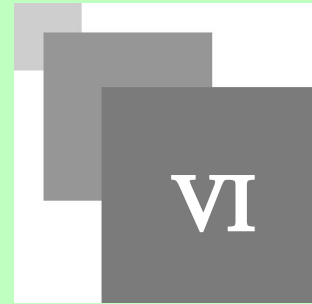
$$L_{\infty} = 2.65 \left[ \frac{398 \text{ W/m} \cdot \text{K} \times (\pi/4)(0.005 \text{ m})^2}{100 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times \pi(0.005 \text{ m})} \right]^{1/2} = 0.19 \text{ m}$$

Les résultats pour l'alliage d'aluminium et l'acier inoxydable sont  $L_{\infty} = 0,13 \text{ m}$  et  $L_{\infty} = 0,04 \text{ m}$ , respectivement.

### *Commentaires*

1. Les résultats ci-dessus suggèrent que le taux de transfert de chaleur des ailettes peut être prédit avec précision à partir de l'approximation infinie des ailettes si  $mL \geq 2,65$ . Cependant, si l'approximation infinie des nageoires est de prédire avec précision la distribution de température  $T(x)$ , une plus grande valeur de  $mL$  serait nécessaire. Cette valeur peut être déduite de l'équation 3.26 et de l'exigence que la température de la pointe soit très proche de la température du fluide. Par conséquent, si nous exigeons que  $\theta(L) / \theta_b = \exp(-mL) < 0,01$ , il s'ensuit que  $mL > 4,6$ , auquel cas  $L = 0,33, 0,23$  et  $0,07 \text{ m}$  pour le cuivre, l'alliage d'aluminium et l'acier inoxydable, respectivement. Ces résultats sont cohérents avec les distributions tracées dans la partie 1.

# 3.5 : Performance d'une ailette



## 1. 3.5.1 :l'efficacité d'une ailette $\epsilon_f$

Rappelons que les ailettes sont utilisées pour augmenter le transfert de chaleur d'une surface en augmentant la surface efficace. Cependant, l'ailette elle-même représente une résistance de conduction au transfert de chaleur depuis la surface d'origine. Pour cette raison, il n'y a aucune garantie que le flux de transfert de chaleur sera augmenté par l'utilisation d'ailettes. Une évaluation de cette question peut être faite en évaluant l'efficacité des ailettes  $\epsilon_f$ . Il est défini comme le rapport entre le flux de transfert de chaleur de l'ailette et le flux de transfert de chaleur qui existerait sans l'ailette. Par conséquent

$$\epsilon_f = \frac{q_f}{hA_{c,b}\theta_b} \quad (3.28)$$

Où  $A_{c,b}$  est la section transversale des ailettes à la base. Dans toute conception rationnelle, la valeur de  $\epsilon_f$  doit être aussi grande que possible et, en général, l'utilisation d' ailettes peut rarement être justifiée à moins que  $\epsilon_f \geq 2$ .

## 2. 3.5.2 :Rendement d'une ailette

Une autre mesure de la performance thermique des ailettes est fournie par le rendement des ailettes  $\eta_f$ . Le potentiel maximum d'entraînement pour la convection est la différence de température entre la base ( $x = 0$ ) et le fluide,  $\theta_b = T_b - T_\infty$ . Par conséquent, la vitesse maximale à laquelle une ailette pourrait dissiper de l'énergie est la vitesse qui existerait si toute la surface de l'ailette était à la température de base.

Cependant, comme toute ailette est caractérisée par une résistance de conduction finie, un gradient de température doit exister le long de l'ailette et la condition précédente est une idéalisation. Une définition logique du rendement des ailettes est donc

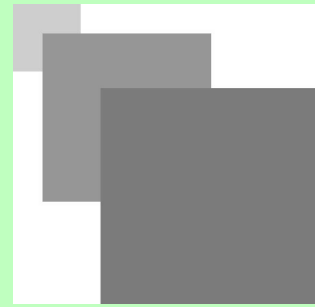
$$\eta_f \equiv \frac{q_f}{q_{\max}} = \frac{q_f}{hA_f\theta_b} \quad (3.29)$$

# Chap. 4. Convection Thermique

*Chap. 4. Convection Thermique*



# Table des matières



<b>Objectifs</b>	3
<b>Introduction</b>	4
<b>I - 4.1 Généralités-Définitions</b>	5
1. Convection naturelle (ou libre) et forcée .....	5
<b>II -</b>	
<b>4.2 Coefficients d'échange par convection 6.2 Local and Average Convection Coefficients</b>	
<b>III - Nombres adimensionnels</b>	6
1. Le nombre de Nusselt .....	6
2. Le nombre de Prandtl .....	6
3. Le nombre de Reynolds .....	6
4. Le nombre de Grashof .....	7
<b>IV - Corrélations empiriques</b>	8
1. Corrélations empiriques en convection libre .....	8
2. Corrélations empiriques en convection forcée .....	8

# Objectifs



Nous commençons ce chapitre par une description physique générale du mécanisme de convection. Nous discutons ensuite de la vitesse et des couches limites thermiques, ainsi que des écoulements laminaires et turbulents. Nous poursuivons la discussion sur les nombres de Reynolds, Prandtl et Nusselt sans dimension, et leur signification physique.

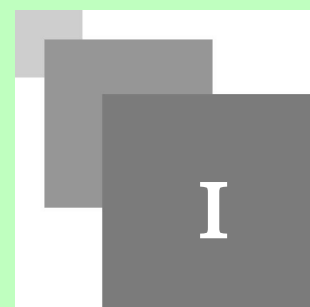
# Introduction



Jusqu'à présent, nous avons considéré la conduction, qui est le mécanisme de transfert de chaleur à travers un solide ou un fluide au repos. Nous considérons maintenant la convection, qui est le mécanisme de transfert de chaleur à travers un fluide en présence d'un mouvement de fluide.



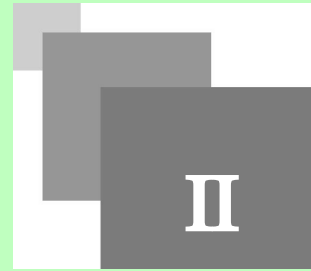
# 4.1 Généralités- Définitions



## 1. Convection naturelle (ou libre) et forcée

La convection est classée comme convection naturelle (ou libre) et forcée, selon la façon dont le mouvement du fluide est initié. En convection forcée, le fluide est forcé de s'écouler sur une surface ou dans une canalisation par des moyens externes tels qu'une pompe ou un ventilateur. En convection naturelle, tout mouvement de fluide est provoqué par des moyens naturels tels que l'effet de flottabilité, qui se manifeste par la montée d'un fluide plus chaud et la chute du fluide plus froid. La convection est également classée comme externe et interne, selon que le fluide est forcé de s'écouler sur une surface ou dans un tuyau.

# Nombres adimensionnels



## 1. Le nombre de Nusselt

C'est un coefficient adimensionnel d'échange de chaleur, il représente le rapport du transfert de chaleur par convection à celui par conduction dans une couche de fluide d'épaisseur ( $L$ ). La forme

adimensionnelle appropriée de ce paramètre ( $h$ ) est le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) défini par:

$$Nu = \frac{h_c \cdot L}{k_f}$$

A partir de la valeur locale de Nusselt, on peut premièrement, obtenir la valeur locale ( $h_c$ ) et ensuite, la valeur moyenne du coefficient du transfert de chaleur par convection ( $\bar{h}_c$ ) et une valeur moyenne du nombre de Nusselt ( $Nu_L$ ).

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_c \cdot L}{k_f} = f(Re_L, Pr)$$

## 2. Le nombre de Prandtl

Il représente le rapport de la diffusivité moléculaire due à la quantité de mouvement par la diffusivité thermique, il est donné par:

$$Pr = \frac{c_p \cdot \mu}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$$

## 3. Le nombre de Reynolds

Il représente le rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses, il est donné par:

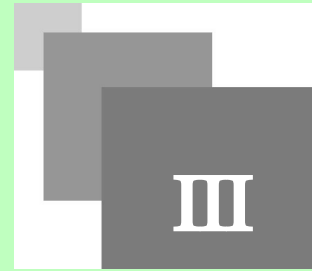
$$Re_L = \frac{U_0 \cdot L}{\nu}$$

#### 4. Le nombre de Grashof

Il représente le rapport des forces de flottabilité aux forces de viscosité, il est donné par:

$$Gr_L = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_s - T_0) \cdot L^3}{\nu^2}$$

# Corrélations empiriques



## 1. Corrélations empiriques en convection libre

Les résultats expérimentaux relatifs au transfert de chaleur par convection naturelle, peuvent être corrélés par des expressions de type:  $Nu = \phi(Gr) \cdot \psi(Pr) = C \cdot (Gr \cdot Pr)^m$ . A titre d'exemples, on peut citer:

1. Plaques et cylindres verticales:
  - Pour  $10^4 < (Gr.Pr) < 10^9 \Rightarrow Nu = 0,59 \cdot (Gr.Pr)^{0,25}$ ;
  - Pour  $10^9 < (Gr.Pr) < 10^{13} \Rightarrow Nu = 0,021 \cdot (Gr.Pr)^{0,40}$
2. Cylindres horizontaux:
  - Pour  $10^{-2} < (Gr.Pr) < 10^2 \Rightarrow Nu = 1,02 \cdot (Gr.Pr)^{0,148}$ ;
  - Pour  $10^2 < (Gr.Pr) < 10^4 \Rightarrow Nu = 0,85 \cdot (Gr.Pr)^{0,188}$
3. Sphères de diamètre (D):
  - Pour  $1 < (Gr < 10^5) \Rightarrow \overline{Nu}_D = 2 + 0,392 \cdot (Gr_D)^{0,25}$

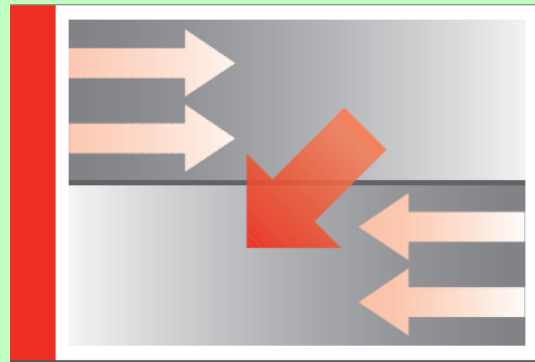
## 2. Corrélations empiriques en convection forcée

1. Ecoulement sur un plan
  - Ecoulement turbulent:
 
$$\overline{Nu}_L = 0,035 \cdot Re_L^{0,8} \cdot Pr^{1/3}, \text{ pour } Re > 5 \cdot 10^5 \text{ et } Pr \geq 0,5$$
  - Ecoulement laminaire:
 
$$\overline{Nu}_L = 0,628 \cdot Re_L^{0,5} \cdot Pr^{1/3}, \text{ pour } Re < 5 \cdot 10^5 \text{ et } 0,5 \leq Pr \leq 10$$
2. Conduits et tubes
 
$$\overline{Nu}_D = 0,023 \cdot Re_D^{0,8} \cdot Pr^n, \text{ pour } 0,5 < Pr < 120 ; 6000 < Re_D < 10^7 \text{ et } (L/D) > 60$$

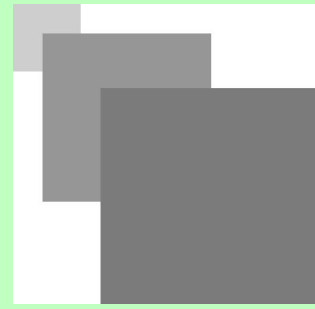
n=0,4 en cas de chauffage et n=0,3 en cas de refroidissement.
3. Conduits non circulaire
 
$$\overline{Nu}_{DH} = \overline{Nu}_c [1 + \{0,8 \cdot (D_i/D_0)^{-0,16}\}^{15}]^{1/15}$$

# Chap. 5. Description des appareils d'échange de chaleur sans changement de Phase

*Chap. 5. Description des appareils d'échange de chaleur sans changement de Phase*



# Table des matières



<b>Objectifs</b>	3
<b>Introduction</b>	4
<b>I - 5.1 Théorie des échangeurs de chaleur</b>	5
1. 5.1.1 Principe général .....	5
2. 5.1.2 Types d'échangeurs de chaleur .....	6
2.1. A : <i>Échangeur de chaleur à double tube</i> .....	6
2.2. B : <i>Échangeur de chaleur compact (à plaques)</i> .....	6
2.3. C : <i>Échangeurs Tubes/Calandre (à faisceaux complexes)</i> .....	7

# Objectifs



Ce chapitre de la matière, Échangeurs de chaleur et de matière, est consacré à la théorie des échangeurs de chaleur où le fluide caloporteur ne subit aucun changement de phase.

