جامعة الشهيد حمه لخضر- الـــــوادي
كلية العلوم الدقيقة

قسم: الاعلام الآلي
السنة: ثانية إعلام الي

مقياس

طرق عددية

الأستــــاذ:

✓بقـــاص محمـد

الموسم الدراسي : 2023/2022

مقدمة

علم التحليل العددي يختلف على تعريفه الكثير، ولكن الأغلبية يتفقون على أنه علم استخدام الخوارزميات العددية للحصول على حلول تقريبية للمسائل الحسابية المعقدة، على العكس من الحلول التحليلية التي تعطى حلولا صحيحة تامة وغير تقريبية.

لذلك فإن الهدف العام من علم التحليل العددي هو تصميم خوارزميات – طرق- تقريبية لحل المسائل الصعبة التي يصعب حلها يدويا مثل أن تجد حلا لألف من المعادلات في ألف من المجاهيل أو تحسب معكوس مصفوفة مربعة من ألف صف وألف عمود مثلا.

على الرغم من امتداد أصول التحليل العددي في التاريخ إلا أن الطفرة التي حدثت في الحاسبات في نهاية القرن الماضي كان لها أكبر الأثر في استخدام هذا العلم في الكثير من التطبيقات الهندسية والعلمية والطبية والحيوية وشتى نواحي العلوم التي نعرفها هذه الأيام.

هذه الطفرة التي نعيشها الآن لن تمنعنا من إلقاء نظرة سريعة على تاريخ هذا العلم وبالذات على تاريخ كلمة خوارزم – *Aalgorithm* - التي لا تخلو صفحة تقريبا من صفحات أي كتاب في التحليل العددي من ذكرها ومفهوم الخوارزميات هو :

خطوات حسابية منظمة تعطى في عدد محدد من الخطوات إجابة لسؤال أو حلا لمشكلة.

هذا المؤلف يتضمن بعد التعرض لدراسة الاخطاء التحليل العددي المصفوفي وهو مقسم حسب الفصول التالية

- **الفصل الاول** إجراء مراجعة عامة حول المفاهيم الاساسية للمصفوفات يتم التطرق للطرق المباشرة لحل جملة معادلات خطية التي تم التعرض لها سابقا.
- **الفصل الثاني** و يتضمن هذا الفصل الطرق المباشرة لحل جملة معادلات خطية.
- **الفصل الثالث** و يتضمن هذا الفصل الطرق التكرارية أو غير المباشرة لحل جملة معادلات خطية.

المحتويات

دراسة الأخطاء

عند استخدام الطرق العددية لحل مسائل لا يمكن حلها تحليليا نحصل على نتائج تقريبية مما يعني وجود أخطاء وعلينا إيجاد تقريب لهذا الخطأ اذ تتلخص مهمتنا في:

- إيجاد الحل التقريبي للمسألة وتقويم الخطأ.

أ- مصادر الأخطاء:

يمكن تصنيف هذه الأخطاء المرتكبة الى خمسة أصناف أساسية:

1) أخطاء ناتجة عن وضعية المسألة:

عند دراسة ظاهرة طبيعية فإننا مرغمين على تبسيط المسألة وقبول بعض الشروط مما يؤدي الى عدة أخطاء (أخطاء المسألة) وقد يصعب حل المسألة فنعوضها بمسألة مقربة مما ينتج عنه أخطاء تسمى (أخطاء الطريقة).

2) أخطاء البتر:

أخطاء ناتجة عن وضع حدا للمسألة تعتمد عل حسابات غير منتهية (دوال تظهر في مسألة مثل متتاليات وسلاسل او كطريقة تكرارية تقرب المسألة) وبهذا تسبب أخطاء تسمى : أخطاء البتر.

3) أخطاء ناتجة عند وجود أوسطه عددية في علاقات رياضية حيث قيمتها تكون تقريبية كثوابت فيزيائية تؤدي الى أخطاء تسمى : (أخطاء بدائية)
4) أخطاء ناتجة عن تدوير عدد.
5) أخطاء متراكمة ناتجة عن الأخطاء السابقة .

ب- التقريب:

يتم التقريب من خلال التدوير او الاقتطاع

ب-1- التدوير:

هو استعمال المدورة بدلا من القيمة المضبوطة للعدد.

- قاعدة التدوير:

عند تدوير عدد لغاية n رقم معبر نحذف كل الأرقام الموجودة على يمين رقم ذا الرتبة n ولهذا الحذف شروط:

1) اذا كان أول رقم معبر محذوف أكبر من 5 نظيف 1 الى الرقم الأخير المعبر.
2) اذا كان اول رقم اقل تماما من 5 فإن الرقم الأخير يبقى على حاله.
3) اذا كان اول رقم معبر محذوف مساويا الى 5 وكل الأرقام المحذوفة اصفار فإن:
- الرقم الأخير لا يتغير اذا كان زوجي.
- نضيف له 1 اذا كان فردي.

مثال: 1) تدوير العدد $\pi=3.141592$ الى 4 ثم 6 ارقام معبرة ودقيقة نحصل على:

- 3.142 (اربع ارقام معبرة) تطبيق 01
- 3.14159 (ستة ارقام معبرة) تطبيق 02

1) تدوير العدد 1.2500 الى عددين معيرين نحصل على العدد المقرب 1.2 (تطبيق03)

ب-2- الاقتطاع:

تستعمل الآلة الحاسبة او الحاسوب قاعدة الاقتطاع أي الاكتفاء بإظهار عدد منته بعد الفاصلة.

- مثلا $a=0.126748$ تظهر فقط $a'=0.12674$
- الامر $Format$ في الماتلاب يحدد كيفية عرض النتيجة على الشاشة وهناك نوعان:

✓ الأول: $Format\ short$ يعرض النتيجة في خمس خانات فقط (خانات عشرية)
✓ الثاني: $Format\ long$ يعرضها في 16 خانة عشرية وهذا اقصى عدد من الخانات في الماتلاب.

ملاحظة

يمكن إدراج الخطأ الناتج عن البتر كخطأ اقتطاع عند استعمال البتر في سلاسل تايلور.

ت- أنواع الأخطاء:

من خلال الخطأ نتعرف على مدى دقة وسرعة الطرق العددية والمفاضلة بينهما.

ت-1- الخطأ المطلق:

لتكن a القيمة المقربة لقيمة دقيقة A نعرف الخطأ المطلق لـ a على A ورمزه Δ

المقدار: $\Delta= |A-a|$

- تعريف:

نسمي الحد الأعلى للخطأ المطلق كل عدد Δa حيث : $\Delta= |A-a| \leq \Delta a$

أي : $a-\Delta a \leq A \leq a+\Delta a$ وبالتالي : $A = a \pm \Delta a$

مثال: اوجد الحد الأعلى للخطأ المطلق لـ $a = 3.14$ التي تعوض قيمة $A = \pi$

الحل :

- لدينا : $3.14 < \pi < 3.15$

اذن $|a-\pi| \leq 0.01$ ومنه يمكن أخذ $\Delta a = 0.01$

- اذا أخذنا $3.140 < \pi < 3.142$ فإن : $\Delta a = 0.002$

<u>ت-2- الخطأ النسبي:</u>

الخطأ المطلق لا يعطي فكرة حقيقية عن دقة القياس، مثلا لو قسنا طول القاعة وطول المسافة بين الوادي والعاصمة وكان الخطأ المطلق نفسه فالسؤال هو أي القياسين أدق؟

طبعا المسافة بين الوادي و العاصمة أدق وبالتالي لمعرفة ذلك تم إدخال الخطأ النسبي المعرف كما يلي : $E = \frac{\Delta}{|A|}$

تعريف: الحد الأعلى للخطأ النسبي Ea لعدد مقرب a معطى هو عدد كيفي يحقق: $E \leq Ea$

أي ان $\frac{\Delta}{|A|} \leq Ea$ أي $\Delta \leq |A|Ea$

ومنه: $\Delta a = |A|.Ea$ اذن $Ea = \frac{\Delta}{|A|}$

مثال: وزن 1 دم^3 من الماء في درجة حرارة $OC°$ هي :

$$P = 999.847 \pm 0.001$$

اوجد حدا للخطأ النسبي.

