جامعة الشهيد حمه لخضر – الوادي
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة محاضرات في مقياس:

بحوث العمليات 2

لطلبة سنة ثالثة علوم اقتصادية تخصص اقتصاد كمي

إعداد: الدكتور قعيد إبراهيم

الموسم الجامعي: 2023/2022

جامعة الشهيد حمه لخضر – الوادي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة محاضرات في مقياس:

بحوث العمليات 2

لطلبة سنة ثالثة علوم اقتصادية تخصص اقتصاد كمي

إعداد: الدكتور قعيد إبراهيم

الموسم الجامعي: 2023/2022

قائمة المحتويات

مقدمـــــــة

يعتبر مقياس بحوث العمليات 02 تكملة لبرنامج مقياس بحوث العمليات 01 الذي هو مقرر في السداسي الأول (الخامس)، وبالتالي وخلال السداسي الثاني (السادس) سنكمل مع عديد النماذج لعديد المشكلات الاقتصادية التي تواجه متخذي القرار على مستوى المؤسسات بأنواعها والتي من شأنها أن تنمي فكر الطالب لكيفية الوصول إلى الحلول المثلى لكثير النماذج.

وتعالج هذه المطبوعة عديد نماذج بحوث العمليات 02 المقررة لطلبة سنة ثالثة تخصص اقتصاد كمي، وهذه النماذج نبدئها بنظرية خطوط الانتظار التي تواجه الكثير من المؤسسات أو المحلات والتي تحتم على متخذ القرار المفاضلة بين زيادة عدد مقدمي الخدمة والتكلفة المترتبة عليها، وتكلفة الانتظار في الطابور للزبائن، ثم التطرق إلى نماذج المخزون سواء النماذج المحددة والنماذج الاحتمالية ومعرفة التكاليف المختلفة لهذا النموذج والمفاضلة بينها، ثم التطرق إلى نظرية المباريات أو نظرية الألعاب وأنواعها وقوانينها المختلفة، وفي الأخير تطرقنا إلى نماذج المحاكاة وإعطاء فكرة هذا النموذج وتطبيقاته المختلفة.

وفي الاخير نتمنى من المولى عزة وجل أننا اجتهدنا ووفقنا في تقديم بعض المعارف المتعلقة بمقياس بحوث العمليات 02 لطلبة سنة ثالثة علوم اقتصادية، تخصص الاقتصاد الكمي، خلال السداسي السادس (الثاني)، والله الموفق.

د. قعيد إبراهيم

المحور الأول

نظرية خطوط الانتظار

أولا: تمهيد:

كل واحد منا يكون لا محالة قد انتظر في صف من أجل طلب أو الحصول على خدمة معينة، على سبيل المثال سحب المال من البريد (المنحة بالنسبة لطلبة الجامعة مثلا)، شراء الخبز، انتظار الدور عند الحلاق، الانتظار للسفر في المحطة، الغذاء في الحي الجامعي......، ونسعى بطبيعتنا كبشر أن لا يكون الانتظار مزعجا والصف طويلا.

وظهرت نظرية صفوف الانتظار لها معاناة العاملات في أجهزة البدالات الهاتفية نتيجة الزحم الكبير في المكالمات الهاتفية وقلة الأجهزة الموجودة في ذلك الوقت، وهذا ما أدى إلى تأخير الطلبات وعدم تلبيتها بسرعة، وكان ذلك عام أواخر 1909 وبداية 1910، وفكر Kendall Erlang (مكتشف هذه النظرية) في إيجاد حل لهذه المشكلة وتخفيض وقت الانتظار.

وبقيت تستخدم في مجال خدمة الهواتف حتى نهاية الحرب العالمية الثانية وما زالت نظرية صفوف الانتظار في تطور إلى يومنا هذا.

وتقوم مشكلة خطوط الانتظار على وجود طلبات على خدمة معينة يفوق ما هو معروض منها في لحظة زمنية معينة، وبالتالي يتكون الصف من الذين ينتظرون تلبية طلبهم على الخدمة.

وهذه المشكلة تواجه الكثير من المؤسسات سواء الكبيرة أو الصغيرة أو حتى المحلات والمؤسسات العامة والخاصة، وهو كيفية تلبية طلبات الزبائن وجعلهم ينتظرون لأقل وقت ممكن.

ثانيا: افتراضات أساسية في نظرية صفوف الانتظار:

وهي الشروط الواجب توفرها من أجل تطبيق قوانين نظرية صفوف الانتظار وهي:

I. الفرضية الأولى:

تقوم نظرية صفوف الانتظار على افتراض أن الأفراد ينظمون أنفسهم في طوابير انتظار لقضاء خدمتهم، وهذا يعني أن النظرية تطبق في مجتمعات حضارية وراقية تأخذ بمبدأ النظام واحترام الأخر ووقته.

وبالتالي لا يوجد اختراق للطابور والجميع لديهم نفس القيمة، عكس مجتمعاتنا التي يتخطى فيها الناس بعضهم البعض لتتكون حالة تثير الاشمئزاز والفوضى والتزاحم وكل واحد يريد أن يغادر أولا وهو الأفضل من البقية.

II. الفرضية الثانية:

وجود منافسة بين المنتجين، وبالتالي مقدم الخدمة يسعى لإرضاء زبونه وإلا فقده، والزبون يعلم أن بإمكانه الحصول على الخدمة في مكان أخر، لأن في حالة عدم وجود منافسة سيضطر الزبون للانتظار حتى وقت طويل لأن ليس لديه خيارات أخرى.

III. الفرضية الثالثة:

وجود أهمية لوقت الزبون وأدميته.

ثالثا: تعريف نظرية صفوف الانتظار:

هي محاولة لبناء نموذج رياضي لصف مكون من مجموعة من الأفراد (وحدات) ينتظرون في صف منتظم من أجل الحصول على خدمة ستقدم لهم.

ويقصد بالصف المنظم والمرتب، لا يقع التعدي عليه أي عدم تسلل أفراد داخله يصلون بعد الأخرين، أي نظام(First In first Out (FIFO (الداخل أولا يخرج أولا).

أو ما يعرف أيضا بنظام (First come-first served (FCFS (القادم أولا يخدم أولا).

رابعا: الهدف من دراسة صفوف الانتظار:

- تحديد الفترة الزمنية للانتظار في الصف ومحاولة تقليصها إلى مستوى أقل ما يمكن.

- توظيف العدد الأمثل من مقدمي الخدمة بحيث يكون القرار موازنا بين إمكانيات المؤسسة والعائد المتوقع من ذلك.

خامسا: طرق تقديم الخدمة للزبائن:

- بطريقة ألية عن طريق الحواسيب والاجهزة الالكترونية المختلفة.

- بشريا أي يقدمها موظف مسؤول عن هذه الخدمة.

سادسا: وصف صفوف الانتظار:

وهي وصول الوحدات المتمثلة في: الزبائن، السيارات،...الخ إلى محطات الخدمة، وعادة تكون عملية الوصول إما:

I. معدل ثابت خلال فترة زمنية معلومة وهذه لا تحتاج إلى نظريات وهي قليلة.

II. بشكل عشوائي غير محدد، وهو الأكثر شيوعا.

وبالتالي صفوف الانتظار غير معروفة (حالة عدم التأكد)، وهذا يعني أنها تكون احتمالية غير تحديدية(غير محددة)، وهذا لكونها مرتبطة بمعدلات الوصول ومعدلات الخدمة التي عادة ما تكون احتمالية التوزيع.

وعلى هذا الأساس يمكن استعمال المعدلات(المتوسطات) أو القيم المتوقعة لنموذج الانتظار، بحيث إذا تمت تجربة يجب أن تحدث في أحد الاحتمالات الممكنة، فإذا كانت النتائج كلها متساوية الحدوث، فإن احتمال وقوع الحدث r هو $P(r) = 1/N$

N: النتائج الممكنة وهذه الحالة تسمى بالتوزيع الاحتمالي.

أما إذا كانت النتائج غير ممكنة التساوي فإنه بالإمكان استعمال توزيعات احتمالية أخرى مثل توزيع بواسون، بينومال، الطبيعي، الأسي(Exponential)........الخ.

سابعا: الخصائص العامة لنظرية صفوف الانتظار:

I. معدل وصول الوحدات يخضع إلى توزيع بواسون(Poisson distribution) ويرمز له بالرمز (λ).

II. معدل تقديم الخدمة يخضع للتوزيع الأسي(Exponentiel distribution) ويرمز له بالرمز(μ).

III. دائما معدل الوصول أقل من معدل تقديم الخدمة($\mu > \lambda$).

IV. نظام الخدمة المعتمد هو من يصل أولا يحصل على الخدمة أولا(FIFO).

ثامنا: مكونات صفوف الانتظار:

I. **مجتمع القادمون (الوحدات)**: وهم العملاء أو طالبي الخدمة (λ).

II. **صف الانتظار**: وهم عدد العملاء الذين ينتظرون فعليا تقديم الخدمة.

III. **مركز الخدمة**: وهو الألة أو الموظف أو العامل الذي يقدم الخدمة(μ).

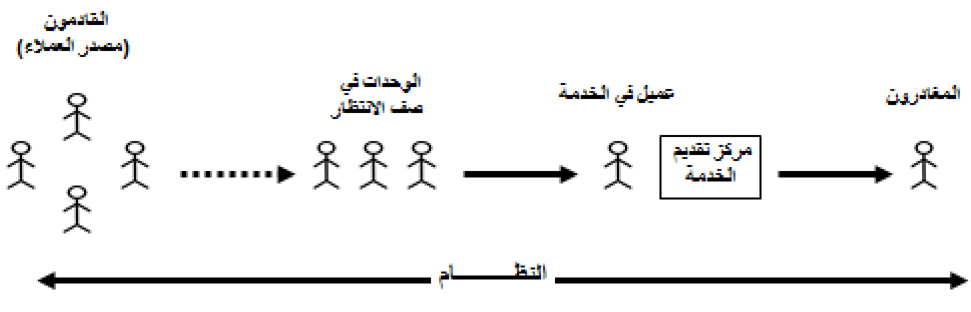
IV. **المخرجات**: وهي مغادرة العملاء بعد تلقيهم الخدمة.

تاسعا: مشاكل الانتظار(نماذج صفوف الانتظار)

وهناك العديد من النماذج نذكرها في العناصر التالية:

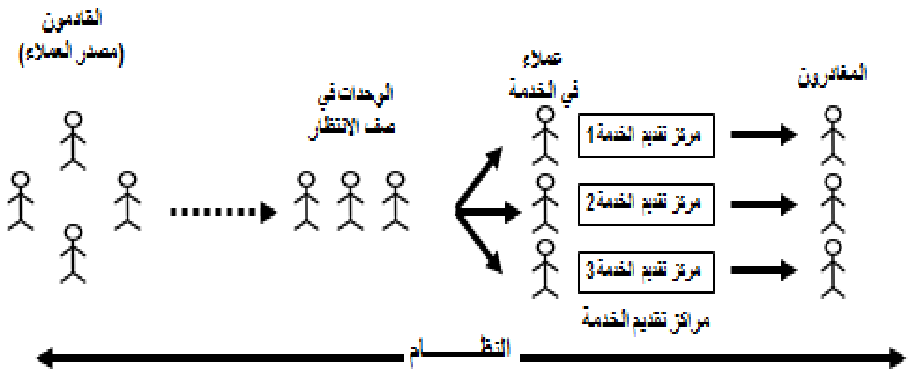
I. الحالة الأولى: نموذج صف الانتظار واحد ومركز خدمة واحد، والخدمة تتم بمرحلة واحدة.

والأمثلة على ذلك كثيرة مثل محل حلاقة فيه حلاق واحد، أو محل فيه صندوق واحد للدفع وغيرها من العديد من الأمثلة، والشكل الموالي يوضح هذا النموذج:



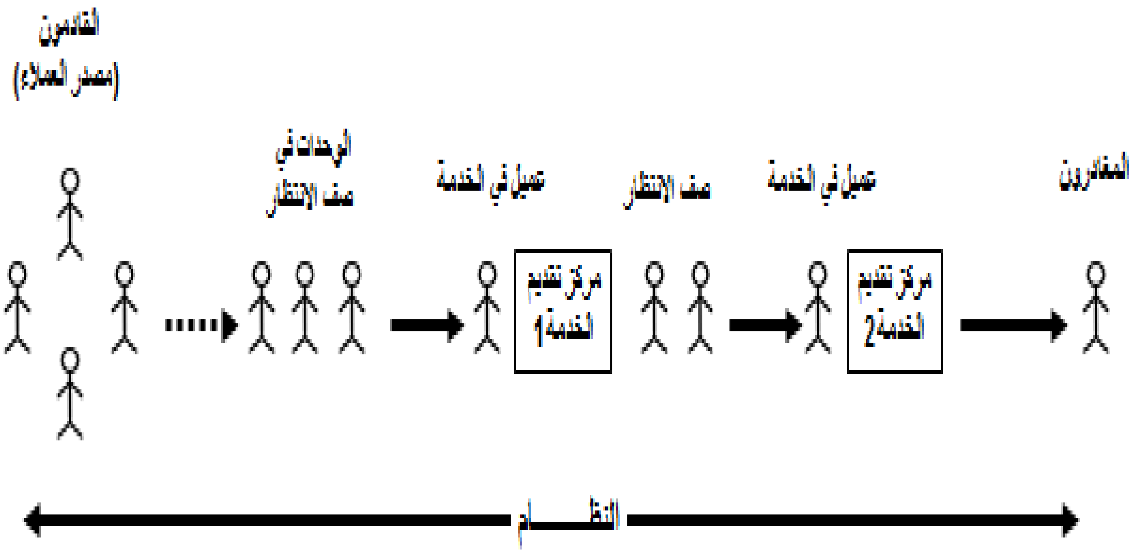
II. الحالة الثانية: نموذج صف الانتظار واحد ومركز خدمة متعدد وتتم الخدمة على مرحلة واحدة.

مثال ذلك محل حلاقة به أكثر من حلاق، ويمكن توضيحه بالمخطط التالي:



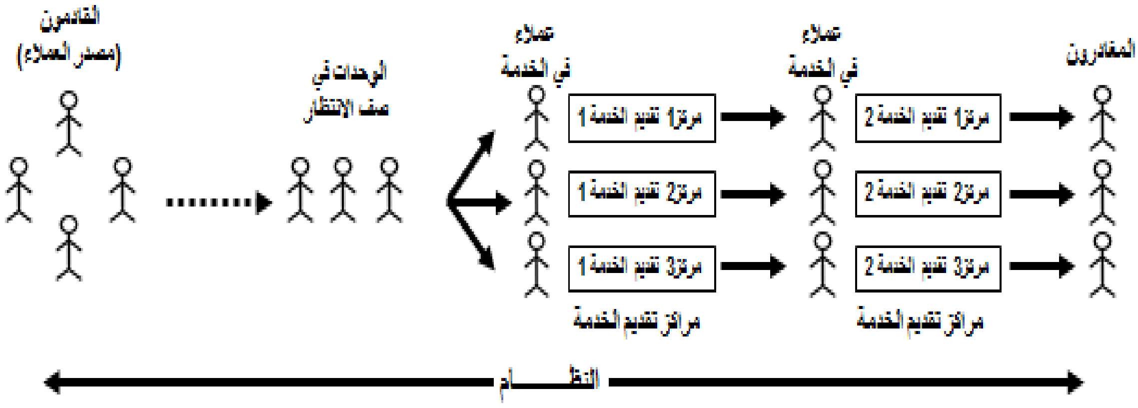
III. الحالة الثالثة: نموذج صف انتظار واحد ومركز خدمة واحد وتتم الخدمة بعدة مراحل

مثال ذلك مطاعم اخدم نفسك (Self Service)، وغيرها من الأمثلة، والشكل الموالي يوضح هذا النموذج:



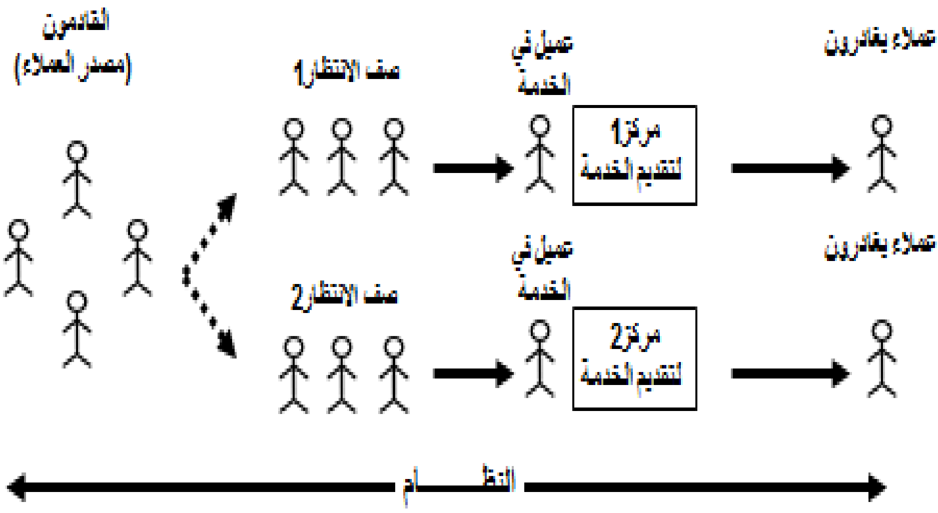
IV. الحالة الرابعة: صف واحد ومراكز الخدمة المتعددة والخدمة تتم بمراحل:

ومثال ذلك خطوط التجميع الصناعية المتعددة، والشكل الموالي يوضح النموذج:



V. الحالة الخامسة: صف انتظار متعدد ومراكز الخدمة متعددة وتتم الخدمة بمرحلة واحدة:

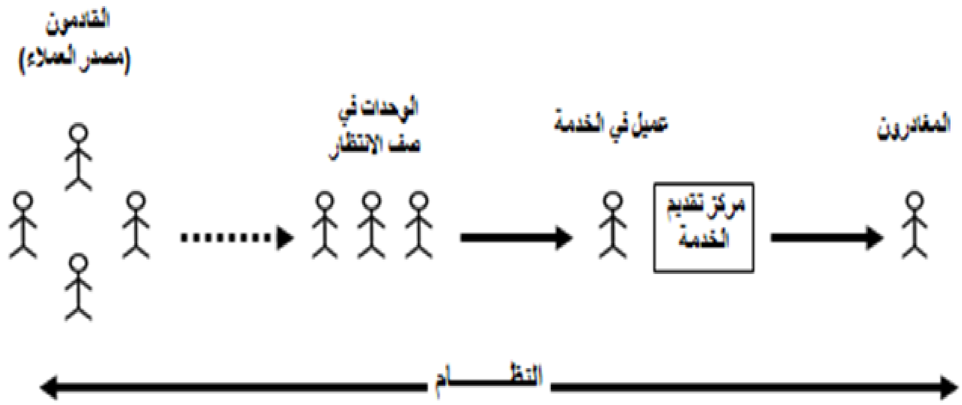
ومثال ذلك صندوق الدفع في السوبيرات (Super Market)، والشكل الموالي يوضح هذا النموذج.



بعد معرفة أنواع خطوط الانتظار سنركز في دراستنا على الحالة الأولى والثانية كالآتي:

I. الحالة الأولى: نموذج صف الانتظار واحد ومركز خدمة واحد، والخدمة تتم بمرحلة واحدة.

وهو من أبسط نماذج صفوف الانتظار ويسمى بنظام القناة الواحدة:



والأمثلة على هذا النموذج كثيرة، بحيث لا تخلو أي خدمة من الانتظار في صف ولو بسيط، مثل مكاتب البريد الصغيرة، محطات بيع الوقود، العيادات الخاصة، المحلات التجارية......الخ.

1- نتائج تطبيق نماذج نظرية صفوف الانتظار

يفيدنا استخدام تطبيق نماذج صفوف الانتظار بعديد النتائج الهامة والتي سنذكر منها ما يلي:

أ- النتيجة الأولى: تحديد معدل عدد الزبائن في النظام: L

وهذا يوضح العدد المتوقع من الزبائن: في انتظار الخدمة(في الصف) مضافا إليه الزبائن الذين يتلقون الخدمة.

ب- النتيجة الثانية: معدل الوقت الذي يقضيه الزبون في النظام: W

وهذا يمكننا من معرفة معدل الوقت الكلي الذي يقضيه الزبون داخل النظام(انتظار+ قضاء المصلحة)

وهذا يتيح لنا معرفة تكلفة وقت الزبون ويساعدنا في دراسة أكثر من نظام لتأدية الخدمة واختيار أفضلها.

ج- النتيجة الثالثة: معدل عدد الزبائن في الطابور: Lq

وهذا يساعدنا في تحديد قاعة الانتظار والتجهيزات اللازمة لها.

د- النتيجة الرابعة: معدل الوقت الذي يقضيه الزبون في الطابور: Wq

وهذا أحد محددات جودة أداء الخدمة، ورضا الزبون

ه- النتيجة الخامسة: استغلال إمكانيات الخدمة المتوفرة

وهذا يحدد انشغال مؤدي الخدمة(الموظفين...) وفراغهم وإمكانية زيادتهم أو تخفيض عددهم.

2- تعريفات هامة:

أ- النظام(system): نطاق دراسة صفوف الانتظار وتشمل صف الانتظار، والزبائن المتلقون للخدمة، قناة الخدمة، والتكلفة المادية والبشرية.

ب- الزبائن(Customers): هو طلب الخدمة وينضم إلى نظام أداء الخدمة سواء كان أفردا أو آلات أو غيرها.

ج- الزبائن في النظام (Customer in system): مجموع عدد الزبائن في صفوف الانتظار مع الزبائن اللذين يتلقون الخدمة.

د- القادمون(arrivals): الزبائن المحتملون لطلب الخدمة.

ع- الخدمة (service): وهي المنتج (سلعة أو خدمة) التي تقدمها المؤسسة لتلبية حاجات ورغبات الزبائن.

هـ- وقت الخدمة(service time): هو الوقت اللازم لأداء وتلقي الخدمة بالإضافة إلى الوقت الذي يقضيه الزبون في قناة الخدمة حتى لحظة المغادرة (منذ دخول النظام إلى لحظة خروجه من النظام).

و- قنوات الخدمة(مراكز الخدمة) (service channels): الجهة التي يتوجه لها الزبون لتلقي الخدمة، وقد تكون قناة واحدة أو أكثر من قناة (مركز).

ي- مراحل تقديم الخدمة(service phase): عدد المحطات التي يتوجب على الزبون المرور عليها حتى يتلقى الخدمة.

3- الرموز الرياضية المستخدمة في صفوف الانتظار:

N: عدد الوحدات في النظام: الوحدات في صف الانتظار+ الوحدات في مراكز الخدمة.

λ: عدد الوحدات القادمة إلى النظام في وحدة زمنية معينة = معدل الوصول لكل وحدة زمنية معينة.

μ: عدد الوحدات المغادرة من النظام= الوحدات التي قدمت لها الخدمة= معدل الخدمة لكل وحدة زمنية.

4- العلاقات الرياضية المستخدمة في صفوف الانتظار:

P: احتمال وجود وحدات في النظام= معامل التشغيل.

P_0: احتمال عدم وجود وحدات في النظام= نسبة الوقت غير المستغل.

Ls: متوسط عدد الوحدات المتوقع وجودها في النظام: طول النظام.

Lq: متوسط عدد الوحدات المتوقع وجودها في صف الانتظار= طول صف الانتظار.

Ws: متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في النظام.

Wq: متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في صف الانتظار.

