جامعة الشهيد حمه لخضر – الوادي
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة محاضرات في مقياس:

بحوث العمليات 1

لطلبة سنة ثالثة علوم اقتصادية تخصص اقتصاد كمي

إعداد: الدكتور قعيد إبراهيم

الموسم الجامعي: 2022/2021

جامعة الشهيد حمه لخضر – الوادي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة محاضرات في مقياس:

بحوث العمليات 1

لطلبة سنة ثالثة علوم اقتصادية تخصص اقتصاد كمي

إعداد: الدكتور قعيد إبراهيم

الموسم الجامعي: 2022/2021

قائمة المحتويات

مقدمـــــــــة

يعتبر مقياس بحوث العمليات من المقاييس المهمة في علم الاقتصاد وخاصة بنسبة لطلبة الاقتصاد الكمي الذين يجبوا أن يكونوا ملمين بمختلف أدوات القياس الاقتصادي والتي تعتبر النماذج المختلفة لبحوث العمليات إحداها، وتزداد أهميتها لأنها تبحث عن الحلول المثلى للمشاكل التي تواجه المسيرين والمدراء للمؤسسات الاقتصادية المختلفة سواء الصغيرة أو الكبرى، وزاد من أهمية هذه النماذج هو تطور برامج الحاسوب التي أصبحت تحل هذه النماذج في لحظات من الزمن إذا أحسنا ادخال البيانات بطريقة صحيحة.

تعالج هذه المطبوعة عديد نماذج بحوث العمليات المقررة لطلبة سنة ثالثة تخصص اقتصاد كمي، وهذه النماذج نبدئها بمدخل مفاهيمي حول بحوث العمليات، ثم التذكير بمشاكل النقل التي من المفروض تطرق لها الطلبة خلال سنة ثانية جذع مشترك علوم اقتصادية، ثم التطرق إلى مشاكل التخصيص التي تعتبر حالة خاصة من مشاكل النقل، ثم التطرق إلى برمجة الأعداد الصحيحة وهي عبارة عن نماذج البرمجة الخطية لكن المتغيرات القرارية تكون بأعداد كاملة وهي خاصة بالمتغيرات التي لا تقبل القسمة أي المتغيرات المتقطعة، وفي الأخير تطرقنا إلى وحدة نماذج الشبكات سواء التحديدية عندما يكون الوقت معلوم أو الاحتمالية عندما يكون الزمن مقدر.

وفي الاخير نتمنى من المولى عزة وجل أننا وفقنا في تقديم بعض المعارف المتعلقة بمقياس بحوث العمليات 1 لطلبة سنة ثالثة علوم اقتصادية، تخصص الاقتصاد الكمي، والله الموفق وعليه التكلان.

د. قعيد إبراهيم

المحاضرة الأولى

مدخل مفاهيمي حول بحوث العمليات

أولا: نشأة بحوث العمليات :

تعتبر بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي أحرزت تطبيقاتها نجاحا واسعا في مختلف مجالات الحياة.

نشأت بحوث العمليات خلال الحرب العالمية الثانية بحيث أوكلت الإدارة العسكرية في بريطانيا إلى فريق من العلماء و الباحثين مهمة دراسة المشاكل الاستراتيجية والتكتيكية الخاصة بالدفاع البري و الجوي عن الدولة، ولقد كان هدف ذلك الفريق هو تحديد أفضل استخدام للرادار التي كان قد اكتشفت حديثا ذلك الوقت، وكذلك دراسة فاعلية الأنواع الجديدة من قاذفات القنابل.

يعتبر تشكيل هذه المجموعة أول بادرة لنشؤ ما يسمى ببحوث العمليات Operations Research مطلع عام 1941، ومن ثم اتسع تطبيق بحوث العمليات ليشمل جميع قوات الحلفاء وذلك بسبب النجاح الذي حققته الإدارة العسكرية البريطانية في إنزال أقصى الضربات بالقوات المعادية.

إن النتائج المشجعة التي حققها فريق العمل الإنجليزي أدت بعد فترة وجيزة إلى قيام السلطات العسكرية الأمريكية بتكوين فريق مماثل بهدف معالجة المشاكل المعقدة المتعلقة بنقل المعدات والمؤن والذخائر الحربية للقوات الأمريكية التي انتشرت خلال الحرب العالمية الثانية في أرجاء متعددة من العالم.