الحل: $\Delta P = 0.001$ لدينا $P = 999.847$

ومنه : $Ep = \frac{0.001}{999.847} = 10^{-4}\%$

<u>ت-3- العمليات الجبرية على الأخطاء:</u>

لتكن a و b القيمتان التقريبيتان للعددين A و B على التوالي حيث:

- $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$

$$E_{(a+b)} = \frac{1}{|A+B|}(A.E_a + B.E_b)$$

- $\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b$

$$E_{(a-b)} = \frac{1}{|A-B|}(A.E_a + B.E_b)$$

- $\Delta(a.b) = b\Delta a + a\Delta b$

$$E_{(a.b)} = E_a + E_b$$

- $\Delta\left({}^{a}/_{b}\right) = \frac{A}{B}\left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}\right)$

$$E\left({}^{a}/_{b}\right) = E_a - E_b$$

الفصل الاول   مراجعة حول المصفوفات

I. مقدمة:

سنتناول في هذا الفصل العمليات التي يتم إجراؤها على المصفوفات او المحددات إضافة الى تعريف بعض المصفوفات الخاصة.

مما يسهل علينا التعامل مع الطرق المباشرة او التكرارية لحل جمل معادلات خطية كون المصفوفات تلعب دورا رئيسيا في هذ العملية.

II. مفاهيم أساسية:

1- تعريف المصفوفة

كل تطبيق خطي l معرف من الفضاء الشعاعي E وبعده n نحو الفضاء الشعاعي F وبعده m يمكن ان يمثل بواسطة جدول مستطيل A مكون من m سطر و n عمود، على النحو التالي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & a_{m.n} \end{bmatrix}$$

نسمي A: المصفوفة المرفقة للتطبيق الخطي l .

وتكتب :

$$A = \left(a_{i,j}\right) \ : \quad \begin{cases} 1 \leq i \ \leq \ n \\ 1 \leq j \ \leq \ m \end{cases}$$

$a_{i,j}$: يمثل العنصر ذو الرتبة i بالنسبة للأسطر وذو الرتبة j بالنسبة للأعمدة.

- اذا كانت : m=n
  A تسمى مصفوفة مربعة.
- اذا كانت : m=1

نحصل على سطر شعاع : $A = [a_{11,} \quad a_{12,} \quad \cdots\cdots \quad a_{1n}]$

- اذا كانت : n=1

نحصل على عمود شعاع : $A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix}$

2- العمليات على المصفوفات:

ستقدم على شكل تمرين للمراجعة في التمارين المقترحة لهذا الفصل.

3- بعض الخواص الأساسية:

لتكن $A\left(a_{i,j}\right)$ مصفوفة مربعة $1 \leq i,j \leq n$

أ- المصفوفة A متناظرة اذا وفقط اذا تحقق :

$$\forall_{i,j} \; : \; 1 \leq i,j \leq n \quad : \quad a_{1,j} = a_{j,i}$$

ب- منقول المصفوفة A ورمزها A^t حيث :

$$A^t = \left(a_{j,i}\right)$$

نتيجة : اذا كانت A مصفوفة متناظرة، فإن: $A^t = A$

ت- المصفوفة العكسية للمصفوفة A ورمزها A^{-1} بحيث : $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$

ث- تكون المصفوفة A معرفة موجبة اذا تحقق :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad : \; X \neq 0 \; : \; X^t AX > 0$$

اذا كانت : $X^t AX \geq 0$ فإن المصفوفة A في هذه الحالة موجبة لكن غير معرفة.

ج- تكون المصفوفة A ذات قطر مسيطر بالنسبة للأسطر والاعمدة اذا تحقق :

$$\left|a_{1,i}\right| \geq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \left|a_{i,j}\right| \quad \forall_{i,j}$$

اذا كانت العلاقة $(>)$ نقول ان A ذات قطر مسيطر تماما .

4- المصفوفات المثلثية والقطرية :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} ; \; C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

A : مصفوفة قطرية

B : مصفوفة مثلثية سفلية

C : مصفوفة مثلثية علوية

5- المحددات:

نرمز للمحدد مصفوفة بالرمز : det A أو $|A|$ المحدد هو عبارة عن ثابت متغير في الكثير من التطبيقات وخاصة في حل جمل المعادلات الخطية.

بالنسبة للمصفوفة المرتفعة $A(2 \times 2)$ حيث :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad |A| = \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

بالنسبة للمصفوفة المربعة الثلاثية $A(3 \times 3)$ يمكن حساب محددها عن طريق تكرار أول عمودين كما يلي :

$$A=\left[\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\right]$$

حيث :

$$\begin{aligned} &|A| \\ &= \det A \\ &= (a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33} + \quad a_{12} \quad a_{23} \quad a_{31} + \quad a_{13} \quad a_{21} \quad a_{32}) \\ &- (a_{31} \quad a_{22} \quad a_{13} + \quad a_{32} \quad a_{23} \quad a_{11} + \quad a_{33} \quad a_{22} \quad a_{12}) \end{aligned}$$

حساب المحدد بإستعمال المحددات المساعدة:

$$\begin{aligned} |A| = \det A = \ & a_{11}(-1)^{|+|} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ & + a_{13} \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

يمكن اختيار أي سطر او عمود حسب سهولة الحساب.

6- القيم الذاتية والاشعة الذاتية:

لتكن : $y = AX$ حيث :

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \; ; \; A(n \times n) \; ; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

نضع : $y = \lambda X$

نجد : $(y = \lambda X = AX) \leftrightarrow (A - \lambda I)\, X = 0$

فنحصل على جملة معادلات خطية متجانسة.

الجملة $(A - \lambda I)\, X = 0$ اذا وفقط اذا كان :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- هذه المعادلة تسمى : المعادلة المميزة.
- جذور هذه المعادلة تسمى القيم الذاتية لـ A.
- الاشعة التي تمثل حلول الجملة تسمى :

الاشعة الذاتية لـ A وكل قيمة ذاتية مرفقة بشعاع ذاتي.

- **الشعاع الطيفي :**

نرمز للشعاع الطيفي للمصفوفة A بالرمز $\rho(A)$ حيث : $\rho(A) = max|\lambda i|: 1 \le i \le n$

λ_i : القيم الذاتية لـ A :

ملاحظة:

الشعاع الطيفي يلعب دورا هاما في معرفة تقارب الطرق التكرارية.

7- النظيم المصفوفي :

سوف نذكر ثلاث نظيمات :

$$1 \le i,j \le n \qquad \mathrm{A} = (a_{i,j})$$

1) $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |ai,j|$

2) $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |ai,j|$

3) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$

الفصل الثاني : الطرق المباشرة لحل جملة معادلات خطية

مقدمة

الكثير من التطبيقات يتم تمثيلها بعدد من المعادلات الخطية وعندما يكون عدد هذه المعادلات

صغيرا، أقل من ثلاثة أو أربعة، فإنه يمكن حل هذه المعادلات يدويا أو بطرق تحليلية أو يدوية وإيجاد قيم لهذه المجاهيل بشرط أن يكون عدد المجاهيل مساويا لعدد المعادلات.

أما عندما يصل عدد هذه المجاهيل وبالتالي عدد المعادلات إلى العشرات أو المئات فإنه في هذه الحالة يستحيل الحل التحليلي ولابد من استخدام الحاسب وبالتالي الطرق التكرارية لحل جملة المعادلات الخطية هذه الطرق سنتعرض لها في الفصل الموالي.

توجد نظم المعادلات الخطية في الكثير من التطبيقات الهندسية مثل الأبنية والتركيبات، والجوامد المرنة، والتدفق الحرارى، والمجالات الكهرومغناطيسية والدوائر الكهربية وغيرها الكثير .

تعتمد الطرق المباشرة على تحويل مجموعة المعادلات المعطاة إلى مجموعة أخرى من المعادلات التي يسهل حلها كما سنرى.

هذا التحويل يتم عن طريق إجراء بعض العمليات الأولية على مصفوفة المعاملات وهذه العمليات ليس لها أي تأثير على محددة هذه المصفوفة ولذلك فهي لن تؤثر على الحل النهائي و هي:

1 - تبديل معادلتين بين بعضهما البعض.

2 - ضرب معادلة في ثابت لا يساوى الصفر.

3 - ضرب معادلة في ثابت لا يساوى الصفر ثم طرحها من معادلة أخرى.

4- تفكيك مصفوفة المعاملات الى جداء مصفوفتين مثلثيتين .

وهذه العمليات كلها سنستخدمها فى هذه الطرق المباشرة لحل جمل المعادلات.