5-القوانين المستخدمة في صفوف الانتظار في حالة مركز واحد للخدمة:

- P: احتمال وجود وحدات في النظام، معامل التشغيل: $P=\lambda/\mu$
- P0: احتمال عدم وجود وحدات في النظام، نسبة الوقت غير المستغل:

$$P_{\circ} = 1 - P$$

$$P_{\circ} = 1 - \lambda/\mu$$

- Ls: متوسط عدد الوحدات المتوقع وجودها في النظام، طول النظام:

$$\mathrm{Ls} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

- Lq: متوسط عدد الوحدات المتوقع في صف الانتظار= طول صف الانتظار

$$Lq = P \times Ls$$

$$Lq = \lambda/\mu\left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right)$$

- Ws : متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في النظام

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

- Wq : متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في صف الانتظار

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

مثال 1:

يستطيع مطعم في مدينة الوادي باستقبال الزبائن بمعدل 150 زبون في الساعة في المتوسط، ومعدل وصول الزبائن للمطعم هو 140زبون في الساعة في المتوسط.

المطلوب:

1- احتمال أن يكون المطعم مشغولا؟

2- نسبة الوقت الضائع غير المستغل؟

3- متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام؟

4- متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار؟

5- متوسط وقت انتظار الزبائن المتوقع في النظام؟

6- متوسط وقت انتظار الزبائن المتوقع في صف الانتظار؟

الحل:

لدينا $\lambda = 140 \qquad \mu = 150$

1- احتمال أن يكون المطعم مشغولا:

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{140}{150} = 0.9333$$

احتمال أن يكون المطعم مشغولا هو 93.33%

2- نسبة الوقت الضائع غير المستغل:

$$P_0=1-P=1-0.9333=0.066$$

وبالتالي نسبة الوقت غير المستغل هو 6.66%

3- متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام

$$Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

=140/150-140=140/10=14 زبون

4- متوسط عدد الزبائن المتوقع وجودها في الصف:

Lq =P×Ls = 0.9333(14)=13.06 زبون

أي أن الذين ينتظرون هو 13 زبون، وواحد في الخدمة ويشكلون بذلك النظام ككل وهو (14) زبون.

5- حساب متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في النظام:

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

=1/150-140=1/10=0.1 ساعة

=0.1(60دقيقة) =6 دقائق

وبالتالي متوسط الوقت الذي يقضيه الزبون في المؤسسة هو 6 دقائق.

6- متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل زبون في صف الانتظار:

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

=140/150(150-140)=140-1500=0.093 ساعة =0.093 (60 دقيقة)

وهو وقت انتظار الزبون في الصف 5 دقائق و51 ثانية = دقيقة 5.85=

مثال2:

يستطيع مستشفى باستقبال المرضى في الطوارئ والعيادات بمعدل 600 مريض في الساعة بالمتوسط، ومعدل وصول المرضى للمستشفى هو 450 مريض بالساعة في المتوسط.

المطلوب:

1- احتمال أن تكون عيادات المستشفى مشغولة؟

2- نسبة الوقت الضائع غير المشغل؟

3- متوسط عدد المرض المتوقع في النظام؟

4- متوسط عدد المرضى المتوقع في صف الانتظار؟

5- متوسط وقت انتظار المرضى المتوقع في النظام؟

6- متوسط وقت انتظار المرضى المتوقع في صف الانتظار؟

الحل:

$$\lambda = 450 \quad \mu = 600$$

1- احتمال أن تكون عيادات المستشفى مشغولة؟

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{450}{600} = 0.75$$

احتمال أن تكون عيادات المستشفى مشغولة هو 75%

2- نسبة الوقت الضائع غير المستغل

$P_0=1-P=1-0.75=0.25$

نسبة الوقت الغير مستغل هو 25%

3- متوسط عدد المرضى المتوقع وجودهم في النظام، طول النظام:

$$Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$= \frac{450}{600-450} = \frac{450}{150} = 3$$

طول النظام هو 3 مرضى.

4- متوسط عدد المرضى المتوقع في صف الانتظار، طول صف الانتظار:

$Lq = P \times Ls = 0.75(3)=2.25$ مريض

يعني بالتقريب طول صف الانتظار 2 مرضى.

بمعنى 3 مرضى في النظام أي 2 في الصف وواحد يقدم له العلاج

5- متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل مريض في النظام:

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$=1/600-450=1/150=0.0066$ ساعة

$=0.396$ دقيقة $=24$ ثانية

6- متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل مريض في الصف:

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

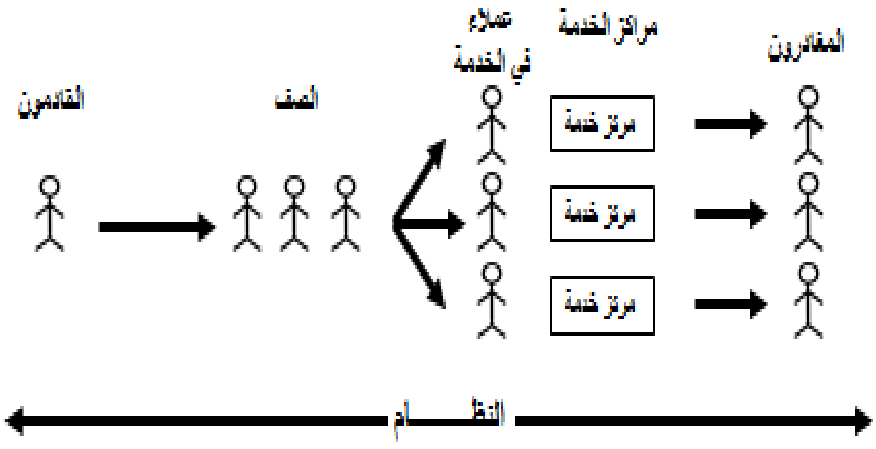
$$= \frac{450}{600(600-450)} = \frac{450}{90000} = 0.005$$

$=0.005$ ساعة $=0.005\times60$ دقيقة $=0.3$ دقيقة

بمعنى 18 ثانية، وهو وقت انتظار قليل جدا.

II. الحالة الثانية: نموذج صف الانتظار واحد ومركز خدمة متعدد وتتم الخدمة على مرحلة واحدة.

والأمثلة على ذلك كثيرة، مثال ذلك محل حلاقة به أكثر من حلاق، ويمكن توضيحه بالمخطط التالي:



القوانين المستخدمة في صف الانتظار الواحد بأكثر من مركز للخدمة:

- احتمال وجود وحدات في النظام:

$$P=\frac{\lambda}{\mu} \qquad P_{\text{الحقيقي}}=\frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s}\left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)P_{\circ}$$

S: هو عدد مراكز الخدمة.

- احتمال عدم وجود وحدات في النظام، النظام معطل:

– بالنسبة لقيم P_0 لنموذج صفوف الانتظار بأكثر من خدمة S نجده في جداول خاصة بصفوف الانتظار وتعتمد على احتمال وجود وحدات في النظام P.

- متوسط عدد الوحدات في صف الانتظار:

$$Lq=\frac{(P)^{s}.\mu.\lambda.p_{\circ}}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^{2}}$$

- متوسط عدد الوحدات المتوقع في النظام:

$$Ls=Lq+\frac{\lambda}{\mu}$$

- متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في صف الانتظار:

$$Wq=\frac{Lq}{\lambda}$$

- متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في النظام

$$Ws=Wq+\frac{1}{\mu}$$

- عدد N وحدات في النظام: وهناك حالتان هما:

✓إذا كان عدد الوحدات أقل أو يساوي عدد مراكز الخدمة $N \leq S$ فإننا نجده بالقانون التالي:

$$P(N) = \frac{P^n}{N!} P_\circ$$

✓إذا كان عدد الوحدات أكبر تماما من عدد مراكز الخدمة $N > S$ فإننا نجده بالقانون التالي:

$$P(N) = \frac{P^n}{S! S^{n-s}} P_\circ$$

مثال:

يتوفر إحدى المعابر البرية على 4 موظفين بتقديم الخدمة للمسافرين بمعدل 150 مسافر بالساعة في المتوسط ومعدل وصول عابري الحدود هو 80 شخص بالساعة في المتوسط.

المطلوب: أوجد كل من:

1- احتمال وجود مسافرين في المعبر؟

2- احتمال عدم وجود أي عابر للمعبر؟

3- متوسط عدد المسافرين المتوقع في صف الانتظار؟

4- متوسط عدد المسافرين المتوقع في المعبر ككل؟

5- متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل مسافر في الصف؟

6- متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل مسافر في النظام؟

الحل:

لدينا ما يلي:

$$S = 4 \qquad \mu = 150 \qquad \lambda = 80$$

1- حساب احتمال وجود مسافرين في المعبر:

$$P=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{80}{150}=0.5333$$

احتمال وجود وحدات في النظام هو 53.33%

$$P= \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s}\left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)P_{\circ}$$ الحقيقي

$$P= \frac{1}{4!}\left(\frac{80}{150}\right)^{4}\left(\frac{4\times150}{4\times150-80}\right)0.6065=0.0022$$

2- احتمال عدم وجود أي شخص عابر للمعبر:

حسب الجدول P(0)=0.6065

احتمال عدم وجود أي شخص في المعبر هو 60.65%

3- متوسط عدد المسافرين المتوقع في صف الانتظار:

$$Lq=\frac{(P)^{S}.\mu.\lambda.p_{\circ}}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^{2}}$$

$$=\frac{(0.53)^{4}.150.80.0.6065}{(4-1)!\,(4\times150-80)^{2}}$$

$$=(0.07)(150)(80)(0.6065)/3!\,(520)2=\frac{509.46}{1622400}=0.00031$$

من المتوقع أن لا يكون أي مسافر في الصف

4- متوسط عدد المسافرين في المعبر ككل:

$$Ls=Lq+\frac{\lambda}{\mu} = 0.0003 + 0.53 = 0.5303$$

من المتوقع عدم وجود أي شخص في المعبر(أو يمكن القول هناك شخص يهم بالمغادرة)

5- متوسط الوقت الذي ينتظره كل مسافر في الصف

$Wq = \frac{Lq}{\lambda} = 0.0003/80 =$ عدد صغير جدا

وبالتالي وقت الانتظار في الصف =0 دقيقة

6- متوسط وقت الانتظار لكل مسافر في المعبر

$$Ws = Wq+\frac{1}{\mu}$$

عاشرا- توزيع الوصول (عملية الوصول):

ويعني تحديد عدد الوحدات الواصلة إلى مركز الخدمة في وحدة زمنية معينة، وهو خاضع إلى توزيع بواسون لأنه يكون عشوائي ومستقل عن بعضه البعض.

حيث بإمكاننا إيجاد احتمال الوصول لعدد من الوحدات كما يلي:

$$P(x)= \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{X!}$$

$$X=0,1,2,3\ldots N$$

X: عدد الوحدات الواصلة خلال فترة زمنية

λ: المعدل المتوقع للواصلين خلال فترة زمنية

e= العدد النيبيري وهو قيمة ثابتة ويساوي 2.71828

مثال: بافتراض أن مؤسسة معينة قامت بتحليل معطياتها حول وصول الزبائن، وتوصلت إلى أن معدل الوصول هو 45 زبون في الساعة.

- ما هو احتمال وصول (X) وحدات خلال الدقيقة؟ بحيث قيم X =0.1.2.3

الحل:

في الساعة λ=45 ، معناه λ في الدقيقة: $\frac{45}{60}=$ 0.75 في الدقيقة

- احتمال صفر وصول(أي عدم وصول أي وحدة) في الدقيقة:

$$P(x)=\frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{X!}=P(0)=\frac{(0.75)^{0}(e)^{-0.75}}{0!}$$

$$=0.4723$$

من الجدول $(e)^{-0.75}=0.4723$

أي احتمال عدم وصول أي وحدة في الدقيقة هو 47.23%

- احتمال وصول شخص واحد في الدقيقة:

$$P(x)=\frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{X!}=P(1)=\frac{(0.75)^{1}(e)^{-0.75}}{1!}$$

$$=\frac{(0.75)(0.4723)}{1!}=0.3542$$

أي احتمال وصول شخص هو 35.42%

- احتمال وصول شخصين في الدقيقة:

$$P(x)=\frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{X!} = P(2)=\frac{(0.75)^2 (e)^{-0.75}}{2!}$$

$$= \frac{(0.56)(0.4723)}{2} = 0.1322$$

احتمال وصول شخصين في الدقيقة هو 13.22%

- احتمال وصول 3 أشخاص في الدقيقة:

$$P(x)=\frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{X!} = P(3)=\frac{(0.75)^3 (e)^{-0.75}}{3!}$$

$$= \frac{(0.42)(0.4723)}{6} = 0.033$$

احتمال وصول 3 أشخاص في الدقيقة هو 3.3%

إحدى عشر – توزيع وقت الخدمة:

هو الوقت المستغرق لتأدية الخدمة أي الوقت الذي يستغرقه الزبون من بدايته لتلقي الخدمة إلى نهاية تلقيه الخدمة، ولقد أكد العلماء أن التوزيع الأساسي هو المناسب لأوقات الخدمة في صفوف الانتظار.

وبالتالي فإن احتمال وقت الخدمة يكون أقل من أو يساوي لوقت الامتداد(أو الطول) t كما يلي:

$$P\,(\text{وقت الخدمة} \leq t) = 1 - e^{-ut}$$

$$P(x \leq t) = 1 - e^{-ut}$$

u = معدل أو متوسط عدد الوحدات الممكن تقديم الخدمة لهم في وقت معين

مثال: بافتراض أنه يمكن أن تقدم بمعدل 60 زبون في الساعة، أحسب ما يلي:

- أوجد احتمال طلبية قدمت لها الخدمة في 1/2 دقيقة أو أقل
- أوجد احتمال زبون قدمت له الخدمة في 1 دقيقة أو أقل
- أوجد احتمال زبون قدمت له الخدمة في 2 دقيقة أو أقل.

الحل:

معدل الخدمة في الدقيقة هو $\frac{\mu}{60 \text{ دقيقة}} = \frac{60}{60} = 1 = \mu$

أي معدل تقديم الخدمة هو زبون واحد في الدقيقة.

- إيجاد احتمال تقديم الخدمة لزبون في 1/2 دقيقة أو أقل:

$$P(t \leq 0.5) = 1 - e^{-1\times 0.5} = 1 - 0.606 = 0.394$$

احتمال تقديم الخدمة لزبون في نصف دقيقة هو 39.4%

- إيجاد احتمال تقديم الخدمة لزبون في 1 دقيقة أو أقل:

$$P(t \leq 1) = 1 - e^{-1\times 1} = 1 - 0.3678 = 0.6322$$

احتمال أن تقدم خدمة للزبون في دقيقة أو أقل هو 63.22%

- إيجاد احتمال تقديم خدمة لزبون في دقيقتين هو:

$$P(t \leq 2) = 1 - e^{-1\times 2} = 1 - 0.1353 = 0.8646$$

احتمال أن تقدم خدمة للزبون في دقيقتين هو : 86.46%

- وهنا نضيف مثلا لو طلب منا إيجاد احتمال خدمة زبون ما بين 0.5 دقيقة ودقيقة فإننا نحسب الفرق بين النسبتين التي سبق وأن تحصلنا عليها:

$P(0.5 \leq t \leq 1) = P(t \leq 1) - P(t \leq 0.5)$

$P(t \leq 0.5) = 0.394 = 39.4\%$

$P(t \leq 1) = 0.6322 = 63.22\%$

اذن نحسب الفرق بين النسبتين (63.22 و 39.4) نجدها= 23.82% وهو احتمال زبون قدمت له الخدمة في الوقت ما بين 2/1 دقيقة و 1 دقيقة وهكذا.

إثنا عشر – احتمال N عدد الوحدات في النظام:

وهي احتمال وجود شخص في النظام، أو وجود شخصين، أو احتمال وجود 03 أشخاص في النظام وهكذا، فإننا نجد هذا الاحتمال عن طريق القانون التالي:

$$P(N) = P^n \times p(0) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \times p(0)$$

مثال:

لدينا $\lambda = 45$ و $\mu = 60$

- أوجد احتمال وجود شخص واحد في النظام
- أوجد احتمال وجود شخصين في النظام
- أوجد احتمال وجود 3 أشخاص في النظام
- أوجد احتمال وجود 4 أشخاص في النظام
- أوجد احتمال وجود 5 أشخاص في النظام

الحل:

$$P0=1-0.75=0.25 \qquad P=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{45}{60}=0.75$$

$$P(1)=P^{(1)}\,P(0)=(0.75)^{1}\,(0.25)=0.1875$$

$$P(2)=P^{(2)}\,P(0)=(0.75)^{2}\,(0.25)=0.1406$$

$$P(3)=P^{(3)}\,P(0)=(0.75)^{3}\,(0.25)=0.1054$$

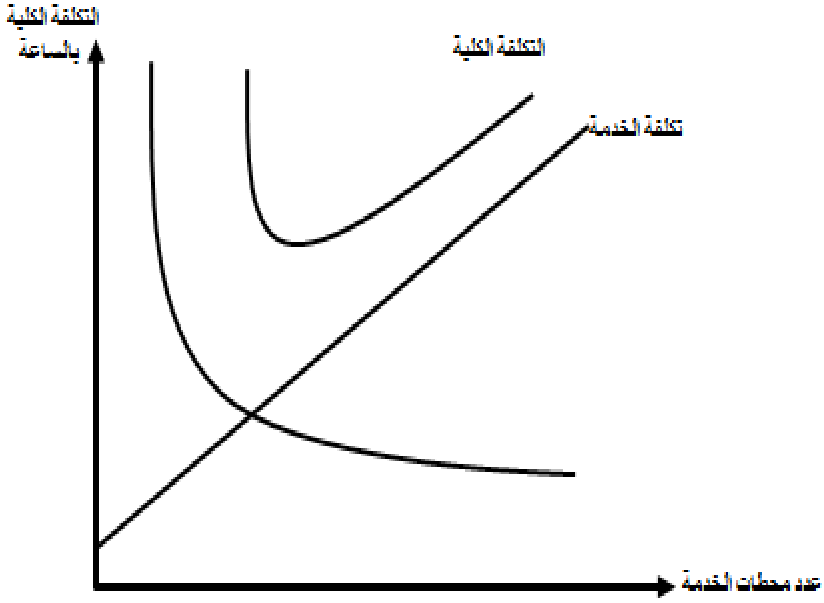
$$P(4)=P^{(4)}\,P(0)=(0.75)^{4}\,(0.25)=0.0791$$

$$P(5)=P^{(5)}\,P(0)=(0.75)^{5}\,(0.25)=0.0593$$

وبالتالي هذه الأرقام والاحتمالات والمتوسطات تكون أمام متخذ القرار وبالتالي يقرر هل يحسن من جودة الخدمة وإضافة عوامل تكنولوجية جديدة من أجل تحسينها وتحسين متوسط وقت الخدمة، أو إضافة محطات جديدة لاستيعاب الصفوف وتقليل وقت الانتظار إلى أقل ما يمكن.

ثلاثة عشر- حساب التكاليف الخاصة بصفوف الانتظار:

تعتبر التكلفة الكلية لنموذج صفوف الانتظار تمثل تكلفة الانتظار بالإضافة إلى تكلفة الخدمة، وبالتالي متخذ القرار أو المؤسسة تسعى إلى تخفيض أحد التكاليف أو كلاهما، من أجل تحقيق أفضل عائد، ويتم تحديد التكلفة الكلية لصفوف الانتظار كما يلي:



وبالتالي التكلفة الكلية هي تكلفة الانتظار وتكلفة الخدمة أي:

$$TC=C(w)\,L+C(s)\,S$$

حيث أن:

TC: التكلفة الاجمالية.

C(w): تكلفة الانتظار لكل وحدة زمنية.

L أو L(s): متوسط عدد الوحدات في النظام.

C(s): تكلفة الخدمة لكل وحدة زمنية لكل محطة.

S أو K: عدد محطات الخدمة.

في الحقيقة تحديد تكلفة الانتظار يعد أصعب من تحديد تكلفة الخدمة، لأنه لا يوجد معيار ثابت يوضح ذلك، وتبقى تقدير تكاليف الانتظار نسبي، عكس تكلفة الخدمة التي يمكن تقديرها بسهولة.

مثال شامل:

*** الجزء الأول:**

مؤسسة خدماتية قدرت معدل وصول زبائنها ب 45 زبون في الساعة وتستطيع هذه المؤسسة تقديم خدماتها بمعدل 60 زبون في الساعة.

المطلوب: أحسب ما يلي:

1 - احتمال عدم وصول أي وحدة خلال دقيقة واحدة

- احتمال وصول زبون واحد في الدقيقة
- احتمال وصول 4 من الزبائن في الدقيقة

2- احتمال زبون قدمت له الخدمة خلال:

- 45ثانية
- 2دقائق ونصف

- احتمال زبون قدمت له الخدمة في الوقت ما بين 2.5 دقيقة و 45 ثانية

3- احتمال وجود وحدات في النظام(النظام مشغول)

4- احتمال عدم وجود وحدات في النظام(الوقت الغير مشغول)

5- متوسط عدد الوحدات في النظام

6- متوسط عدد الوحدات في الصف

7- متوسط وقت الزبون في النظام

8- متوسط وقت الزبون في الصف

9- احتمال وجود زبون واحد في النظام

- احتمال وجود زبونين في النظام

- احتمال وجود 3 زبائن في النظام

- احتمال وجود 4 زبائن في النظام

- احتمال وجود 5 زبائن في النظام

*** الجزء الثاني:**

إذا قررت المؤسسة زيادة محطة للخدمة فتصبح لدى المؤسسة محطتين للخدمة، أحسب كل من:

1- احتمال وجود وحدات في النظام

2- احتمال عدم وجود وحدات في النظام

3- متوسط عدد الوحدات في النظام

4- متوسط عدد الوحدات في الصف

5- متوسط الوقت الذي يقضيه الزبون في النظام

6- متوسط الوقت الذي يقضيه الزبون في الصف

7- احتمال N وحدات في النظام حيث $N=1,2,3,4$

*** الجزء الثالث:**

إذا تم تقدير تكلفة الانتظار ب 10 وحدات نقدية، وتكلفة الخدمة ب 7 وحدات نقدية، أحسب التكلفة الكلية في كلتا الحالتين، ولو كنت صاحب المؤسسة أي البدائل تختار؟

الحل:

*** الجزء الأول:**

$$\mu = 60 \qquad \lambda = 45$$

1- احتمال وصول (X) وحدة نستخدم القانون التالي: $P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{X!}$

لدينا معدل الوصول 45 زبون في الساعة، أي معدل الوصول في الدقيقة هو $\frac{45}{60} = 0.75$

- احتمال عدم وصول أي وحدة خلال دقيقة واحدة:

$$P(0) = \frac{(0.75)^0 \times (e)^{-0.75}}{0!} = \frac{1 \times 0.4723}{1} = 0.4723$$

أي احتمال عدم وصول أي وحدة في الدقيقة هو 47.23%

- احتمال وصول زبون واحد في الدقيقة:

$$P(1) = \frac{(0.75)^1 (e)^{-0.75}}{1!} = \frac{(0.75)(0.4723)}{1} = 0.3542$$

احتمال عدم وصول 1 شخص في الدقيقة هو 35.42%

- احتمال وصول 4 من الزبائن في الدقيقة:

$$P(4) = \frac{(0.75)^4 (e)^{-0.75}}{4!} = \frac{(0.3164)(0.4723)}{24} = 0.0062$$

احتمال وصول 4 أشخاص خلال الدقيقة هو 0.62%

2- احتمال زبون قدمت له الخدمة خلال:

معدل الخدمة في الدقيقة هو $\frac{\mu}{60} = \frac{60}{60} = 1$ وبالتالي: $\mu = 1$

ويحسب هذا الاحتمال وفق القانون التالي: $P\ (\text{وقت الخدمة} \leq t) = 1 - e^{-ut}$

- إيجاد احتمال تقديم الخدمة لزبون في 45 ثانية:

$$P(t \leq 0.75) = 1 - e^{-1\times0.75} = 1-0.4723=0.5276$$

احتمال أن تقدم الخدمة للزبون في 45 ثانية أو أقل هو 52.76%

- إيجاد احتمال تقديم الخدمة لزبون في 2 دقيقة ونصف:

$$P(t \leq 2.5) = 1 - e^{-1\times2.5} = 1-0.0820=0.9179$$

احتمال أن تقدم الخدمة للزبون في دقيقتان ونصف أو أقل هو 91.79%

- احتمال زبون قدمت له الخدمة في الوقت ما بين 2.5 دقيقة و 45 ثانية:

$$P(2.5\leq t \leq 0.75)= P(t \leq 2.5)- P(t \leq 0.75)$$

$$P(t\leq 2.5)=0.9179=91.79\%$$

$$P(t\leq 0.75)= 0.5276 =52.76\%$$

إذن نحسب الفرق بين النسبتين (91.79 و 52.76) نجدها= 39.03% وهو احتمال زبون قدمت له الخدمة في الوقت ما بين 2 دقيقة ونصف وكذا 45 ثانية.