كما وقامت الحكومية الكندية بتكوين فريق مماثل للفريق الأمريكي أثناء الحرب العالمية الثانية مهمته إنتاج بعض المعدات العسكرية وذلك من خلال الاستخدام الأمثل للموارد.

وبعد الحرب العالمية الثانية اتجه كثير من العلماء الذي كانوا يعملون في فرق بحوث العمليات في الأغراض المدنية، بحيث عاد بعضهم إلى الجامعات، والبعض الآخر ركزوا على تطبيق أساليب بحوث العمليات في قطاعات ومجالات اقتصادية مختلفة.

إن بحوث العمليات تستخدم الآن في مجالات عديدة بالإضافة إلى المجال العسكري، فقد اتسعت استخدامها ليشمل مجالات أخرى مثل البنوك والمستشفيات والمكتبات والفنادق والنقل، وغيرها الكثير من مجالات الحياة.

ثانيا: العوامل التي ساعدت على تطور بحوث العمليات

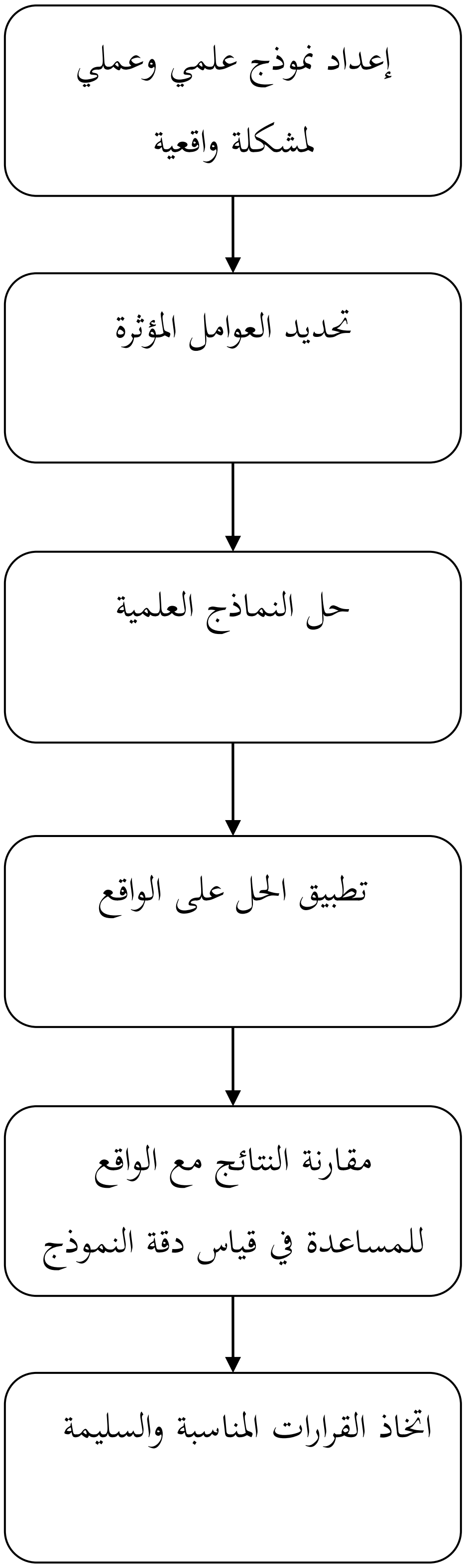
هناك الكثير من العوامل التي ساعدت على تطور بحوث العمليات وساعدت في انتشار استخدامها يمكن أن نجيز بعضها في النقاط التالية:

- إن الرواج الاقتصادي وتطور الآلات بعد الحرب العالمية الثانية أدى إلى ظهور الكثير من المشاكل الإدارية في اتخاذ القرارات بسبب تضخم حجم المشاريع وكبرها، مما أدى بعض العلماء والباحثين إلى دراسة تلك المشاكل وإيجاد أفضل الحلول باستخدام أساليب البحوث العمليات.
- ظهور الحاسب الإلكتروني وتطوره السريع كان عاملا أساسيا في ازدهار بحوث العمليات والتوسع في استخدامها، وذلك لسهولة حل النماذج الرياضية المعقدة التي تتناولها بحوث العمليات عن طريق البرامج الالكترونية المثبتة على جهاز الحاسوب.
- استمرار الكثير من الباحثين الذين اشتغلوا في الحروب سابقا في بحوثهم في المجال المدني، وقد أدى ذلك إلى ابتكار الكثير من أساليب بحوث العمليات، حيث ابتكر جورج دانتزج Gearge Dantzig مثلا طريقة السمبلكس لحل نموذج البرمجة الخطية عام 1947.

ثالثا: مفهوم بحوث العمليات:

هناك عدة تعاريف لبحوث العمليات فهي باختصار تطبيق الطرق العلمية و العملية لحل المشاكل المعقدة التي تواجه الإدارات واتخاذ القرار المناسب.

إن الخاصية التي يتميز بها هذا العلم يمكن توضيحها في الشكل التالي:


إعداد نموذج علمي وعملي لمشكلة واقعية
تحديد العوامل المؤثرة
حل النماذج العلمية
تطبيق الحل على الواقع
مقارنة النتائج مع الواقع للمساعدة في قياس دقة النموذج
اتخاذ القرارات المناسبة والسليمة

من خلال الشكل السابق ستنتج أن:

- بحوث العمليات تستخدم الطريقة العملية كأساس و منهج في البحث و الدراسة .
- جوهر بحوث العمليات هو بناء النماذج و الاعتماد عليها .
- الهدف من بحوث العمليات مساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات السلمية .

رابعا: أساليب بحوث العلميات

تتضمن بحوث العمليات العديد من الأساليب الرياضية و التي نذكر منها :

- البرمجة الخطية.
- البرمجة الصحيحة.
- البرمجة الديناميكية.
- البرمجة اللاخطية.
- نموذج النقل.
- نموذج التخصيص.
- تحليل المخططات الشبكية.
- نظريات اتخاذ القرار.
- نظرية صفوف الانتظار.
- نماذج المخزون.
- نظرية المباريات.
- المحاكات .

المحاضرة الثانية

التذكير بنماذج النقل (مشاكل النقل)

تعتبر طريقة النقل من الأساليب الرياضية ذات الأهمية في عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بنقل حجم معين من السلع من مصادر متعددة إلى مراكز متعددة بهدف سد احتياجات المراكز بأقل تكلفة ممكنة.

أولا: نموذج النقل: Transportation Model

يفترض نموذج النقل وجود عدد من المصادر الإنتاجية (مصانع ، شركات ...) مقدارها n، وعدد من مراكز التسويقية مقدارها m، وهدف النموذج هو تحقيق أقل تكلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل ز والجدول التالي يوضح مشكلة النقل :

المراكز التسويقية

	D_1	D_2	D_3	....	D_m	العرض Supply
S_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	.....	C_{1m}	b_1
S_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	.....	C_{2m}	b_2
S_3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	.....	C_{3m}	b_3
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
S_n	C_{n1}	C_{n2}	C_{n3}	.....	C_{nm}	b_n
الطلب Demond	a_1	a_2	a_3	.....	a_m	

حيث C_{ij} هي تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر (i) إلى المركز(j) ولو فرضنا أن X_{ij} عبارة عن عدد الوحدات المراد نقلها من المصدر (i) إلى المركز (j) فإن النموذج الرياضي لمشكلة النقل يكتب كما يلي :

$$\text{Min } Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + \ldots\ldots + C_{ij}X_{ij} + \ldots\ldots + C_{nm}X_{nm}$$

Subject to:

$$C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+\ldots\ldots\ldots\ldots+C_{1m}X_{1m} = b_1$$

$$C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+\ldots\ldots\ldots\ldots+C_{2m}X_{2m} = b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$C_{n1}X_{n1}+C_{n2}X_{n2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+C_{nm}X_{nm} = b_n$$

$$C_{11}X_{11}+C_{21}X_{21}+\ldots\ldots\ldots\ldots+C_{n1}X_{n1} = a_1$$

$$C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+\ldots\ldots\ldots\ldots+C_{n2}X_{n2} = a_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$C_{1m}X_{1m}+C_{2m}X_{2m}+\ldots\ldots\ldots+C_{nm}X_{nm} = a_m$$

$$X_{11} , X_{12} ,X_{13} \ldots\ldots\ldots X_{nm} \geq 0$$

ولإيجاد أقل تكلفة لمشكلة النقل سيكون في الصعب حل هذا النموذج الرياضي وذلك لكثرة القيود والمتغيرات ، ولكن هناك طرق أسهل لحل هذه المشكلة.