III.تذكير:

لحل جملة معادلات خطية تعرضنا سابقا لطريقة كرامر والمصفوفة العكوس. سيتم التطرق لهما في الاعمال الموجهة أما في هذا الفصل فسوف نتعرض للطرق التالية:

1- طريقة غوص للحذف

2- طريقة التفكيك : LU

3- طريقة شوليسكي

1) طريقة غوص:

تعتمد طريقة غوص على تبديلات تخص الجملة الخطية (AX = b) بحيث يتم في كل مرة حذف متغير من معادلة الى ان نصل الى جملة خطية تتحول من خلالها A الى مصفوفة علوية او سفلية ثم يتم استنتاج الحلول بالتعويض.

مثال:

لتكن الجملة التالية:

$$(S)\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\;\,x_2 + a_{13}\,x_3\; +\; a_{14}\,x_4 = \;\; y_1\;(1) \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\;\,x_2 + a_{23}\,x_3\; +\; a_{24}\,x_4 = \;\; y_2\;(2) \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\;\,x_2 + a_{33}\,x_3\; +\; a_{34}\,x_4 = \;\; y_3\;(3) \\ a_{41}\,x_1 + a_{42}\;\,x_2 + a_{43}\,x_3\; +\; a_{44}\,x_4 = \;\; y_4\;(4) \end{cases}$$

المرحلة الأولى: (الحذف)

أ- $a_{11} \neq 0$: نقوم بقسمة المعادلة (1) على a_{11} .

فنحصل على:

$$(1) : x_1 + a_{12}^1\, x2 + a_{13}^1\, x3 + a_{14}^1\, x4 = y1$$

$$a_{i,j}^1 = a_{i,j} / a_{11} \quad ; \quad y_1^1 = y_1/a_{11} \quad j=1,2,3,4$$

ثم نقوم بحذف المتغير x1 من المعادلات (2)، (3)، و (4) نجد:

$$(S^2)\begin{cases} x_1 \;+\; a_{12}^1\,x_2 \;+ a_{13}^1\,x_3 \;+\; a_{14}^1\,x_4 \;=\; y_1^1 \;\;(1^1) \\ 0 + \;a_{22}^1\,x_2 \;+\; a_{23}^1\,x_3 \;+\; a_{24}^1\,x_4 \;=\; y_2^1 \;\;(2^1) \\ 0 \;+\; a_{32}^1\,x_2 \;+\; a_{33}^1\,x_3 \;+\; a_{34}^1\,x_4 = \;\; y_3^1\;(3^1) \\ 0 \;+\; a_{42}^1\,x_2 \;+\; a_{43}^1\,x_3 \;+\; a_{44}^1\,x_4 \;=\; y_4^1 \;\;(4^1) \end{cases}$$

حيث:

$a_{i,j}^1 = \;\; a_{i,j} \;\; / \;\; a_{i,1}\;\; a_{i,j}^1$ $\qquad\qquad$ $2 < i \leq 4$

$y_1^1 = \;\; y_i \;\; / \;\; a_{i,1}\; y_1^1$ $\qquad\qquad$ $2 < j \leq 4$

ب- نكرر نفس العملية مع الشطر الثاني بالقسمة على (a_{22}^{1}) على اعتبار أن: ($a_{22}^{1} \neq 0$) فنحصل على:

$$(2^2) \ : \ x_2 + a_{23}^{2} x_3 + a_{24}^{2} x_4 = y_2^2$$

حيث:

$$a_{2,j}^{1} = a_{2,j}^{1} / a_{22}^{1}$$

j=3,4

$$y_2^2 = y_2^1 / a_{22}^{1}$$

ثم نقوم بحذف المتغير x_2 من المعادلات (3^1) و (4^1) نجد :

$$(S^2) \begin{cases} x_1 + a_{12}^{1} x_2 + a_{13}^{1} x_3 + a_{14}^{1} x_4 = y_1^1 \ (1^1) \\ 0 + x_2 + a_{23}^{2} x_3 + a_{24}^{2} x_4 = y_2^2 \ (2^2) \\ 0 + 0 + a_{33}^{2} x_3 + a_{34}^{2} x_4 = y_3^2 \ (3^2) \\ 0 + 0 + a_{43}^{2} x_3 + a_{44}^{2} x_4 = y_4^2 \ (4^2) \end{cases}$$

ج- نعتبر أن ($a_{33}^{2} \neq 0$) ونقوم بعملية القسيمة كما سبق المعادلة (3^2) تصبح من الشكل :

$$(3^3) \ : \ x_3 + a_{34}^{3} x_4 = y_3^3$$

حيث:

$$a_{3,j}^{3} = a_{3,j}^{2} / a_{33}^{2}$$

j= 4

$$y_3^3 = y_3^2 / a_{33}^{2}$$

ثم نقوم بحذف المتغير x_3 من السطر الرابع فنجد :

$$(S^3) \begin{cases} x_1 + a_{12}^{1} x_2 + a_{13}^{1} x_3 + a_{14}^{1} x_4 = y_1^1 \\ 0 + x_2 + a_{23}^{2} x_3 + a_{24}^{2} x_4 = y_2^2 \\ 0 + 0 + x_3 + a_{34}^{2} x_4 = y_3^3 \\ 0 + 0 + 0 + a_{44}^{2} x_4 = y_4^4 \end{cases}$$

د- نقوم بقسمة السطر الرابع على (a_{44}^{3}) على اعتبار ان ($a_{44}^{3} \neq 0$) فنحصل على :

$$y_4^4 = y_4^3 / a_{44}^{3}$$

$$a_{44}^4 = 1$$

أخيرا نحصل على شكل مصفوفي بمصفوفة مثلثية يسهل حلها بالتراجع : AX = b

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & a_{14}^1 \\ 0 & 1 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^1 \\ y_2^2 \\ y_3^3 \\ y_4^4 \end{bmatrix}$$

المرحلة الثانية (الحل بالتعويض):

$$x_4 = y_4^4$$

$$x_3 = y_3^3 - a_{34}^3 x_4$$

$$x_2 = y_2^2 - a_{23}^2 x_3 - a_{24}^2 x_4$$

$$x_1 = y_1^1 - a_{12}^1 x_2 - a_{13}^1 x_3 - a_{14}^1 x_4$$

مثال:

حل الجملة التالية باستعمال طريقة غوص للحذف : AX = b

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

المرحلة الأولى: - الحذف - $a_{11} = 2 \neq 0$

لتسهيل العملية سوف نحافظ على شكل المصفوفة A مع إضافة الشعاع b

المصفوفة الموسعة $[A; b]$

أ- نقوم بقسمة السطر الأولى على a_{11}

$$L_1/a_{11} : L_1/2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 & : & 1/2 \\ 2 & 1 & 4 & : & 1 \\ 6 & 4 & 2 & : & 2 \end{bmatrix}$$

نحذف x_1 من L_2 و L_3 نجد:

$$L_2 - 2L_1 \quad L_3 - 6L_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 & : & 1/2 \\ 0 & -2 & -4 & : & 0 \\ 0 & -5 & -22 & : & -2 \end{bmatrix}$$

ب- (a_{44}^{3} = -2 ≠ 0) نقوم بقسمة السطر الثاني على (-2) ثم نقوم بحذف المتغير x_2 من السطر L_3 نجد :

$$L_2/-2 \text{ و } L_3 - 5L_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 & : & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 0 & -12 & : & -2 \end{bmatrix}$$

ج- نقوم بقسمة السطر الثالث على (-12) نجد :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 & : & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1/6 \end{bmatrix}$$

المرحلة الثانية (الحل بالتعويض) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$x_3 = \frac{1}{6}$$

$x_2 = 0 - 2x_3 = -\frac{1}{3}$

$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_2 - 4x_3 = -\frac{1}{3}$

حلول الجملة هي :

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

ملاحظات:

1) العدد $\left(a_{ii}^{k}\right)$ يسمى محور اذا كان $\left(a_{ii}^{k} = 0\right)$ نقوم بعملية تبديل الاسطر او الاعمدة لكي نحصل على محو غير معدوم.مع مراعاة ما ينتج عن هذا التبديل.
- إذا كان بتبديل الاسطر فينتج عنه تبديل المعادلة أي الطرف الثاني ايضا.
- إذا كان تبديل الاعمدة فينتج عنه تبديل المتغيرات المرتبطة بهذه الاعمدةوعند الحصول على الحل نقوم بإعادتها إلى الوضعية الاصلية.