3- احتمال وجود وحدات في النظام(النظام مشغول):

$$P=\frac{\lambda}{\mu} = \frac{45}{60} = 0.75$$ وبالتالي احتمال أن يكون النظام مشغول هو 75%

4- احتمال عدم وجود وحدات في النظام(النظام غير مشغول):

$P_0=1-P=1-0.75=0.25$ وبالتالي احتمال عدم وجود وحدات في النظام هو 25%

5- متوسط عدد الوحدات في النظام Ls:

$$Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{45}{60 - 45} = \frac{45}{15} = 3$$

وبالتالي متوسط عدد الوحدات في النظام هو 3 أشخاص.

6- متوسط عدد الوحدات في الصف Lq

$Lq = P \times Ws = (0.75)\ (03) = 2.25$

أي أن متوسط عدد الوحدات في الصف هو شخصين(02).

7- متوسط وقت الزبون في النظام:

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{60 - 45} = \frac{1}{15} = 0.066$$

4 دقائق = (60 دقيقة)×(0.066) (ساعة)

وبالتالي متوسط الوقت الذي يقضيه الزبون في المؤسسة (النظام) هو 4 دقائق.

8- متوسط وقت الزبون في الصف:

$Wq = P \times Ws = (0.75)$(4 دقائق)= 03 دقائق

بمعنى متوسط وقت الزبون الذي يقضيه في الصف هو 03 دقائق.

9- احتمال وجود N زبون في النظام:

$N = 1,2,3,4,5$

ويمكن إيجاده بالقانون التالي: $P(N) = P^n \times p(0)$

$P(1) = P^{(1)} \times P_{(0)} = (0.75)^1 \times (0.25) = 0.1875$

$P(2)=P^{(2)} \times P_{(0)}=(0.75)^2\times(0.25)=0.1406$

$P(3)=P^{(3)} \times P_{(0)}=(0.75)^3\times(0.25)=0.1054$

$P(4)=P^{(4)} \times P_{(0)}=(0.75)^4\times(0.25)=0.0791$

$P(5)=P^{(5)} \times P_{(0)}=(0.75)^5\times(0.25)=0.0593$

*** الجزء الثاني:**

$$S = 2 \quad \lambda = 45 \quad \mu = 60$$

1- حساب احتمال وجود وحدات في النظام:

في البداية نحسب (P_0) ثم نحسب P الحقيقة:

$$P=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{45}{60}=0.75$$

من الجدول الخاص بقيم P_0 نجدها تساوي: $P_0=0.4545$

نحسب الآن P الحقيقي وسمي كذلك لأنه هو الذي يهم الزبون بحكم هناك اكثر من مقدم الخدمة، لأنه يمكن ان يكون النظام مشغول لكن بالنسبة للزبون هي وجود مقدم للخدمة شاغرا، وهي النسبة التي سنحسبها الآن:

$$P_{\text{الحقيقي}}= \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right) P_{\circ}$$

$$P= \frac{1}{2!}\left(\frac{45}{60}\right)^2 \left(\frac{2\times60}{2\times60-45}\right) 0.4545 =$$

$$(0.56)(0.5)\left(\frac{120}{75}\right)(0.4545) = 0.2044$$

وبالتالي احتمال وجود وحدات في النظام هو 20.44%

2- احتمال عدم وجود وحدات في النظام:

P_0=0.4545 ولقد تم استخراجها سابقا من الجداول الخاصة بصفوف الانتظار لأكثر من مقدم خدمة.

أي عدم وجود وحدات في النظام هو بنسبة 45.45%

3- متوسط عدد الوحدات في النظام Ls:

نحسب السؤال الرابع أولا ثم نعود للثالث، لأنه يجب حساب Lq أولا:

$$Ls = Lq+\frac{\lambda}{\mu} = 0.1227 + (0.75) = 0.8727$$

أي متوسط عدد الوحدات في النظام هو تقريبا زبون واحد.

4- متوسط عدد الوحدات في الصف Lq:

$$Lq= \frac{(P)^S.\mu.\lambda.p_\circ}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}$$

$$= \frac{(0.75)^2.60.45.0.4545}{(2-1)!\,(2\times 60-45)^2}$$

$$= \frac{690.27}{5625} = 0.1227$$

من المتوقع أن لا يكون أي مسافر في الصف.

5- الوقت الذي يقضيه الزبون في النظام Ws:

نحسب السؤال السادس لأننا نحتاج إلى Wq ثم نعود للسؤال الخامس:

$$Ws = Wq+\frac{1}{\mu} = 0.0027+\frac{1}{60} = 0.0193 \text{ ساعة}$$

$$60 \times 0.0193 = 1.16 \text{ دقيقة}$$

وبالتالي الذي يقضيه الزبون في المؤسسة ككل (النظام) هو دقيقة واحدة و10 ثواني تقريبا.

6- متوسط الوقت الذي يقضيه الزبون في الصف Wq:

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{0.1227}{45} = 0.0027$$

0.0027 ساعة أي 60×0.0027 دقيقة= 0.16 دقيقة

وبالتالي الوقت الذي يقضيه الزبون في الصف هو تقريبا 10 ثوان.

7- احتمال N وحدات في النظام :

ولدينا حالتين هما:

✓إذا كان عدد الوحدات أقل أو يساوي عدد مراكز الخدمة $N\leq S$ فإننا نجده بالقانون التالي:

$$P(N) = \frac{P^n}{N!}\, P_\circ$$

✓إذا كان عدد الوحدات أكبر تماما من عدد مراكز الخدمة $N>S$ فإننا نجده بالقانون التالي:

$$P(N) = \frac{P^n}{S!S^{n-s}} P_\circ$$

- الحالة الأولى: $N \leq S$ وتحسب بالقانون التالي $P(N) = \frac{P^n}{N!}\, P_\circ$

$$P(1) = \frac{(0.75)^1}{1!}\ (0.4545) = 0.3408$$

$$P(2) = \frac{(0.75)^2}{2!}\ (0.4545) = 0.1278$$

- الحالة الثانية: N>S وتحسب بالقانون التالي: $P(N) = \frac{P^n}{S!S^{n-s}} P_\circ$

$$P(3) = \frac{(0.75)^3}{(2!)2^{3-2}}(0.4545) = 0.0479$$

$$P(4) = \frac{(0.75)^4}{(2!)2^{4-2}}(0.4545) = 0.0179$$

*** الجزء الثالث:**

إذا كانت تكلفة الانتظار بـ 10 وحدات نقدية، وتكلفة الخدمة بـ 7 وحدات نقدية، حساب التكلفة الكلية في كلتا الحالتين بالقانون التالي: TC=C(w) L+C(s) S

- الحالة الأولى: صف واحد ومقدم الخدمة واحد:

TC=C(w) L+C(s) S= (10×3)+(7×1)= 37 وحدة نقدية

- الحالة الثانية: صف واحد ومقدم الخدمة اثنان:

TC=C(w) L+C(s) S= (10×1)+(7×2)= 24 وحدة نقدية

إذا كنت صاحب المؤسسة فإنني أختار الحالة الثانية يعني صف واحد و اثنان مقدمي الخدمة لأن التكلفة الاجمالية أقل، 24 وحدة كتكلفة أفضل من 37 وحدة نقدية كتكلفة اجمالية، وبطبيعة الحال صاحب المؤسسة يبحث عن التكلفة الأقل.

تطبيقات

التمرين رقم (01):

محطة استقبال السيارات، تصلها السيارات حسب التوزيع الاحتمالي البواسوني بمعدل وصول 10 سيارات لكل ساعة، كما أن وقت الخدمة يتبع التوزيع الاحتمالي الأسي، بمعدل خدمة 12 سيارة لكل ساعة.

المطلوب:

- ما هو احتمال عدم وجود سيارة في النظام؟
- كملاحظ كم عدد السيارات التي يمكنك مشاهدتها تنتظر في الصف والسيارات التي تقدم لها الخدمة؟
- ما احتمال أنه توجد سيارة في انتظار تقديم الخدمة؟
- ما هو معدل الوقت في الصف من أجل الخدمة؟
- كزبون على المحطة، هل أنت مقتنع بخصائص الصف هذه؟

التمرين رقم (02):

إذا كان رصيف أحد الموانئ يستوعب سفينة واحدة فقط لشحن أو لتفريغ ولقد لاحظ المسؤول عن الميناء في مرات عديدة وقوف بعض السفن في انتظار الشحن أو التفريغ، لذلك فكر مدير الميناء في التقليل من وقت انتظار السفن.

إذا كان معدل وصول السفن 21 سفينة في الأسبوع، وعمال الميناء يستطيعون خدمة 4 سفن في اليوم.

المطلوب:

الجزء الأول:

1_احسب الاحتمالات التالية:

- عدم وصول أي سفينة في اليوم.

- وصول سفينة واحدة في اليوم.
- وصول سفينتين في اليوم.
- وصول ثلاث سفن في اليوم.

2_ إذا كان عدد ساعات العمل اليومي في الميناء هو 10 ساعات احسب الاحتمالات التالية:

- سفينة قدمت لها الخدمة خلال ساعة.
- سفينة قدمت لها الخدمة خلال3 ساعات.
- سفينة قدمت لها الخدمة خلال5 ساعات.
- سفينة قدمت لها الخدمة خلال 8 ساعات.

3_احتمال أن يكون الميناء مشغول.

4_احتمال عدم وجود أي سفينة في الميناء.

5_احتمال N سفينة في النظام حيث N= (1,2,3,4,5).

6_عدد السفن الموجودة في الميناء.

7_عدد السفن التي تنتظر في الصف.

8_متوسط الوقت التي تقضيه كل سفينة في الميناء.

9_متوسط الوقت التي تقضيه كل سفينة في الصف.

الجزء الثاني:

إذا قرر مدير الميناء تسريع عملية التفريغ والشحن من خلال زيادة عدد آليات التفريغ والشحن، ليصبح الميناء قادر على خدمة 6 سفن في اليوم:

- أعد حساب الأسئلة التي طرحت في الجزء الأول.

الجزء الثالث:

إذا قرر المدير إضافة رصيف آخر وطاقم آخر للتفريغ والشحن، بحيث تقدم الخدمة لسفينتين معا.

- اعد حساب الأسئلة السابقة.

الجزء الرابع:

- ما رأيك في البدائل التي اتخذها مدير الميناء.

التمرين رقم (03):

أحد موانئ السفن الصغيرة يتسع لقاعدة تفريغ واحدة في الوقت، بإفتراض أن الوصول يتبع التوزيع الإحتمالي البواسوني بمعدل وصول 5 سفن في الساعة، وأن معدل الخدمة يتبع التوزيع الإحتمالي الأسي وبمعدل خدمة 10 سفن في الساعة.

المطلوب:

- ما احتمال عدم وجود سفينة في النظام؟
- ما هو معدل عدد السفن في انتظار الخدمة؟
- ما هو معدل الوقت المنتظر من أجل الخدمة؟
- ما هو معدل وقت السفينة المنتظر في الميناء من أجل الخدمة؟
- إذا كنت مسير لهذا الميناء، هل مقتنع بالخدمة المقدمة للزبائن؟

بافتراض أن الإدارة المسيرة للميناء في المسألة السابقة استطاعت إضافة قاعدة تفريغ أخرى، وبالتالي يمكن لسفينتين أن تقدم لها الخدمة في نفس الوقت.

المطلوب:

- ما احتمال عدم وجود سفينة في النظام؟
- ما هو معدل عدد السفن في انتظار الخدمة؟
- ما هو معدل الوقت المنتظر من أجل الخدمة؟
- ما هو معدل وقت السفينة المنتظر في الميناء من أجل الخدمة؟
- إذا كنت مسيرا لهذا الميناء، هل مقتنع بالخدمة المقدمة للزبائن؟

المحور الثاني:

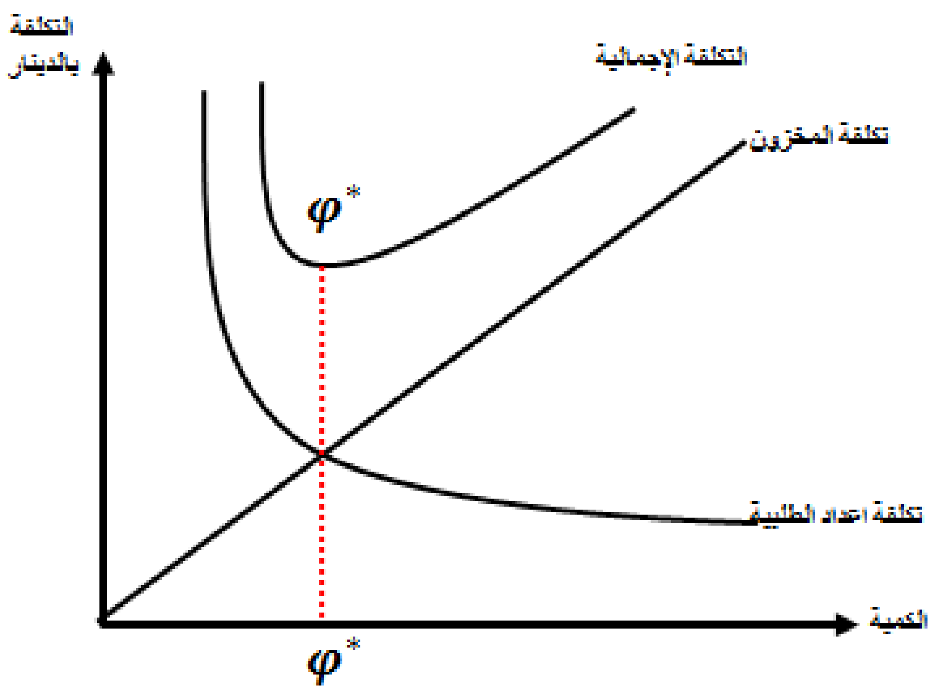
نماذج تسيير المخزون

أولا– تمهيد:

من الأشياء التي لا يمكن الاستغناء عنها في معظم المؤسسات هي المخزون، ولكن التحكم في المخزون(الكمية) لا يلقى الاهتمام المناسب على الرغم من تأثير ذلك على أداء المؤسسة، وبالرغم أن المخزون يشكل نسبة عالية من رأس مال المستثمر وبالتالي فزيادة المخزون تشكل مشكلة ونقصان المخزون يشكل مشكلة أخرى أيضا، فزيادة المخزون يعني زيادة في تكاليف المخزون، وعدم استثمار لقيمة المخزون الزائدة واستغلال مساحة تخزينية بدون فائدة...، ونقصان المخزون يؤدي إلى تعطل الإنتاج، ويؤدي أيضا إلى عدم رضا الزبائن عن عدم توفر البضاعة المطلوبة، وبالتالي من المهم إيجاد التوازن بين أعلى وأدنى مستوى للبضاعة المخزنة.

فالسيطرة الكفوء توجب عدم الاحتفاظ بكميات فائضة عن الحاجة الحالية أو المتوقعة، وعدم الاحتفاظ بكميات أقل من اللازم.

وبالتالي فإن مشكلة المخزون تتمثل في تحديد الكمية المثلى، والوقت المناسب لإصدار أمر الطلبية(التوريد)، والكمية المثلى لكل طلبية.



ثانيا– أسباب وأهمية الحفاظ والسيطرة على المخزون:

تؤدي السيطرة على المخزون عدة وظائف أهمها:

I. **وظيفة إعادة الربط**: لكي لا تتأثر المراحل الإنتاجية ببعضها، وذلك عندما تكون أنشطة التصنيع متتابعة وبالتالي فعملية التصنيع ستتوقف عند توقف النشاط السابق، وبالتالي فوجود مواد مخزنة بين عملية وأخرى ستستعمل كمنطقة عازلة.

II. **العرض والطلب غير المنتظم (لمواجهة الطلبات الفجائية والموسمية)**: حينما يصبح الطلب على منتج معين غير منتظم فإن خزن كميات منه يصبح هاما جدا، مثال ذلك المشروبات الغازية فإن الطلب عليها يبلغ ذروته في فصل الصيف، وبالتالي لا بد من وجود فائض في العرض في فصل الشتاء لمواجهة هذا الطلب.

III. **وقاية ضد التضخم**: في حالة زيادة الأسعار للسلع فإن ذلك يعني زيادة استثمارك المالي في المخزن.

IV. **عدم فقدان ثقة الزبائن**: في حالة نفاذ البضاعة من المخزن ونعرف أن ثقة الزبائن لا تقدر بثمن.

V. **الاستفادة من وفرات الحجم**: وذلك عندما تكون سلعة متوفرة بكثرة فتقل أسعارها، فيؤدي ذلك لخفض البعض من الكميات في المخزن للضرورة.

VI. **حسم الكميات**: وذلك عند شراء كميات كبيرة فإننا نستفيد من تخفيضات على الكمية وكذا بعض الخصومات، ووضع هذه الكميات في المخزن.

VII. **عملية الشراء تستغرق وقتا**: بطبيعة الحال عملية شراء أي سلعة يأخذ وقتا سواء قصيرا أو طويلا من إعداد الطلب إلى وصول اسلعة إلى المخزن.

ثالثا– تعريف المخزون:

هو أي مصدر يستعمل لتلبية طلب المشترين في الوقت الحاضر أو المستقبل.

رابعا– أنواع المخزون:

هناك عدة أشكال يمكن أن يكون عليها المخزون وهي:

I. مواد خام(مواد أولية)(مستلزمات إنتاج).

II. مواد نصف مصنعة(مواد تحت الصنع).

III. منتجات مصنعة(منتجات نهائية).

IV. قطع الغيار لعمليات الصيانة والإصلاح.

خامسا- تكاليف مرتبطة بالمخزون:

فقد يعتقد البعض أن المخزون هو وسيلة مساعدة للإنتاج، لذلك ينبغي توفير أكبر قدر ممكن من المخزون، لكن في الواقع هناك العديد من التكاليف المرتبطة بالمخزون وهذه التكاليف هي:

I. تكلفة الوحدة الواحدة:(C) (Cost) (شراء أو إنتاج):

ويختلف مفهوم التكلفة بين المنتج والتاجر، فبالنسبة للمنتج فهي تكلفة تصنيع الوحدة، أما عند التاجر فتكلفة الوحدة هي عبارة عن تكلفة الشراء والشحن، والتكلفة عموما هي جميع التكاليف لحين وصول البضاعة إلى المخزن، ويرمز لها بالرمز (C).

II. تكلفة إعداد الطلبية:

وتشمل تكلفة الأعمال الكتابية والإدارية، تكلفة متابعة الطلب(مكالمات هاتفية)، الجمارك، اختيار المنتوجات، فحص المنتجات، أما في حالة التصنيع تسمى تكلفة التجهيز أي تجهيز المكائن لصناعة المنتج.

III. تكلفة التخزين(تكلفة الاحتفاظ بالمخزون):

وهي عبارة عن مختلف التكاليف الناجمة عن الاحتفاظ بالسلعة في المخزن مثل: تكاليف مساحة المخزن، الضرائب على التخزين، الكهرباء، التلف، التقادم، نقل المواد داخل المخزن، التأمين على البضائع...الخ

IV.تكلفة العجز(النفاذ):

تشمل تكلفة العجز عند طلب كمية معينة من السلعة ولم تكن متوفرة، مما يؤدي إلى تأخير الطلبية (تأجيلها) والتكاليف الناجمة على ذلك، أو رفض الطلبية من قبل الزبون وبالتالي فقدان ثقة الزبون، وبالتالي هناك ربح ضائع نتيجة عدم توفر السلعة في المخزن،(فقدان فرصة البيع).

✍ وبالتالي: **التكاليف الكلية للمخزون = تكلفة الوحدات(شراء/إنتاج) + تكلفة إعداد الطلبية + تكلفة التخزين (الاحتفاظ) بالسلعة + تكلفة العجز(النفاذ).**

سادسا- بعض المفاهيم الاقتصادية المتعلقة بالمخزون:

وهذه المفاهيم نحتاجها في تحديد كمية الطلبية ووقتها:

I. **حجم الطلبية (Q)**: عدد الوحدات التي يتم استلامها ونضعها في المخزن في فترة من الزمن (عدد الوحدات التي تطلب كل مرة).

II. **دورة الطلب (T)**: هي الفترة الزمنية بين طلبيتين متلاحقتين (أي الزمن بين استلام الطلبية الأولى والتي بعدها)، وتقاس باليوم أو الأسبوع أو الشهر أو السنة.

III. **معدل الطلب (D)**: هو معدل الطلب المقدر في وحدة من الزمن.

IV. **فترة التوريد (L)**: هي الفترة بين إصدار الطلبية لحين وصولها واستلامها.

V. **نقطة إعادة الطلب (R)**: الوقت الذي يجب فيه إعادة الطلب.

VI. **التكلفة الكلية للمخزون (K)**: هي عبارة عن جميع التكاليف.

VII. **C**: عبارة عن تكلفة شراء الوحدة الواحدة من المادة.

VIII. **C1**: تكلفة إصدار الطلبية (إعداد الطلبية).

IX. **C2**: تكلفة تخزين الوحدة الواحدة من المادة لفترة معينة.

X. **C3**: تكلفة العجز(النفاذ).

XI. مخزون الأمان:

XII. المخزون الاحتياطي:

XIII. **سعر الشراء(P)**: سعر المادة المشتراة ويساوي سعر الوحدة × عدد الوحدات.

سابعا- نماذج المخزون:

هناك نوعان من نماذج المخزون، فهناك حالات نكون على علم بكمية الطلب وكمية الاحتياجات وأوقاتها وبالتالي هذه حالة تأكد، وهناك حالة أخرى وهي بكثرة أين يكون معدل الطلب والكميات وأوقاتها غير معلوم، وبالتالي فهي حالة عدم تأكد، وعموما نماذج المخزون نوعان هما:

I. النماذج المحددة:

II. النماذج الاحتمالية:

وسنعرض هذه النماذج كالآتي:

I. **النماذج المحددة**: وهناك عدة أنواع وهي:

1- نموذج الشراء بدون عجز: (كمية الطلب الاقتصادية)(EOQ)

Economic Order Quantity

وتحديد الكمية الاقتصادية يعني تحديد الكمية التي تنخفض عندها تكلفة الاحتفاظ بالمخزون وتكلفة الطلبية.