ثانيا: طرق حل مشاكل النقل

هناك ثلاثة طرق لحل مشاكل النقل هي:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية the north-west Cornner Method
- طريقة أقل التكاليف the Least Costes Method
- طريقة فوجل التقريبية the Vogel's Approscimation Method

وهذه الطرق تعطي حلا أساسيا (أولي) للمشكلة وسنبحث لاحقا عن طريقة الوصول إلى الحل الأمثل، لكن سنعرض هذه الطرق تتابعا كما يلي:

I. طريقة الزاوية الشمالية الغربية the north-west Cornner Method

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الأساليب الرياضية، لحل مشاكل النقل إلا أنها لا تحقق في معظم الأحيان الحل الأمثل لمشكلة النقل، ولتوضيح كيفية استخدام هذه الطريقة نورد المثال التالي:

مثال

إحدى الشركات لهائلات مخازن في مواقع مختلفة كما أن لها ثلاثة مراكز تسويقية، للإشارة أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من السلع بالدينار، وحجم المخزون في كل مخزن والاحتياجات لكل مركز تسويقي مشار إليها و الجدول التالي:

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1		1	8	12
S_2	2	4	8	14
S_3	3	6	7	4
الطلب	9	10	11	30 / 30

المطلوب: ما هو مجموع تكاليف النقل للسلعة من المصادر إلى المراكز باستخدام طريقة الزاوية الشمالية.

ملاحظة : الأرقام الموجودة داخل المربعات الصغيرة في الجدول تمثل تكلفة النقل بالدينار.

الحـــل:

بداية يجب التأكد من توفر شرط التوازن أي أن مجموع العرض المتوفر في المصادر يساوي ما تطلبه المراكز التسويقية.

$$12+14+4 = 9+10+11=30$$ (الشرط محقق)

- نأخذ الخلية الأولى و التي تقع في الصف الأول (الشمالي) و العمود الأول (الغربي) وهي الخلية (S_1 , D_1) ثم نقارن الكمية المطلوبة من قبل مركز الكلب D_1 بالكمية المتوفرة لدى المصدر S_1 ثم تخصص أقل الكميتين للخلية (S_1 , D_1)

$$Min(12,9)=9$$

أي يتم تخصيص 9 وحدات للخلية (S_1 , D_1) وهذا يؤدي إلى سد احتياجات المركز D_1بالكامل.

- نأخذ الخلية الثنائية (S_1 , D_2) و التي تكون هي الآن في الزاوية الشمالية الغربية ، و نقارن الكمية المتاحة لدى المصدر (S_1) بالكمية المطلوبة في قبل المركز D_2 و نختار الأقل و نخضعها للخلية (S_1 ,D_2)

$$Min(3,10) = 3$$

لذا تخصص 3 وحدات للخلية (S_1 , D_2) .

- نلاحظ هنا أن جميع الكميات المتوفرة لدى المصدر S_1 قد نفذت بالكامل ، لذا نأخذ الخلية (S_2 , D_2)

$$Min(14,7) = 7$$

- نأخذ الخلية (S_2 , D_3) ثم نقارن الكمية التي يحتاجها المركز D_3 بالكمية المتاحة لدى المصدر S_2 ن و تخصص أقل الكميتين للخلية (S_2 ,D_3)
- نأخذ الخلية (S_3 ,D_3) ، وتخصص لها 4 وحدات و هي الكمية المتبقية لدي المركز S_3 عند هذه المرحلة تكون جميع الكميات المتاحة لدى جميع المصادر قد نفذت.