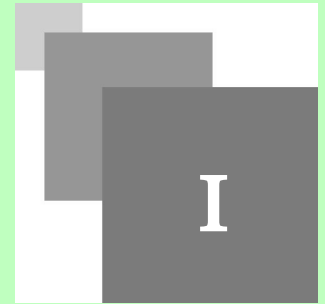
# Introduction



Le processus d'échange de chaleur entre deux fluides qui sont à des températures différentes et séparés par une paroi solide se produit dans de nombreuses applications d'ingénierie. Le dispositif utilisé pour mettre en œuvre cet échange est appelé *un échangeur de chaleur*, et des applications spécifiques peuvent être trouvées dans le chauffage et la climatisation des locaux, la production d'énergie, la récupération de chaleur résiduelle et le traitement chimique.



# 5.1 Théorie des échangeurs de chaleur



## 1. 5.1.1 Principe général

Le principe est de faire circuler deux fluides à travers des conduits qui les mettent en contact thermique. Ces fluides sont mis en contact thermique à travers une paroi métallique ce qui favorise les échanges de chaleur. En général, le fluide chaud cède de la chaleur au fluide froid.

Le principal problème consiste à définir une surface d'échange suffisante entre les deux fluides pour transférer la quantité de chaleur nécessaire dans une configuration donnée. La quantité de chaleur transférée ne dépend pas seulement de la surface d'échange entre les deux fluides mais aussi de nombreux autres paramètres.

Les flux de chaleurs transférées dépendent aussi :

- des températures d'entrée,
- des caractéristiques thermiques des fluides (chaleurs spécifiques, conductivité thermique),
- des coefficients d'échange par convection.

## 2. 5.1.2 Types d'échangeurs de chaleur

### 2.1. A : Échangeur de chaleur à double tube

Le type d'échangeur de chaleur le plus simple se compose de deux tubes concentriques de diamètres différents, comme illustré à la Fig. 5-1, appelés *échangeur de chaleur à double tube*. Un fluide dans un échangeur de chaleur à double tuyau s'écoule à travers le plus petit tube tandis que l'autre fluide s'écoule à travers l'espace annulaire entre les deux tubes.

Deux types de disposition d'écoulement sont possibles dans un échangeur de chaleur à double tube: en *écoulement parallèle*, les fluides chauds et froids entrent dans l'échangeur de chaleur par la même extrémité et se déplacent dans le même sens.

En *contre-courant*, par contre, les fluides chaud et froid pénètrent dans l'échangeur de chaleur par des extrémités opposées et s'écoulent dans des sens opposés.

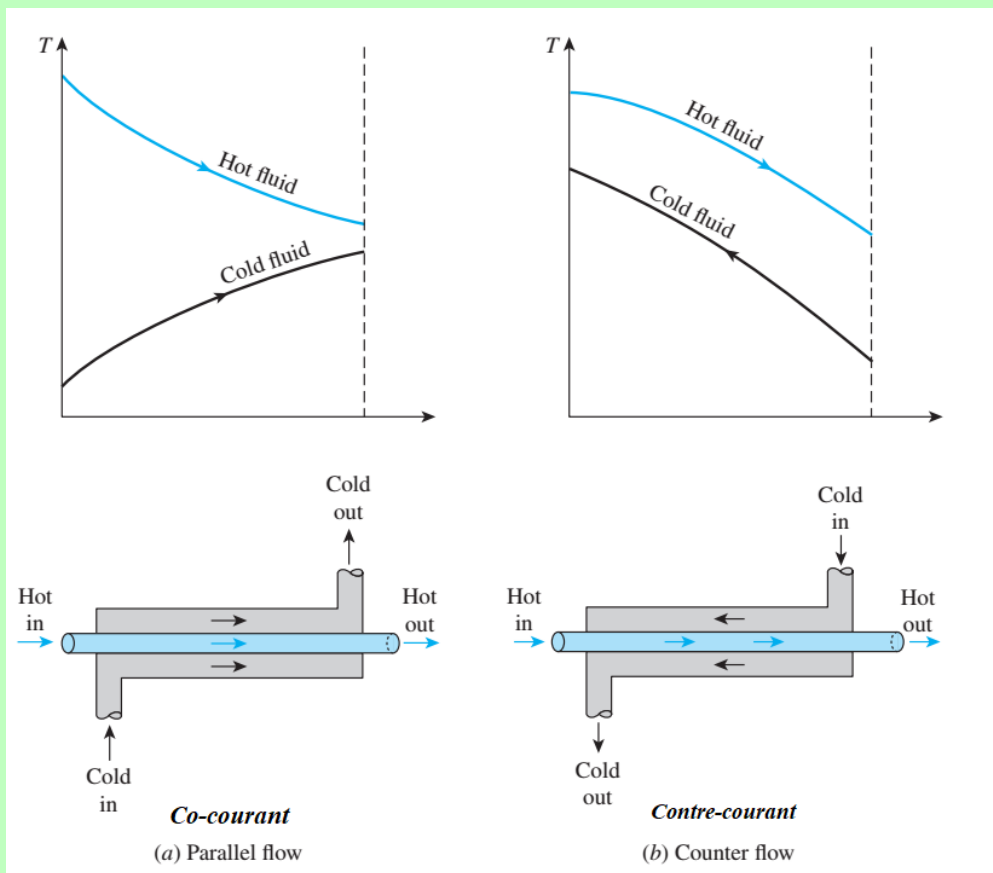


Figure 5.1 : Différents régimes d'écoulement et profils de température associés dans un échangeur de chaleur à double tube.

### 2.2. B : Échangeur de chaleur compact (à plaques)

Un autre type d'échangeur de chaleur, qui est spécifiquement conçu pour réaliser une grande surface de transfert de chaleur par unité de volume, est l'*échangeur de chaleur compact*.

Le rapport de la surface de transfert de chaleur d'un échangeur de chaleur à son volume est appelé densité de surface  $\beta$ . Un échangeur de chaleur avec  $\beta > 700 \text{ m}^2/\text{m}^3$  (ou  $200 \text{ ft}^2 / \text{ft}^3$ ) sont classés comme étant compacts.

Des exemples d'échangeurs de chaleur compacts sont les radiateurs de voiture ( $\beta \approx 1000 \text{ m}^2/\text{m}^3$ ), les échangeurs de chaleur à turbine à gaz en vitrocéramique ( $\beta \approx 6000 \text{ m}^2/\text{m}^3$ ), le régénérateur d'un moteur Stirling ( $\beta \approx 15000 \text{ m}^2/\text{m}^3$ ) et le poumon humain ( $\beta \approx 20000 \text{ m}^2/\text{m}^3$ ).

Les passages d'écoulement dans ces échangeurs de chaleur compacts sont généralement petits et l'écoulement peut être considéré comme laminaire.

Dans les échangeurs de chaleur compacts, les deux fluides se déplacent généralement perpendiculairement l'un à l'autre, et une telle configuration d'écoulement est appelée écoulement croisé. L'écoulement croisé est en outre classé en *fluide mixé et non mixé*, en fonction de la configuration d'écoulement, comme illustré à la Fig. 5-2.

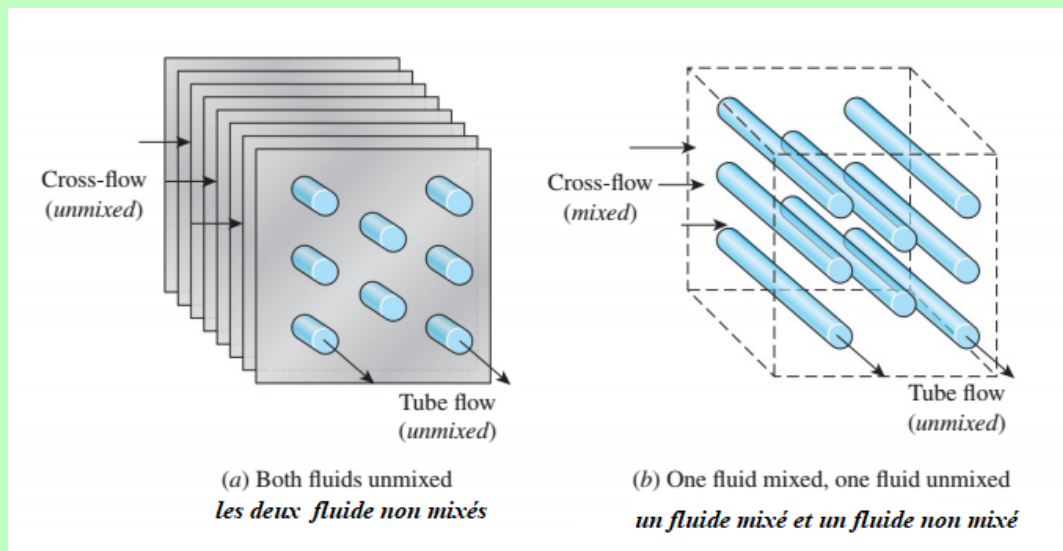


Figure 5.2 : Différentes configurations de flux dans les échangeurs de chaleur à flux croisés.

En (a), l'écoulement croisé est dit non mixé car les ailettes de la plaque forcent le fluide à s'écouler à travers un espace interfin particulier et l'empêchent de se déplacer dans la direction transversale (c'est-à-dire parallèlement aux tubes).

On dit que l'écoulement croisé en (b) est mixé puisque le fluide est maintenant libre de se déplacer dans la direction transversale.

Les deux fluides ne sont pas mixés dans un radiateur de voiture.

#### Remarque

La présence de mélange dans le fluide peut avoir un effet significatif sur les caractéristiques de transfert de chaleur de l'échangeur de chaleur.

### 2.3. C : Échangeurs Tubes/Calandre (à faisceaux complexes)

Le type d'échangeur de chaleur le plus courant dans les applications industrielles est peut-être l'échangeur de chaleur tubulaire, illustré à la Fig. 5-3. Les échangeurs de chaleur à *Tubes/Calandre* ou *faisceau et calandre* contiennent un grand nombre de tubes (parfois plusieurs centaines) emballés dans une calandre avec leurs axes parallèles à celui de la calandre.

Le transfert de chaleur a lieu lorsqu'un fluide s'écoule à l'intérieur des tubes tandis que l'autre fluide s'écoule à l'extérieur des tubes à travers la calandre.

Des chicanes sont généralement placées dans la calandre pour forcer le fluide côté calandre à s'écouler à travers la calandre pour améliorer le transfert de chaleur et pour maintenir un espacement uniforme entre les tubes.

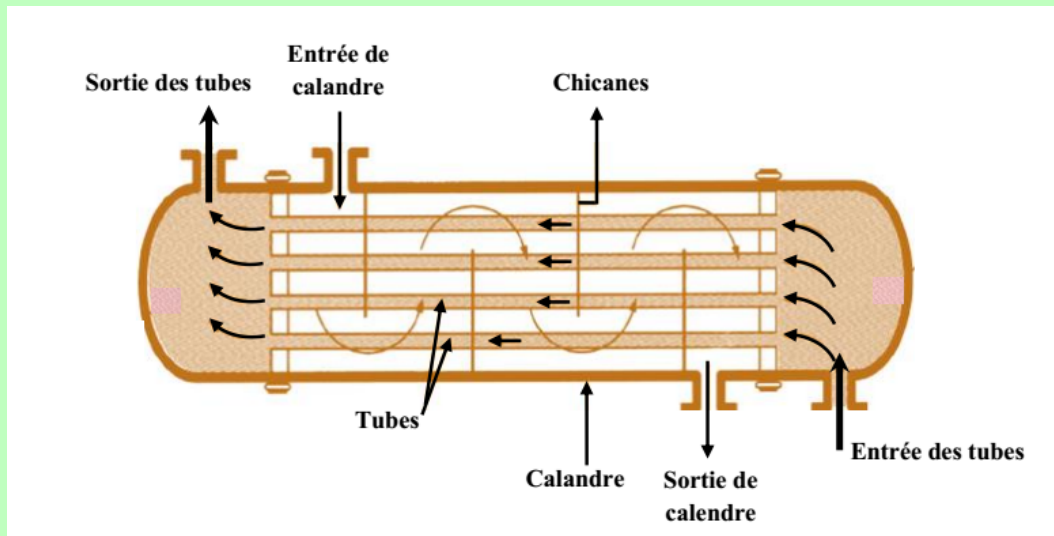


Figure 5.3 :Le schéma d'un échangeur de chaleur à faisceau tubulaire et calandres (simple passe coté calandre et simple passe coté tube).

Malgré leur utilisation répandue, les échangeurs de chaleur à *faisceau et calandre* ne conviennent pas pour une utilisation dans les applications automobiles et aéronautiques en raison de leur taille et de leur poids relativement importants. Notez que les tubes d'un échangeur de chaleur à *faisceau et calandre* s'ouvrent sur certaines grandes zones d'écoulement appelées en-têtes aux deux extrémités de la calandre, où le fluide côté tube s'accumule avant d'entrer dans les tubes et après les avoir quittés.

Les échangeurs de chaleur à faisceau et calandre sont en outre classés en fonction du nombre de passages de calandre et de tube impliqués (faisceaux). Les échangeurs de chaleur dans lesquels tous les tubes font un demi-tour dans la calandre, par exemple, sont appelés échangeurs de chaleur à un passage et à deux tubes. De même, un échangeur de chaleur qui comporte deux passages dans la calandre et quatre passages dans les tubes est appelé échangeur de chaleur à deux passages et à quatre tubes (Fig. 5-4).