2) يمكن الحصول على مصفوفة مثلثية علوية او سفلية حسب الانطلاق من الأعلى إلى الأسفل او العكس ونحصل على نفس النتيجة.

3) طريقة غوص- جوردان:

نتبع نفس الخطوات السابقة لطريقة غوص وعند الحصول على مصفوفة مثلثية نواصل العملية للحصول على مصفوفة A قطرية (عناصر قطرها تساوي 1)

4) نستعمل طريقة غوص - جوردان أيضا في اتجاه المصفوفة العكسية للمصفوفة A بإتباع نفس الخطوات حيث تكون المصفوفة الموسعة من الشكل : $[A:I]$

$$[A:I] \longrightarrow [I, A^{-1}]$$

(سيتم التعرض لها في التمارين المقترحة)

2) طريقة التفكيك: LU - كروت - (Lower - Upper)

لحل الجملة: AX = b حيث A مصفوفة قابلة للقلب نقوم بإيجاد مصفوفتين مثلثتين:

L : مصفوفة سفلية

U : مصفوفة علوية

حيث $A = L \times U$

نتيجة: يوجد تفليك وحيد لـ A اذا وفقط اذا كانت كل المحددات الصغرى لـ A غير معدومة.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

من خلال عملية الجداء (L x 4) ومساواتها بـ A نجد :

$$l_{11} = a_{11}$$

$$l_{21} = a_{21}$$

$$l_{31} = a_{31}$$

- $(l_{11}U_{12} = a_{12}) \Longrightarrow U_{12} = {a_{12}}/{l_{11}}$
- $(l_{11}U_{13} = a_{13}) \Longrightarrow U_{13} = {a_{13}}/{l_{11}}$
- $(l_{21}U_{12} + l_{22}) = a_{22} \Longrightarrow l_{22} = a_{22} - l_{21}U_{12}$
- $(l_{31}U_{12} + l_{22}) = a_{32} \Longrightarrow l_{32} = a_{32} - l_{31}U_{12}$

ثم:

- $l_{21}U_{13} + l_{22}U_{23} = a_{23}$

ومنه:

$$U_{23} = {[a_{23} - l_{21}U_{13}]}/{l_{22}}$$

- $l_{31}U_{13} + l_{31}U_{23} + l_{33} = a_{33}$

ومنه:

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}U_{13} - l_{32}U_{23}$$

بعد الحصول على L و U نقوم بحل الجملة على مرحلتين حيث:

$Ax = b$: $L(UX) = b$

نضع : $U X = Z$ ثم نقوم بحل الجملة:

$$\begin{cases} L.Z = b \\ U\,X = Z \end{cases}$$

نقوم أولا بإيجاد الشعاع Z ثم نحل الجملة الثانية بحيث يصبح Z معلوما.

تطبيق :

حل الجملة $AX = b$ حيث:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 27 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 120 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

المرحلة الأولى: التفكيك

A مصفوفة قابلة للقلب وكل المحددات الصغرى غير معدومة.

نضع : $LU = A$ أي :

$$\begin{matrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{matrix} \;\mathrm{X}\; \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 27 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

اذن:

- $l_{11} = 1 \quad ; \quad l_{21} = 3 \quad ; \quad l_{31} = 2$
- $(l_{11}U_{12} = 1) \Longrightarrow U_{12} = 1$
- $(l_{11}U_{13} + 0 \times U_{23} = 1) \Longrightarrow U_{13} = 1$

ثم :

- $(l_{21}U_{12} + l_{22} = 9) \Longrightarrow l_{22} = 6$
- $(l_{31}U_{12} + l_{32} = 4) \Longrightarrow l_{32} = 2$
- $(l_{21}U_{13} + l_{22}U_{23} = 27) \Longrightarrow U_{23} = 4$

وأخيرا:

- $(l_{31}U_{13} + l_{32}U_{23} + l_{33} = 2) \Longrightarrow l_{33} = -2$

ومنه نجد :

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المرحلة الثانية:

نضع $UX = Z$ ونقوم بحل الجملة : $LZ = b$ أي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 120 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

نجد:

- $Z_1 = 14$
- $Z_2 = {(120 - 3 \text{ x } 14)}/{6} = 13$
- $Z_3 = {(50 - 2 \text{ x } 14 - 2 \text{ x } 13)}/{-2} = 2$

اذن حل الجملة $LZ = b$ هو : $Z = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}$

نقوم الآن بحل الجملة الثانية لإيجاد X

أي : $UX = Z$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نجد :

$x_3 = 2$

$x_2 = 13 - 4x_2 = 13 - 8 = 5$

$x_1 = 14 - 5 - 2 = 7$

اذن حل الجملة $AX = b$ هي : $X = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) طريقة شولسكي:

نظرية : اذا كانت A مصفوفة مربعة متناظرة ومعرفة موجبة فيمكن تفكيكها على الشكل التالي:

$A = L^t.L$ حيث L^t مصفوفة حقيقية مثلثية.

مثال: $A = L^t.L$ أي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

تطبيق نفس العمل في تفكيك (LU) مع الأخذ بالإعتبار أن:

$\forall_i, \forall_j \quad l_{i,j} = l_{j,i}$ ومنه :

- $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$
- $l_{12} = {a_{21}}/{l_{11}}$
- $l_{13} = {a_{31}}/{l_{11}}$
- $l_{22} = \sqrt{a_{22} - (l_{12})^2}$
- $l_{23} = {[a_{23} - l_{12}.l_{13}]}/{l_{22}}$
- $l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{13})^2 - (l_{23})^2}$

حل الجملة يكون على الشكل :

$$\begin{cases} L^t.Z = b \\ L\,X = Z \end{cases}$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \; ; \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

1) احسب : A – B , B x A , B x A ثم $\det A$; $\det B$; $det\,(A\times B)$
2) استنتج $\det(A^{-1})$
3) احسب $\|B\|_1$, $\|B\|_\infty$

التمرين الثاني:

لتكن المصفوفة ثلاثية الأقطار A حيث :

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

1) بين ان A متناظرة هل A موجبة ؟ برر
2) هل المصفوفة ذات قطر مسيطر؟ برر اجابتك
3) اوجد القيم الذاتية للمصفوفة A ثم عين قيمة الشعاع الطيفي. استنتج $\|A\|_2$.

التمرين الثالث:

لتكن الجملة الخطية التالية :

$$(\text{I})\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+2y-z=1 \\ -2x-2y-z=2 \end{cases}$$

1) ضع الجملة (I) على الشكل المصفوفي : $AX=b$
2) حل الجملة (I) مستعملا طريقة كرامر.
3) اوجد حل الجملة (I) بإستعمال طريقة غوص للحذف.

التمرين الرابع :

اوجد حلول الجملة التالية مستعلا طريقة غوص مع تغيير المحاور :

$$\begin{cases} 3x+8y+9z=6 \\ 3x+8y+z=11 \\ x+2y+4z=20 \end{cases}$$

التمرين الخامس :

لدينا الجملة $AX=b$ حيث :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) جل الجملة مستعملا طريقة غوص ، جوردان.
2) اوجد المصفوفة العكسية لـ A بإستعمال طريق غوص ، جوردان.

التمرين السادس:

حل الجملة الخطية المعرفة على شكل المصفوفي $AX=b$ حيث :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} ; B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1) بإستعمال طريقة غوص .

2) بإستعمال طريقة غوص ، جوردان.

التمرين السابع:

لتكن الجملة:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 4\,x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

حل الجملة مستعملا طريقة التفكيك (LU) (كروت).

التمرين الثامن:

حل الجملة التالية مستعملا طريقة شولبسكي:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ -x_2 + 2\,x_3 = 3 \end{cases}$$

الفصل الثالث : الطرق التكرارية لحل جملة معادلات خطية

مقدمة

طرق الحل لأى نظام من المعادلات الخطية التي رأيناها في الفصل السابق تعتبر طرقا مباشرة لإيجاد الحل، وتتميز هذه الطرق بأنها تصل إلى الحل النهائي بعدد محدد من الخطوات، وحيث أن الحاسب يعمل حسب دقة محددة نتيجة العدد.