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	$\boxed{5}$ 9	$\boxed{1}$ 3	$\boxed{8}$	~~12~~ ~~3~~ 0
S_2	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$ 7	$\boxed{0}$ 7	~~7~~ 0 ~~12~~
S_3	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$ 4	~~4~~ 0
الطلب	~~9~~ 0	~~10~~ ~~7~~ 0	~~11~~ ~~4~~ 0	30 / 30

ويكون إجمالي تكاليف النقل للجدول السابق كما يلي :

$$\text{Total Cost} = (5x9)+(1x3)+(7x4)+(7x4)=104 \text{ D}$$ (دينار)

II. طريقة أقل التكاليف The Least Costs Méthode

إن إحدى مساوئ طريقة الزاوية الشمالية الغربية هو عدم تحقيق الاستفادة من التكلفة القليلة في مشكلة نقل معينة عند تلبية احتياجات مراكز الطلب.

حيث يتم بموجب هذه الطريقة البحث والتركيز غلى اقل تكلفة متوفرة في جدول النقل ومن ثم تحديد جهتي الطلب و العرض.

ولتوضيح الخطوات الرئيسية لهذه الطريقة نورد المثال السابق :

مثال

المراكز التسويقية

المصادر		D_1	D_2	D_3	العرض
	S_1	5	1	8	12
	S_2	2	4	0	14
	S_3	3	6	7	4
	الطلب	9	10	11	30

- نلاحظ ان اقل تكلفة في جدول النقل أعلاه هي الصفر، وهي تقابل المصدر S_2 و المركز D_3، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_2 مع ما يحتاجه مركز الطلب D_3 ، ثم نختار اقل القيمتين، و نخصصها للخلية (S_2 , D_3).

$$Min(14,11)= 11$$

- نبحث عن اقل تكلفة ضمن القيم المتبقية في الجدول ، فنجد انها تساوي (1) ، وهي تقع في الخلية (S_1 , D_2) لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_1 مع ما يحتاجه المركز D_2 ، ثم نختار أقل الكميتين.

$$Min(12,10)= 10$$

ونخصصها للخلية (S_1 , D_2)

- التكلفة الأقل الأخرى ضمن الجدول تساوي 2 و تقع في الخلية (S_2 , D_1) ، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_2 مع احتياجات المركز D_1، و نختار أقل الكميتين.

$$Min(3,9)= 3$$

ونخصصها للخلية (S_3 , D_1)

- التكلفة الأقل التالية تساوي 3 و تقع ضمن الخلية (S_3 , D_1) ، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_3 مع احتياجات المركز D_1 و نختار أقل الكميتين.

$$Min(4,9)= 4$$

ونخصصها للخلية (S_3 , D_1)

- التكلفة الأقل الأخيرة ضمن الجدول تساوي 5 وتقع في الخلية (S_1 ,D_1) ، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_1 مع احتياجات مركز الطلب D_1 ونختار اقل الكميتين.

$$Min(2,2)= 2$$

ونخصصها للخلية (S_1 , D_1)

المراكز التسويقية

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	$\boxed{5}$ 2	$\boxed{1}$ 10	$\boxed{8}$	$\cancel{12}$ $\cancel{2}$ 0
S_2	$\boxed{2}$ 3	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\cancel{14}$ $\cancel{3}$ 0
S_3	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\cancel{4}$ 0
الطلب	$\cancel{9}$ $\cancel{6}$ 0 $\cancel{2}$	$\cancel{10}$ 0	$\cancel{11}$ 0	

Total Cost =(5x2)+(1x10)+(2x3)+(0x11)+(3x4)=38D

من خلال حسابنا للتكلفة الكلية لمشكلة النقل نلاحظ أن هذه الطريقة تكلفتها أقل من الزاوية الشمالية الغربية.

III. طريقة فوقل التقريبية Vogel's Approximation Méthode (الجزاء) (VAM)

تعتبر هذه الطريقة الأقرب إلى الحل الأمثل يعني أنها أفضل من الطريقتين الأخرتين في معظم الأحيان.