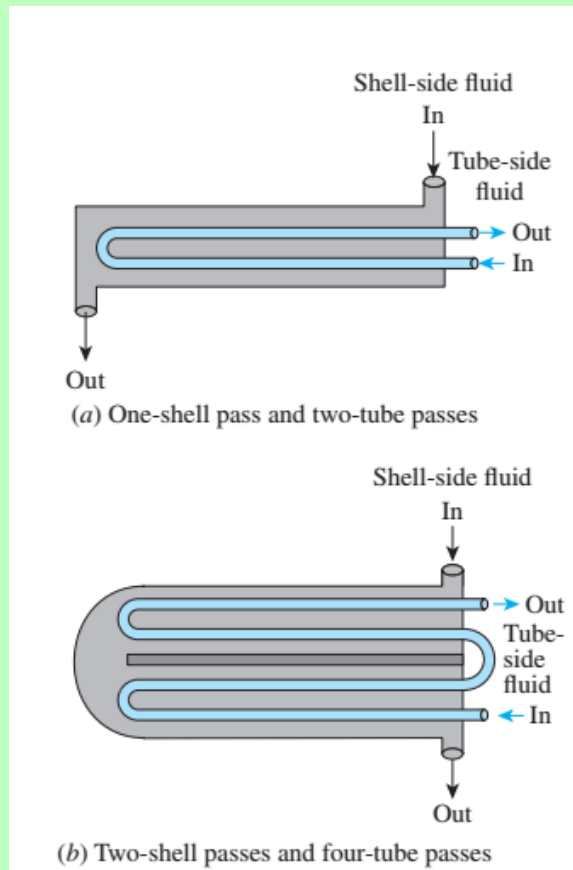



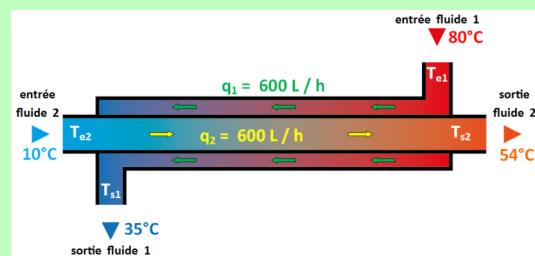
Figure 5.4 :Arrangements à flux multiples dans les échangeurs de chaleur à faisceau et calandre.

 **Complément**

Les échangeurs de chaleur reçoivent souvent des noms spécifiques pour refléter l'application spécifique pour laquelle ils sont utilisés. Par exemple, un condenseur est un échangeur de chaleur dans lequel l'un des fluides est refroidi et se condense lorsqu'il s'écoule à travers l'échangeur de chaleur. Une chaudière est un autre échangeur de chaleur dans lequel l'un des fluides absorbe la chaleur et se vaporise. Un radiateur spatial est un échangeur de chaleur qui transfère la chaleur du fluide chaud vers l'espace environnant par rayonnement.

# Chapitre 6. Calcul des Échangeurs

*Chapitre 6. Calcul des Échangeurs*



# Table des matières



<b>Objectifs</b>	3
<b>I - 6.1. Coefficient de transfert global U.</b>	4
1. 6.1.1 Le réseau de résistance thermique .....	4
2. 6.1.2 Facteur d'encrassement .....	7
<b>II - 6.2 Analyse des échangeurs de chaleur</b>	10
1. Analyse des échangeurs de chaleur .....	10
<b>III - 6.3 La méthode de différence de température moyenne log</b>	15
1. 6.3.1 L'échangeur de chaleur à flux parallèle .....	15
2. 6.3.2 L'échangeur de chaleur à contre-courant .....	17
3. 6.3.3 Conditions de fonctionnement spéciales .....	18
4. 6.3.4 Échangeurs de chaleur multipass et cross-flow: utilisation d'un facteur de correction .....	19
<b>IV - 6.4 La méthode efficacité-NTU</b>	22
1. 6.4.1 Définitions .....	22
2. 6.4.2 Relations efficacité-NTU .....	24

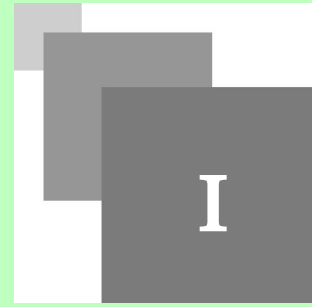
# Objectifs



Les méthodes de calcul des équipements de transfert de chaleur sans changement de phase



# 6.1. Coefficient de transfert global U.



Un échangeur de chaleur implique généralement deux fluides en circulation séparés par une paroi solide. La chaleur est d'abord transférée du fluide chaud à la paroi par convection, à travers la paroi par conduction, et de la paroi au fluide froid à nouveau par convection. Tous les effets de rayonnement sont généralement inclus dans les coefficients de transfert de chaleur par convection.

## 1. 6.1.1 Le réseau de résistance thermique

Le réseau de résistance thermique associé à ce processus de transfert de chaleur implique deux résistances de convection et une de conduction, comme le montre la Fig. 6-1.

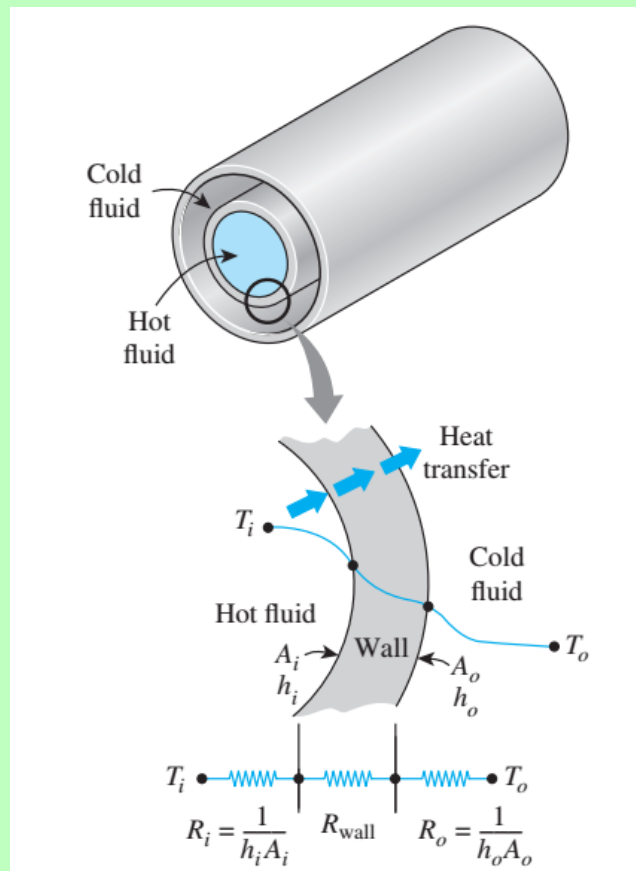


Figure 6.1 :Réseau de résistance thermique associé au transfert de chaleur dans un échangeur de chaleur à double tube.

Ici, les indices  $i$  et  $o$  représentent les surfaces intérieure et extérieure du tube intérieur. Pour un échangeur de chaleur à double tube, la résistance thermique de la paroi du tube est :

$$R_{\text{wall}} = \frac{\ln(D_o/D_i)}{2\pi kL} \quad (6.1)$$

Où  $k$  est la conductivité thermique du matériau de la paroi et  $L$  est la longueur du tube. Alors la résistance thermique totale devient.

$$R = R_{\text{total}} = R_i + R_{\text{wall}} + R_o = \frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln(D_o/D_i)}{2\pi kL} + \frac{1}{h_o A_o} \quad (6.2)$$

Le  $A_i$  est la zone de la surface intérieure du mur qui sépare les deux fluides, et  $A_o$  est la surface de la surface extérieure du mur. En d'autres termes,  $A_i$  et  $A_o$  sont des surfaces de la paroi de séparation mouillées respectivement par les fluides interne et externe.

Lorsqu'un fluide s'écoule à l'intérieur d'un tube circulaire et l'autre à l'extérieur de celui-ci, nous avons  $A_i = \pi D_i L$  et  $A_o = \pi D_o L$  (Fig. 6-2).

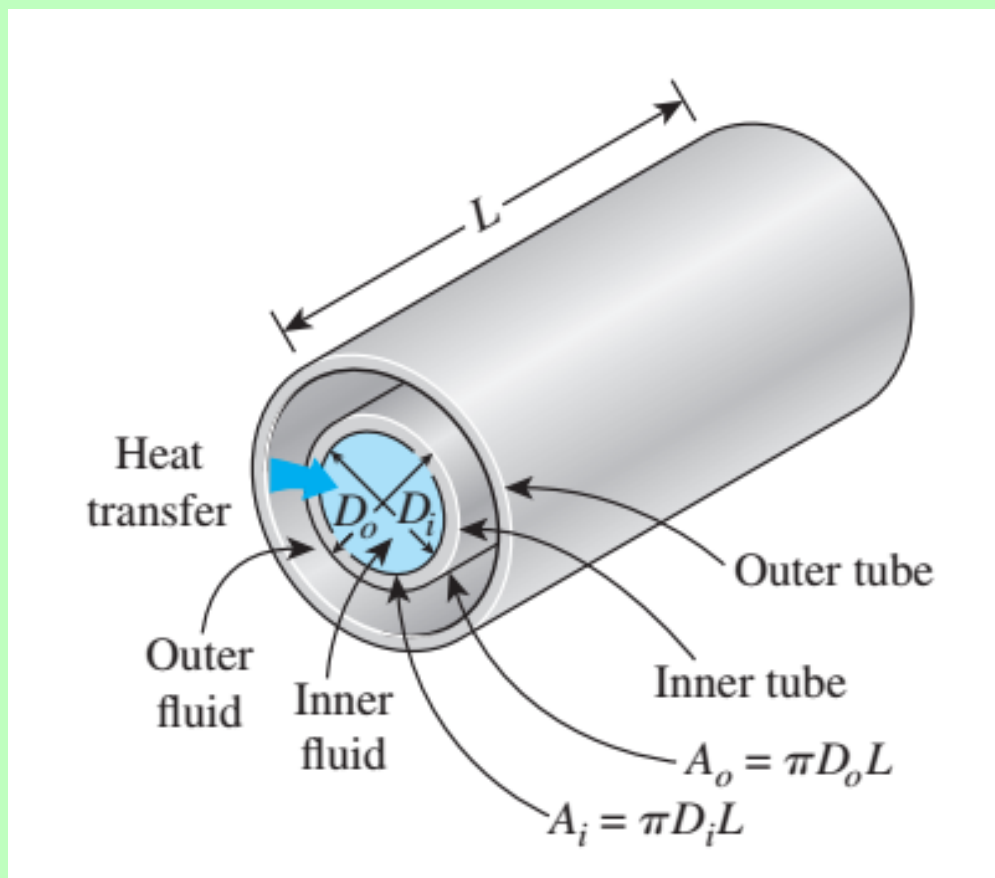


Figure 6.2 : Les deux surfaces de transfert de chaleur associées à un échangeur de chaleur à double tube (pour les tubes minces,  $D_i \approx D_o$  et donc  $A_i \approx A_o$ ).

Dans l'analyse des échangeurs de chaleur, il est commode de combiner toutes les résistances thermiques dans le chemin du flux de chaleur du fluide chaud vers le fluide froid en une seule résistance  $R$ , et d'exprimer le flux de transfert de chaleur entre les deux fluides comme

$$q = \frac{\Delta T}{R} = UA_s \Delta T = U_i A_i \Delta T = U_o A_o \Delta T \quad (6.3)$$

Où  $A_s$  est la surface et  $U$  est le coefficient de transfert thermique global, dont l'unité est  $W/m^2.K$ , qui est identique à l'unité du coefficient de convection ordinaire  $h$ . Annulation  $\Delta T$ , Eq. 6-3 se réduit à

$$\frac{1}{UA_s} = \frac{1}{U_i A_i} = \frac{1}{U_o A_o} = R = \frac{1}{h_i A_i} + R_{\text{wall}} + \frac{1}{h_o A_o} \quad (6.4)$$

Notez que  $U_i A_i = U_o A_o$ , mais  $U_i \neq U_o$  à moins que  $A_i = A_o$ . Par conséquent, le coefficient de transfert de chaleur global  $U$  d'un échangeur de chaleur n'a pas de sens à moins que la zone sur laquelle il est basé ne soit spécifiée. Ceci est notamment le cas lorsqu'un côté de la paroi du tube est à ailettes et que l'autre ne l'est pas, car la surface du côté à ailettes est plusieurs fois celle du côté non ailé.