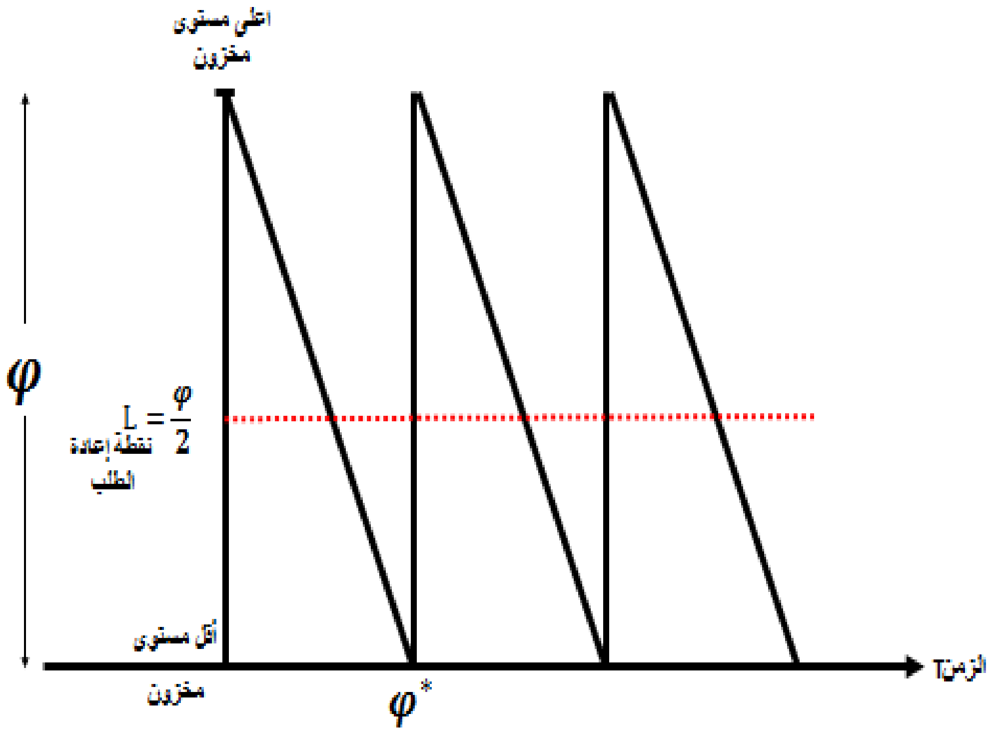
ويفترض هذا النموذج أن:

- معدل الاستهلاك من الوحدات المخزونة معلوم.
- تكلفة الشراء ثابتة.
- تكاليف إصدار الطلبية ثابتة.
- تكاليف المخزون ثابتة.
- العجز غير مسموح.

ومن أجل فهم هذا النموذج نفرض أن:

عند استلام طلبية جديدة مباشرة سيكون في المخزن حجم معين من المخزون مساوي إلى Q وعندما تكون نسبة الطلب على السلعة ثابتة أو قريبة من الثبات(الطلب ثابت يعني أن يؤخذ نفس العدد من الوحدات من المخزن في كل فترة زمنية، كأخذ 05 وحدات يوميا أو 100 وحدة شهريا...)، وتتناقص الكمية المخزنة حتى لا يكون في المخزن أية وحدة(حجم المخزون صفر) وعند ذلك تصل الطلبية الجديدة ويصل الحجم إلى Q ثانية خلال فترة زمنية.

والشكل الموالي يوضح هذا النموذج:



ويرتبط بهذا النموذج نوعان من التكاليف هما: تكلفة إصدار الطلبية (CO) (C1) وتكلفة تخزين الوحدة الواحدة(Cc) (C2)

وحجم الطلبية الاقتصادي هي الكمية التي تحقق أدنى مستوى من إجمالي التكاليف (C1 وC2)

وبالتالي هناك قرارات هامة على متخذ القرار اتخاذها للتحكم والرقابة على المخزون:

- كم سيطلب من البضاعة:

على مدير المخزن أن يقرر كم سيطلب كل مرة، وبالتالي الكمية المثلى التي تخفض له من التكاليف الإجمالية نجدها كما يلي:

$$Q=\sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}}$$

- يمكن تحديد عدد مرات الطلب خلال فترة زمنية معينة N كما يلي:

$$N=\frac{D}{Q}$$

- الزمن بين الطلبيات T يستخرج بالمعادلة التالية:

$$T=\frac{1}{N}\,(\text{عدد الأيام})=\frac{Q}{D}\,(\text{عدد الأيام})$$

- التكلفة الكلية السنوية للمخزون K تحسب بالمعادلة التالية:

$$K=\sqrt{2C_1DC_2} \quad \text{أو} \quad K=\frac{DC_1}{Q}+\frac{QC_2}{2}$$

مثال:

لدينا مصنع يحتاج إلى 2000 وحدة خلال العام القادم، وكان سعر الوحدة الواحدة 5 دينار، فإذا علمنا أن كلفة إصدار الطلبية الواحدة 5 دينار، وأن تكلفة الاحتفاظ بالمخزون خلال السنة 1.5 دينار، يضاف إليها تكلفة رأس المال والمقدرة ب 10% من سعر الشراء.

أوجد:

1- حجم الطلبية الاقتصادي؟ (الكمية المثلى)؟ Q

2- حساب تكلفة التخزين؟ (K)

3- ما هو عدد الطلبيات خلال السنة؟ (N)

4- الفترة الزمنية بين الطلبيات؟ (T)

الحل:

معدل الطلب D=2000

تكلفة الشراء C=5

تكلفة إعداد الطلبية C_1=5

تكلفة المخزون C_2 = 1.5+(5×0.1) = 2

1- حجم الطلبية الاقتصادي= Q

$$Q=\sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{(2)\times(2000)\times(5)}{2}} = \sqrt{\frac{20000}{2}} = \sqrt{10000} = 100$$ وحدة

وبالتالي كمية الطلب الاقتصادي Q تساوي 100 وحدة

2- تكلفة التخزين: K

$$K=\frac{DC_1}{Q}+\frac{QC_2}{2} \quad K=\frac{(2000)\times(5)}{100}+\frac{(100)\times(2)}{2} = 100+100 = 200$$ دينار

ويمكن حسابها أيضا بالقانون التالي:

$$K=\sqrt{2C1DC2} = \sqrt{2(5)(2000)(2)} = 200$$ دينار

وبالتالي تكلفة المخزون الاجمالية تساوي 200 دينار.

3- حساب عدد الطلبيات خلال السنة (N):

$$N=\frac{D}{Q} = \frac{2000}{100} = 20$$

بمعنى صاحب المخزون سيقوم بـ 20 طلب في السنة.

4- الفترة الزمنية بين الطلبات (T):

بافتراض عدد أيام السنة 365 يوم فإن الفترة الزمنية بين الطلبات هو:

$$T= \frac{1}{N}\,(\text{عدد الأيام}) = \frac{1}{20}\,(365) = 18.25 \ \text{يوم}$$

ويمكن حسابها أيضا بالقانون التالي:

$$T= \frac{Q}{D}\,(\text{عدد الأيام}) = \frac{100}{2000}\,(365) = 18.25 \ \text{يوم}$$

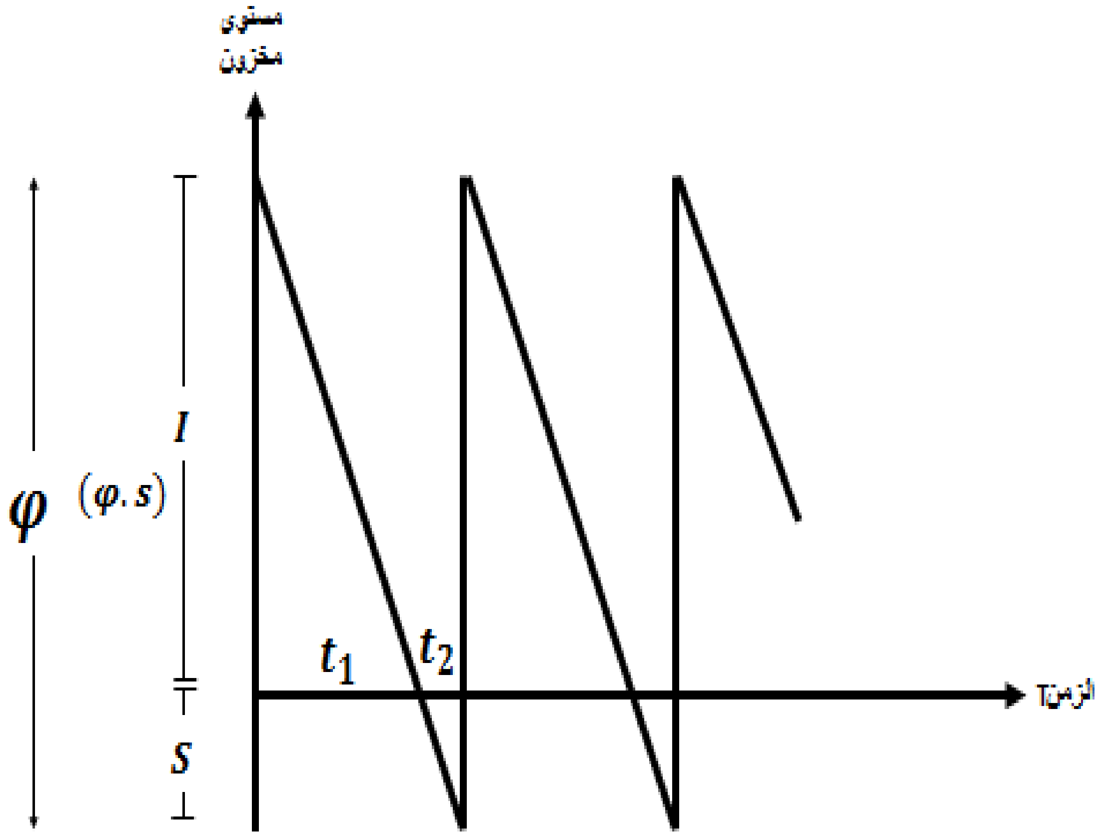
وبالتالي صاحب الخزين سيقوم بالطلب كل 18 يوم و6 ساعات.

2- نموذج الشراء مع وجود عجز:

يفترض هذا النموذج وجود عجز في المواد المخزنة، وبالتالي عدم تلبية طلبات المستهلكين، والتي ستؤجل إلى وقت لاحق عند وصول المواد للمخزن، وبالتالي فهذا العجز يترتب عليه تكاليف معينة تتناسب مع طول فترة العجز.

وكمثال على ذلك هو نظام خزن السيارات لوكيل البيع، وبالتالي الوكيل عادة يملك السيارة في المستودع، لكن إذا أراد الزبون الانتظار سيطلب له سيارة من الموزع الرئيسي.

وبالتالي هنا قد ينتظر الزبون وقد يسحب طلبه وخسارة فرصة البيع، وهذه الفرصة الضائعة هي تكاليف يصطلح عليها بتكلفة العجز، والشكل الموالي يوضح هذا النموذج:



إن دالة التكاليف في حالة السماح بوجود نقص في التخزين تتكون من ثلاثة عناصر وهي تكلفة إصدار الطلبية C_1 وتكلفة الاحتفاظ بالتخزين C_2، تكلفة العجز(نقص المخزون) C_3.

أما الصيغ الرياضية لهذا النموذج هي:

– حجم الطلبية الاقتصادي:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2} \times \frac{C_2+C_3}{C_3}}$$

– أقصى كمية تخزين مسموح بها:

$$I_{max} = \frac{C_3}{C_2+C_3} \times Q$$

- كمية العجز المسموح به:

$$S = Q - I_{max} = \left(\frac{C_2}{C_2+C_3}\right) \times Q$$

- الكلفة الكلية للمخزون:

$$K = \frac{D}{Q} C_1 + \frac{Q}{2} C_2 \left(\frac{C_3}{C_2 + C_3}\right)^2 + \frac{Q}{2} C_3 \left(\frac{C_2}{C_2 + C_3}\right)^2$$

مثال: شركة لبيع الأجهزة الكهربائية تعلم أن الطلب السنوي على المولدات الكهربائية هو 5000 وحدة، فإن كان سعر شراء الوحدة الواحدة هو 20 دينار، وتكلفة خزن الوحدة الواحدة يساوي 25% من سعر الشراء، وكلفة إصدار طلبية الشراء يساوي 10 دينار.

المطلوب:

1- حدد حجم الطلبية الاقتصادي، وكلفة الخزين السنوية

2- إذا كانت الشركة تهتم بالسماح لبعض الطلبيات المتأخرة، وقد قدرت تكلفة العجز ب 15 دينار للوحدة الواحدة، فما هو حجم الطلبية الاقتصادية؟ وما هو أعلى مستوى للتخزين، وحجم العجز المسموح به؟ وكذا التكاليف الكلية.

الحل: لدينا:

معدل الطلب $D = 5000$ وحدة

سعر الشراء $C = 20$ دينار

كلفة الطلبية $C_1 = 10$ دينار

كلفة التخزين $C_2 = (0.25)\times(20) = 5$ دينار

1- في حالة العجز غير مسموح به:

- كمية الطلبية الاقتصادية وتكلفة الخزين السنوية:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{(2)\times(5000)\times(10)}{5}} = \sqrt{20000} = 141.421 \text{ وحدة}$$

وبالتالي كمية الطلب الاقتصادي تساوي تقريبا 142 وحدة.

$$K = \frac{D}{Q}C_1 + \frac{Q}{2}C_2 = \frac{5000}{142}(10) + \frac{142}{2}(5) = 352.11 + 355$$

$$= 707.11 \text{ دينار}$$

وبالتالي التكلفة الكلية للمخزون تساوي 707.11 دينار.

2- في حالة السماح بوجود عجز تكلفته 15 دينار:

وبالتالي: دينار $C_3 = 15$

- حجم الطلبية الاقتصادي:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2} \times \frac{C_2+C_3}{C_3}} = \sqrt{\frac{(2)(5000)(10)}{5} \times \frac{5+15}{15}} = \sqrt{26600}$$

$$Q = 163.09 \text{ وحدة}$$

وبالتالي كمية الطلب الاقتصادي تقدر تقريبا بـ 163 وحدة.

- أعلى مستوى خزين:

$$I_{max} = \frac{C_3}{C_2+C_3} \times Q = \frac{15}{5+15} \times (163) = 122 \text{ وحدة}$$

وبالتالي اعلى مستوى للمخزون هو 122 وحدة.

- حجم العجز المسموح به:

$$S = \left(\frac{C_2}{C_2+C_3}\right) \times Q = \left(\frac{5}{5+15}\right) \times (163) = 41 \text{ وحدة}$$

ويمكن حسابها بالقانون التالي:

$$S = Q - I_{max} = 163 - 122 = 41 \text{وحدة}$$

وبالتالي كمية العجز المسموح به هو 41 وحدة.

- التكلفة الكلية:

$$K = \frac{D}{Q}\, C_1 + \frac{Q}{2} C_2 \left(\frac{C_3}{C_2 + C_3}\right)^2 + \frac{Q}{2} C_3 \left(\frac{C_2}{C_2 + C_3}\right)^2$$

$$K = \frac{5000}{163}(10) + \frac{163}{2}(5)\left(\frac{15}{5 + 15}\right)^2 + \frac{163}{2}(15)\left(\frac{5}{5 + 15}\right)^2$$

$$= 612 \text{ دينار}$$

وبالتالي التكاليف الكلية السنوية في الحالة الثانية أقل من الحالة الأولى، يعني أن الشركة إذا سمحت ببعض الطلب المتأخر فإنها سوف توفر 13.4% من التكاليف المترتبة عن النموذج الأول (عدم السماح بالعجز).

* **ملاحظة:**

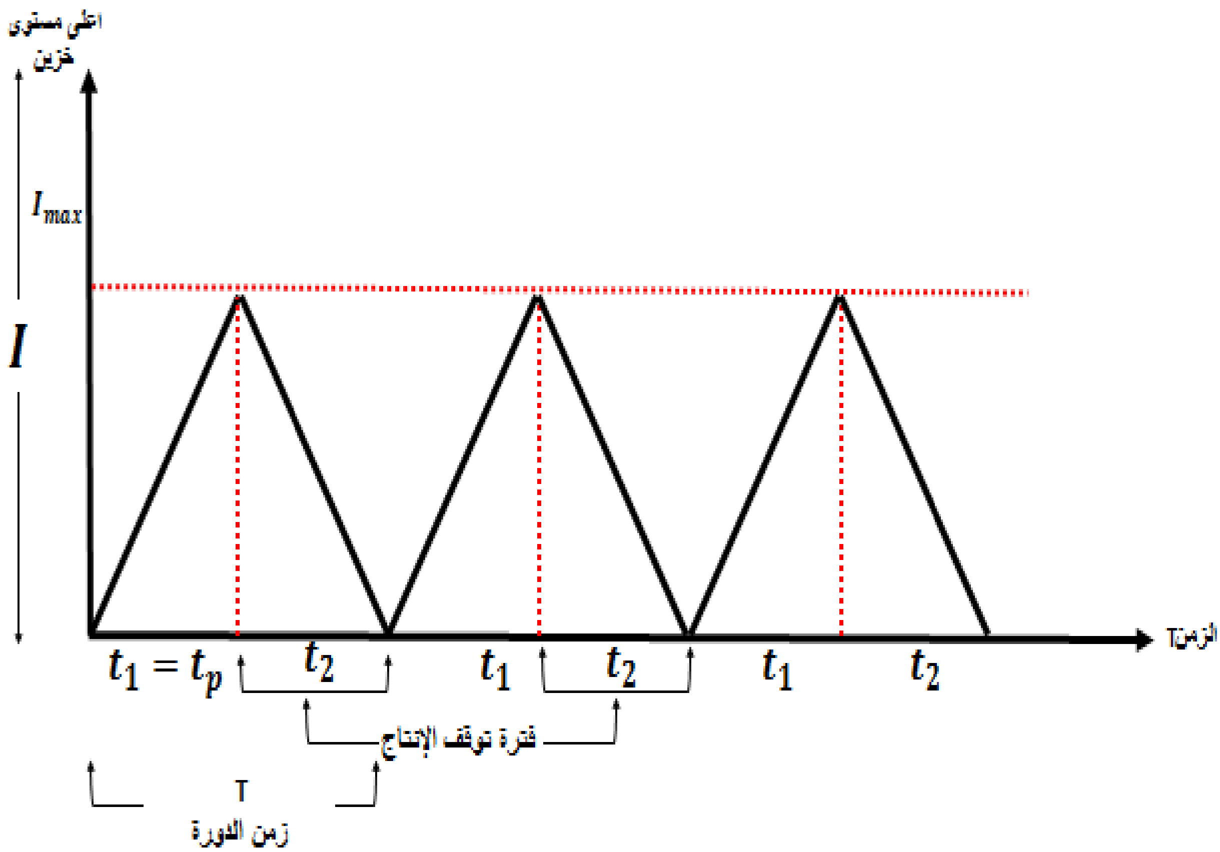
- عندما تزداد تكاليف الطلب المتأخر(C_3) فإن حجم العجز(S) يكون صغيرا.
- عندما تزداد تكاليف الاحتفاظ بالخزين(C_2)، فإن قيمة العجز(S) سوف تزداد.

3- نموذج الإنتاج بدون عجز:

يختلف هذا النموذج عن النموذجين السابقين كون السلعة المطلوبة يتم إنتاجها داخل المنشأة بدلا من شرائها من خارج المؤسسة.

وبالتالي فإن الدورة الإنتاجية تبدأ بنقطة الأصل وهي الصفر ثم تستمر لفترة زمنية طولها t1، وبمعدل إنتاج قدره p (على افتراض أن معدل الإنتاج أكبر من معدل الاستهلاك D<P لأنه لوكان D=P أو D>P لكانت جميع الوحدات المنتجة مباعة، وبالتالي لا يوجد هناك خزين).

وبالتالي سيصل المخزون لأعلى نقطة له I_{max}، وفي نهاية الفترة t1 يبدأ مستوى المخزون في الانخفاض حتى يصل إلى الصفر مرة أخرى في الفترة t2) وفي فترة توقف الإنتاج واستخدام المنتوج في المخزن)، وتستمر هذه العملية في كل مرة، والشكل التالي يوضح هذا النموذج:



والقوانين الرياضية لهذا النموذج كما يلي:

– الكمية الاقتصادية (المثلى):

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2} \times \frac{P}{P-D}}$$

- الزمن بين الطلبيات:

$$T = \frac{1}{N} \times (\text{عدد الأيام}) = \frac{Q}{D} \times (\text{عدد الأيام})$$

- التكلفة الكلية:

$$K = CP + \frac{D}{Q} C_1 + \frac{Q}{2} C_2 \left(\frac{P-D}{P}\right)$$

- عدد الطلبيات خلال الفترة الزمنية:

$$N = \frac{D}{Q}$$

- فترة الإنتاج:

$$T_p = t_1 = \frac{Q}{P}$$

- أعلى مستوى مخزون: (كمية الإنتاج التي نتوقف عندها):

$$I_{max} = T_p \, (P - D)$$

مثال:

تقوم إحدى الشركات بإنتاج 20000 وحدة سنويا من منتج معين، فإذا علمت أن تكلفة تهيأت وجبة الصنع الواحدة تساوي 250 دينار، وأن تكلفة تخزين الوحدة الواحدة يساوي 0.36 دينار، وأن مقدار الطلب المتوقع على هذا المنتوج يساوي 9000 وحدة خلال السنة.

المطلوب:

1- أوجد الحجم الإنتاجي الأمثل للدورة الإنتاجية (الكمية الاقتصادية)؟

2- أوجد أعظم مخزون ممكن، وزمن الإنتاج والزمن الكلي، وكذا عدد العمليات الإنتاجية؟

3- أوجد التكاليف الكلية السنوية إذا علمت أن تكلفة كل وحدة 2 دينار؟

الحل:

$P = 20000$ وحدة، خلال السنة

$D = 9000$ وحدة، خلال السنة

$C_1 = 250$ تكلفة تهيأ وجبة الصنع (تقابلها تكلفة إعداد الطلبية في حالة الشراء)

$C_2 = 0.36$ دينار للوحدة

1- حساب الحجم الانتاجي الأمثل Q:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2} \times \frac{P}{P-D}} = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2} \times \frac{P}{P-D}} = \sqrt{12500000 \times 1.8181}$$

$$Q = \sqrt{22727272.8} = 4767.2 \approx 4767 \text{ وحدة}$$

2- حساب الآتي:

- حساب عدد الدورات الإنتاجية خلال العام:

$$N = \frac{D}{Q} = \frac{9000}{4767} = 1.88 \approx 2 \ (\text{تقريبا مرتين})$$

وبالتالي عدد الدورات الانتاجية هي دورتين خلال السنة تقريبا، بمعنى الدورة الثانية تنتهي في بداية العام الموالي.

- حساب الزمن بين الدورات الإنتاجية:

$$T = \frac{1}{N}\left(\text{عدد الأيام}\right) = \frac{1}{1.88}(366) = 194.68 \approx 195 \text{ يوم}$$

وبالتالي زمن الدورة الانتاجية هو 195 يوم، وتتكون من فترة إنتاج T_p وفترة توقف T_2 اللذان سنتعرف عليهما كما يلي:

$$\mathrm{T_p} = t_1 = \frac{Q}{P} = \frac{4767}{20000} = 0.238 \text{ من السنة } = 87.1 \text{ يوم}$$

وبالتالي فترة الانتاج T_1 تساوي تقريبا 87 يوم.

نحسب الآن زمن التوقف عن الانتاج T_2:

$$T = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 \Rightarrow \mathrm{T}_2 = \mathrm{T} - \mathrm{T}_1 = 195 - 87 = 108 \text{ يوم}$$

-حساب أقصى كمية للمخزون:

$$I_{max} = T_p(P - D) = 0.238 \times (20000 - 9000) = 2618 \text{ وحدة}$$

وبالتالي كمية الانتاج التي نتوقف عندها هي: 2618 وحدة.

3- حساب التكلفة الكلية السنوية:

C=2

$$K = CP + \frac{D}{Q}\, C_1 + \frac{Q}{2} C_2 \left(\frac{P - D}{P}\right)$$

$$= 2 \times (20000) + \frac{9000}{4767} \times 250 + \frac{4767}{2} \times 0.36 \left(\frac{20000 - 9000}{20000}\right)$$

$$= 40000 + 471.99 + 471.93 = 40943.92 \text{ دينار}$$

4- نموذج الشراء مع خصم:

من الأمور الشائعة في مجال الأعمال التجارية هي الحصول على خصم عند شراء كمية كبيرة، وبالتالي على متخذ القرار هنا المفاضلة بين تكلفة الاحتفاظ بالخزين الإضافي والتخفيض الناتج عن سعر شراء تلك الكمية من البضاعة، وبالتالي أكثر الطرق المباشرة لمعرفة الطلب على الكمية هي مقارنة الزيادة في تكلفة الخزين والانخفاض الحاصل في كلفة الشراء، وهنا نطبق نفس صيغ النموذج الأول، ونتبع الخطوات التالية:

أ- نجد الحجم الاقتصادي(Q) اعتمادا على سعر الشراء الأصلي، فإذا كان الحجم الاقتصادي أكبر من الكمية اللازمة للخصم فإنه لا توجد مشكلة، وبالتالي إصدار الطلبية بالحجم الاقتصادي والاستفادة من الخصم أليا.