على العكس من ذلك، فإن الطرق التكرارية التي نقدمها هنا، و تسمى بالطرق غير المباشرة أيضا، تبدأ بتخمين حل معين، وبطريقة تكرارية تحاول هذه الطرق التحسين من هذا الحل الذى تم تخمينه في خطوات متتالية حتى يصبح التغير في الحل مع التقدم في هذه الخطوات صغيرا، عندها نوقف الخطوات ويكون هذا الحل الأخير هو الحل المقدم لمجموعة المعادلات.

هذه الخطوات التكرارية من الممكن أن يكون عددها كبيرا جدا، ولذلك فإن هذه الطرق تكون أبطأ كثيرا من الطرق المباشرة.

الجدير بالذكر أن هذه الطرق لا تعتمد على قيمة الحل الابتدائي الذى نبدأ به محاولات الحل. كما

أن هذه الطرق من الممكن ألا تصل إلى حل، بمعنى أن الحلول تتباعد مع تكرار المحاولات. على الرغم من ذلك فإن

هذه الطرق يكون لها المميزات التالية التي تجعلها هي الأفضل عند حل مسائل معينة:

1 - في المصفوفات المتناثرة العناصر تكون معظم عناصر المصفوفة تساوى أصفارا، ولذلك فإن هذه الطرق تسمح بتخزين العناصر غير الصفرية فقط والتعامل معها حسابيا مما يوفر وقتا في الحساب وفى مساحة التخزين -خاصة إذا كان بعد المصفوفة كبيرا- وذلك على العكس من الطرق المباشرة التي لا تميز بين العناصر الصفرية وغير الصفرية في الحساب. وهناك الكثير من التطبيقات التي تكون مصفوفاتها متناثرة.

2 - الميزة الثانية أن الطريقة التكرارية تكون ذاتية التصحيح، بمعنى أن كل محاولة للحل تكون أصح من المحاولة السابقة لها.

3 - الميزة الثالثة أن الطرق التكرارية لا تغير من قيم عناصر المصفوفة الأصلية، على العكس من الطرق المباشرة فإنها تغير من قيم عناصر المصفوفة الأصلية بل وفى ترتيب الصفوف كما رأينا في الفصل السابق.

في هذا الفصل سوف نستعرض طريقتين من الطرق التكرارية وهما

- طريقة جاكوبي

- طريقة غوص-سايدل

I. طريقة جاكوبي : (jacobi)

لتكن الجملة التالية:

$$(I)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_n x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = b_n & (\mathrm{n}) \end{cases}$$

نعتمد طريقة جاكوبي على إيجاد:

- قيمة x_1 من المعادلة (1) بدلالة باقي المتغيرات.
- قيمة x_2 من المعادلة (2) بدلالة باقي المتغيرات.

⋮

- قيمة x_n من المعادلة (n) بدلالة باقي المتغيرات.

فنحصل على الجملة التالية:

$$(I')\begin{cases} x_1 = c_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1n}x_n \\ x_2 = c_2 + t_{21}x_1 + \cdots + t_{2n}x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n = c_n + t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \cdots + t_{n,n-1}x_{n-1} \end{cases}$$

حيث: $(a_{i,i} \neq 0)$

$$C_i = {}^{b_i}/_{a_{ii}} \qquad \text{i= 1,2, … ,n}$$

$$t_{i,j} = {}^{-a_{i,j}}/_{a_{ii}} \qquad (\, j \neq i \,)$$

$$t_{ii} = 0 \qquad \text{i = 1, 2, …, n}$$

الجملة ('I) يكمن كتابتها على الشكل:

$$X^k = TX^{(k-1)} + C \qquad \text{k=1, …,n}$$

$$T=\begin{cases} 0 & t_{12} & \dots\dots & t_{1n} \\ t_{21} & 0 & \dots\dots & t_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots\dots & 0 \end{cases} \quad ; \quad C=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

المصفوفة التكرارية حيث : T قطرها كل عناصره معدومة .

الكتابة العامة لخوارزمية جاكوبي:

$$\begin{cases} x_i^{(k)} = c_i + \sum_{j=1}^{1} t_{i,j}\, x_j & \mathrm{k} = 1, 2, \dots, n \\ t_{ii} = 0 & \mathrm{i} = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

يمكن كتابتها مباشرة بإستعمال المصفوفة A كالآتي :

$$\begin{cases} x_i^{(k)} = \left[b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(-a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) \right] \Big/ a_{ii} & \mathrm{k} = 1, \dots, n \\ & i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

لحل الجملة نقوم بالخطوات التالية:

1- نقوم بإختيار قيمة بدائية$X^{(0)}$ أي من اجل (k=0).

2- نضع k=1 ثم نقوم بحساب $X^{(1)}$ من خلال مركباته $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$. مع الشرط a_{11}≠0 اذا لم يتحقق الشرط نقوم بالتبديل، ثم نضع k=2 ونعيد الحساب بنفس الكيفية لـ $X^{(2)}$ ثم $X^{(3)}, \dots X^{(k)}$.

3- اختبار التوقف:

اذا كان $X^{(k)}$ يمثل الحل التقريبي فهو يحقق اختبار التوقف المعطى من خلال العبارة التالية:

$$\left| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right| < \varepsilon \qquad\qquad \text{القيمة } \varepsilon \text{ معطاة}$$

اذا لم يحقق$X^{(k)}$ اختيار التوقف نضيف 1 للعدد k ونعود الى (2).

مثال:

لتكن الجملة التالية:

$$(I)\begin{cases} 8x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 12 \end{cases}$$

اذن حسب ما سبق:

$$(I')\begin{cases} x_1 = 1 - 0.125x_2 + 0.125x_3 \\ x_2 = 0.571 + 0.143x_1 + 0.286x_3 \\ x_3 = 1.333 - 0.222x_1 + 0.111x_2 \end{cases}$$

نكتب الآن الصيغة العامة بدلالة k :

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 1 - 0.125x_2^{(k-1)} - 0.125x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = 0.571 + 0.143x_1^{(k-1)} - 0.286x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = 1.333 - 0.222x_1^{(k-1)} - 0.111x_2^{(k-1)} \end{cases}$$

$$X^{(k)} = T_j X^{(k-1)} + C$$

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & -0.125 & -0.125 \\ 0.143 & 0 & 0.286 \\ -0.222 & -0.111 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة التكرارية لجاكوبي

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.571 \\ 1.333 \end{bmatrix}$$

يمكنك التأكد أنه من أجل (K=6)

نجد :

$$X^{(6)} = \begin{pmatrix} 1.001 \\ 1.001 \\ 1.001 \end{pmatrix}$$

علما ان الحل الصحيح للجملة هو :

$$X \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

II. طريقة غوص- سايدل:

هي عبارة عن تحسين لطريقة جاكوبي فعوض استعمال المركبات:

(i >1) $x_1^{(k-1)}, \dots , x_{i-1}^{(k-1)}$ للشعاع $X^{(k-1)}$ نستعمل المركبات: $x_1^{(k)}, \dots , x_{i-1}^{(k)}$ للشعاع $X^{(k)}$ التي تم حسابها ومنه نحصل على الخوارزمية التالية:

$$\begin{cases} x_i^{(k)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{1} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right] \Big/ a_{ii} \\ \\ i = 1, \dots , n. \qquad k = 1, 2, \dots , n \quad (a_{11} \neq 0) \end{cases}$$

مثال:

سنقوم بحل المثال السابق المعطى في طريقة جاكوبي لملاحظة الفرق:

نحصل على الجملة التالية:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 1 - 0.125 x_2^{(k-1)} - 0.125 x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = 0.571 + 0.143 x_1^{(k-1)} - 0.286 x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = 1.333 - 0.222 x_1^{(k-1)} - 0.111 x_2^{(k-1)} \\ k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

يمكنك التأكد أن:

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.997 \\ 0.996 \\ 1.001 \end{pmatrix}$$

ثم مقارنتها بالنتائج السابقة لطريقة جاكوبي ونلاحظ عملية التسريع في الوصول للحل التقريبي.

III. تفكيك المصفوفة: A

من خلال الجملة: AX =b يمكن تفكيك المصفوفة A للحصول على المصفوفة التكرارية لطريقة جاكوبي وغوص- سايدل.