Lorsque l'épaisseur de paroi du tube est faible et que la conductivité thermique du matériau du tube est élevée, comme c'est généralement le cas, la résistance thermique du tube est négligeable ( $R_{\text{wall}} \approx 0$ ) et les surfaces intérieure et extérieure du tube sont presque identique ( $A_i \approx A_o \approx A_s$ ). Puis Eq. 6-4 pour le coefficient de transfert thermique global simplifie à

$$\frac{1}{U} \approx \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_o} \quad (6.5)$$

Où  $U \approx U_i \approx U_o$ . Les coefficients de transfert de chaleur de convection individuels à l'intérieur et à l'extérieur du tube,  $h_i$  et  $h_o$ , sont déterminés en utilisant les relations de convection pour les flux de convection forcée interne et externe, respectivement.

Le coefficient global de transfert de chaleur  $U$  en Eq. 6-5 est dominé par le plus petit coefficient de convection, puisque l'inverse d'un grand nombre est petit.

Quand l'un des coefficients de convection est beaucoup plus petit que l'autre (disons,  $h_i \ll h_o$ ), nous avons  $1/h_i \gg 1/h_o$ , et donc  $U \approx h_i$ .

Par conséquent, le coefficient de transfert de chaleur plus petit crée un goulot d'étranglement sur le trajet du transfert de chaleur et empêche sérieusement le transfert de chaleur. Cette situation se présente fréquemment lorsque l'un des fluides est un gaz et l'autre est un liquide. Dans de tels cas, des ailettes sont couramment utilisées du côté gaz pour améliorer le produit  $UA$  et donc le transfert de chaleur de ce côté.

Lorsque le tube est à ailettes d'un côté pour améliorer le transfert de chaleur, la surface totale de transfert de chaleur sur le côté à ailettes devient

$$A_s = A_{\text{total}} = A_{\text{fin}} + A_{\text{unfinned}} \quad (6.6)$$

Où  $A_{\text{fin}}$  est la surface des ailettes et  $A_{\text{unfinned}}$  est la surface de la partie sans ailette de la surface du tube. Pour les ailettes courtes de haute conductivité thermique, on peut utiliser cette surface totale dans la relation de résistance à la convection  $R_{\text{conv}} = 1 / hA_s$  puisque les ailettes dans ce cas seront très presque isothermes. Sinon, nous devons déterminer la surface effective à partir de

$$A_s = A_{\text{unfinned}} + \eta_{\text{fin}} A_{\text{fin}} \quad (6.7)$$

Où  $\eta_{\text{fin}}$  est le rendement des ailettes.

## 2. 6.1.2 Facteur d'encrassement

Les performances des échangeurs de chaleur se détériorent généralement avec le temps en raison de l'accumulation de dépôts sur les surfaces de transfert de chaleur. La couche de dépôts représente une résistance supplémentaire au transfert de chaleur et entraîne une diminution du flux de transfert de chaleur dans un échangeur de chaleur. L'effet net de ces accumulations sur le transfert de chaleur est représenté par un facteur d'encrassement  $R_f$  qui est une mesure de la résistance thermique introduite par l'encrassement.

Le type d'encrassement le plus courant est la précipitation de dépôts solides dans un fluide sur les surfaces de transfert de chaleur. Vous pouvez observer ce type d'encrassement même dans votre maison. Si vous vérifiez les surfaces intérieures de votre théière après une utilisation prolongée, vous remarquerez probablement une couche de dépôts à base de calcium sur les surfaces où l'ébullition se produit. C'est particulièrement le cas dans les zones où l'eau est dure. Les écailles de ces dépôts se détachent par rayures et les surfaces peuvent être nettoyées de ces dépôts par un traitement chimique. Imaginez maintenant ces dépôts minéraux qui se forment sur les surfaces internes des tubes fins dans un échangeur de chaleur (fig. 6-3) et l'effet néfaste qu'ils peuvent avoir sur la zone de passage d'écoulement et le transfert de chaleur. Pour éviter ce problème potentiel, l'eau des centrales électriques et des usines de traitement est largement traitée et son contenu solide est éliminé avant de pouvoir circuler dans le système. Les particules de cendre solides dans les gaz de combustion qui s'accumulent sur les surfaces des préchauffeurs d'air créent des problèmes similaires.



Figure 6.3 :Encrassement par précipitation des particules

Une autre forme d'encrassement, courante dans l'industrie des procédés chimiques, est la corrosion et d'autres encrassements chimiques. Dans ce cas, les surfaces sont encrassées par l'accumulation des produits de réactions chimiques sur les surfaces. Cette forme d'encrassement peut être évitée en revêtant des tuyaux métalliques avec du verre ou en utilisant des tuyaux en plastique au lieu de tuyaux métalliques. Les échangeurs de chaleur peuvent également être encrassés par la croissance d'algues dans les fluides chauds. Ce type d'encrassement est appelé encrassement biologique et peut être évité par un traitement chimique.

Dans les applications où il est susceptible de se produire, l'encrassement doit être pris en compte dans la conception et la sélection des échangeurs de chaleur. Dans de telles applications, il peut être nécessaire de sélectionner un échangeur de chaleur plus grand et donc plus coûteux pour s'assurer qu'il répond aux exigences de transfert de chaleur de conception même après l'encrassement.

Le nettoyage périodique des échangeurs de chaleur et le temps d'arrêt qui en résulte sont des pénalités supplémentaires liées à l'encrassement.

#### Remarque

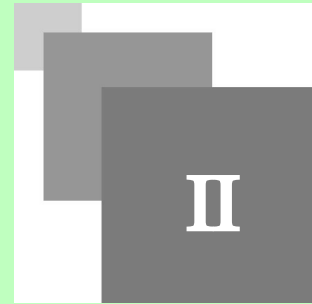
Le facteur d'encrassement est évidemment nul pour un nouvel échangeur de chaleur et augmente avec le temps à mesure que les dépôts solides s'accumulent sur la surface de l'échangeur de chaleur. Le facteur d'encrassement dépend de la température de fonctionnement et de la vitesse des fluides, ainsi que de la durée de service. L'encrassement augmente avec l'augmentation de la température et la diminution de la vitesse.

La relation du coefficient de transfert thermique global Eq. 6-4 ou 6-5, pour un échangeur de chaleur à double tube sans ailettes est valable pour les surfaces propres et doit être modifié pour tenir compte des effets de l'encrassement sur les surfaces intérieure et extérieure du tube. Pour un échangeur de chaleur à double tube sans ailettes, il peut être exprimé comme

$$\frac{1}{UA_s} = \frac{1}{U_i A_i} = \frac{1}{U_o A_o} = R = \frac{1}{h_i A_i} + \frac{R_{f,i}}{A_i} + \frac{\ln(D_o/D_i)}{2\pi kL} + \frac{R_{f,o}}{A_o} + \frac{1}{h_o A_o} \quad (6.8)$$

Où  $R_{f,i}$  et  $R_{f,o}$  sont les facteurs d'encrassement à ces surfaces.

# 6.2 Analyse des échangeurs de chaleur



## 1. Analyse des échangeurs de chaleur

Les échangeurs de chaleur sont couramment utilisés dans la pratique, et un ingénieur se trouve souvent en mesure de sélectionner un échangeur de chaleur qui atteindra un changement de température spécifié dans un courant de fluide de débit massique connu, ou de prédire les températures de sortie du chaud et des courants de fluide froid dans un échangeur de chaleur spécifié.

Dans les prochaines sections, nous discuterons des deux méthodes utilisées dans l'analyse des échangeurs de chaleur. Parmi celles-ci, la méthode de différence de température moyenne logarithmique (ou LMTD) est la mieux adaptée pour la première tâche et la méthode efficacité-NTU (le nombre d'unités de transfert) pour la deuxième tâche. Mais nous présentons d'abord quelques considérations générales.

Les échangeurs de chaleur fonctionnent généralement pendant de longues périodes sans changement dans leurs conditions de fonctionnement. Par conséquent, ils peuvent être modélisés comme des dispositifs à débit constant. En tant que tel, le débit massique de chaque fluide reste constant, et les propriétés du fluide telles que la température et la vitesse à toute entrée ou sortie restent les mêmes. De plus, les courants de fluide subissent peu ou pas de changement dans leurs vitesses et élévations, et donc les changements d'énergie cinétique et potentielle sont négligeables. La chaleur spécifique d'un fluide, en général, change avec la température. Mais, dans une plage de température spécifiée, il peut être traité comme une constante à une valeur moyenne avec peu de perte de précision. La conduction thermique axiale le long du tube est généralement insignifiante et peut être considérée comme négligeable. Enfin, la surface extérieure de l'échangeur de chaleur est supposée parfaitement isolée, de sorte qu'il n'y a pas de perte de chaleur vers le milieu environnant, et que tout transfert de chaleur se produit entre les deux fluides uniquement.

Pour concevoir ou prévoir les performances d'un échangeur de chaleur, il est essentiel de relier le flux de transfert de chaleur total à des quantités telles que les températures du fluide d'entrée et de sortie, le coefficient de transfert de chaleur global et la surface totale de transfert de chaleur.

Deux de ces relations peuvent être facilement obtenues en appliquant des bilans énergétiques globaux aux fluides chauds et froids, comme le montre la figure 6.4.

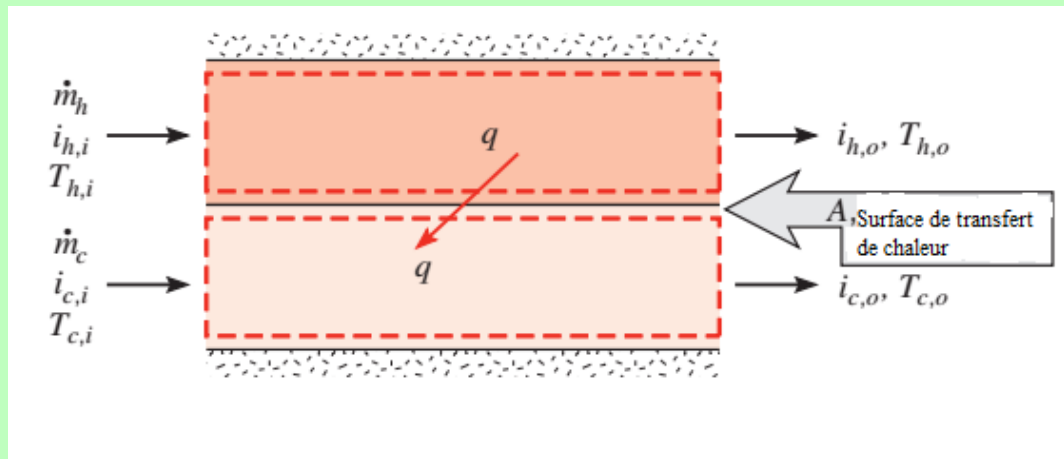


Figure 6.4 : Bilans énergétiques globaux pour les fluides chauds et froids d'un échangeur de chaleur à deux fluides.

En particulier, si  $q$  est le taux total de transfert de chaleur entre les fluides chaud et froid et qu'il y a un transfert de chaleur négligeable entre l'échangeur et son environnement, ainsi que des changements d'énergie potentielle et cinétique négligeables, application de l'équation d'énergie à flux constant.

Les idéalizations énoncées ci-dessus sont étroitement rapprochées dans la pratique, et elles simplifient grandement l'analyse d'un échangeur de chaleur sans sacrifier la précision.

Par conséquent, ils sont couramment utilisés. Dans ces hypothèses, *la première loi de la thermodynamique exige que le flux de transfert de chaleur du fluide chaud soit égal au flux de transfert de chaleur vers le fluide froid.* C'est,

$$q = \dot{m}_h c_{p,h} (T_{h,i} - T_{h,o}) \quad (6.9.a)$$

et

$$q = \dot{m}_c c_{p,c} (T_{c,o} - T_{c,i}) \quad (6.9.b)$$

$\dot{m}$  : débit massique, kg / s

Les indices h et c se réfèrent aux fluides chauds et froids, tandis que les indices i et o désignent les conditions d'entrée et de sortie du fluide. Si les fluides ne subissent pas de changement de phase et que des chaleurs spécifiques ont supposées constantes.

$\dot{m}_c, \dot{m}_h$  = débits massiques

$c_{p,c}, c_{p,h}$  = chaleur spécifique

$T_{c,o}, T_{h,o}$  = températures de sortie

$T_{c,i}, T_{h,i}$  = températures d'entrée

On notera que le flux de transfert de chaleur  $q$  est considéré comme une grandeur positive, et sa direction s'entend du fluide chaud vers le fluide froid selon la deuxième loi de la thermodynamique.



Dans l'analyse des échangeurs de chaleur, il est souvent pratique de combiner le produit du débit massique et de la chaleur spécifique d'un fluide en une seule quantité. Cette quantité est appelée le *flux de capacité thermique* et est définie pour les flux de fluide chaud et froid comme :

$$C_h = \dot{m}_h c_{ph} \text{ and } C_c = \dot{m}_c c_{pc} \quad (6.10)$$

Le flux de capacité thermique d'un flux de fluide représente le flux de transfert de chaleur nécessaire pour modifier la température du flux de fluide de 1°C lorsqu'il s'écoule à travers un échangeur de chaleur.