أما إذا كان الحجم الاقتصادي أقل من الكمية اللازمة للحصول على الخصم، فإننا نذهب إلى الخطوة الموالية:

ب- نحسب تكلفة الخزين وتكلفة الشراء اعتمادا على سعر الشراء الأصلي.

ج- نحسب مقدار التخفيض بسعر الشراء باستعمال الخصم.

د- نفرض أن حجم الطلبية هو الحد الأدنى للكمية اللازمة للحصول على الخصم، ونحسب الزيادة بكلفة الخزين اعتمادا على هذا الحجم، ثم نقارن هذه الزيادة مع مقدار التخفيض بسعر الشراء، فإذا كان الفرق في سعر الشراء أكبر من الزيادة الحاصلة بكلفة الخزين فإننا نطلب الحد الأدنى لكمية الخصم، أما إذا كان العكس فإننا نطلب الحجم الاقتصادي اعتمادا على سعر الشراء الأصلي.

إذا تبين بأن الحد الأدنى لكمية الخصم أفضل فهنا يجب إعادة حساب الحجم الاقتصادي اعتمادا على سعر الخصم لترى فيما إذا كان الحجم الاقتصادي أكبر من الحد الأدنى وإلا فإننا نكتفي بالحد الأدنى لكمية الخصم.

مثال:

لدينا مصنع يحتاج إلى 2000 وحدة خلال العام القادم، وكان سعر الوحدة الواحدة 5 دينار، فإذا علمت أن كلفة إصدار الطلبية الواحدة هو 5 دينار، وأن تكلفة الاحتفاظ بالمخزون خلال السنة 1.5 دينار يضاف إليها رأس المال المقدر ب 10% من سعر الشراء.

وعرض على المصنع تخفيض قدره 5% من سعر الوحدة الواحدة، إذا كان حجم الطلبية 200 وحدة أو أكثر، فبماذا تنصح صاحب هذا المصنع؟

الحل:

لدينا:

D =2000 وحدة خلال السنة،

C_1 = 5 دينار (تكلفة إعداد الطلبية)

C_2 =1.5 + (5×0.1) = 2 دينار للوحدة

نحسب التالي:

كلفة الشراء بالسعر الأساسي قبل الخصم (2000)×(5)=10000 دينار

كلفة الشراء سعر الخصم (2000) ×(5) ×(0.95)=9500 دينار

وبالتالي سعر الخصم سوف يخفض كلفة الشراء بمقدار (10000)-(9500)= 500 دينار

الآن نقارن مع كلفة الخزين:

نحسب حجم الطلبية الاقتصادي بالاعتماد على السعر الأساسي:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{2 \times 2000 \times 5}{2}} = 100 \text{ وحدة}$$

$$K = \frac{D}{Q} C_1 + \frac{Q}{2} C_2 = \frac{2000}{100}(5) + \frac{100}{2}(2) = 100 + 100 = 200 \text{ دينار}$$

إذ قبلنا بالعرض المقدم فإن حجم الطلبية Q يجب أن تكون على الأقل 200 وحدة، أي أن الكمية تكون $Q \geq 200$ وكلفة الاحتفاظ بالمخزون خلال السنة للوحدة الواحدة (C_2) سوف تتأثر وتكون قيمتها الجديدة كما يلي:

C_2 = 1.5+(0.1)×(5)×(0.95) =1.5+0.475 = 1.975 دينار

Q=200

أما تكلفة المخزون:

$$K = \frac{D}{Q} C_1 + \frac{Q}{2} C_2 = \frac{2000}{200}(5) + \frac{200}{2}(1.975) = 50 + 197.75$$
$$= 247.5 \text{ دينار}$$

نلاحظ أن تكلفة إصدار الطلبية انخفضت من 100 إلى 50، وتكلفة الاحتفاظ بالخزين ارتفعت من 100 دينار إلى 197.75 دينار.

أما الزيادة الصافية في تكلفة الخزين هي دينار 47.75 = 200 - 247.75

هذه الزيادة في التكلفة (الخسارة) أقل بكثير من قيمة التخفيض في تكلفة الشراء والبالغة 500 دينار

- وبالتالي ننصح صاحب المؤسسة بقبول العرض ويطلب 200 وحدة، وبالتالي سيستفيد من التالي:
دينار 452.25 = 47.75 - 500

وهناك خطوة أخيرة يمكن القيام بها وهي هل بالإمكان أن يكون حجم الطلبية أكبر من 200 وحدة (الحد الأدنى) فيما لو استخدمنا سعر الخصم.

وهنا نحسب الكمية الاقتصادية Q بتكلفة حفظ الخزين بسعر الخصم:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{2 \times 2000 \times 5}{1.975}} = 100.63 \approx 100 \text{ وحدة}$$

بما أن الكمية المثلى بتكلفة المخزون بسعر الخصم أقل من كمية الحد الأدنى الخصم Q=200 فإنه من الأفضل لصاحب المخزون الاكتفاء بالحد الأدنى للخصم ويطلب 200 وحدة من السلعة لأنه الحل الامثل.

II.نموذج الطلب الاحتمالي: Probabilistic Demand Model

وتتعلق هذه بحالات اتخاذ القرار المتعلق برقابة المخزون والتي لا يعلم فيها صاحب القرار حجم الطلب الصحيح على المواد مسبقا، أما الهدف فهو إيجاد أقل التكاليف والتي تحوي بمجموعها تكاليف الطلب وتكاليف تخزين البضاعة مثلما هو الحال في نموذج الطلب الاقتصادي، ومن هذه النماذج نموذج كمية الطلب ونقطة إعادة الطلب ولتوضيح هذا النموذج نأخذ المثال التالي:

مثال:

لو فرضنا إن الشركة العامة لتوزيع الكهرباء تشتري مصابيح كهربائية ذات كثافة عالية لنظم الإضاءة الصناعية من مصنع لصناعة المصابيح الكهربائية وتحتاج الشركة الى توصية بشأن حجم الكمية المطلوبة ويجب أن يودع الطلب بحيث يتحقق هدف إنفاق أقل التكاليف لأغراض المخزون، وكانت تكاليف إصدار الطلبية الواحدة 15 دينار ويكلف المصباح الواحد 3 دنانير، وقدرت الشركة تكاليف التخزين السنوية بنسبة 18% من تكلفة الشراء.

$$C1 = 15 \text{ دينار}$$

$$C2 = (0،\ 18)(3) = 0.54 \text{ دينار}$$

صادف الشركة حصول طلب احتمالي اثناء التعامل مع زبائنها والبيانات الإحصائية التاريخية تدل على أن الطلب السنوي 10000 مصباح كهربائي، ويمكن استخدامه كتقدير جيد لحجم الطلب المتوقع:

1– قرار كمية الطلب:

بالرغم من حصولنا على تقدير جيد لكمية الطلب السنوية والمقدرة بـ 10000 وحدة سنوياً، فانه يمكننا الحصول على تقريب أفضل لكمية الطلب وذلك بتطبيق نموذج كمية الطلب الاقتصادي (EOQ) مع استبدال كمية الطلب السنوي D بالحجم السنوي المتوقع.

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{2 \times 10000 \times 15}{0.54}} = 745.35 \approx 745 \text{ وحدة}$$

يمكننا توقع 745 وحدة لكل طلب لتكون تقديراً جيداً للكمية المطلوبة المثلى، حتى ولو انخفض الطلب إلى 9000 وحدة أو ارتفع إلى 11000 وحدة فإن 745 وحدة ستكون حجم طلب قليل التكاليف وحيد نسبياً.

يمكن لشركة الكهرباء ان تتنبأ بإيداع ما يقارب.

$$N = \frac{D}{Q} = \frac{10000}{745} = 13.42 \approx 13 \text{ (السنة في طلب)}$$

وبمعدل

$$T = \frac{1}{N}\left(\text{عدد الأيام}\right) = \frac{1}{13}(366) = 28.15 \approx 28 \quad \text{يوم بين الطلبيات}$$

2- قرار وقف الطلب:

بفرض أن الشركة تحتاج الى مدة اسبوع لاستلام كمية جديدة من مصابيح الإضاءة الكهربائية وبوجود معدل طلب أسبوعي يساوي:

$$\frac{10000}{52} = 192 \text{ وحدة}$$

يمكننا ان نقترح أن تكون نقطة إعادة الطلب مساوية إلى 192 وحدة واذا كان الطالبات موزعة بشكل متناسق حول 192، كان الطلب الأسبوعي سيكون اكثر من 192 وحدة أي بنسبة 50%.

عندما يكون الطلب خلال فترة تمهيدية تتجاوز 192 وحدة، فان الشركة ستعاني من نقص أو نفاد للمواد، ولهذا وبوجود نقطة اعادة الطلب 192 وحدة فإن الشركة ستعاني نقصا يعادل50 % أي تقريباً (6.5 من 13 طلباً في السنة) من المصابيح قبل وصول البضاعة الجديدة، ينظر الى هذا

النقص على أنه غير مقبول وحتى تحدد نقطة اعادة الطلب وباحتمالية قليلة ومعقولة لحالة نفاذ المواد فإنه من الضروري إنشاء توزيع احتمالات لطلب الوقت التمهيدي وتقليل احتمالية نقاد المواد

إن توزيع طلب الوقت التمهيدي للسلعة (المصابيح) قد افترض على أنه يشكل توريها طبيعيا وبمعدل $\mu = 192$ وحدة وبانحراف معياري يساوي $\sigma = 30$ وحدة وهذا مبين في الشكل أدناه.

بوجود توزيع احتمالي لطلب الوقت التمهيدي نستطيع تحديد كيفية تأثير نقطة إعادة الطلب R على احتمالية نفاذ المواد، بما أن نفاذ المواد يحصل أثناء الوقت التمهيدي الذي يتجاوز نقطة إعادة الطلب، يمكننا إيجاد احتمالية نفاذ المواد باستعمال توزيع طلب الوقت التمهيدي لحساب احتمالية الطلب الذي يتجاوز R.

من الممكن أن يكون أكثر المداخل العملية هو أن نسأل الإدارة عن مستوى الخدمة المقبول، حيث يعود مستوى الخدمة إلى معدل عدد نفاذ الوحدات الذي سنسمح بحدوثه في السنة، افترض في هذه الحالة أن إدارة الشركة ترغب بتحمل معدل نفاذ واحد للمواد من 13 طلبا مخطط له سنويا، أو 8% من الطلبات تقريبا، ولهذا يمكننا إيجاد نقطة إعادة الطلب إذا استخدمنا توزيعا طبيعيا لطلب الوقت التمهيدي وكما يلي:

$$R = \mu + Z\sigma$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي يمكننا ايجاد قيمة Z المقابلة الى $(\alpha - 1)$ إذ أن α تمثل احتمال عدم وجود مخزون في فترة الانتظار (احتمال نفاذ المادة) فإذا كانت $\alpha = 0.08$ فإن $Z = 1.41$ وتكون نقطة إعادة الطلبية:

$$R = 192 + (1.41)\,(30) = 234$$

لهذا يكون قرار رقابة الخزين هو طلب 745 وحدة كلما وصل مستوى الخزين الى نقطة إعادة الطلب 234، بما أن متوسط الطلب المتوقع خلال فترة الوقت التمهيدي هو 192 وحدة فإن 42=234 − 192 وحدة، ستعمل كخزين احتياطي والتي ستمتص اكثر من الطلب المعروف

خلال الوقت التمهيدي، وسيكون هناك احتمالية 92٪ أن تكفي كمية 234 وحدة لتغطية الطلب خلال الوقت التمهيدي.

تطبيقات

التمرين رقم (01):

إذا كان لسلعة ما الطلب السنوي (120000) وحدة سعر الوحدة (5) دنانير وتكلفة تخزين الوحدة (20٪) من سعرها، وتكلفة تجهيز الطلبية 25 دينار، أحسب ما يلي:

أ- كمية الطلب الاقتصادية.

ب- التكلفة الكلية للمخزن.

ج- فترة دورة الطلبية إذا كان عدد أيام السنة الفعلية 260 يوم.

التمرين رقم (02):

وجد لدى شركة الأسد للاستيراد والتصدير أن حجم مبيعاتها السنوية من السيارات الصغيرة (8000) سيارة وأن تكلفة شراء السيارة الواحدة (10000 دولار) وكل طلبية تعدها الشركة تكلفها (1500) دينار، أما معدل تكلفة الاحتفاظ بالسيارة 4٪ من قيمتها

المطلوب:

أ- تحديد كمية الطلب الاقتصادية.

ب- التكلفة الكلية للاحتفاظ بالمخزون.

ج- العدد الأمثل للطلبيات في السنة وطول الدورة.

التمرين رقم (03):

يتوقع بائع مفرد لمادة معينة أن يكون الطلب الشهري على المادة التي يبيعها (250) وحدة وأنه يدفع مبلغ قدره (20) دينار وأجور نقل للحصول على المادة، وأن كلفة خزن الوحدة الواحدة لمدة شهر (2.75) دينار وفي حالة بيع جميع وحدات المادة قبل وصول الطلبية الثانية يفقد أرباحا تعادل (4) دنانير لكل وحدة يقع عليها الطلب وتكون غير متوفرة، فما هو الحجم الاقتصادي للطلبية؟، ومجموع التكاليف الكلية والحجم الاقتصادي لمقدار العجز؟

- إذا كان هذا البائع لا يسمح بوجود عجز في السلعة، بماذا تنصحه؟

التمرين رقم (04):

لإحدى الشركات طلب سنوي على إحدى سلعها المنتجة قدره 12000 وحدة وبالإمكان إنتاج 2000 وحدة شهريا أن كلفة إصدار الطلبية (توقيت الإنتاج) هي 400 دينار وكلفة الاحتفاظ بالخزين للوحدة الواحدة شهريا هي 0.15 دينار.

- أوجد الحجم الاقتصادي الأمثل للإنتاج؟
- والكلفة الكلية سنويا بافتراض أن كلفة كل وحدة هي (4) دينار؟
- أوجد أعظم خزين ممكن وزمن الإنتاج والزمن الكلي؟

التمرين رقم (05):

شركة معدل استهلاكها 18000 وحدة سنويا من مادة معينة ويمكن لهذه الشركة أن تنتج المادة بمعدل 3000 وحدة شهريا فإذا علمت بأن كلفة إصدار الطلبية الشهرية للوحدة الواحدة 500 دينار وكلفة التخزين لوحدة واحدة ولمدة شهر كامل تساوي 0.15

المطلوب:

- أوجد الحجم الإنتاجي الأمثل والكلفة الكلية السنوية على فرض أن كلفة إنتاج الوحدة الواحدة من المادة تساوي ديناران.

التمرين رقم (06):

طبق نموذج كمية الطلب الاقتصادي على جدول خصم الكميات الآتي:

المجموعة	حجم الطلب	تكاليف الوحدة
1	أقل من 100	10 دينار
2	100 فأكثر	9دينار

إذا علمت أن حجم الطلب السنوي هو 500 وحدة وكلفة إصدار الطلبية 40 دينار وكلفة الاحتفاظ بالخزين السنوية تقدر 20 ٪ من سعر شراء الوحدة الواحدة.

المحور الثالث:

نظرية الألعاب (نظرية المباريات)

أولا- تمهيد:

بدأ تطور نظرية المباريات في 1944 على يد العالم (Von Neumon) والتي وضع كيفية اتخاذ القرارات في نظرية المباريات كأحد الأساليب الكمية والرياضية بصفة عامة ومع تطور المنافسة أصبحت تطبيقاتها تستخدم في المجال الاداري والاقتصادي ومساعدة متخذي القرار للوصول إلى القرارات المثلى.

وتشير نظرية الألعاب إلى المنافسة بين التجار والمؤسسات بحيث تقدم المنافسة على لاعبين أو أكثر من الممكن أن يكونوا أفراد أو مؤسسات وتكون نتيجة المباراة خسارة لأحدهم وربح للأخر وليس بالضرورة دائما أن يحدث ذلك.

ثانيا- مفهوم نظرية المباريات:

وهناك عديد التعاريف حول نظرية المباريات أو نظرية الالعاب نذكر منها الآتي:

- وهي مجموعة القواعد والقوانين التي تستخدم في اتخاذ القرارات في حالة المنافسة على مورد مشترك.

- أو هي أحد الأساليب الكمية التي تساعد المدراء على اتخاذ القرار في المواقف التي تتضمن المنافسة على مورد مشترك.

ثالثا- قواعد المباراة (شروطها):

وهي الشروط الواجب توفرها من أجل المباراة:

1- عدد المشاركين محدود ولا يمكن أن يكون أقل من اثنين.

2- لكل لاعب عدد محدود من البدائل(القرارات).

3- قرار أي لاعب يؤثر فيما يحققه من عائد، وما يحققه المنافسون الأخرون في المباراة من عائد.

4- العائد من جميع البدائل الممكنة لاستراتيجيات اللاعبين معلوم.

5- القرارات لجميع اللاعبين تتخذ في نفس الوقت.

6- كل طرف مستقل في اتخاذ قراراته دون اتصال مع الطرف الأخر، بالإضافة إلى العقلانية وعدم التهور في اتخاذ القرار.

رابعا- تعريف المصطلحات المستخدمة في نظرية المباراة:

1- المباراة (Game): هي اللعبة، وهي السلسلة الخيارات التي تؤدي إلى نهاية المباراة، وهي المنافسة بين عدة أطراف على نفس المورد.

2- اللاعبون (players): وهم الأطراف المشاركة في المباراة، والمنافسة أو هم المعنيون باتخاذ القرار، وممكن يكونوا أفراد أو مؤسسات.

3- الاستراتيجية (Strategy): وهي الخطة(الخطط) التي يختارها اللاعبون للعب بها في تحركاته وقراراته وهي نوعان:

أ- الاستراتيجية الخالصة (النقية): وهي استراتيجية يختارها اللاعب ويلعب بها المباراة كلها.

ب- الاستراتيجية المختلطة: وهي استخدام اللاعب لأكثر من استراتيجية متاحة، ويغيرها حسب ظروف المباراة.

4- مصفوفة العائد: (**مصفوفة الدفع**) (**pay off matrix**) :

هي تمثل الفوائد التي يمكن أن تكون ربحا أو خسارة بالإضافة إلى الاستراتيجيات التي يمكن انتهاجها من طرف أي لاعب، وهي كما يلي:

ليكن:

I = استراتيجيات (قرارات) اللاعب A   J= استراتيجيات (قرارات) اللاعب B

حيث $i=1,2.....,m$ $j=1,2......n$

فإن مصفوفة العائد تكون كما يلي:

اللاعب B

اللاعب A

X \ Y	Y_1	Y_2	....	Y_j	....	Y_n
X_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1j}	....	a_{1n}
X_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2j}	....	a_{2n}
....	....	....	....	....	....	....
X_i	a_{i1}	a_{i2}	....	a_{ij}	....	a_{in}
....	....	....	....	....	....	....
X_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mj}	....	a_{mn}

بحيث:

- استراتيجيات اللاعب A هي($X_1, X_2, \ldots. Y_i, \ldots. X_m$).
- استراتيجيات اللاعب B هي($Y_1, Y_2, \ldots. Y_j, \ldots. Y_n$).
- (a_{ij}) إما تكون موجبة أو سالبة، إذا كانت موجبة فإنها أرباح A عند اتباع X_i واللاعب B يتبع Y_j، وإذا كانت سالبة فالعكس بالعكس.

مثال:

لتكن لدينا اللعبة التالية وهي عبارة عن (لعبة النرد) بين اللاعب A واللاعب B لكل لاعب قطعة نرد ذو ستة أوجه، يقوم كل لاعب بإظهار وجه من الأوجه الستة في نفس الوقت.

- إذا كان مجموع الوجهين عددا زوجيا فإن اللاعب A يتحصل على 02 دينار من عند اللاعب B.

– وإذا كان مجموع الوجهين عددا فرديا فإن اللاعب B يتحصل على 1 دينار من اللاعب A.

المطلوب: استخرج مصفوفة العوائد للاعبين ؟

الحل:

– لتكن استراتيجيات A هي X_i حيث: X_i هي اظهار الوجه i حيث: (i=1,2,3,4,5,6).

– لتكن استراتيجيات B هي Y_j حيث: Y_j هي اظهار الوجه j حيث: (j=1,2,3,4,5,6).

اللاعب B

اللاعب A

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	2	-1	2	-1	2	-1
2	-1	2	-1	2	-1	2
3	2	-1	2	-1	2	-1
4	-1	2	-1	2	-1	2
5	2	-1	2	-1	2	-1
6	-1	2	-1	2	-1	2

تمثل القيم الموجبة أرباح للاعب A وخسائر للاعب B، والقيم السالبة أرباح للاعب B وخسائر للاعب A.

5– نتيجة المباراة: هناك نتيجتان للمباراة هما:

أ– المباريات ذات المجموع الصفري: وهذا يعني ما يربحه اللاعب الأول يخسر اللاعب الثاني.

ب– المباريات ذات المجموع الغير صفري: وهنا ليس بالضرورة ما يربحه اللاعب الأول يخسره اللاعب الثاني.

6- قيمة المباراة: (V) (Value):

A = اللاعب الأول

B= اللاعب الثاني

I= قرار اللاعب A

j= قرار اللاعب B

[aij] = مصفوفة الدفع (مصفوفة العائد).