نضع:

D: $d_{ii} = a_{ii}$ مصفوفة قطرية

L: $l_{ii} = -a_{ij} \quad _{i<j}$ مصفوفة سفلية

U: $U_{ii} = -a_{ij} \quad _{i>j}$ مصفوفة علوية

نحصل على العلاقة التالية:

$$A = D - L - U$$

$$= D - (L+U)$$

أ - المصفوفة التكرارية لجاكوبي: T_j

الجملة AX=b تصبح من الشكل:

$$[D - (L + U)]\, X = b$$

ومنه:

$$DX = (L + U)\, X + b$$

بما ان المصفوفة D قابلة للقلب نحصل على :

الطريقة التكرارية لجاكوبي :

$$DX^{(k)} = (\, L + U\,)X^{(k-1)} + b$$

ومنه :

$$X^{(k)} = D^{-1}(\, L + U\,)X^{(k-1)} + D^{-1}b$$

اذن المصفوفة التكرارية لجاكوبي هي :

$$\boldsymbol{T_j = D^{-1}\,(D - L)}$$

ب- المصفوفة التكرارية لغوص- سايدل

الصيغة التكرارية:

$$(D - L)X^k = UX^{(k-1)} + b$$

اذن:

$$X^{(k)} = (D - L)^{-1}UX^{(k)} + (D - L)^{-1}b$$

اذن المصفوفة التكرارية لغوص سايدل:

$$\boldsymbol{T_G = (D - L)^{-1}U}$$

IV. **التقارب** :

نظرية

تتقارب طريقة جاكوبي و غوص سايدل اذا تحقق احد الشروط الثلاث الآتية :

1) المصفوفة A ذات قطر مسيطر تماما.
2) اذا كان : $\|T_j\| < 1$ (أو $\|T_G\| < 1$) باستعمال أي نظيم (ممكن $\|\ \|_1$ أو $\|\ \|_\infty$).
3) الشعاع الطبقي للمصفوفة والتكرارية اصغر تماما من واحد أي :

$$\rho(T_j) < 1 \quad \text{و} \quad \rho(T_G) < 1$$

ملاحظات :

1) شروط التقارب (1)و (2)كل شرط هو كاف وغير لازم أما الشرط الثالث فهو كاف ولازم.
2) اذا كانت الطريقة متقاربة فإن أي اختيار للشعاع الابتدائي $X^{(0)}$ يوصلنا للحل الصحيح X.
3) في حالة تقارب الطريقتين فإن طريقة غوص- سايدل تكون اسرع من جاكوبي .
4) طريقة غوص سايدل تتطلب n قيمة للتخزين في الذاكرة بينما جاكوبي تتطلب 2n.

مبرهنة

إذا كانت المصفوفة A متناظرة ومعرفة موجبة فإن طريقة غوص- سايدل تتقارب.

V. تطبيقات :

التطبيق الاول

لتكن الجملة التالية :

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 = -10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 = 15 \end{cases}$$

1) برهن ان طريقة جاكوبي لهذه الجملة تتقارب.
2) احسب عدد التكرارات اللازمة حتى يكون الخطأ المرتكب: 10^{-4}

الحل:

1) تحول الجملة الى الشكل:

نجد: $X^{(k)} = T_j\, X^{(k-1)} + C$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 0.1x_2^{(k-1)} - 0.2x_3^{(k-1)} + \ 0.3x_4^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = -0.1x_1^{(k-1)} + 0.1x_3^{(k-1)} - \ 0.2x_4 + 0.5 \\ x_3^{(k)} = -0.1x_1^{(k-1)} - 0.15x_2^{(k-1)} + \ 0.05x_4 - 0.5 \\ x_4^{(k)} = -0.15x_1^{(k-1)} - 0.1x_2^{(k-1)} - \ 0.05x_3^{(k-1)} + 0.75 \end{cases}$$

حيث:

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & -0.2 & 0.3 \\ -0.1 & 0 & 0.1 & -0.2 \\ -0.3 & -0.15 & 0 & 0.05 \\ -0.15 & -0.1 & -0.05 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

$$\|T_j\|_1 = \max\{0.35, 0.35\ , 0.35, 0.55\} = 0.55$$

بما أن $\|T_j\|_1 = 0.55 < 1$ فإن

طريقة جاكوبي تتقارب.

يمكن اثبات التقارب يكون المصفوفة A ذات قطر مسيطر (يمكنك التأكد)

2) قبل الإجابة سنعرض المبرهنة التالية:

اذا كان $\|T\| < 1$ فإن المتتالية:

$X^k = TX^{(k-1)} + C \quad (k \geq 1)$ تتقارب

من اجل أي اختبار لـ $X^{(0)}$ نحو الحل الصحيح X

ولدينا :

$$\|X - X^{(k)}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|$$

اذن:

نأخذ $X^{(0)} = C$ ومنه:

$$\|X^{(0)}\|_1 = \|C\|_1 = 1.75$$

لدينا:

$$\left\|X - X^{(k)}\right\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|$$

$$\leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \left\|TX^{(0)} + C - X^{(0)}\right\|$$

$$\leq \frac{\|T\|^{k+1}.\|C\|}{1 - \|T\|} = 10^{-4}$$

نجد $k \geq 16.7$ يمكن أخذ $k = 17$ $(k \in N)$

التطبيق الثاني

لتكن الجملة الخطية المعرفة على الشكل المصفوفي : AX = b حيث :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

1) هل المصفوفة ذات قطر مسيطر؟ برر.
هل يمكن استنتاج تباعد او تقارب الطرق التكرارية؟ برر.

2) اوجد المصفوفة التكرارية T_j و T_G ، ثم احسب الشعاع الطبقي.

3) أي الطريقتين تتقارب؟

الحل:

1) A ليست ذات قطر مسيطر لأن:

- حسب الأعمدة: $2 + 1 < 1$ غير محققة.
- حسب الأسطر: $1 + 1 < 1$ غير محققة.

لا يمكن استنتاج التقارب او التباعد لأن شرط A ذات قطر مسيطر هو شرط كاف لكنه غير لازم.

2) المصفوفات التكرارية:

يمكنك ايجادها بواسطة العبارة التكرارية او تفكيك المصفوفة A حسب كل طريقة نجد:

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}; T_G = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

الشعاع الطبقي : $\rho = max|\lambda i|$ لدينا: $det\left(T_j - \lambda I\right) = 0$

أي : $(\lambda = 0) \longrightarrow (-\lambda^3 = 0)$

ومنه : $\rho(T_j) = 0$

- $det\,(T_G - \lambda I) = -\lambda\,(2-\lambda)^2 = 0$

ومنه : $\lambda = 0$ أو $\lambda = 2$

اذن : $\rho(T_G\,) = 2$

بما ان $\rho\,(T_j) = 0 < 1$ فإن طريقة جاكوبي تتقارب و $\rho(T_G) = 2 > 1$ فإن طريقة غوص سايدل تتباعد.

هذا المثال يبين أن أفضلية طريقة غوص- سايدل تكون عند تقارب الطريقتين فقط.

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

لتكن الجملة الخطية المعرفة على الشكل المصفوفي :

حيث $AX = b$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1) اكتب الجملة التكرارية لطريقة جاكوبي معينا T_j C_j
2) احسب الشعاع الطيفي للمصفوفة T_j ثم استنتج تقارب او تباعد طريقة جاكوبي.
3) احسب عدد التكرارات اللازمة حتى سكون الخطأ المرتكب 10^{-4} نأخذ $X^0 = C_j$

التمرين الثاني:

لتكن الجملة الخطية المعرفة على الشكل المصفوفي $AX = b$

حيث : $\alpha \in R$ $\quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

- عين قيم α التي تحقق تقارب طريقتي جاكوبي و غوص ، سايدل.

التمرين الثالث:

لتكن الجملة الخطية التالية: $AX = b$

حيث : $\alpha \in R$ $\quad A= \begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad b = \begin{pmatrix} 3-\alpha \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

1) عين المصفوفة التكرارية T_G لطريقة غوص - سايدل.
2) احسب $l\ (T_G)$ ثم اوجد الشرط الضروري والكافي على α حتى تتقارب الطريقة.

التمرين الرابع:

لتكن الجملة الخطية التالية:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1) احسب $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$ علما ان $X^{(0)} = (2,2,2)$
بإستعمال طريقة جاكوبي ثم غوص - سايدل.

2) حل الجملة الخطية مستعملا طريقة غوص للحذف ثم طريقة التفكيك (LU).

3) استنتج أي الطريقتين اسرع في التقارب.