#### Attention

Notez que dans un échangeur de chaleur, le fluide avec un flux de capacité thermique élevé subit un petit changement de température, et le fluide avec un flux de capacité thermique faible subit un changement de température important. Par conséquent, doubler le débit massique d'un fluide tout en laissant tout le reste inchangé réduira de moitié le changement de température de ce fluide.

Avec la définition du flux de capacité thermique ci-dessus, Eqs. 6-9-a et 6-9-b peuvent également être exprimés comme :

$$q = C_c(T_{h,i} - T_{c,i}) \quad (6.11.a)$$

$$q = C_h(T_{h,i} - T_{c,i}) \quad (6.11.b)$$

C'est-à-dire que le flux de transfert de chaleur dans un échangeur de chaleur est égal au flux de capacité thermique de l'un ou l'autre fluide multiplié par le changement de température de ce fluide.

#### Remarque

Notez que le seul moment où l'élévation de température d'un fluide froid est égale à la chute de température du fluide chaud est lorsque les flux de capacité thermique des deux fluides sont égaux (Fig. 6-5).

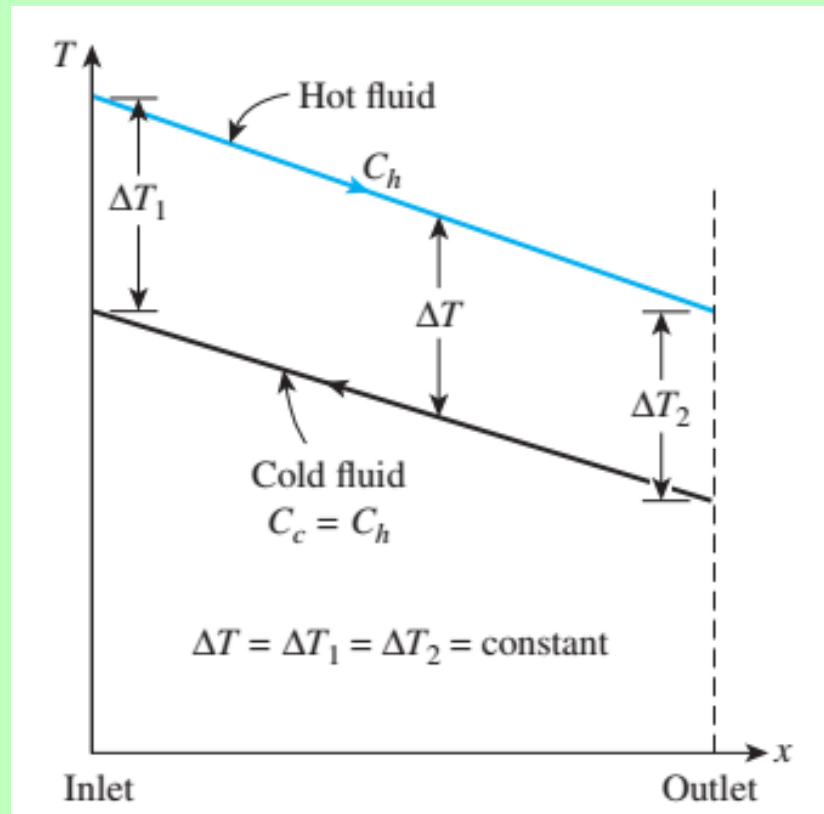


Figure 6.5 : Deux flux de fluide qui ont les mêmes débits de capacité subissent le même changement de température dans un échangeur de chaleur bien isolé.

Deux types spéciaux d'échangeurs de chaleur couramment utilisés dans la pratique sont les condenseurs et les chaudières. L'un des fluides dans *un condenseur* ou une *chaudière* subit un processus de changement de phase, et le taux de transfert de chaleur est exprimé comme :

$$q = \dot{m}h_{fg} \quad (6.12)$$

Où  $\dot{m}$  est le débit d'évaporation ou de condensation du fluide et  $h_{fg}$  est l'enthalpie de vaporisation du fluide à la température ou à la pression spécifiée.

Un fluide ordinaire absorbe ou libère une grande quantité de chaleur essentiellement à température constante pendant un processus de changement de phase, comme le montre la Fig. 6-6.

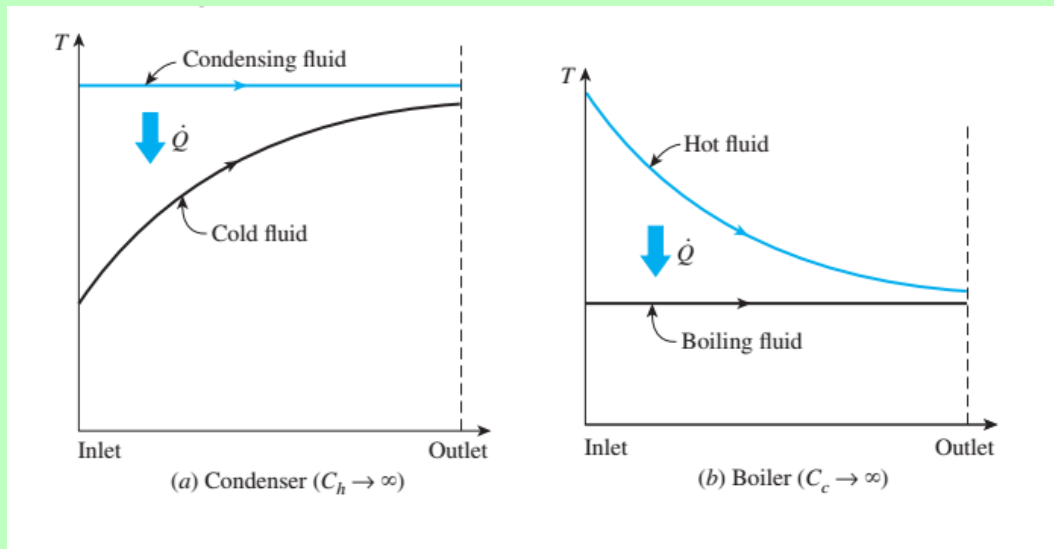


Figure 6.5 :Variation de la température du fluide dans un échangeur de chaleur lorsque l'un des fluides se condense ou bout.

Le débit de capacité thermique d'un fluide pendant un processus de changement de phase doit approcher l'infini puisque le changement de température est pratiquement nul.

Autrement dit,  $C = m \cdot cp \rightarrow \infty$  lorsque  $\Delta T \rightarrow 0$ , de sorte que le flux de transfert de chaleur  $q = m \cdot cp \Delta T$  est une quantité finie.

Par conséquent, dans l'analyse d'échangeur de chaleur, un fluide de condensation ou d'ébullition est commodément modélisé comme un fluide dont le débit de capacité thermique est l'infini.

La vitesse de transfert de chaleur dans un échangeur de chaleur peut également être exprimée d'une manière analogue à la loi de Newton du refroidissement comme

$$q = UA_s \Delta T_m \quad (6.13)$$

Où  $U$  est le coefficient de transfert de chaleur global,  $A_s$  est la surface de transfert de chaleur et  $\Delta T_m$  est une différence de température moyenne appropriée entre les deux fluides. Ici, la surface  $A_s$  peut être déterminée avec précision en utilisant les dimensions de l'échangeur de chaleur. Cependant, le coefficient de transfert thermique global  $U$  et la différence de température  $\Delta T$  entre les fluides chaud et froid, en général, peuvent varier le long de l'échangeur de chaleur.

La valeur moyenne du coefficient global de transfert de chaleur peut être déterminée comme décrit dans la section précédente en utilisant les coefficients de convection moyens pour chaque fluide. Il s'avère que la forme appropriée de la différence de température moyenne entre les deux fluides est de nature logarithmique, et sa détermination est présentée dans la section 6-3.

#### Remarque

Il convient de noter que la différence de température moyenne  $\Delta T_m$  dépend de la disposition d'écoulement de l'échangeur de chaleur et de son type de construction.

# 6.3 La méthode de différence de température moyenne log



Plus tôt, nous avons mentionné que la différence de température entre les fluides chauds et froids varie le long de l'échangeur de chaleur, et il est pratique d'avoir *une différence de température moyenne*  $\Delta T_m$  à utiliser dans l'équation 6.13

## 1. 6.3.1 L'échangeur de chaleur à flux parallèle

Les distributions de température moyenne des fluides chauds et froids associées à un échangeur de chaleur à *flux parallèle* sont illustrées à la figure 6.6.

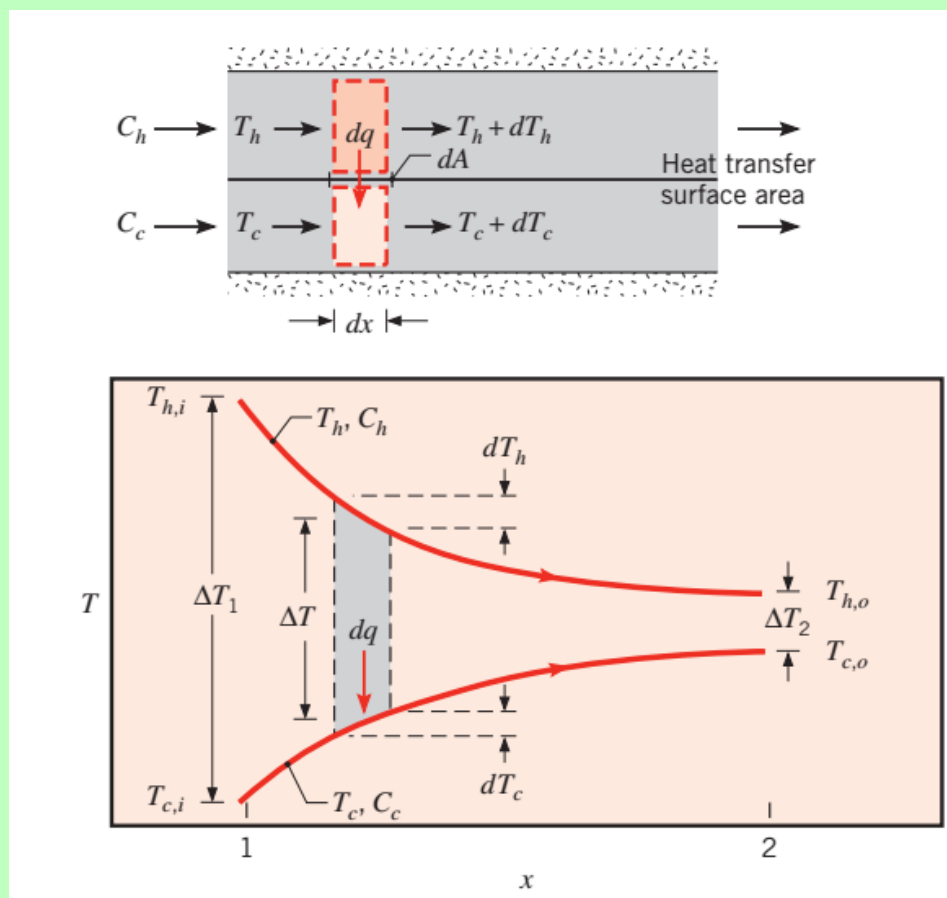


Figure 6.6 :Distributions de température pour un échangeur de chaleur à flux parallèle.

La différence de température  $\Delta T$  est initialement importante mais décroît avec l'augmentation de  $x$ , se rapprochant de zéro asymptotiquement. Il est important de noter que, pour un tel échangeur, la température de sortie du fluide froid ne dépasse jamais celle du fluide chaud. Sur la figure 6.6, les indices 1 et 2 désignent les extrémités opposées de l'échangeur de chaleur. Cette convention est utilisée pour tous les types d'échangeurs de chaleur considérés. Pour un écoulement parallèle, il s'ensuit que  $T_{h,i} = T_{h,1}$ ,  $T_{h,o} = T_{h,2}$ ,  $T_{c,i} = T_{c,1}$  et  $T_{c,o} = T_{c,2}$ .

La forme de  $\Delta T_m$  peut être déterminée en appliquant un bilan énergétique à des éléments différentiels dans les fluides chauds et froids. Chaque élément a une longueur  $dx$  et une surface de transfert de chaleur  $dA$ , comme le montre la figure 6.6. Les bilans énergétiques et l'analyse ultérieure sont soumis aux hypothèses suivantes.

1. L'échangeur de chaleur est isolé de son environnement, auquel cas le seul échange de chaleur se fait entre les fluides chauds et froids.
2. La conduction axiale le long des tubes est négligeable.
3. Les changements d'énergie potentielle et cinétique sont négligeables.
4. Les chaleurs spécifiques au fluide sont constantes.
5. Le coefficient global de transfert de chaleur est constant.