V1= قيمة اللعبة بالنسبة للاعب A / V2= قيمة اللعبة بالنسبة للاعب B

- على أساس ما تقدم سنحاول إيجاد قيمة المباراة لكلا اللاعبين

أ- بالنسبة للاعب الأول A:

- اللاعب B يسعى إلى تقليل العوائد التي يمكن أن يحصل عليها اللاعب A أي أن:

$\text{Min}_{j}(a_{ij})$

- اللاعب A يسعى إلى تعظيم أقل ربح ممكن أن يحصل عليه($\text{Max}_{i}\ \text{min}_{j}\ (a_{ij})$

- وبالتالي قيمة اللعبة (المنافسة) للاعب A هي: $\mathbf{V1= Maximin\ (a_{ij})}$

ب- بالنسبة للاعب الثاني B:

- اللاعب A يسعى إلى تعظيم الخسائر التي يمكن أن تلحق باللاعب B أي أن:

$\text{Max}_{i}(aij)$

- اللاعب B يسعى إلى تقليل أكبر خسارة يمكن أن تلحق به $\text{Min}_{j}\ \text{max}_{i}\ (a_{ij})$

- وبالتالي قيمة اللعبة (المنافسة) للاعب B هي: $\mathbf{V2=Minimax\ (aij)}$

7- نقطة الاستقرار(التوازن):

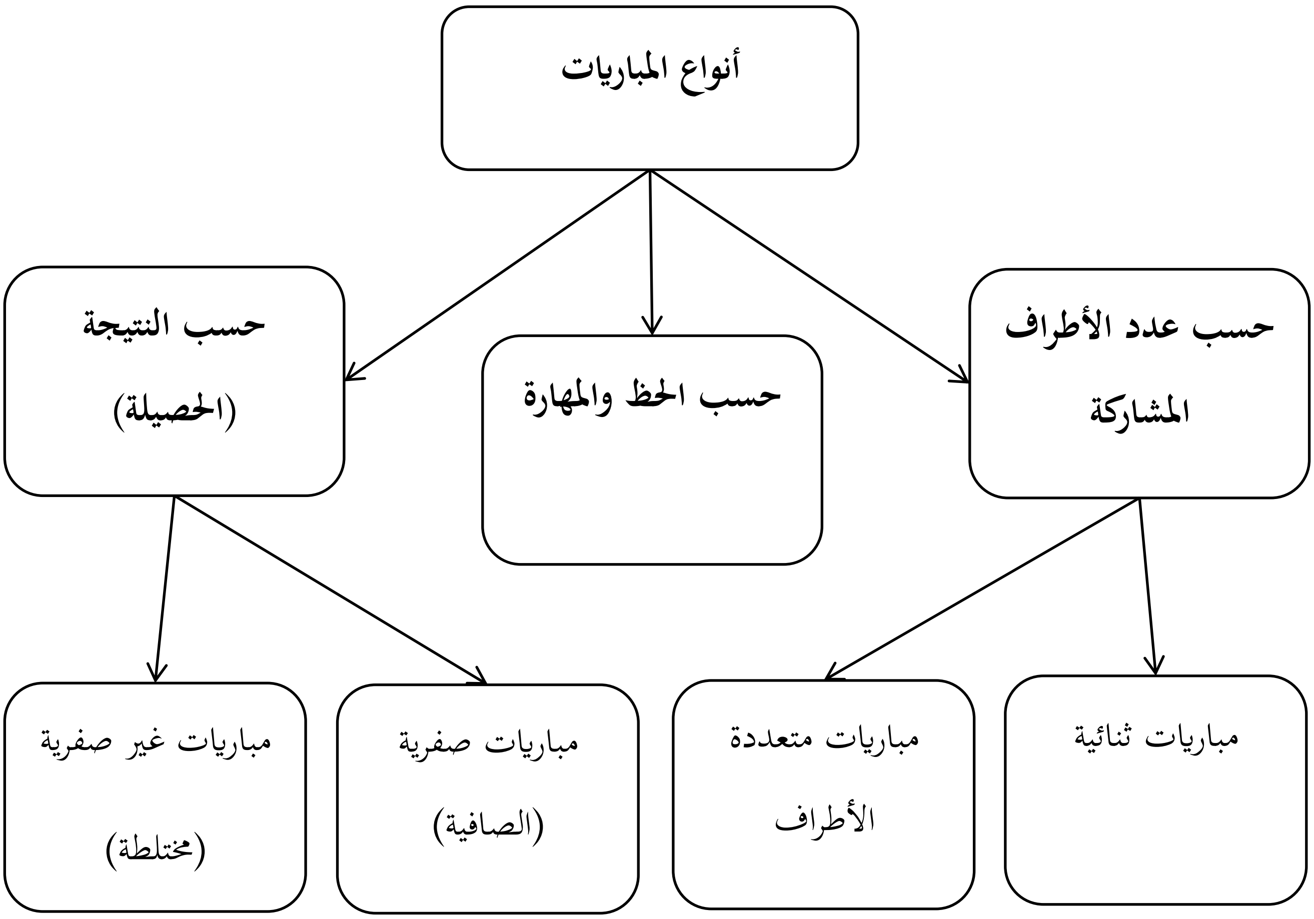
هي أصغر قيمة من عوائد(A) تساوي أكبر قيمة من عوائد استراتيجيات (B)

$$V1 = V2$$

$$\text{Min}_j \max_i (aij) = \text{Max}_i \min_j (aij)$$

خامسا- أنواع المباريات:

ويمكن تلخيصها في الشكل الموالي:



من خلال الشكل السابق نلاحظ أن هناك العديد من أنواع المباريات وهي:

1- المباريات حسب الحظ والمهارة: وهي المباريات التي لا تخضع للقوانين الرياضية إنها تخضع للمهارة والحظ في بعض الاحيان للفوز بها، ومن امثلة ذلك مباريات كرة القدم وغيرها من المنافسات الرياضية، أين يكون للمهارة دور كبير فيها والحظ في بعض الاحيان يكون له دور للفوز بها.

2- المباريات حسب عدد الأطراف: وهي نوعان هما:

أ – مباريات بين طرفين: وهي التي يكون عدد المتنافسين فيها اثنان فقط.

ب- مباريات بين عديد الأطراف: وهي التي يجب أن يكون عدد المتنافسين فيها أكثر من اثنان.

3- **المباريات حسب النتيجة (الحصيلة):** وهي نوعان

أ- المباريات ذات المجموع الصفري (الصافية):

وهي المباراة التي تصل فيها إلى وضع التوازن مباشرة من خلال استخدام كل طرف لاستراتيجية واحدة.

ب- المباريات ذات المجموع غير الصفري (المختلطة):

وهي المباراة التي تصل فيها إلى وضع التوازن من خلال استخدام كل لاعب لأكثر من استراتيجية أو توزيع الوقت على أكثر من استراتيجية واحدة، أي استعمال جميع الأوراق المتاحة.

وسنتطرق في هذا البرنامج إلى المباريات بين طرفين فقط، مرة ذات المجموع الصفري ومرة أخرى ذات المجموع غير الصفري تواليا كما يلي:

أولا: المباريات ذات المجموع الصفري بين طرفين:

وهي مباراة بين لاعبين والتي يكون فيها مجموع عوائد اللاعبين في النهاية يساوي صفر، أي ما يربحه اللاعب الأول يخسره اللاعب الثاني ومن أجل حل هذه المباراة نتبع الخطوات التالية:

✍ نجد أصغر قيمة في كل صف ونضعها في عمود(Min) ثم نختار من هذا العمود أكبر قيمة (Max) أي Maximim، وتكون هذه قيمة اللعبة بالنسبة للاعب الأول ونرمز لها بـــ V1.

✍ نجد أكبر قيمة في كل عمود ونصها في صف Max، ثم نأخذ أصغر قيمة في هذا الصف (Min) أي Minimax، وتكون هذه القيمة هي نتيجة المباراة بالنسبة للاعب الثاني ونرمز لها بـ V2.

✍ يكون مجموع المباراة صفر إذا كان V1=V2 وتسمى نقطة التوازن.

مثال:

اشترك اللاعبان A و B في مباراة معينة، اللاعب A لديه ثلاثة استراتيجيات هي L, M, N

واللاعب B لديه استراتيجيتين وهي Q, Pوكان العائد كالآتي:

الاختيار	العائد
L,P	A يدفع إلى B ثلاثة وحدات نقدية
L,Q	B يدفع ل A ثلاثة وحدات نقدية
M,P	Aيدفع ل B وحدتين نقديتين
M,Q	B يدفع ل A أربعة وحدات نقدية
N,P	B يدفع إلى A وحدتين نقديتين
N,Q	B يدفع ل A ثلاثة وحدات نقدية

المطلوب: أوجد قيمة المباراة؟

الحل:

1- تكوين مصفوفة العائد (مصفوفة الدفع):

اللاعب B

اللاعب A

الاستراتيجيات	P	Q
L	-3	3
M	-2	4
N	2	3

تبين هذه المصفوفة ربح وخسارة كلا اللاعبين A و B عند استخدامهما لأي استراتيجية، حيث تمثل القيم الموجبة أرباح A وخسائر B، وتمثل القيم السالبة أرباح B وخسائر A.

وتسمى هذه المصفوفة من الشكل (2n×3m) أو مباراة (2×3) ولغرض استخراج نقطة التوازن.

ولغرض استخراج نقطة التوازن (الاستقرار) نتبع الخطوات التالية:

- ✓ نستخرج أقل قيمة في كل صف من صفوف المصفوفة.
- ✓ ثم نستخرج أكبر قيمة في كل عمود من أعمدة المصفوفة.
- ✓ نجد أكبر قيمة من قيم (min).
- ✓ نجد أصغر قيمة من قيم(max).

	اللاعبB		Min
اللاعب A	-3	3	-3
	-2	4	-2
	2	3	2 ← max
Max	2	4	

min

إذا تساوت القيمتين المستخرجتين في المرحلة(3) و(4) فهذا يعني وجود نقطة استقرار (مباراة ذات مجموع صفري)، وتقع في تقاطع هذين السهمين داخل المصفوفة.

$$V= \text{Maximim Value} = \text{Minimax Value} = 2$$

وهذا يعني أن قيمة المباراة 2.

- إذا الاستراتيجية المثلى للاعب A هي N، والاستراتيجية المثلى للاعب B هي P.
- الفائز بالمباراة هو اللاعب A لأن قيمة المباراة موجبة.

مثال2:

علي

أحمد

	أ	ب	ج	د
أ	4	-4	-5	0
ب	-3	-4	-9	9
ج	6	7	-8	-9
د	7	3	-9	5

المطلوب: أوجد قيمة المباراة؟

الحل:

علي

أحمد

	أ	ب	ج	د	Min
أ	4	-4	-5	0	-5 ← max
ب	-3	-4	-9	9	-9
ج	6	7	-8	-9	-9
د	7	3	-9	5	-9
Max	7	7	-5	9	

Min

$$V1= -5 \qquad\qquad V2= -5$$

$$V1=V2$$

وبالتالي هناك نقطة توازن عند القيمة (5-)، وعليه فإن:

- علي يلعب بالاستراتيجية "ج".

- أحمد يلعب بالاستراتيجية "أ".

- قيمة المباراة (5-) أي أن علي فاز على أحمد لأن قيمة المباراة (5-).

ثانيا: المباريات بين طرفين ذات مجموع غير صفري (مباريات الاستراتيجيات المختلطة):

لا يمكن أن تكون جميع المباريات مستقرة (احتوائها على نقطة استقرار) بل هناك بعض المباريات أعلى قيمة من القيم الصغرى للصفوف لا تساوي أصغر قيمة من القيم العظمى للأعمدة، أي أن:

$$\text{Maximin Value} \neq \text{Minimax Value}$$

وهذا لأن استراتيجيات اللاعبين استراتيجيات مختلطة (متنوعة) وأن كل لاعب سيوزع اهتماماته بين ما هو متاح له من استراتيجيات ولن يركز على استراتيجية واحدة فقط، وإنما سيخصص وقت من المباراة للعب باستراتيجية معينة، والجزء الأخر يخصصه الاستراتيجية أخرى وهكذا.

وبالتالي الوصول إلى وقت التوازن يتحقق من خلال توزيع أوقات اللعب على استراتيجية معينة لكل فترة زمنية من خلال الاستراتيجيات المتاحة، ويحقق الطرف المسيطر أقل ما يمكن الحصول عليه، ويخسر الطرف التابع أقل ما يجب التضحية به في ظل توفر معلومات كاملة عن سير المباراة، وطرق حل هذه المباريات نجد:

1- الطريقة الجبرية.

2- الطريقة الحسابية (المصفوفات).

3- طريقة الرسم البياني.

4- طريقة البرمجة الخطية.

- **ملاحظات عامة:**

1- التغيير في الاستراتيجية في المباراة الخالصة:

لماذا لا يلجأ في المباراة ذات المجموع الصفري أن يغير اللاعبين استراتيجياتهم، وذلك لعدم وجود حافز لتغيير الاستراتيجية، حيث أن التغيير إذا حصل سيصاحب إما بعدم وجود أي تحسن أو الحصول على عوائد أسوء.

2- وجود أكثر من حل:

هناك بعض المباريات نجد أن هناك أكثر من حل سواء للاعب واحد أو للاعبين معا.

مثال:

		اللاعب ب				
		1	2	3	Min	
اللاعب أ	1	7	-1	2	-1	
	2	4	4	6	4	← max
	3	6	3	0	0	
	4	7	4	5	4	← max
	Max	7	4 ↑ min	6		

وبالتالي هذه مباراة صفرية ونقطة التوازن تكون في الحالتين نفسها:

- اللاعب أ الاستراتيجية 2 واللاعب ب الاستراتيجية 2.

- اللاعب أ الاستراتيجية 4 واللاعب ب الاستراتيجية 2.

وقيمة المباراة في الحالتين تساوي 4.

3- الاستراتيجيات المهيمنة:

بالنسبة لطرق حل المباريات المختلطة هناك من تفرض أن تكون المصفوفة من الشكل (2×2)، وبالتالي هناك طريقة في حالة ما إذا كانت المصفوفة أكثر من (2×2) من أجل اختزالها وجعلها(2×2) لتطبيق هذه الطرق أو بعضها.

في حالة ما إذا كانت المصفوفة ذات أبعاد كبيرة، وفي حال المباراة لا تحتوي على نقطة استقرار، نستطيع تحت ظروف معينة أن نختصر(نختزل) المصفوفة المعطاة إلى حجم أصغر بأسلوب الهيمنة.

ويقصد بالهيمنة هي درجة الأفضلية التي تتميز بها استراتيجيات اللاعب A أو B على غيرها من الاستراتيجيات، أما الاستراتيجيات التي يتم الهيمنة عليها (المحذوفة) فهي الاستراتيجيات التي لا يستخدمها اللاعب مهما كانت الاستراتيجية التي يلعب بها الخصم.

✍ **قواعد الهيمنة:**

- إذا كانت جميع العناصر التي في الصف H أصغر أو مساوية للعناصر المقابلة لها في صف أخر I، فإن الصف H مهيمن عليه ويمكن حذفه، لأن اللاعب الأول سوف لن يستخدمه أبدا مهما كان ظرف المباراة.

- إذا كانت جميع العناصر في العمود K أكبر أو مساوية للعناصر المقابلة لها في العمود J، فإن العمود K مهيمن عليه ويمكن حذفه، لأن اللاعب الثاني سوف لن يستخدمه أبدا مهما كان ظرف المباراة.

- يمكن حذف أكثر من صف أو أكثر من عمود مهيمن عليه وجعل المصفوفة الخاصة بالحل في أبسط صورها(2×2)

- كما يمكن أن ننوه أن عملية حذف الصفوف والأعمدة (اختزال المصفوفة) لا تؤثر على قيمة المباراة سواء كانت مستقرة أو غير مستقرة.

مثال: لدينا المباراة التالية:

		اللاعب الثاني		
		و	هـ	د
اللاعب الاول	أ	6	1	-3
	ب	1	0	4
	ج	3	2	3

الحل:

			اللاعب الثاني		
	Min	و	هـ	د	
اللاعب الاول	-3	6	1	-3	أ
	0	1	0	4	ب
max →	2	3	2	3	ج
		6	2 (min)	4	Max

وبالتالي المباراة مستقرة (متوازنة) وقيمها (2).

➢ نحاول الأن أن نختزل المصفوفة وفق نظرية الهيمنة ونقوم بالحل:

(خلاصة الاختزال: ننزع العمود الكبير والسطر الصغير)

– نلاحظ أن العمود (و) أكبر من العمود (ه) وبالتالي مهيمن عليه ونحذف العمود (و) لأن اللاعب الثاني لن يستخدمه أبدا مهما كانت ظروف المباراة:

	د	ه
أ	-3	1
ب	4	0
ج	3	2

– نلاحظ أيضا أن: السطر (أ) أقل من (ج) وبالتالي السطر (أ) مهيمن عليه ونحذفه، لأن اللاعب الأول سوف لن يستخدمه أبدا مهما كانت ظروف المباراة:

	د	و
ب	4	0
ج	3	2

– نقوم بحل المباراة بعد الاختزال ونرى هل تبقى نفس النتيجة أو لا:

		اللاعب الثاني			
		د	ه	Min	
اللاعب الأول	ب	4	0	0	
	ج	3	2	2	← max
	Max	4	2		
			↑ min		

* نلاحظ أن نتيجة المباراة نفسها حتى بعد اختزالها، وهي مستقرة وقيمها V=2، وهذا يؤكد أن الاختزال لا يؤثر على نتيجة المباراة، لكنه فقط يسهل من عملية الحل خاصة إذا كانت المباراة غير مستقرة.

مثال 02: لدينا المباراة التالية:

		اللاعب B		
		د	هـ	و
اللاعب A	أ	0	-2	7
	ب	2	5	6
	ج	3	-3	8

الحل:

		اللاعب B			
		د	هـ	و	Min
اللاعب A	أ	0	-2	7	-2
	ب	2	5	6	2 ← max
	ج	3	-3	8	-3
	Max	3	5	8	

min

نلاحظ أن المباراة لا يوجد بها نقطة استقرار، أي أنها غير متوازنة لأن V1=2 وV2=3 وهما غير متساويان.

- نحاول اختزال المصفوفة لتسهيل الحل:

- نلاحظ أن العمود (و) أكبر العمود (هـ) والعمود (د) إذن مهيمن عليه ونحذف العمود (و)، ونتحصل على المباراة التالية:

	د	هـ
أ	0	-2
ب	2	5
ج	3	-3

- نلاحظ أن السطر (أ) أقل من السطر (ب)، وبالتالي السطر (أ) مهيمن عليه ونحذفه، ونتحصل على المباراة في الشكل التالي:

	د	هـ
ب	2	5
ج	3	-2

- نقوم بحل المباراة بعد الاختزال ونرى هل تبقى نفس النتيجة أو لا:

		اللاعب B			
		د	هـ	Min	
اللاعب A	ب	2	5	2	← max
	ج	3	-2	-2	
	Max	3	5		
		↑ min			

* نلاحظ أن نتيجة المباراة نفسها حتى بعد اختزالها، وهي غير مستقرة حتى بعد الاختزال لأن $V1 \neq V2$، وهذا يؤكد أن الاختزال لا يؤثر على نتيجة المباراة، لكنه فقط يسهل من عملية الحل خاصة إذا كانت المباراة غير مستقرة مثل هذه المباراة لأن حل مباراة غير مستقرة من الشكل (2×2) أسهل بكثير من مباراة غير مستقرة من الشكل (3×3) وهذا ما سنعرفه في العنصر الموالي.

❖ **وطرق حل المباريات المختلطة (ذات المجموع غير الصفري)**: وهذه الطرق نجد منها:

1- الطريقة الجبرية.

2- الطريقة الحسابية.

3- الطريقة البيانية.

4- طريقة البرمجة الخطية.

➢ ويمكن تطبيق هذه الطرق لكل حسب الحالات التالية وحسب حجم المباراة كما يلي:

✍ **مباراة من النوع (2×2)**: يمكن حلها بالطرق التالية:

- الطريقة الجبرية.
- الطريقة الحسابية.
- الطريقة البيانية.
- طريقة البرمجة الخطية.

✍ **مباراة من نوع $(m\times2)$ أو $(2\times n)$ حيث n و m أكبر من 2**: ويمكن حلها بالطرق التالية:

- الطريقة البيانية.
- طريقة البرمجة الخطية.

✍ **مصفوفة من النوع$(m\times n)$ حيث m و n أكبر تماما من 2 أي $(2< m\ n)$**: ويمكن حل هذا النوع من المباريات بطريقة وحيدة فقط هي:

- طريقة البرمجة الخطية.

وفي ما يلي سنعرض طرق حل المباريات المختلطة (الغير مستقرة) (الغير صفرية) بالطرق التالية حسب حجم المباراة وهذه الطرق سنعرضها تواليا كما يلي:

1- الطريقة الجبرية (طريقة القيمة المتوقعة للربح والخسارة):

لدينا مصفوفة من هذا الشكل(2×2)

A \ B	Y1	Y2
X1	a11	a12
X2	a21	a22

حيث يمتلك اللاعب A الاستراتيجيات X1 وX2 باحتمالات لعب P_1 و P_2 على التوالي:

ويمتلك اللاعب B الاستراتيجيات Y1 و Y2 باحتمالات لعب q_1 وq_2 على التوالي.

ولإيجاد احتمال اللعب لكل لاعب، نستخدم القوانين التالية:

$$P_1 = \frac{(a_{22} - a_{21})}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$P_2 = 1 - P_1$$

$$q_1 = \frac{(a_{22} - a_{12})}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$q_2 = 1 - q_1$$

أما قيمة المباراة فهي:

$$V = \frac{(a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

مثال: ليكن لدينا مصفوفة الدفع التالية:

A \ B	Y1	Y2
X1	1	-1/2
X2	-1/2	0

- أوجد احتمالات اللعب بالاستراتيجيات المختلفة لكل لاعب؟

الحل:

		اللاعب B		
		Y1	Y2	Min
اللاعب A	X1	1	-1/2	-1/2 ← max
	X2	-1/2	0	-1/2
	Max	1	0 ↑ min	

المباراة غير مستقرة، وبالتالي نستخدم الطريقة الجبرية لمعرفة نسب استخدام كل استراتيجية من طرف كلا اللاعبين؟

- اللاعب A:

$$P_1 = \frac{(a_{22} - a_{21})}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$P_1 = \frac{(0 - (-\frac{1}{2}))}{(1 + 0) - ((-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2}))} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P_2 = 1 - P_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

وبالتالي اللاعب A سيلعب بالاستراتيجية الأولى X1 بنسبة 25% من وقت المباراة، ويلعب بالاستراتيجية الثانية X2 بنسبة 75% من وقت المباراة.

- اللاعب B:

$$q_1 = \frac{(a_{22} - a_{12})}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$q_1 = \frac{(0 - (-\frac{1}{2}))}{(1 + 0) - ((-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2}))} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$q_2 = 1 - q_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

وبالتالي اللاعب B يلعب بالاستراتيجية Y1 بنسبة 25% ويلعب بالاستراتيجية Y2 بنسبة 75% من توقيت المباراة.

- أما قيمة المباراة V:

$$V = \frac{(a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$= \frac{(1 \times 0) - ((-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}))}{(1 + 0) - ((-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2}))} = \frac{-\frac{1}{4}}{2} = -\frac{1}{8}$$

ومنه نتيجة المباراة هي $-\frac{1}{8}$ وهي محصورة بين:

$$\text{Minimax} \leq V \leq \text{Maximin}$$

$$-1/2 \leq V \leq 0$$

وهو ما يعرف بمدى المباراة

مثال02: لتكن لدينا المنافسة التالية:

		الشركة (ب)	
		ب1	ب2
الشركة (أ)	أ1	8	-2
	أ2	-4	2

- أوجد حل المباراة؟

الحل:

		الشركة (ب)		
		ب1	ب2	Min
الشركة (أ)	أ1	8	-2	-2 ← max
	أ2	-4	2	-4
	Max	8	2	
			↑ min	

وبالطريقة الجبرية بما أنها مباراة مختلطة (غير مستقرة) نحاول إيجاد نسبة اختيار كل لاعب لاستراتيجية معينة بنسب مختلفة كما يلي:

* الشركة (أ):

- نسبة اللعب بالاستراتيجية (أ1):

$$P_1 = \frac{(a_{22} - a_{21})}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$P_1 = \frac{(2 - (-4))}{(8 + 2) - ((-2) + (-4))} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

- نسبة اللعب بالاستراتيجية (أ2):

$$P_2 = 1 - P_1 = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

وبالتالي الشركة (أ) تلعب بالاستراتيجية (P_1) بنسبة تقدر ب(3/8) أي نسبة 37.5% وتلعب بالاستراتيجية(P_2) بنسبة تقدر ب(5/8) أي نسبة 62.5% من وقت المباراة.

* بالنسبة للشركة (ب):

- استراتيجية اللعب بالاستراتيجية (ب1):

$$q_1 = \frac{(a_{22} - a_{12})}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$q_1 = \frac{(2 - (-2))}{(8 + 2) - ((-2) + (-4))} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

- استراتيجية اللعب بالاستراتيجية (ب2):

$$q_2 = 1 - q_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

أما بالنسبة للشركة(ب) تلعب بالاستراتيجية(ب1) بنسبة تقدر ب(1/4) أي بنسبة 25% وتلعب بالاستراتيجية(ب2) بنسبة تقدر ب(3/4) أي بنسبة 75% من وقت المباراة.

* حساب قيمة المباراة (V):

$$V = \frac{(a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$= \frac{(8 \times 2) - ((-4) \times (-2))}{(8 + 2) - ((-2) + (-4))} = \frac{16 - 8}{16} = \frac{1}{2}$$

وبالتالي قيمة المباراة هي: $\frac{1}{2}$ وهي ربح الشركة (أ) وخسارة للشركة (ب).