حلول التمارين المقترحة

الفصل الاول والثاني

التمرين الأول:

لدينا:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. حساب A×B ، B×A ، A - B :

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & +2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} \times \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

ثم:

$$\det A = 0 - 0 - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\det B = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = +12$$

$$\det(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = 3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -12$$

من جهة أخرى:

$$\det A \times detB = (-1) \times (12) = -12$$

الخاصية محققة دوما أي:

$$\det(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \det A \times detB$$

بصورة عامة:

$$\det(A_1 \times A_2 \times \dots A_n) = \det A_1 \times \dots \times detA_n$$

2. لدينا:

$$\det(\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1}) = \det A \times det\mathrm{A}^{-1}$$

حسب الخاصية السابقة ومنه:

$$(\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1}) = I$$

$$\det \mathrm{I} = \det A \times det\mathrm{A}^{-1}$$

بما أن $\det \mathrm{I} = 1$ فإن $det\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det A}$

أي : $\det \mathrm{A}^{-1} = -1$

3. $\|B\|_1 = max\{1 + 1 + 2 \,, 2 + 2 + 2 \,, 1 + 1 + 1\}$

(حسب الاعمدة) $\|B\|_1 = 6$

$$\|B\|_\infty = max\{1 + 2 + 1 \,, 1 + 2 + 1 \,, 2 + 1 + 1\}$$

(الاعمدة حسب) $\|B\|_\infty = 5$

<u>التمرين الثاني:</u>

لدينا:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) اذن A متناظرة : $A^t = A$

- A معرفة موجبة اذا تحقق :

$$\forall \mathrm{X} \neq 0 : \quad X^t A\, X > 0 \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

أي :

$$X^t = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} > 0$$

لدينا:

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3)$$

ومنه:

$$X^t A\, X = (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3x_2 - x_2x_3 + 2x_3^2$$

$$= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_1^2 + x_3^2$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_1^2 + x_3^2 > 0$$

ومنه : $\forall \mathrm{X} \neq 0 = X^t A\, X > 0$

اذن A معرفة موجبة

2) A ذات قطر مسيطر لأن :

حسب الاسطر: $2 \geq 1$

$$2 \geq 2$$

$$2 \geq 1$$

حسب الاعمدة: $(2 \geq 1)$ ، $(2 \geq 2)$ ، $(2 \geq 1)$

3) القيم الذاتية للمصفوفة A:

المعادلة المميزة:

$$\det(A - \lambda\, I) = 0$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=(2-\lambda)\begin{vmatrix}2 & -\lambda & -1\\ -1 & 2 & -\lambda\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-1 & & 0\\ -1 & 2 & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)((2-\lambda)^2-1)-(2-\lambda)$$

$$=(2-\lambda)[(2-\lambda)^2-1-1]$$

ومنه: $$\det(A-\lambda I)=(2-\lambda)\,(2-\lambda-\sqrt{2})(2-\lambda+\sqrt{2})$$

اذن:

$$\det(A-\lambda I)=0\leftrightarrow\begin{cases}2 & -\lambda & & =0\\ 2 & -\sqrt{2} & -\lambda & =0\\ 2 & +\sqrt{2} & -\lambda & =0\end{cases}:\quad\begin{cases}\lambda= & 2\\ \lambda= & 2-\sqrt{2}\\ \lambda= & 2+\sqrt{2}\end{cases}$$

ومنه القيم الذاتية للمصفوفة A هي :

$$\lambda_1=2\ ,\qquad \lambda_2=2-\sqrt{2}\ ,\qquad \lambda_3=2+\sqrt{2}$$

الشعاع الطيفي:

$$\rho(A)=max|\lambda_i|\quad i=1,2,3$$

اذن: $$\rho(A)=2+\sqrt{2}$$

استنتاج $\|A\|_2$ لدينا :

$$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^tA)}\qquad (A^t=A)$$

$$=\sqrt{\rho(A^2)}\qquad \left(\rho(A^2)\right)=\left(\rho(A)\right)^2$$

$$=\sqrt{\left(\rho(A)\right)^2}$$

ومنه

$$\|A\|_2=\ \rho(A)\ =\ 2+\sqrt{2}\qquad \rho(A)\geq 0$$

التمرين الثالث:

1) الشكل المصفوفي: $AX = b$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) طريقة كرامر:

حساب محدد المصفوفة A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$$

اذن الجملة تقبل حل وحيد حيث:

$$\mathrm{x} = \frac{\Delta x}{\det A} \ ; \quad y = \frac{\Delta y}{\det A} \ ; \quad z = \frac{\Delta z}{\det A}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -13$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -41$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{13}/_{30} \\ {}^{41}/_{30} \\ {}^{-9}/_{30} \end{pmatrix}$$

3) حل الجملة بإستعمال طريقة غوص للحذف:

المصفوفة الموسعة: $[A \colon b]$

1. مرحلة الحذف:

$$[A:b]\ :\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & : & 1 \\ -1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 1 & 1 & -4 & : & 3 \end{pmatrix}$$

أ- $a_{11} = 3 \neq 0$

$$\mathrm{L_1}/_{3} \rightarrow \mathrm{L_1}^{(1)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & ^{1}/_{3} & : & ^{1}/_{3} \\ -1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 1 & 1 & -4 & : & 3 \end{pmatrix}$$

ب- حذف المتغير x من المعادلتين الثانية والثالثة:

$$\begin{matrix} \mathrm{L_1 + L_2} \rightarrow \mathrm{L_2}^{(1)} \\ \mathrm{L_3 - L_1} \rightarrow \mathrm{L_3}^{(1)} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & ^{1}/_{3} & : & ^{1}/_{3} \\ 0 & 2 & ^{4}/_{3} & : & ^{7}/_{3} \\ 0 & 1 & ^{-13}/_{3} & : & ^{8}/_{3} \end{pmatrix}$$

ت- $a_{22}^{(1)} = 2 \neq 0$

$$L_2^{(1)}/_{2} \rightarrow \mathrm{L_2}^{(2)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & ^{1}/_{3} & : & ^{1}/_{3} \\ 0 & 1 & ^{2}/_{3} & : & ^{7}/_{6} \\ 0 & 1 & ^{-13}/_{3} & : & ^{8}/_{3} \end{pmatrix}$$

ث- حذف المتغير y من المعادلة الثالثة :

$$L_3^{(1)} - L_2^{(2)} \rightarrow \mathrm{L_3}^{(2)}\ : \begin{pmatrix} 1 & 0 & ^{1}/_{3} & : & ^{1}/_{3} \\ 0 & 0 & ^{2}/_{3} & : & ^{7}/_{6} \\ 0 & 0 & -5 & : & ^{3}/_{2} \end{pmatrix}$$

ج- $a_{33}^{(2)} = -5 \neq 0$ اذن :

$$L_3^{(2)}/_{-5} \rightarrow \mathrm{L_3}^{(3)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/_3 & : & 1/_3 \\ 0 & 1 & 2/_3 & : & 7/_6 \\ 0 & 0 & 1 & : & -3/_{10} \end{pmatrix}$$

2. مرحلة الغوص:

- $z = {}^{-3}/_{10}$
- $\left(y + \frac{2}{3}z = \frac{7}{6}\right) \rightarrow y = \frac{7}{6} + \frac{1}{5} = \frac{41}{30}$
- $\left(x + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}\right) \rightarrow x = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{13}{30}$

التمرين الرابع:

المصفوفة الموسعة

$$[A:b] = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 & : & 6 \\ 3 & 8 & 1 & : & 11 \\ 1 & 2 & 4 & : & 20 \end{pmatrix}$$

1) مرحلة الحذف:

أ- $a_{11} = 3 \neq 0$

$$\mathrm{L_1}/_3 \rightarrow \mathrm{L_1}^{(1)} : \begin{pmatrix} 1 & 8/_3 & 3 & : & 2 \\ 3 & 8 & 1 & : & 11 \\ 1 & 2 & 4 & : & 20 \end{pmatrix}$$

ب- حذف المتغير x من المعادلتين الثانية والثالثة:

$$\begin{matrix} \mathrm{L_2} + 3\mathrm{L_1}^{(1)} \rightarrow \mathrm{L_2}^{(1)} \\ \mathrm{L_3} - \mathrm{L_1}^{(1)} \rightarrow \mathrm{L_3}^{(1)} \end{matrix} : \begin{pmatrix} 1 & 8/_3 & 3 & : & 2 \\ 0 & 0 & -8 & : & 5 \\ 0 & -2/_3 & 1 & : & 18 \end{pmatrix}$$