Pour l'échangeur de chaleur à flux parallèle de la figure 6.6,  $\Delta T_1 = (T_{h,i} - T_{c,i})$  et  $\Delta T_2 = (T_{h,o} - T_{c,o})$ , on obtient alors

$$q = UA \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln (\Delta T_2 / \Delta T_1)}$$

En comparant l'expression ci-dessus avec l'équation 6.13, nous concluons que la différence de température moyenne appropriée est une différence de température moyenne logarithmique,  $\Delta T_{lm}$ . en conséquence, nous pouvons écrire

$$q = UA \Delta T_{lm} \quad (6.14)$$

Où

$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln (\Delta T_2 / \Delta T_1)} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln (\Delta T_1 / \Delta T_2)} \quad (6.15)$$

#### Conseil

N'oubliez pas que, pour l'échangeur à flux parallèle

$$\begin{bmatrix} \Delta T_1 \equiv T_{h,1} - T_{c,1} = T_{h,i} - T_{c,i} \\ \Delta T_2 \equiv T_{h,2} - T_{c,2} = T_{h,o} - T_{c,o} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

## 2. 6.3.2 L'échangeur de chaleur à contre-courant

Les distributions de température du fluide chaud et froid associées à un échangeur de chaleur à *contre-courant* sont illustrées à la figure 6.7. Contrairement à l'échangeur à flux parallèle, cette configuration permet un transfert de chaleur entre les parties les plus chaudes des deux fluides à une extrémité, ainsi qu'entre les parties les plus froides à l'autre.

Pour cette raison, la variation de la différence de température,  $\Delta T = T_h - T_c$ , par rapport à  $x$  n'est nulle part aussi importante que pour la région d'entrée.

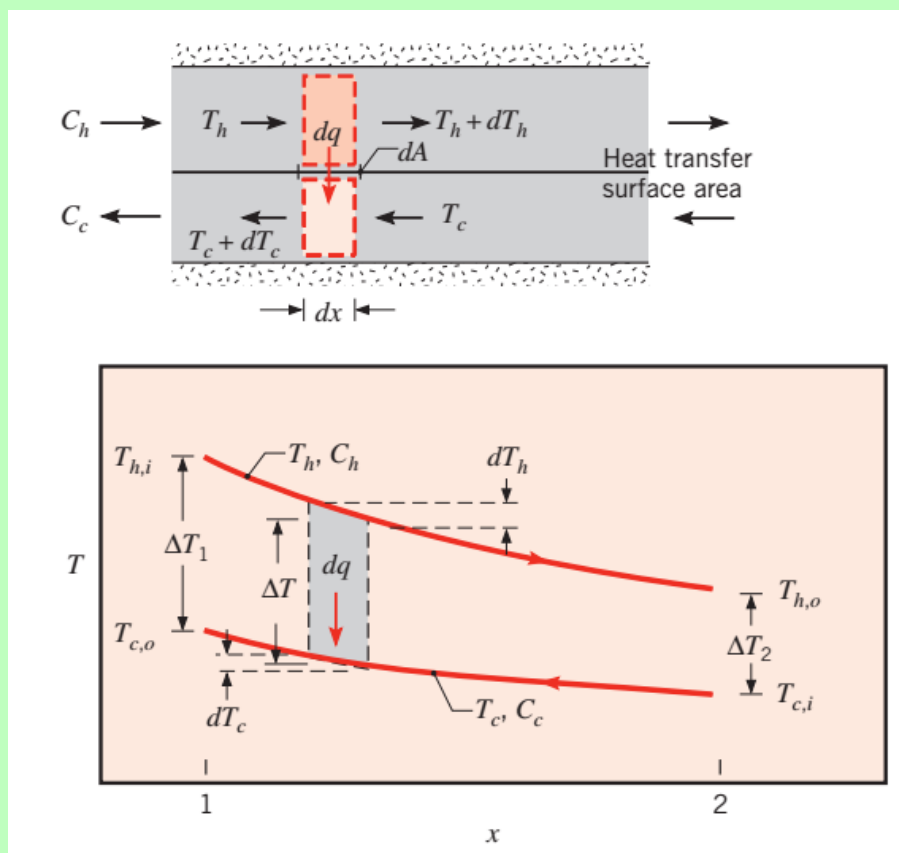


Figure 6.7 :Distributions de température pour un échangeur de chaleur à contre-courant.

### Remarque

Notez que la température de sortie du fluide froid peut maintenant dépasser la température de sortie du fluide chaud.

Les équations 6.9.a et 6.9.b s'appliquent à tout échangeur de chaleur et peuvent donc être utilisées pour l'agencement à contre-courant. De plus, à partir d'une analyse comme celle effectuée à la section 6.3.1, il peut être démontré que les équations 6.14 et 6.15 s'appliquent également. Cependant, pour l'échangeur à contre-courant, les différences de température de point final doivent maintenant être définies comme

$$\left[ \begin{array}{l} \Delta T_1 \equiv T_{h,1} - T_{c,1} = T_{h,i} - T_{c,o} \\ \Delta T_2 \equiv T_{h,2} - T_{c,2} = T_{h,o} - T_{c,i} \end{array} \right] \quad (6.17)$$

### Complément

À noter que, pour les mêmes températures d'entrée et de sortie, la différence de température moyenne logarithmique pour le contre-courant dépasse celle pour le débit parallèle,  $T_{lm,CF} > T_{lm,PF}$ .

Par conséquent, la surface nécessaire pour effectuer un flux de transfert de chaleur prescrit  $q$  est plus petite pour le contre-courant que pour le système à flux parallèle, en supposant la même valeur de  $U$ .

Notez également que  $T_{c,o}$  peut dépasser  $T_{h,o}$  pour le contre-courant mais pas pour le parallèle.

## 3. 6.3.3 Conditions de fonctionnement spéciales

Il est utile de noter certaines conditions spéciales dans lesquelles les échangeurs de chaleur peuvent être utilisés. La figure 6.8.a montre les distributions de température pour un échangeur de chaleur dans lequel le fluide chaud a un taux de capacité thermique,  $Ch \equiv mh.c_p$ ,  $h$ , qui est beaucoup plus grand que celui du fluide froid,  $Cc \equiv mc.c_p$ ,  $c$ . Dans ce cas, la température du fluide chaud reste approximativement constante dans tout l'échangeur de chaleur, tandis que la température du fluide froid augmente. La même condition est obtenue si le fluide chaud est une vapeur en condensation. La condensation se produit à température constante et, à toutes fins pratiques,  $Ch \rightarrow \infty$ . À l'inverse, dans un évaporateur ou une chaudière (Figure 6.8.b), c'est le fluide froid qui subit un changement de phase et reste à une température quasi uniforme ( $Cc \rightarrow \infty$ ). Le même effet est obtenu sans changement de phase si  $Ch \ll Cc$ . Notez que, avec condensation ou évaporation, le taux de chaleur est donné par l'équation 6.9.a ou 6.9.b, respectivement. Les conditions illustrées sur la figure 6.8.a ou 6.8.b caractérisent également un écoulement tubulaire interne (ou échangeur de chaleur à flux unique) échangeant de la chaleur avec une surface à température constante ou un fluide externe à température constante.

Le troisième cas particulier (Figure 6.8.c) concerne un échangeur de chaleur à contre-courant pour lequel les débits de capacité thermique sont égaux ( $Ch = Cc$ ). La différence de température  $\Delta T$  doit alors être constante dans tout l'échangeur, auquel cas  $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_{lm}$ .

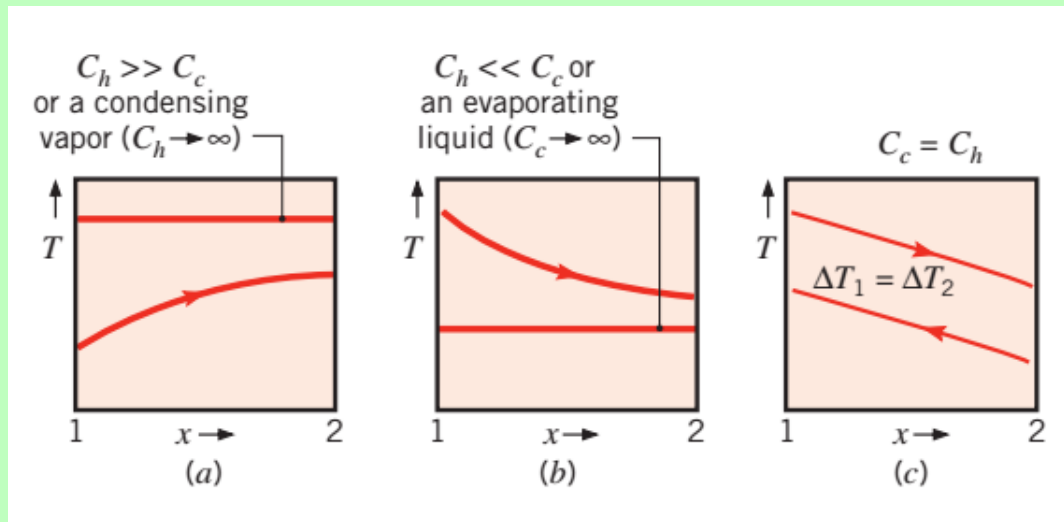


Figure 6.8 : Conditions spéciales de l'échangeur de chaleur. (a)  $C_h \gg C_c$  ou une vapeur de condensation. (b) Un liquide qui s'évapore ou  $C_h \ll C_c$ . (c) Un échangeur de chaleur à contre-courant avec des capacités thermiques fluides équivalentes ( $C_h = C_c$ ).

#### 4. 6.3.4 Échangeurs de chaleur multipass et cross-flow: utilisation d'un facteur de correction

La relation de différence de température moyenne logarithmique  $\Delta T_{lm}$  développée précédemment est limitée aux échangeurs de chaleur à flux parallèle et à contre-courant uniquement.

Des relations similaires sont également développées pour les échangeurs de chaleur à écoulement transversal (cross-flow) et à passes multiples à calandre et tube, mais les expressions résultantes sont trop compliquées en raison des conditions d'écoulement complexes.

Dans de tels cas, il est pratique de relier la différence de température équivalente à la relation de différence de température moyenne logarithmique pour le cas à contre-courant comme:

$$\Delta T_{lm} = F \Delta T_{lm,CF} \quad (6.18)$$

Où  $F$  est le facteur de correction, qui dépend de la géométrie de l'échangeur de chaleur et des températures d'entrée et de sortie des courants de fluide chaud et froid.

Le  $\Delta T_{lm,CF}$  est la différence de température moyenne logarithmique pour le cas d'un échangeur de chaleur à contre-courant avec les mêmes températures d'entrée et de sortie, est déterminé à partir de l'Eq. 6-15 en prenant  $\Delta T_1 = T_{h,i} - T_{c,o}$  et  $\Delta T_2 = T_{h,o} - T_{c,i}$  (Fig. 6-9).



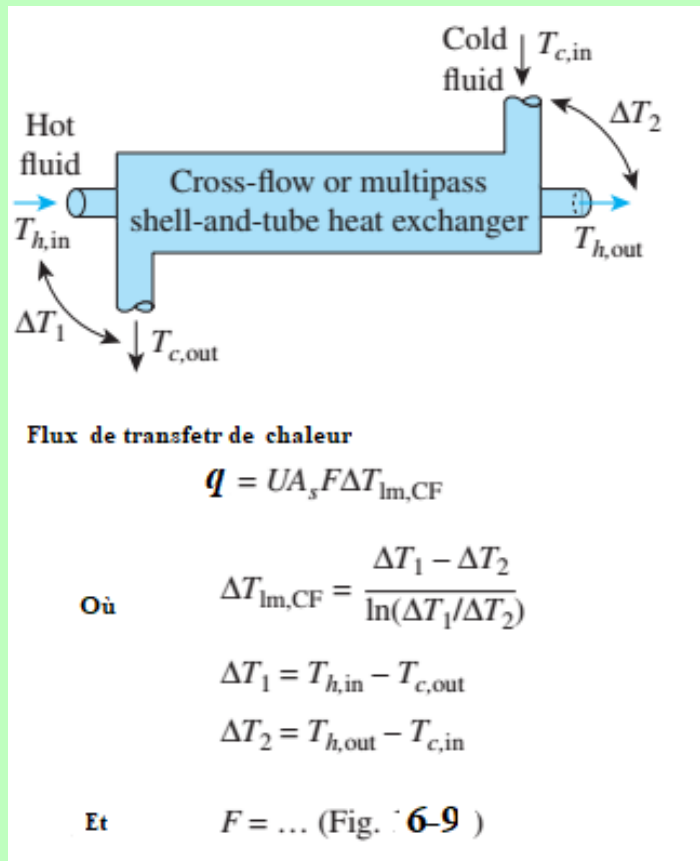


Figure 6.9 :La détermination du flux de transfert de chaleur pour les échangeurs de chaleur à courant croisé et multipasses faisceau et calandre à l'aide du facteur de correction.

Le facteur de correction est inférieur à l'unité pour un échangeur de chaleur à courant croisé (cross-flow) et multipasses shell /tube. Autrement dit,  $F \leq 1$ .

#### Remarque

La valeur limite de  $F = 1$  correspond à l'échangeur de chaleur à contre-courant. Ainsi, le facteur de correction  $F$  pour un échangeur de chaleur est une mesure de l'écart du  $\Delta T_{lm}$  par rapport aux valeurs correspondantes pour le cas à contre-courant.