2- الطريقة الحسابية:

من أجل فهم هذه الطريقة نورد المثال التالي:

مثال:

	اللاعب B	
اللاعب A	8	-5
	2	6

- أوجد الاستراتيجيات المثلى لكل لاعب؟

الحل:

		اللاعب B		
		Y1	Y2	Min
اللاعب A	X1	8	-5	-5
	X2	2	6	2 ← max
	Max	8	6	
			↑ min	

لدينا 2 =V1 و V2=6 بما أن V1≠V2 فإن المباراة غير مستقرة وبالتالي نقوم بحلها بالطريقة الحسابية كما يلي:

من أجل الحل بالطريقة الحسابية تقوم بإيجاد عدد مرات التنافس لكل لاعب، ومن أجل ذلك نقوم بضرب قيمة(a_{12} و a_{21}) للمصفوفة بــ (1-) فتصبح لدينا المصفوفة بالشكل التالي:

	اللاعب B	
اللاعب A	8	-(-5)
	-2	6

- بالنسبة للاعب A:

		اللاعب B		
		Y1	Y2	عدد مرات التنافس
اللاعبA	X1	8	- (-5)	8-(-5)=13
	X2	-2	6	-2+6=4
				المجموع 17

وبالتالي عدد مرات التنافس الكلية بالنسبة للاعب A على الاستراتيجيتين (X1 و X2) هو

(4+13) =17

وبالتالي احتمالات اللعب (A) نجد:

$$P_1 = \frac{4}{17} = 0.235 = 23.5\%$$

$$P_2 = \frac{13}{17} = 0.764 = 76.4\%$$

- بالنسبة للاعب B:

		اللاعب B	
		Y1	Y2
اللاعبA	X1	8	- (-5)
	X2	-2	6
عدد مرات التنافس		8-2 =6	-(-5) +6 =11
		المجموع 17	

وبالتالي عدد مرات التنافس الكلية على الاستراتيجيتين(Y1وY2) هو:

(11+6) = 17

ومنه فإن احتمالات اللعب ل اللاعب (B) هي:

$$q_1 = \frac{11}{17} = 0.647 = 64.7\%$$

$$q_2 = \frac{6}{17} = 0.352 = 35.2\%$$

3-الطريقة البيانية:

من أجل هذه الطريقة نورد المثال التالي:

مثال: هناك عقد ما سيجري بين الحكومة وشركة خاصة، قبل انتهاء مدة العقد القديم، والجدول التالي يوضح العوائد:

		الشركة			
		ش1	ش2	ش3	ش4
الحكومة	ح1	20	15	12	35
	ح2	25	14	8	10
	ح3	40	2	19	5
	ح4	-5	4	11	0

المطلوب: أوجد الحل بالطريقة البيانية؟

الحل:

قبل ايجاد الحل نختزل المصفوفة إذا كان بالإمكان فعل ذلك:

نلاحظ أن السطر(ح4) أقل من السطر(ح1) وبالتالي(ح4) ينزع، فنتحصل على المصفوفة التالية:

	ش1	ش2	ش3	ش4
ح1	20	15	12	35
ح2	25	14	8	10
ح3	40	2	19	5

لدينا أيضا العمود(ش1) أكبر من العمودين(ش2) (ش3) وبالتالي (ش1) ينزع، فنتحصل على الجدول الموالي:

	ش2	ش3	ش4
ح1	15	12	35
ح2	14	8	10
ح3	2	19	5

لدينا كذلك السطر (ح2) أقل من السطر(ح1) وبالتالي السطر (ح2) ينزع، ونتحصل على الجدول التالي:

	ش2	ش3	ش4
ح1	15	12	38
ح3	2	19	5

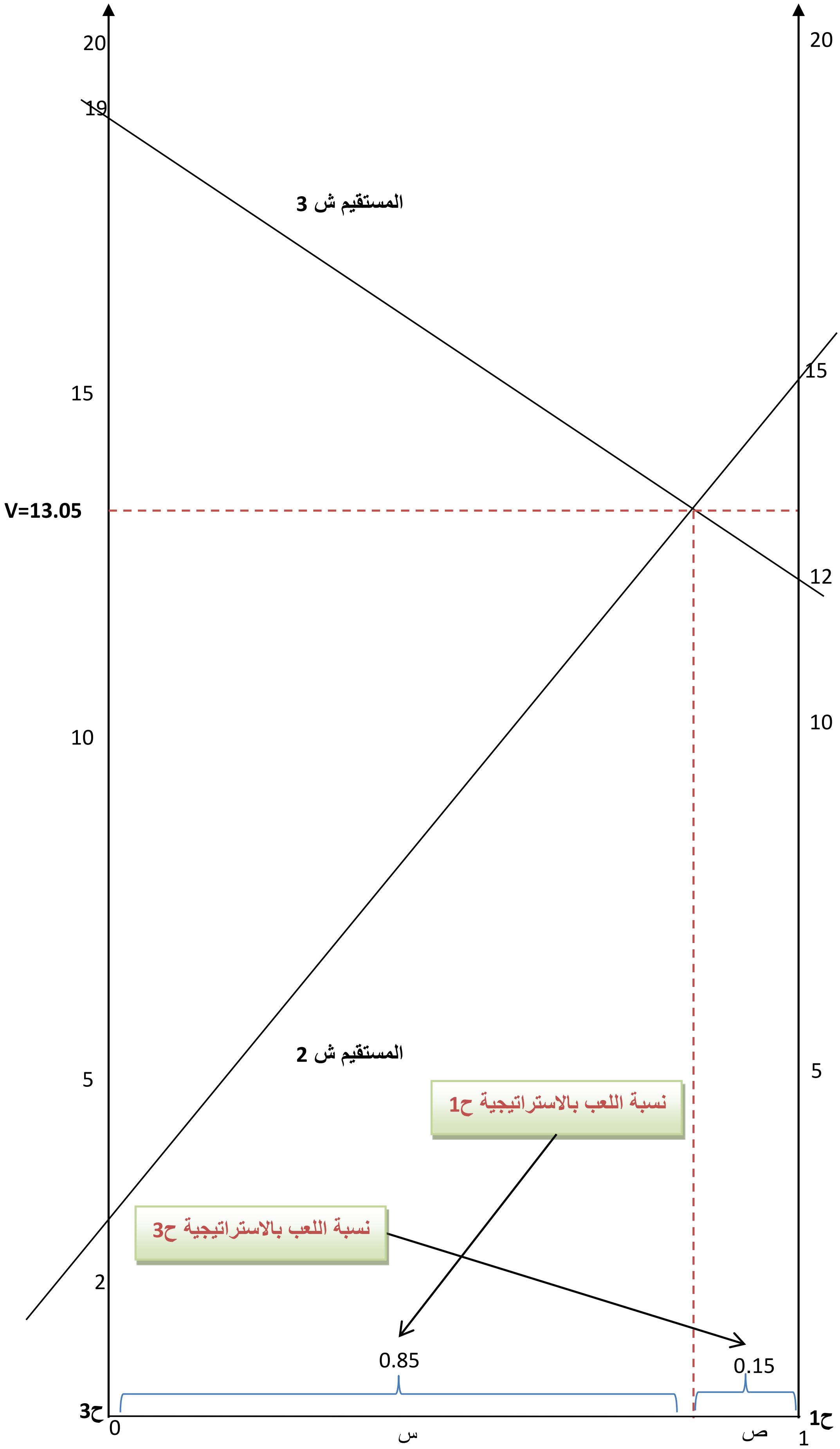
لدينا أيضا أن العمود (ش4) أكبر من العمود (ش2) وبالتالي العمود (ش4) ينزع، ونتحصل على الجدول التالي:

		الشركة	
		ش2	ش3
الحكومة	ح1	15	12
	ح3	2	19

من خلال الجدول الأخير والذي يمثل المباراة بشكلها النهائي بعد الاختزال باستخدام نظرية الهيمنة، نقوم الآن بالحل بالطريقة البيانية كما يلي:

- بالنسبة للحكومة:

- نقود برسم خط أفقي وعلى طرفيه خطين عموديين مدمجين أحدهما هو (ح1) والاخر هو(ح3)


20
19
المستقيم ش 3
15
V=13.05
12
10
المستقيم ش 2
5
نسبة اللعب بالاستراتيجية ح1
نسبة اللعب بالاستراتيجية ح3
2
0.85
0.15
ح3
0
س
ص
1
ح1

قيمة المباراة هي نقطة التقاطع بين (ش2) و (ش3) ونرسم خط أفقي فإن القيمة المتحصل عليها من (ح1) و (ح3) هي تقريبا 85 % و 15 %تقريبا أما قيمة المباراة هي تقريبا V=13، ويمكن التأكد من قيمة المباراة واستراتيجيات الحكومة حسابيا كما يلي:

- طريقة المعادلات لإيجاد الاستراتيجيات:

لنفرض أن المزيج الذي نبحث عنه هو س% من ح1 و ص% من ح3 وعند نقطة تقاطع (ش2) و(ش3) لابد من تحقيق الشرط التالي:

15س +2 ص = 12س + 19 ص......(1)

15 س - 12س = 19 ص- 2 ص

3س = 17ص => س= $\frac{17}{3}$ ص......(2)

لكن لدينا س+ ص = 1 (أي بمعنى مجموع احتمالين = 100%)

س =1 - ص......(3)

نعوض قيمة س من المعادلة (2) في المعادلة رقم (3) أعلاه:

1- ص = $\frac{17}{3}$ ص => 1= $\frac{17}{3}$ ص+ ص => 1= $\frac{20}{3}$ ص => ص = $\frac{3}{20}$ = 0.15

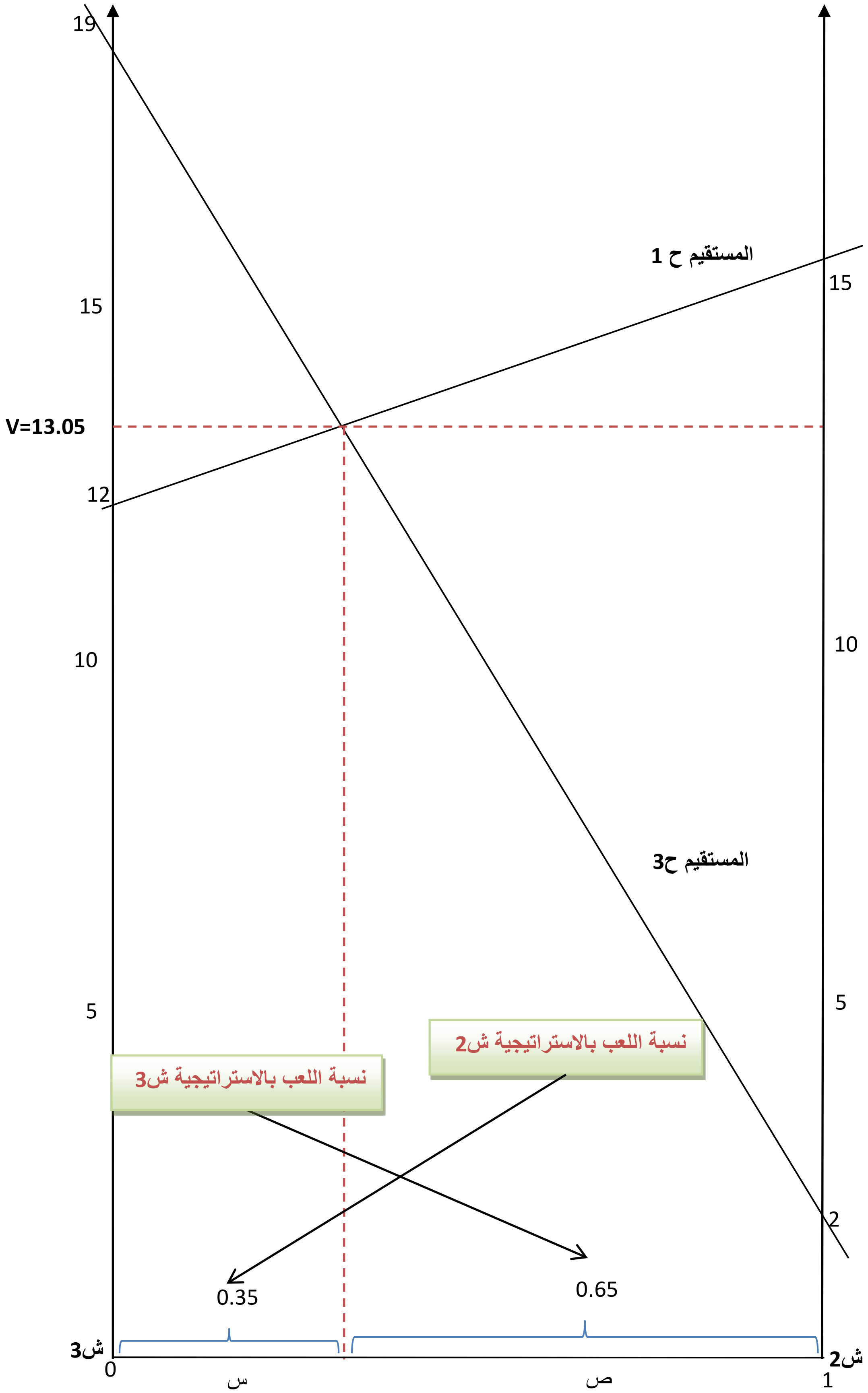
س= 1- ص =1 - 0.15 = 0.85

بالتعويض في المعادلة (1) وفي إحدى الطرفين أو كلاهما نجد:

$$(15) \times (0.85) + (2) \times (0.15) = 12.75 + 0.3 = 13.05$$

$$(12) \times (0.85) + (19) \times (0.15) = 10.2 + 2.85 = 13.05$$

➢ بالنسبة للشركة:



قيمة المباراة هي نقطة التقاطع بين (ح1) و (ح3) ونرسم خط أفقي فإن القيمة المتحصل عليها من (ش2) و (ش3) هي تقريبا 35 % و 65 %تقريبا أما قيمة المباراة هي تقريبا V=13، ويمكن التأكد من قيمة المباراة واستراتيجيات الحكومة حسابيا كما يلي:

- طريقة المعادلات لإيجاد الاستراتيجيات:

المزيج الذي نبحث عنه هو س% من ش2 وهي % من ش3 وعند نقطة تقاطع (ح1) و(ح3) يجب تخفيف الشرط التالي:

15س+ 12ص = 12س +19 ص......(1)

15 -2س = 19ص - 12ص

13س = 7ص => س= $\frac{7}{13}$ ص......(2)

ولدينا س + ص =1=> س=1- ص......(3)

نعوض قيمة س من المعادلة (2) في المعادلة رقم (3) أعلاه:

1- ص = $\frac{7}{13}$ ص => 1= $\frac{7}{13}$ ص+ ص => 1= $\frac{20}{13}$ ص => ص = $\frac{13}{20}$ = 0.65

س= 1- ص =1 - 0.65 = 0.35

بالتعويض في المعادلة (1) وفي إحدى الطرفين أو كلاهما نجد:

$(15) \times (0.35)+(12) \times (0.66)=5.25+7.8=13.05$

$(2) \times (0.35)+(19) \times (0.65)=0.7+12.35=13.05$

4- طريقة البرمجة الخطية:

تستخدم هذه الطريقة في جميع المباريات بين لاعبين، والتي تكون من نوع $(n \times m)$ حيث $n,m > 2$ ، وعند عدم وجود نقطة استقرار (توازن) وعدم تقليص المباراة إلى درجة أدنى حتى نتمكن من حلها بإحدى الطرق السابقة، وبالتالي فالطريقة الوحيدة لحل هذا النوع من المباريات هو طريقة البرمجة الخطية.

ولتوضيح فكرة هذه الطريقة فيجب علينا أن ننطلق من مصفوفة العائد[aij] ومحاولة صياغة البرنامج الخطي الذي سيتم حله بإحدى طرق البرمجة الخطية كالسمبلكس(simplex) و م الكبرى (Big.M)، وطريقة ذات الوجهين (two phase).

عند تحليل مصفوفة العائد [aij] نجد أن هناك عددا من الاستراتيجيات الممكنة المتاحة للاعب A وهي (A1.A2.A3....Am)، أما استراتيجيات اللاعب B(B1.B2.B3....Bn).

وبالتالي اللاعب A بإمكانه اختيار أي من الاستراتيجيات المتاحة له بحرية تامة بالاحتمالات:

(X1.X2.X3....Xm) علما بأن $0 \leq X_i \leq 1$ $i=1.2.3....m$ حيث

$$X_1+X_2+X_3+....X_m=1$$

نفترض أن نتيجة المباراة بالنسبة للاعب (A) هي تساوي (V) فإنه في هذه الحالة يكون هدفه هو تعظيم قيمة (V) إلى أكبر ما يمكن:

دالة الهدف: $Z = Max\ (v)$

أما قيود المشكلة فتكتب كما يلي:

$a_{11}x_1+a_{21}\ x_2+.......+a_{m1}x_m \geq V$

$a_{12}\ x_2+a_{22}x2+.......+a_{m2}\ x_m \geq V$

.

.

$a_{1n}\ x_1+a_{2n}x_2+.......+a_{\ mn}\ x_m \geq V$

$x_1+x_2+.................+x_m=1$

شرط عدم السلبية:

$x_1,x2,x3........x_m\geq 0$

الملاحظ أن النموذج الرياضي السابق يمكن تبسيطه من خلال إجراء بعض العمليات الحسابية وذلك بقسمة قيم المتغيرات في طرفي العلاقة الرياضية على المقدار (V) حيث نحصل على ما يلي:

$$a_{11}\frac{x_1}{V}+a_{21}\frac{x_2}{V}+\cdots+a_{m1}\frac{x_m}{V} \geq \frac{V}{V}$$ أو (1)

$$a_{12}\frac{x_1}{V}+a_{22}\frac{x_2}{V}+\cdots+a_{m2}\frac{x_m}{V} \geq \frac{V}{V}$$

.

.

$$a_{1n}\frac{x_1}{V}+a_{2n}\frac{x_2}{V}+\cdots+a_{mn}\frac{x_m}{V} \geq \frac{V}{V}$$

$$\frac{x_1}{V}+\frac{x_2}{V}+\cdots+\frac{x_m}{V} \geq \frac{1}{V}$$

* بالنسبة لدالة الهدف باستخدام خصائص الدالة:

$$Z=\text{Max}\ (V) = \text{Min}\ (\frac{1}{V})$$

بالتعويض نحصل على ما يلي:

$$Z=\text{Min}(\frac{1}{V}) = \text{Min}\ (\frac{X_1}{V} + \frac{X_2}{V} + \cdots + \frac{X_m}{V})$$

بالتعويض عن كل قيمة $\frac{X_i}{V}$ بالمتغير $\overline{X}i$ حيث أن: $i = (1,2.........m)$

نحصل على ما يلي:

$$Z=\text{Min}(\overline{X}_1+\overline{X}_2+.......+\overline{X}_m)$$

وبالتالي البرنامج الخطي لإيجاد الاستراتيجيات المثلى ل A يكتب كما يلي:

$$\text{PLA}\quad \begin{cases} \text{Min Z} = \sum_{i=1}^{m} \overline{X}i = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \cdots + \overline{X}_m \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ \ \overline{X}i \geq 1 \qquad\qquad j \in (1, n) \end{cases}$$

أما بالنسبة للاعب B فسوف يكون البرنامج الخطي له هو النموذج المقابل(dual model)

للاعب A كما يلي:

$$\text{PLB}\quad \begin{cases} \text{Max Z} = \sum_{j=1}^{n} \overline{Y}j = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \cdots + \overline{Y}_n \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \ \overline{Y}j\ \leq 1 \qquad\qquad i \in (1, m) \end{cases}$$

مثال: أوجد الاستراتيجيات المثلى للاعبين A و B باستخدام طريقة البرمجة الخطية إذا كانت المباراة غير مستقرة؟

		اللاعب B		
		Y_1	Y_2	Y_3
اللاعب A	X_1	6	0	3
	X_2	8	−2	3
	X_3	4	6	5

الحل:

		اللاعب B			
		Y_1	Y_2	Y_3	Min
اللاعب A	X_1	6	0	3	0
	X_2	8	-2	3	-2
	X_3	4	6	5	4 ← max
	Max	8	6	5 ↑ min	

$$\text{Maximin} = 4 = V_1 \qquad \text{Minimax} = 5 = V_2$$

من خلال النتائج نلاحظ أن: $\text{Minimax} \neq \text{Maximin}$

وبالتالي لا توجد استراتيجية حرة (واحدة) بل توجد استراتيجيات مختلطة لأن: $4 \leq V \leq 5$

– وعند محاولة اختزال هذه المصفوفة فإننا لا يمكن اختزالها وبالتالي فهي من الشكل(3×3) وبالتالي فالطريقة الوحيدة التي تمكننا من الحل هي طريقة البرمجة الخطية:

- نقوم باستخراج البرنامج الخطي للاعب B:

$$PLB\quad \begin{cases} \text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} \overline{Y}j = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \cdots + \overline{Y}_n \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \overline{Y}j \le 1 \qquad i \in (1, m) \end{cases}$$

وبالتالي البرنامج الخطي للاعب B يكون كالآتي:

$$\text{Max } Z = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3$$

$$\begin{cases} 6\overline{Y}_1 + 0\overline{Y}_2 + 3\overline{Y}_3 \le 1 \\ 8\overline{Y}_1 - 2\overline{Y}_2 + 3\overline{Y}_3 \le 1 \\ 4\overline{Y}_1 + 6\overline{Y}_2 + 5\overline{Y}_3 \le 1 \end{cases}$$

$$\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \overline{Y}_3 \ge 0$$

مع العلم أن: $\overline{Y}_3 = \frac{Y_3}{V}$ و $\overline{Y}_2 = \frac{Y_2}{V}$ و $\overline{Y}_1 = \frac{Y_1}{V}$

نقوم الآن بحب البرنامج الخطي بإتباع الخطوات التالية:

1- نحول الشكل القانوني إلى الشكل المعياري:

$$\text{Max } Z = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 + 0\overline{S}_1 + 0\overline{S}_2 + 0\overline{S}_3$$

$$\Rightarrow \text{Max } Z - \overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 - \overline{Y}_3 = 0$$

$$\begin{cases} 6\overline{Y}_1 + 0\overline{Y}_2 + 3\overline{Y}_3 + \overline{S}_1 = 1 \\ 8\overline{Y}_1 - 2\overline{Y}_2 + 3\overline{Y}_3 + \overline{S}_2 = 1 \\ 4\overline{Y}_1 + 6\overline{Y}_2 + 5\overline{Y}_3 + \overline{S}_3 = 1 \end{cases}$$

مع العلم أن: $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \overline{S}_3$ (متغيرات الفجوة، متغيرات مكملة)

2-تشكيل جدول الحل الأساسي الأولي:

الجدول رقم (01)

المتغير الخارج   المتغير الداخل

	$\bar{Y}_1$	$\bar{Y}_2$	$\bar{Y}_3$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	الثابت	
$\bar{S}_1$	6	0	3	1	0	0	1	$^1/_6$
$\bar{S}_2$	8	-2	3	0	1	0	1	$^1/_8$ الأقل
$\bar{S}_3$	4	6	5	0	0	1	1	$^1/_4$
Z	-1	-1	-1	0	0	0	1	/

الصف المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (1) (جدول الحل الأولي) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم و$\bar{Y}_3$و $\bar{Y}_2$و $\bar{Y}_1$ ولكن سندخل للنموذج المتغير $\bar{Y}_1$ وذلك لأننا اخترناه عشوائيا لأن قيم جميع المتغيرات تساوي (-1) وبالتالي اخترنا عشوائيا $\bar{Y}_1$.

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر العمود الداخل $\bar{Y}_1$ ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير $\bar{S}_2$ من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة $\frac{1}{8}$ وهي أقل من القيمتين الباقيتين، وبالتالي يخرج $\bar{S}_2$ من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 2) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف $\bar{Y}_1$ فنجدها بقسمة الصف $\bar{S}_2$ (الجدول 1) على العنصر المحوري (8) فنتحصل على عناصر السطر $\bar{Y}_1$ (الجدول رقم 2)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (2).