ت- $a_{22}^{(1)} = 0$ اذن لايمكن استعماله كمحور يجب تغيير المحور اما بتبديل الاعمدة او الاسطر نلاحظ ان تبديل السطرين الثالث و الثاني يفيدنا في الحذف ومنه نحصل على المصفوفة الموسعة التالية:

$$\begin{array}{l} L_2^{(2)} \to L_3^{(1)} \\ L_3^{(2)} \to L_2^{(1)} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & 3 & : & 2 \\ 0 & -2/3 & 1 & : & 18 \\ 0 & 0 & -8 & : & 5 \end{pmatrix}$$

ث- $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$ اذن :

$$L_3^{(2)}/_{-8} \to L_3^{(3)} : \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & 3 & : & 2 \\ 0 & -2/3 & 1 & : & 18 \\ 0 & 0 & 1 & : & -5/8 \end{pmatrix}$$

2) مرحلة التعويض :

- $z = -5/8$
- $-\frac{2}{3}y = 18 + \frac{5}{8} = \frac{144+5}{8} = \frac{149}{8}$
- $y = \frac{-149}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{-447}{16}$ اذن
- $x = 2 + \frac{8}{3} \times \frac{447}{16} + \frac{15}{8} = \frac{625}{8}$

$$x = \begin{pmatrix} 625/8 \\ -447/16 \\ -5/8 \end{pmatrix}$$

<u>التمرين السادس:</u> AX=b

✓ طريقة غوص:

المصفوفة الموسعة $[A:b]$ $a_{11} = 1$

أ-

$$\begin{array}{l} L_2^{(1)} \to L_2 - 2L_1 \\ L_3^{(1)} \to L_3 - 3L_1 \\ L_4^{(1)} \to L_4 - 4L_1 \end{array} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & : & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & : & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & : & 0 \end{bmatrix}$$

ب-

$$\begin{array}{l} L_2^{(1)} / -1 \\ \\ L_3^{(2)} \to L_3^{(1)} + 2L_2^{(2)} \\ L_4^{(2)} \to L_4^{(1)} + 7L_2^{(2)} \end{array} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & : & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & : & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & : & 0 \end{bmatrix}$$

ت-

$$\begin{array}{l} L_3^{(2)} / -4 \\ \\ L_4^{(3)} \to L_4^{(2)} - 4L_3^{(3)} \end{array} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & : & 0 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$x_4 = 0 \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_1 = 1$$

حلول الجملة هي: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

التمرين السابع:

الجملة من الشكل: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

طريقة التعليل : A=LU

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & U_{12} & U_{23} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بعد الضرب والمطابقة نحصل على:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad , \; U = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(AX = b) \leftrightarrow \begin{cases} LZ = b \\ UX = Z \end{cases}$$

$$(LZ = b) \leftrightarrow \; Z = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$(UX = Z) \leftrightarrow \; X = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

اذن حلول الجملة هي:

$$X = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

الفصل الثالث

التمرين الأول:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1. الجملة التكرارية لطريقة جاكوبي:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{3}x_2^{(k)} - \frac{1}{3}x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{3}x_1^{(k)} - \frac{1}{3}x_3^{(k)} + 2 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{3}x_1^{(k)} - \frac{1}{3}x_2^{(k)} + 3 \end{cases}$$

أي: $X^{(k+1)} = T_j X^{(k)} + C_j$

حيث:

$$T_j = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}; C_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. حساب الشعاع الطيفي $\rho(T_j)$ حيث:

$\rho(T_j) = \max_i|\lambda_i|$ λ_i القيمة الذاتية لـ T_j

قيم λ_i تمثل حلول المعادلة المميزة: $det(T_j - \lambda I) = 0$

$$det(-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\lambda\right) = 0$$

ومنه نجد:

$$det\left(T_j - \lambda I\right) = \left(\lambda - \frac{1}{3}\right)\left(-\lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{9}\right) = 0$$

حلول المعادلة هي : $\lambda_1 = \frac{1}{3}\ ,\lambda_2 = \frac{1}{3}\ ,\lambda_3 = \frac{-2}{3}$

اذن: $\rho\left(T_j\right) = \max_{i=1,2,3}|\lambda_i| = \frac{2}{3}$

بما ان $\rho\left(T_j\right) = \frac{2}{3} < 1$ فإن طريقة جاكوبي تتقارب.

3. عدد التكرارات بخطأ 10^{-4} و $X^{(0)} = C_j$ حسب العلاقة لدينا:

$$\left\|X - X^{(k)}\right\| \leq \frac{\left\|T_j\right\|^k}{1 - \left\|T_j\right\|}\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\| = 10^{-4}$$

اذن: $\left\|X - X^{(k)}\right\| \leq \frac{\left\|T_j\right\|^{k+1}.\left\|C_J\right\|}{1 - \left\|T_j\right\|} = 10^{-4}$

لدينا: $\left\|T_j\right\|_1 = \frac{2}{3}\ ;\ \ \left\|X^{(0)}\right\| = \left\|C_j\right\|_1 = 6$

ومنه نجد : $\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \times 18 = 10^{-4}\ \ :\ \ \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + 6}{\frac{1}{3}} = 10^{-4}$

ندخل الدالة ln على الطرفين نجد:

$$(K+1)\ln\frac{2}{3}+\ln 18=-4\ln 10$$

بعد الحساب نستنتج أن $k=26$

التمرين الثاني:

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 1\\ 0 & \alpha & 0\\ 1 & 0 & \alpha\end{pmatrix}$$

تتقارب طريقتي جاكوبي وغوص سايدل اذا كانت A ذات قطر مسيطر تماما أي:

$|\alpha|>1$ (حسب الاسطر والاعمدة)

ومنه قيم α التي تحقق التقارب هي : $(\alpha>1)$ أو $(\alpha<-1)$.

التمرين الرابع: AX=b

$$\begin{pmatrix}6 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 0\\ 6\end{pmatrix}$$

1) بما ان المصفوفة A ذات قطر مسيطر تماما فإن الطريقتين تتقارب (جاكوبي وغوص، سايدل)

1) طريقة جاكوبي:

$$X^{(0)}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 2\end{pmatrix};\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-\frac{1}{6}x_2^{(k)}-\frac{1}{6}x_3^{(k)}+2\\ x_2^{(k+1)}=-\frac{1}{2}x_1^{(k)}\quad+0\\ x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{6}x_1^{(k)}-\frac{1}{3}x_2^{(k)}+1\end{cases}$$

بالتعويض نجد: $X^{(2)}=\begin{pmatrix}13/6\\ -2/3\\ 10/9\end{pmatrix}$; $X^{(1)}=\begin{pmatrix}4/3\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 52/_{27} \\ -13/_{12} \\ 31/_{36} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.926 \\ -1.083 \\ 0.861 \end{pmatrix}$$

2) طريقة غوص، سايدل:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{6}x_2^{(k)} - \frac{1}{6}x_3^{(k)} + 2 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k+1)} + 0 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{6}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{3}x_2^{(k+1)} + 1 \end{cases}$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 4/_3 \\ -2/_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} 35/_{18} \\ -35/_{36} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 431/_{216} \\ -431/_{452} \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.995 \\ -0.995 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) حل الجملة بإستعمال طريقة غوص للحذف:

$$[A:b] = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & : & 12 \\ 0 & 11/_3 & -1/_3 & : & -4 \\ 0 & 0 & 6 & : & 6 \end{pmatrix}$$

نجد: $x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = -1 \quad , \quad x_3 = 1$

أي : الحل الصحيح x حيث : $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

طريقة التفكيك A=LU حيث :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 11/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

نصل الى نفس النتيجة.

4) من خلال المقارنة نجد ان طريقة غوص سايدل هي الأسرع لأنها الأقرب الى الحل الصحيح.

المراجع

1- Ciarlet P.G. : Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Masson, Paris (1985).

2- Ciarlet P.G., B. Miara, J.M. Thomas, Exercices d'analyse numérique matricielle et d'optimisation avec solutions.

Edition Masson, 1991 .

3- Gloria Faccanoni, Analyse numérique.

Recueil d'exercices corrigés et aide-mémoire

http://faccanoni.univ-tln.fr/enseignements.html.

4- P. Lascaux, R. Théodor. Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Tomes 1 et 2 Masson 1986.

5- M. Crouzeix, AL Mignot . Analyse numérique des équations différentielles, collec. Math. Appli.

pour la maitrise. Masson, 1984.