Le facteur de correction  $F$  pour les configurations courantes d'échangeurs de chaleur à courant croisé et à faisceau et calandre est donné à la Fig. 6-10 par rapport à deux rapports de température  $P$  et  $R$  définis comme :

$$P = \frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1} \quad (6.19)$$

Et

$$R = \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1} = \frac{(\dot{m}c_p)_{\text{tube side}}}{(\dot{m}c_p)_{\text{shell side}}} \quad (6.20)$$

Où les indices 1 et 2 représentent respectivement l'entrée et la sortie.

Notez que pour un échangeur de chaleur à calandre et tube, T et t représentent respectivement les températures de calandre et de tube, comme indiqué dans les diagrammes des facteurs de correction.

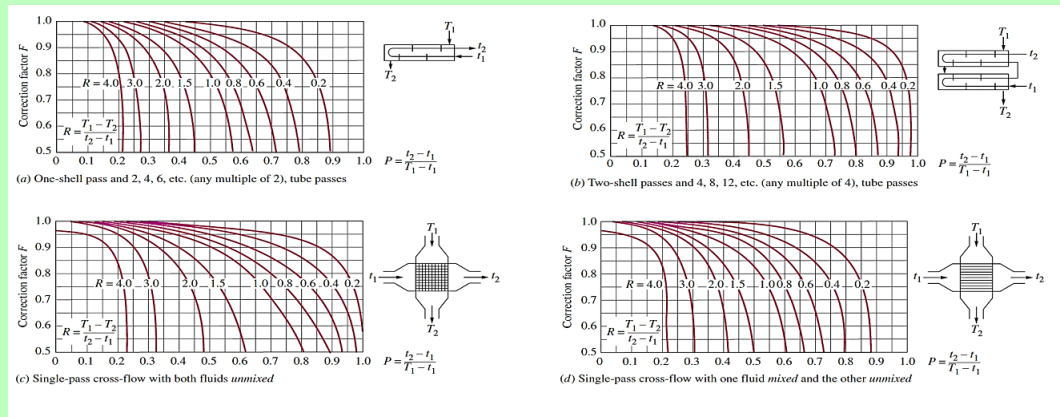


Figure 6.10 :Diagrammes du facteur de correction F pour les échangeurs de chaleur à Faisceau et calandre (Shell and Tube) et à courant croisé (Cross-Flow).

#### ⚠ Attention

Cela ne fait aucune différence que le fluide chaud ou froid traverse la calandre ou le tube. La détermination du facteur de correction F nécessite la disponibilité des températures d'entrée et de sortie pour les fluides froids et chauds.

#### 🔍 Remarque

Notez que la valeur de P varie de 0 à 1. La valeur de R, par contre, varie de 0 à l'infini, avec  $R = 0$  correspondant au changement de phase (condensation ou ébullition) côté calandre et  $R \rightarrow \infty$  pour changer de phase côté tube. Le facteur de correction est  $F = 1$  pour ces deux cas limites.

Par conséquent, le facteur de correction pour un condenseur ou une chaudière est  $F = 1$ , quelle que soit la configuration de l'échangeur de chaleur.

# 6.4 La méthode efficacité-NTU

IV

Il est simple d'utiliser la méthode de la différence de température moyenne logarithmique (LMTD) pour l'analyse des échangeurs de chaleur lorsque les températures d'entrée du fluide sont connues et que les températures de sortie sont spécifiées ou facilement déterminées à partir des expressions du bilan énergétique, équations 6.9.a et 6.9.b. La valeur de  $\Delta T_{lm}$  pour l'échangeur peut alors être déterminée

Cependant, si seules les températures d'entrée sont connues, l'utilisation de la méthode LMTD nécessite une procédure itérative lourde. Il est donc préférable d'employer une approche alternative appelée méthode *efficacité-NTU* (ou NTU).

## 1. 6.4.1 Définitions

Pour définir l'efficacité d'un échangeur de chaleur, il faut d'abord déterminer le flux de transfert de chaleur maximal possible,  $q_{max}$ , pour l'échangeur. Ce flux de transfert de chaleur pourrait, en principe, être atteint dans un échangeur de chaleur à contre-courant (figure 6.7) de longueur infinie. Dans un tel échangeur, l'un des fluides subirait la différence de *température maximale possible*,  $T_{h,i} - T_{c,i}$

$$\Delta T_{max} = T_{h, in} - T_{c, in}$$

Pour illustrer ce point, considérons une situation pour laquelle  $C_c < C_h$ , auquel cas,  $|dT_c| > |dT_h|$ . Le fluide froid subirait alors le changement de température le plus important,

et puisque  $L \rightarrow \infty$ , il serait chauffé à la température d'entrée du fluide chaud ( $T_{c,o} = T_{h,i}$ ). En conséquence, d'après l'équation 6.9.b,

$$C_c < C_h: \quad q_{max} = C_c(T_{h,i} - T_{c,i})$$

De même, si  $C_h < C_c$ , le fluide chaud subirait le changement de température le plus important et serait refroidi à la température d'entrée du fluide froid ( $T_{h,o} = T_{c,i}$ ). À partir de l'équation 6.9.a, nous obtenons alors

$$C_h < C_c: \quad q_{\max} = C_h(T_{h,i} - T_{c,i})$$

À partir des résultats précédents, nous sommes ensuite invités à écrire l'expression générale

$$q_{\max} = C_{\min}(T_{h,i} - T_{c,i}) \quad (6.21)$$

Où  $C_{\min}$  est égal à  $C_c$  ou  $C_h$ , selon le plus petit des deux. Pour les températures d'entrée de fluide chaud et froid prescrites, l'équation 6.21 fournit le flux de transfert de chaleur maximal qui pourrait éventuellement être fourni par un échangeur.

### Exemple

Un rapide exercice mental devrait convaincre le lecteur que le flux de transfert de chaleur maximal possible n'est pas égal à  $C_{\max}(T_{h,i} - T_{c,i})$ .

Si le fluide ayant le débit de capacité thermique le plus élevé subissait le changement de température maximal possible, la conservation de l'énergie sous la forme  $C_c(T_{c,o} - T_{c,i}) = C_h(T_{h,i} - T_{h,o})$  exigerait que l'autre fluide expérimentez encore un changement de température plus important.

Par exemple, si  $C_{\max} = C_c$  et que l'on soutient qu'il est possible que  $T_{c,o}$  soit égal à  $T_{h,i}$ , il s'ensuit que  $(T_{h,i} - T_{h,o}) = (C_c / C_h)(T_{h,i} - T_{c,i})$ , auquel cas  $(T_{h,i} - T_{h,o}) > (T_{h,i} - T_{c,i})$ .

Une telle condition est clairement impossible.

Il est maintenant logique de définir l'efficacité, comme le rapport entre le flux de transfert de chaleur réel d'un échangeur de chaleur et le flux de transfert de chaleur maximal possible:

$$\varepsilon \equiv \frac{q}{q_{\max}} \quad (6.22)$$

D'après les équations 6.9.a, 6.9.b et 6.21, il s'ensuit que

$$\varepsilon = \frac{C_h(T_{h,i} - T_{h,o})}{C_{\min}(T_{h,i} - T_{c,i})} \quad (6.23)$$

Ou

$$\varepsilon = \frac{C_c(T_{c,o} - T_{c,i})}{C_{\min}(T_{h,i} - T_{c,i})} \quad (6.24)$$

Par définition, l'efficacité, qui est sans dimension, doit être dans la plage  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Cela est utile car, si  $\varepsilon$ ,  $T_{h,i}$  et  $T_{c,i}$  sont connus, le flux de transfert de chaleur réel peut être facilement déterminé à partir de l'expression

$$q = \varepsilon C_{\min}(T_{h,i} - T_{c,i}) \quad (6.25)$$

Pour tout échangeur de chaleur, on peut montrer que

$$\varepsilon = f\left(\text{NTU}, \frac{C_{\min}}{C_{\max}}\right) \quad (6.26)$$

où  $C_{\min}/C_{\max}$  est égal à  $C_c/C_h$  ou  $C_h/C_c$ , selon les grandeurs relatives des taux de capacité thermique des fluides chaud et froid.

Le nombre d'unités de transfert (NTU) est un paramètre sans dimension qui est largement utilisé pour l'analyse des échangeurs de chaleur et est défini comme

$$\text{NTU} \equiv \frac{UA}{C_{\min}} \quad (6.27)$$

## 2. 6.4.2 Relations efficacité-NTU

Pour déterminer une forme spécifique de la relation efficacité-NTU, équation 6.26, considérons un échangeur de chaleur à flux parallèle pour lequel  $C_{\min} = C_h$ . De l'équation 6.24, nous obtenons alors

$$\varepsilon = \frac{T_{h,i} - T_{h,o}}{T_{h,i} - T_{c,i}} \quad (6.28)$$

et des équations 6.9.a et 6.9.b, il s'ensuit que

$$\frac{C_{\min}}{C_{\max}} = \frac{\dot{m}_h c_{p,h}}{\dot{m}_c c_{p,c}} = \frac{T_{c,o} - T_{c,i}}{T_{h,i} - T_{h,o}} \quad (6.29)$$

Des expressions similaires ont été développées pour divers échangeurs de chaleur et des résultats représentatifs sont résumés dans le tableau 6.1, où  $C_r$  est le rapport de capacité thermique

$$C_r = C_{\min} / C_{\max}$$

Notez que pour  $C_r = 0$ , comme dans une chaudière, un condenseur ou un échangeur de chaleur à flux unique.

Flow Arrangement	Relation
<b>Parallel flow</b>	$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1 + C_r)]}{1 + C_r}$ (6.30.a)
<b>Counterflow</b>	$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1 - C_r)]}{1 - C_r \exp[-NTU(1 - C_r)]}$ ( $C_r < 1$ )
	$\varepsilon = \frac{NTU}{1 + NTU}$ ( $C_r = 1$ ) (6.31.a)
<b>Shell-and-tube</b>	
One shell pass (2, 4, . . . tube passes)	$\varepsilon_1 = 2 \left\{ 1 + C_r + (1 + C_r^2)^{1/2} \times \frac{1 + \exp[-(NTU)_1(1 + C_r^2)^{1/2}]}{1 - \exp[-(NTU)_1(1 + C_r^2)^{1/2}]} \right\}^{-1}$ (6.32.a)
$n$ shell passes ( $2n, 4n, . . .$ tube passes)	$\varepsilon = \left[ \left( \frac{1 - \varepsilon_1 C_r}{1 - \varepsilon_1} \right)^n - 1 \right] \left[ \left( \frac{1 - \varepsilon_1 C_r}{1 - \varepsilon_1} \right)^n - C_r \right]^{-1}$ (6.33.a)
<b>Cross-flow (single pass)</b>	
Both fluids unmixed	$\varepsilon = 1 - \exp \left[ \left( \frac{1}{C_r} \right) (NTU)^{0.22} \{ \exp[-C_r(NTU)^{0.78}] - 1 \} \right]$ (6.34.a)
$C_{\max}$ (mixed), $C_{\min}$ (unmixed)	$\varepsilon = \left( \frac{1}{C_r} \right) (1 - \exp[-C_r(1 - \exp(-NTU))])$ (6.35.a)
$C_{\min}$ (mixed), $C_{\max}$ (unmixed)	$\varepsilon = 1 - \exp(-C_r^{-1} \{ 1 - \exp[-C_r(NTU)] \})$ (6.36.a)
<b>All exchangers (<math>C_r = 0</math>)</b>	$\varepsilon = 1 - \exp(-NTU)$ (6.37.a)

Flow Arrangement	Relation
<b>Parallel flow</b>	$NTU = -\frac{\ln[1 - \varepsilon(1 + C_r)]}{1 + C_r}$ (6.30.b)
<b>Counterflow</b>	$NTU = \frac{1}{C_r - 1} \ln \left( \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon C_r - 1} \right)$ ( $C_r < 1$ )
	$NTU = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$ ( $C_r = 1$ ) (6.31.b)
<b>Shell-and-tube</b>	
One shell pass (2, 4, . . . tube passes)	$(NTU)_1 = -(1 + C_r^2)^{-1/2} \ln \left( \frac{E - 1}{E + 1} \right)$ $E = \frac{2\varepsilon_1 - (1 + C_r)}{(1 + C_r^2)^{1/2}}$ (6.32.b)
$n$ shell passes ( $2n, 4n, . . .$ tube passes)	Use Equations 11.30b and 11.30c with $\varepsilon_1 = \frac{F - 1}{F - C_r}$ $F = \left( \frac{\varepsilon C_r - 1}{\varepsilon - 1} \right)^{1/n}$ $NTU = n(NTU)_1$ (6.33.b)
<b>Cross-flow (single pass)</b>	
$C_{\max}$ (mixed), $C_{\min}$ (unmixed)	$NTU = -\ln \left[ 1 + \left( \frac{1}{C_r} \right) \ln(1 - \varepsilon C_r) \right]$ (6.34.b)
$C_{\min}$ (mixed), $C_{\max}$ (unmixed)	$NTU = -\left( \frac{1}{C_r} \right) \ln[C_r \ln(1 - \varepsilon) + 1]$ (6.35.b)
<b>All exchangers (<math>C_r = 0</math>)</b>	$NTU = -\ln(1 - \varepsilon)$ (6.36.b)

Les expressions précédentes sont représentées graphiquement sur les figures 6.11 à 6.16.