- بالنسبة للصفوف المتبقية ($Z, \bar{S}_3, \bar{S}_1$) فإننا نجدها بالقانون التالي:

العنصر الصف الجديد= العنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل) x (عناصر الصف المحوري، أي عناصر $\bar{Y}_1$ في الجدول رقم 2)

وبالتالي لدينا قيم السطر $\bar{S}_1$ وقيم السطر $\bar{S}_3$ وقيم السطر Z وسنجدهم كما يلي:

➢ $\bar{S}_1$ الجديدة = $\bar{S}_1$ القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف $\bar{S}_1$ (6)) x (الصف المحوري $\bar{Y}_1$)

$$\begin{array}{ccccccc}
6 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
- & & & & & & \\
(6)[1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8}] \\
= 6 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\
\hline
0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4}
\end{array}$$

➢ $\bar{S}_3$ الجديدة = $\bar{S}_3$ القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف $\bar{S}_3$ (4)) x (الصف المحوري $\bar{Y}_1$)

$$\begin{array}{ccccccc}
4 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
- & & & & & & \\
(4)[1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8}] \\
= 4 & -1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
\hline
0 & 7 & \frac{7}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}$$

➢ Z الجديدة= Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف $Z(-1)$)x (الصف المحوري $\bar{Y}_1$)

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$-$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (-1)[1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8}] \\ = -1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{array}$$

بعد حساب جميع الصفوف نتحصل على الجدول رقم (2) التالي:

الجدول رقم (02)

المتغير الخارج　　　المتغير الداخل

	$\bar{Y}_1$	$\bar{Y}_2$	$\bar{Y}_3$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	الثابت	
$\bar{S}_1$	0	$^3/_2$	$^3/_4$	1	$-^3/_4$	0	$^1/_4$	0.166
$\bar{Y}_1$	1	$-^1/_4$	$^3/_8$	0	$^1/_8$	0	$^1/_8$	قيمة غير معرفة
$\bar{S}_3$	0	7	$^7/_2$	0	$-^1/_2$	1	$^1/_2$	الأقل 0.07
Z	0	$-^5/_4$	$-^5/_8$	0	$^1/_8$	0	$^1/_8$	/

العنصر المحوري　　　الصف المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (2) أن الحل يمكن تحسينه أيضا لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم و$\bar{Y}_3$و

$\overline{Y}_2$ ولكن سندخل للنموذج المتغير $\overline{Y}_2$ وذلك لأن معاملها في دالة الهدف هي أكبر قيمة سالبة $(-\frac{5}{4})$ وبالتالي اخترنا عشوائيا $\overline{Y}_2$ للدخول إلى النموذج (المتغير الداخل).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر العمود الداخل $\overline{Y}_2$ ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير $\overline{S}_3$ من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة (0.07) وهي أقل من القيمتين الباقيتين، وبالتالي يخرج $\overline{S}_3$ من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 3) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف $\overline{Y}_2$ فنجدها بقسمة الصف $\overline{S}_3$ (الجدول 2) على العنصر المحوري (7) فنتحصل على عناصر السطر $\overline{Y}_2$ (الجدول رقم 3)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (3).
- بالنسبة للصفوف المتبقية ($Z, \overline{Y}_1, \overline{S}_1$) فإننا نجدها بالقانون التالي:

العنصر الصف الجديد= العنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل) x (عناصر الصف المحوري، أي عناصر $\overline{Y}_2$ في الجدول رقم 3)

وبالتالي لدينا قيم السطر $\overline{S}_1$ وقيم السطر $\overline{S}_3$ وقيم السطر Z وسنجدهم كما يلي:

➢ $\overline{S}_1$ الجديدة = $\overline{S}_1$ القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف $\overline{S}_1$ $(\frac{3}{2})$) x (الصف المحوري $\overline{Y}_2$)

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4}
\end{array}
$$

$$
- \left\{
\begin{array}{ccccccc}
(\frac{3}{2})[0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{14}] \\
= 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{28} & \frac{3}{14} & \frac{3}{28}
\end{array}
\right\}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{7}
\end{array}
$$

➢ $\bar{Y}_1$ الجديدة = $\bar{Y}_1$ القديمة − (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف $\bar{Y}_1$ $(-\frac{1}{4})$) x (الصف المحوري $\bar{Y}_2$)

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{array}$$

$$-\left\{\begin{array}{l}(-\frac{1}{4})[0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{14} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{14}] \\ = 0 \quad -\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{8} \quad 0 \quad \frac{1}{56} \quad -\frac{1}{28} \quad -\frac{1}{56}\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{28} & \frac{1}{28} & \frac{1}{7} \end{array}$$

➢ Z الجديدة= Z القديمة − (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z $(-\frac{5}{4})$) x (الصف المحوري $\bar{Y}_2$)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{array}$$

$$-\left\{\begin{array}{l}(-\frac{5}{4})[0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{14} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{14}] \\ = 0 \quad -\frac{5}{4} \quad -\frac{5}{8} \quad 0 \quad \frac{5}{56} \quad -\frac{5}{28} \quad -\frac{5}{56}\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{28} & \frac{5}{28} & \frac{3}{14} \end{array}$$

بعد حساب جميع الصفوف نتحصل على الجدول رقم (3) التالي:

الجدول رقم (03)

	$\bar{Y}_1$	$\bar{Y}_2$	$\bar{Y}_3$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	الثابت
$\bar{S}_1$	0	0	0	1	$-9/14$	$-3/14$	$1/7$
$\bar{Y}_1$	1	0	$1/2$	0	$3/28$	$1/28$	$1/7$
$\bar{Y}_2$	0	1	$1/2$	0	$-1/14$	$1/7$	$1/14$
Z	0	0	0	0	$1/28$	$5/28$	$3/14$

- بما أن جميع قيم Z أكبر من أو تساوي الصفر(0) (موجبة) ونن انطلقنا من دالة الهدف (Max) يعني ذلك أننا توصلنا إلى الحل الأمثل ونتحصل على القيم التالية:

$$Z = \frac{3}{14}$$

$$\bar{S}_1 = \frac{1}{7}$$

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{7}$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{1}{14}$$

$$Z = \frac{1}{V} = \frac{3}{14} =\gg V = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\frac{3}{14}} = \frac{14}{3}$$

$$\bar{S}_1 = \frac{1}{7} = \frac{S_1}{V} =\gg S_1 = (\bar{S}_1 \times V) = \left(\frac{1}{7} \times \frac{14}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{7} = \frac{Y_1}{V} =\gg Y_1 = (\bar{Y}_1 \times V) = \left(\frac{1}{7} \times \frac{14}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{1}{14} = \frac{Y_2}{V} =\gg Y_2 = (\bar{Y}_2 \times V) = \left(\frac{1}{14} \times \frac{14}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\bar{Y}_3 = 0 = \frac{Y_3}{V} =\gg Y_3 = (\bar{Y}_3 \times V) = \left(0 \times \frac{14}{3}\right) = 0$$

ومنه اللاعب B سيلعب بالاستراتيجية Y_1 بنسبة 66.66 % من وقت المباراة، وسيلعب بالاستراتيجية Y_2 بنسبة 33.33% من وقت المباراة، وسوف لن يلعب بالاستراتيجية Y_3 مطلقا وقيمة المباراة هي $\frac{14}{3}$.

- نحاول الآن إيجاد الاستراتيجيات المثلى للاعب، A بما أن البرنامج الخطي للاعب A هو المقابل للبرنامج الخطي للاعب B، إذا يمكن استنتاج الحلول المثلى للاعب A مباشرة من جدول الحل النهائي بالاعتماد على خاصية أسعار الظل في نماذج البرمجة الخطية.

من الجدول رقم (3) نجد:

$$\bar{X}_1 = 0$$
$$\bar{X}_2 = \frac{1}{28}$$
$$\bar{X}_3 = \frac{5}{28}$$
$$\bar{X}_1 = \frac{X_1}{V} =\gg X_1 = (\bar{X}_1 \times V) = \left(0 \times \frac{14}{3}\right) = 0$$
$$\bar{X}_2 = \frac{X_2}{V} =\gg X_2 = (\bar{X}_2 \times V) = \left(\frac{1}{28} \times \frac{14}{3}\right) = \frac{1}{6} = 0.1666$$
$$\bar{X}_3 = \frac{X_3}{V} =\gg X_3 = (\bar{X}_3 \times V) = \left(\frac{5}{28} \times \frac{14}{3}\right) = \frac{5}{6} = 0.8333$$

ومنه اللاعب A سيلعب بالاستراتيجية X_2 بنسبة 16.66 % من وقت المباراة، وسيلعب بالاستراتيجية X_2 بنسبة 83.33% من وقت المباراة، وسوف لن يلعب بالاستراتيجية X_1 مطلقا وقيمة المباراة هي $\frac{14}{3}$.

تطبيقات

التمرين رقم (1):

- ما المقصود بنقطة الاستقرار في نظرية المباريات.

- ماذا تعني الإستراتيجية المهيمنة(المسيطرة)

التمرين رقم (2):

لديك المباراة التالية بين لاعبين، وكان جدول العوائد لهذه المنافسة كما هو موضح في الجدول التالي:

	اللاعب ب				
اللاعب أ		ب1	ب2	ب3	ب4
	أ1	8	2	9	5
	أ2	6	5	7	18
	أ3	7	3	-4	10

ـ أوجد الإستراتيجية التي يختارها كل لاعب لهذه المنافسة؟

التمرين رقم (3): لدينا المباراة التالية:

	المتنافس الثاني			
المتنافس الأول		أ	ب	ج
	أ	9.5	12	7
	ب	7	8.5	6.5
	ج	6	9	10

_أوجد حل لهذه المباراة بالطريقة الجبرية والطريقة الحسابية، في حال كانت غير مستقرة (بإمكانك اختزال المباراة)

التمرين رقم (4):

لتكن لدينا المباراة التالية:

		شركة			
مؤسسة		ش1	ش2	ش3	ش4
	م1	60	45	36	105
	م2	75	42	24	30
	م3	120	6	57	15
	م4	.15	12	33	00

_أوجد حل هذه المباراة باستخدام الطريقة البيانية؟

التمرين رقم (5):

إليك عوائد المنافسة بين لاعبين:

		اللاعب الثاني		
اللاعب الأول		الاستراتيجية1	الاستراتيجية2	الاستراتيجية3
	الاستراتيجية1	2	3	0
	الأاستراتيجية2	1	2	3
	الاستراتيجية3	4	1	2

_ إذا علمت أن هذه المباراة لا تحتوي على نقطة استقرار، أوجد حل هذه المباراة بالطريقة التي تراها مناسبة؟

المحور الرابع

المحاكاة

أولا: مقدمة

تعتبر المحاكاة هي القدرة على اختبار نظام معين من خلال متغيراته دون التطبيق المباشر عليه، ويتميز علم المحاكاة باختبار النظم بدون مخاطر وبتكاليف أقل وأكثر أمان من تطبيق الاختبار على النظام الفعلي، ففي كثير من النماذج الرياضية التي يكون حلها بالطريقة التحليلية التقليدية ولكن في بعض النماذج يكون من الصعوبة بمكان حلها فنلجأ إلى هذا الأسلوب الغير تقليدي في حل هذه المشاكل بحيث يتم عمل نموذج مصغر عن المشكلة بكافة جوانبها ومن ثم ايجاد خطوات للحل من خلال التعبير عن الأنظمة الفعلية والتغيرات التي تؤثر عليها بواسطة نماذج وقوانين رياضية للتعبير عنها والتي تعكس المنظومة الفعلية، وقد اثبت نموذج المحاكاة كفاءة ملحوظة في معالجة قسم كبير من المسائل المعقدة مثل مسائل التخزين وخطوط الانتظار والتنبؤ إلى غير ذلك، وفي معظم الحالات يتم استخدام الحاسوب في نماذج المحاكاة من خلال التجارب الاحصائية والاختبارات الاحتمالية.

ثانيا: فوائد نموذج المحاكاة

1 - يساعد في حل النماذج المعقدة والتي يصعب حلها من خلال النماذج الرياضية التقليدية ويستعان بالحاسوب عادة في حلها.

2- سهولة استخدام نموذج المحاكاة تجعل منه أكثر فاعلية من النماذج الإحصائية والتحليلية التي تحتاج إلى فرضيات كثيرة.

3- تجنب المخاطر المحتملة من خلال التجريب على نموذج المحاكاة والتي تساعد على فهم كثير من سلوك الأنشطة وتتيح الفرصة أمام الإدارة في عمل تجارب عدة على النموذج.

4- نتيح لمتخذ القرار في الإدارة نجاحات وخبرات جديدة في حل المشكلات التي تواجهه حيث يمكن تطبيقه على نطاق واسع من المواقف.

5- يمكن من خلال المحاكاة تحديد التأثيرات المحتملة وبعيدة المدى على المشكلة المراد حلها.

ثالثا: مجالات استخدام نماذج المحاكاة

تستخدم المحاكاة في تحليل المشاكل العملية التي تنحصر في نوعين أساسيين هما:

I. **مشاكل نظرية في العلوم الأساسية**: مثل الرياضيات والفيزياء والكيمياء وتشمل عموما على:

1. تقدير مساحة منحنى.
2. معكوس مصفوفة.
3. تقدير قيمة π في الرياضيات.
4. حل مسألة حركة جزئيات في المستوى.
5. دراسة حركة جزئيات في المستوى.
6. حل معادلات آنية في الجبر.

II. **مشاكل عملية في الحياة الفعلية (الواقع)**:

1. **محاكاة لمشاكل صناعية**: مثل تصميم عمليات كيميائية، نظم التخزين والتحكم فيها، تصميم منظومة توزيع، تخطيط الصيانة، تصميم نظام الطوابير، تخطيط الانتاج المستمر، تصميم منظومة معلومات واتصالات.
2. **محاكاة لمشاكل اقتصادية وتجارية**: كسلوك المستهلك، تحديد الأسعار، عمليات التسويق، دراسة الاقتصاد العام، التضخم، الانتاجية ....إلخ.
3. **المشاكل الاجتماعية**: مثل حركة ونمو السكان، التطور الاجتماعي وغيرها من المشاكل الاجتماعية.
4. **محاكاة الحروب والحرائق والكوارث**: والمقصود بها الاشياء التي تحدث فجأة.

رابعا: خطوات تطبيق نموذج المحاكاة

من أجل تتبع أسلوب المحاكاة يجب تتبع الخطوات التالية:

I. الخطوة الأولى: صياغة المشكلة

يقدم وصف كامل للمشكلة المراد عمل نموذج لها، حيث يتم في البداية تحديد المشكلة الخاضعة للبحث ثم نبحث في تفاصيل المشكلة وتحديد الإجراءات التي سيتم من خلالها وضع نموذج المحاكاة لهذه المشكلة ووضع البيانات اللازمة للنموذج.

II. الخطوة الثانية: صياغة النموذج

يتم إعداد نموذج رياضي ومنطقي للمشكلة كما في نماذج بحوث العمليات الأخرى، ولكن هذا النموذج يكون مصغر عن النموذج الأصلي ويجب أن لا يتعرض للجزئيات، ولكن قبل ذلك يجب دراسة المشكلة إحصائيا وديناميكيا والنموذج المعد يجب أن يكون بسيط الفهم ولكن يظهر بشكل واقعي للصفات المسيرة للنظام والمشكلة.

III. الخطوة الثالثة: تنفيذ النموذج

يتم عادة تصميم برنامج حاسوب وتنفيذ النموذج عليه حيث يتم تنفيذ البرنامج بإحدى لغات المحاكاة في الحاسوب Simulation و Gusp أو غيرها من لغات الحاسوب المعمول بها.

IV. الخطوة الرابعة: اختبار النتيجة

يتم اختبار النتيجة من حيث وملاءمتها للواقع والحل الصحيح إذا كانت المحاكاة أعطت الحل الأفضل فينتهي النموذج وإلا فإننا نغير الفرضيات البدائية ونعيد الخطوات السابقة.

خامسا: أشكال المحاكاة

1- النموذج المماثل:

يعتبر النموذج المماثل من المحاولات الأولى في استخدام علم المحاكاة، فعلى سبيل المثال نموذج القياس الفيزيائي باستخدام نماذج ميكانيكية، كهربائية أو هيدروليكية، ولحد الآن مازالت هذه الانواع

من النماذج مستخدمة في حالات خاصة، وفي السنوات الاخيرة بدأ استبدالها بنماذج المحاكاة بواسطة لغة الحاسوب وهوما سنتعرف عليه في النموذج الموالي.

2- المحاكاة بالحاسوب:

في نظم المحاكاة فإن أي رقم عشوائي لاي عينة وفقا لأي توزيع يعتمد على استخدام المجال (0،1).

3- طريقة مونت كارلو في المحاكاة:

تعتمد هذه الطريقة على الأرقام العشوائية سواء باستخدام جدول الارقام العشوائية أو الحاسوب، حيث أن كل عملية عشوائية يمكن وضعها ضمن مخطط تعاقبي وهذه الطريقة تعتمد على استبدال عملية حقيقية بعملية محكاة وفق نفس المخطط التعاقبي بالمحافظة على الطبيعة الاحتمالية لنتائج التجربة الحقيقية باستخدام الأرقام العشوائية.

مثال رقم (01):

أوجد نموذج محاكاة لسلوك المستهلك يعرض عليه ثلاثة أصناف من الزعتر A,B,C فإذا كانت مصفوفة الاحتمالات الانتقالية لماركوف هي:

$$P= \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$$

الحل:

لنفرض أن أخر عملية شراء للمستهلك من الصنف C حتى نرى كيف ستتم عملية الاختيار نعطي أرقاما من (0-9) للأصناف الثلاثة حيث يخصص الرقمان (0 ، 1) للاختيار A (2 ، 3) للاختبار B والارقام (4، 9) للاختبار C وعن تطبيق الاختبار نختار أرقاما عشوائية من جدول الأرقام العشوائية في نهاية الكتاب بحيث تختار (15) رقما من جدول الأرقام العشوائية من (0-9) ونبدأ من العمود الأيسر في الجدول لتكون النتائج المعطاة كما في الجدول التالي وهي توضح عدد الاختبارات لكل صنف، ونلاحظ من خلال الجدول أن الصنف A يختار (4) وأن الصنف B يختار (4) مرات و الصنف C يختار (7) مراتب، وهنا ترى أن اكثر اختبارات كانت للصنف C وبالتالي يكون هو الصنف الأفضل.

الاختيار	الرقم العشوائي	الصنف
1	5	C
2	2	B
3	4	C
4	3	B
5	0	A
6	6	C
7	1	A
8	0	A
9	2	B
10	9	C
11	5	C

A	0	12
B	2	13
C	8	14
C	5	15

مثال رقم (02):

يرغب موزع للمواد الغذائية بتحديد عدد صناديق العصير التي يجب طلبها يوميا إذا كان عدد هذه الصناديق يتراوح بين (14-18) صندوقا أسبوعيا فإذا كان الطلب على الصناديق للسنة دوما السابقة هي كما في الجدول التالي:

احتمال الطلب (P)	تكرار الطلب	الصناديق المطلوبة يوميا (X)
0.15	15	14
0.10	10	15
0.10	10	16
0.20	20	17
0.15	15	18
1	100	المجموع

المطلوب: تحديد عدد الصناديق الواجب طلبها يوميا باستخدام طريقة مونت كارلو؟

الحل:

بما أن العدد الموجود لدينا هو 100 صندوق فإننا نعطي أرقاما من (00) إلى (99) ونجزأ هذه الأرقام حسب الاحتمالات المعطاة كما في الجدول التالي:

عدد الصناديق المطلوبة (X)	احتمال الطلب P	الأرقام العشوائية المخصصة للطلب
14	0.15	14-0
15	0.10	54-15
16	0.10	64-55
17	0.20	84-65
18	0.15	100-85

والآن نذهب إلى جدول الأرقام العشوائية ونختار رقما مكون من خانتين ونبحث عنه ضمن الفئة الموجودة في الجدول ونكرر الاختبارات على سبيل المثال عشرة مرات لنرى ما هو العدد الأكبر ضمن هذه الاختبارات

الاختيار	الرقم العشوائي	عدد الصناديق المختارة
1	51	15
2	24	15
3	45	15
4	30	15
5	03	14
6	64	16
7	15	15
8	09	14
9	21	15
10	91	18

نلاحظ هنا أن أكثر طلب مكرر هو (15) وبالتالي يكون الطلب الأمثل لعدد الصناديق يوميا هو (15) صندوق.

تطبيقات

التمرين رقم (1):

يرغب مستثمر في تقويم استراتيجية خاصة بشراء وبيع مخزون يتكون من سلعة واحدة فقط، ويبلغ عدد الوحدات الموجودة في المخزن من السلعة (100) وحدة، بينما يبلغ سعر الوحدة (5) دينار، لنفترض أن السعر يتغير من يوم لآخر بمعدل دينار واحد فقط زيادة أو نقصان، إذا كان المستثمر يقوم بعملية واحدة فقط يوميا ويدفع عليها 2% من قيمتها عمولة سواء كانت بيع أو شراء.

المطلوب: عمل نموذج محاكاة لدراسة رأي مستشاره الاقتصادي حيث اقترح عليه:

1- إذا كان بحوزتك مخزون وبدأ السعر بالانهيار فتخلص منه بالبيع.

2- إذا لم يكن لديك مخزون وكان السعر في صعود فأشتري.

التمرين رقم (2):

محل لبيع الحلويات يبيع حلوياته حسب الطلب ، فإذا كان الطلب اليومي على انتاج المحل واحتمالاتها موضحة في الجدول التالي:

الطلب	0 وحدة	10 وحدات	20 وحدة	30 وحدة	40 وحدة	50 وحدة
الاحتمال	0.01	0.2	0.15	0.5	0.12	0.02

المطلوب:

استخدم نموذج المحاكاة لإيجاد حجم الطلب للعشر أيام التالية عن طريق الارقام العشوائية المبينة في الجدول التالي:

الطلب اليومي	الاحتمال	الاحتمال التراكمي	فترة الأرقام العشوائية
0	0.01	0.01	00
10	0.2	0.21	20-01
20	0.15	0.36	35-21
30	0.5	0.86	85-36
40	0.12	0.98	97-86
50	0.02	1	99-98

قائمة المراجع

1- أبو القاسم مسعود الشيخ، **بحوث العمليات،** الطبعة الثانية، المجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، مصر، 2009م/1430ه

2- أكرم محمد عرفان المهتدي، **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية (بحوث العمليات)،** الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2010م/1431ه.

3- حمدي طه، **مقدمة في بحوث العمليات** ، الجزء الأول النماذج المحددة، ترجمة أحمد حسين علي حسين، دار المريخ للنشر، الرياض، المملكة العربية السعودية، بدون تاريخ.

4- حمدي طه، **مقدمة في بحوث العمليات** ، الجزء الثاني النماذج الاحتمالية، ترجمة أحمد حسين علي حسين، دار المريخ للنشر، الرياض، المملكة العربية السعودية، بدون تاريخ.

5- دلال صادق الجواد وحميد ناصر الفتال، **بحوث العمليات،** الطبعة العربية، دار اليازوري للنشر، عمان، الأردن، 2008.

6- رابح بوقرة، **بحوث العمليات،** الجزء الأول، جامعة المسيلة، الجزائر، 2010/2009.

7- رابح بوقرة، **بحوث العمليات – مدخل لاتخاذ القرارات،** الجزء الثاني، جامعة المسيلة، الجزائر، 2012.

8- فتحي خليل حمدان، **بحوث العمليات – مع تطبيقات باستخدام الحاسوب** ، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2010.

9- محمد راتول، **بحوث العمليات،** ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006 .

10- محمّد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، أحمد شهاب الحمداني، **بحوث العمليات**، الطبعة الثانية ، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2011.

11- محمّد عبيدات، **الأساليب الكمية في إتخاذ القرار**، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2006.

12- محمّد الطراونة وسليمان عبيدات، **مقدمة في بحوث العمليات**، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر، عمان، الأردن، 2009.

13- سليمان خالد عبيدات، **الأساليب الكمية في الادارة**، بدون طبعة، دار المسيرة للنشر، عمان، الأردن،2015م/1436هـ.

14- منعم زمزير الموسوي، **بحوث العمليات – مدخل علمي لإتخاد القرارات**، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2009.

15- اليمين فالته، **بحوث العمليات**، الجزء الأول، دار إيتراك للطباعة والنشر والتوزيع، القاهرة، مصر، 2006.