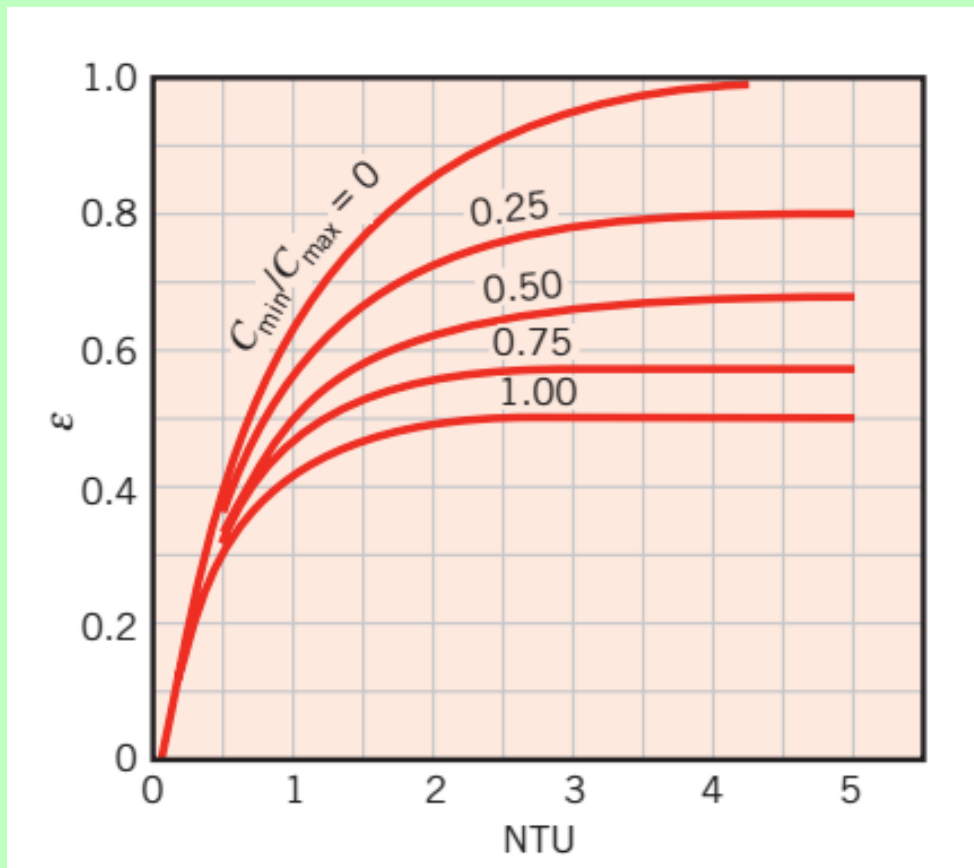


Figure 6.11 :Efficacité d'un échangeur de chaleur à flux parallèle

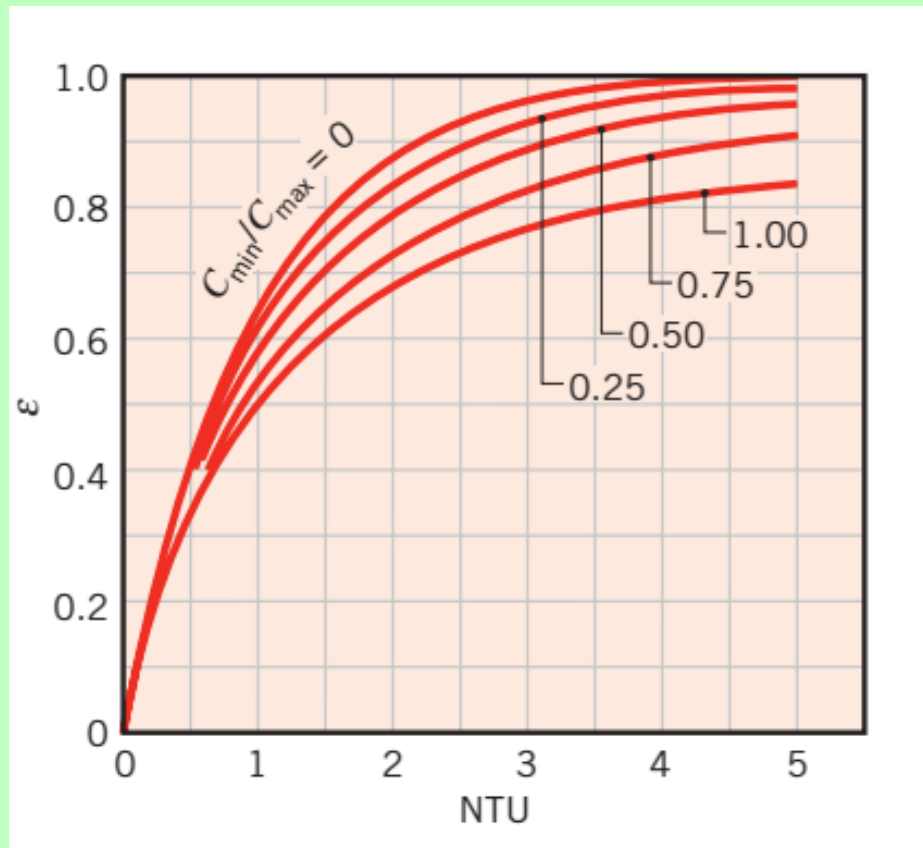


Figure 6.12 :Efficacité d'un échangeur de chaleur à contre-courant

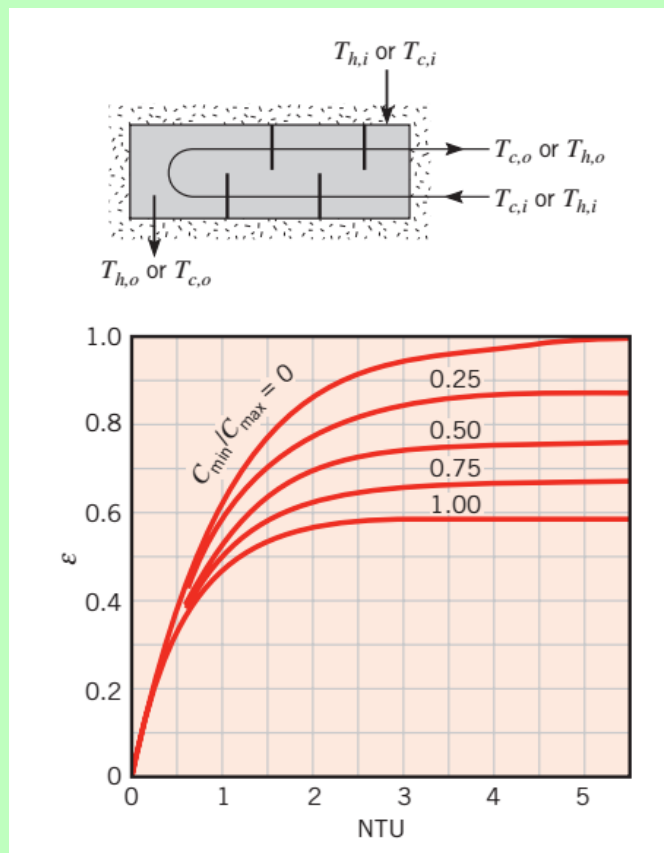




Figure 6.13 :Efficacité d'un échangeur de chaleur tube/calandre avec une calandre et tout multiple de deux passages de tube (deux, quatre, etc. passages de tube)

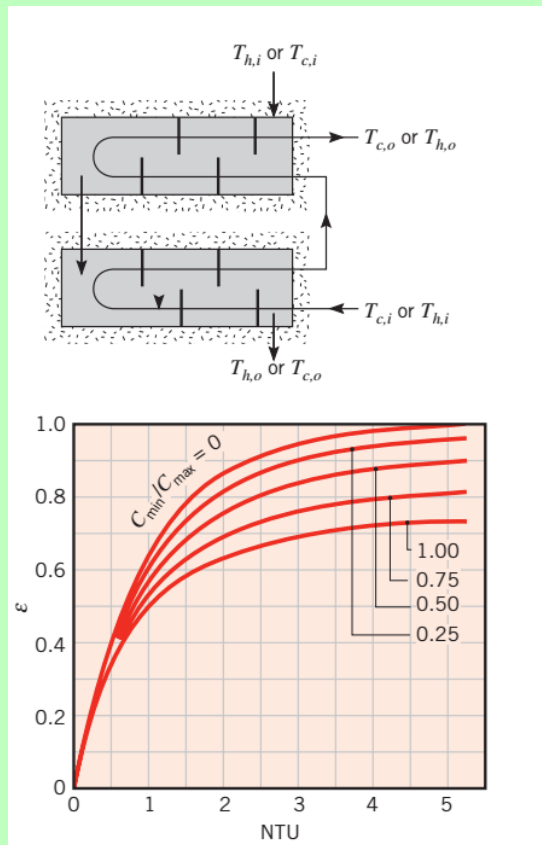


Figure 6.14 :Efficacité d'un échangeur de chaleur tube/calandre avec deux passages calandre et tout multiple de quatre passages tubulaires (quatre, huit, etc. passages tubulaires)

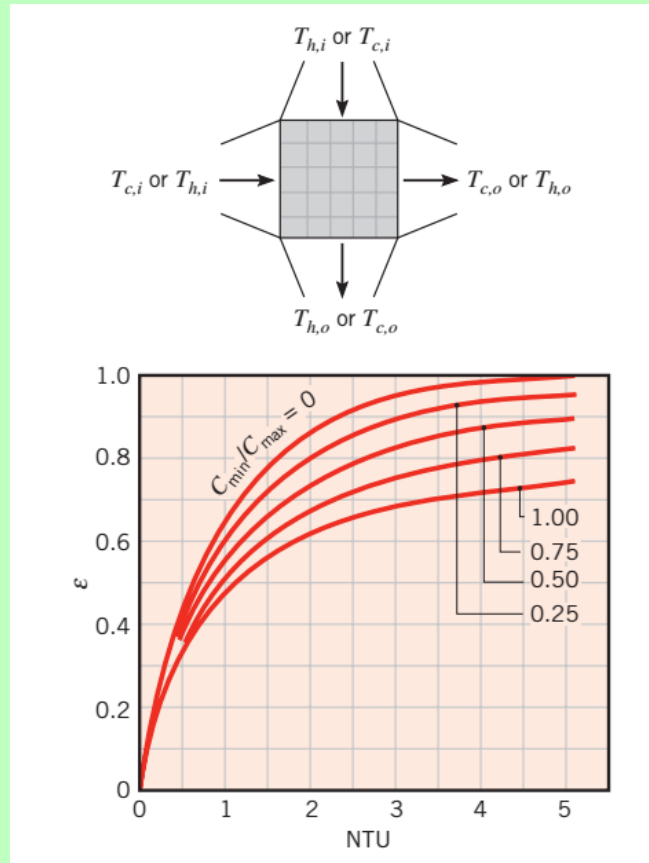


Figure 6.15 :Efficacité d'un échangeur de chaleur à flux croisé à passage unique avec les deux fluides non mélangés

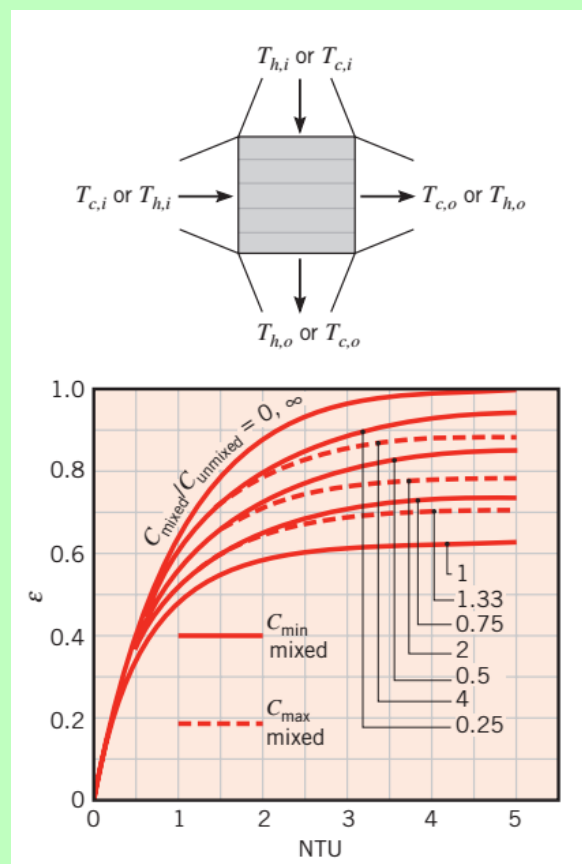


Figure 6.16 :Efficacité d'un échangeur de chaleur à flux croisé à passage unique avec un fluide mixé et l'autre non mixé