لكنها تحتاج إلى عمليات حسابية أطول من الطرق الأخرى وتتلخص خطوات الحل الأساسي الأولي بهذه الطريقة كما يلي:

- حساب الفرق بين أقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود، وتأثيرها على جانبي الجدول.
- تحديد الصف أو العمود الذي يملك أكبر فرق في الكلفة (أعلى جزاء).
- اختيار الخلية ذات الكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود.
- في الخلية التي اختيرت في الخطوة (3) نقارن احتياجات المركز مع ما هو متوفر في المصدر ونأخذ القيمة الاقل.
- نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل الأعمدة و الصفوف و تكرر العملية السابقة إلى أن تلبي احتياجات جميع مراكز الطلب من المصادر المتاحة.

ملاحظة:

عند تساوي الفروق في الصفوف و الأعمدة نأخذ الفرق أما إذا كانت كل الفروق في الصفوف والأعمدة متساوية في كل المراحل من البداية تفسر طريقة فوقل

ستوضح طريقة فوقل بالاستعانة بالمثال السابق:

مثال

فرق الصفوف

	D_1	D_2	D_3	العرض	
S_1	5	1	8	12	4
S_2	2	4	0	14	2
S_3	3	6	7	4	3
الطلب	9	10	11	30	
فرق الأعمدة	1	3	7		

- من خلال حساب الفروق مصفوف والأعمدة نلاحظ أن للعمود الثالث أكبر فرق ويساوي 7.
- نبحث عن أقل كلفة في العمود الثالث فنجدها تساوي 0 وهي للخلية (S_2 , D_3).
- ثم نقارن احتياجات مركز الطلب D_3 مع الكمية المتاحة في المصدر S_2 ثم نختار أقل الكميتين.

$$Min(11,14)= 11$$

مراكز الطلب

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض	
S_1	5	1	8	12	4
S_2	2	4	0 11	~~14~~ 3	2
S_3	3	6	7	4	3
الطلب	9	10	~~11~~ 0		
	1	3	X		

- ويتم تعديل العرض و الطلب ن وهذه العملية تؤدي إلى تلبية كامل احتياجات المركز D_3، لذا يشطب المركز D_3 ولذلك لإعادة حساب الفروقات مرة أخرى .
- يتم حساب الفرق في الكلفة لكل صف وعمود .
- نبحث عن اقل كلفة في الصف الأول ن فنجد للخلية (S_1 , D_2) أقل كلفة و البالغة 1.
- نقارن احتياجات مركز الطلب D_1 مع ما هو متاح من كميات لدى المصدر S_1 ، ثم نختار أقل الكميتين $Min(12,10)= 10$
- يتم شطب مركز الطلب D_2، ولهذا السبب لا يؤخذ بعين الإعتبار عند حساب الفرق في الكلفة في المراحل اللاحقة.

	D_1	D_2	D_3	العرض	فرق الصفوف
S_1	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$ 10	$\boxed{8}$	$\cancel{12}$ 2	4
S_2	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$ 11	$\cancel{14}$ 3	2
S_3	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	4	3
الطلب	9	10	$\cancel{11}$	30	
فرق الأعمدة	1	X	X		

عند مرحلة الحل هذه لا نحتاج لحساب الفرق في الكلفة للصفوف و الأعمدة بسبب وجود مركز طلب واحد وهو (D_1) و الذي لم يحصل على احتياجاته حتى الآن.

ما نحتاجه الآن هو البحث عن أقل كلفة في العمود الأول، والذي نلاحظ أنه في المصدر S_2 تقابل أقل كلفة و التي تساوي 2 وبالتالي يتم تخصيص كامل محتويات المصدر S_2 و البالغة "3" وحدات لتلبية جزء من احتياجات مركز الطلب D_1 ، ويتم إلغاء المصدر S_2 ونتابع هكذا .

إلى أن نحصل على نموذج النقل بصيغته النهائية بالشكل التالي:

مراكز الطلب

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	$\boxed{5}$ 2	$\boxed{1}$ 10	$\boxed{8}$	——
S_2	$\boxed{2}$ 3	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$ 11	——
S_3	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	——
الطلب	——	——	——	——

وبالتالي:

$$\text{Total Cost} = 5x2+1x10+2x3+0x11+3x4=38\ D$$

- إذن الكلفة الإجمالية بموجب طريقة الزاوية الشمالية الغربية =104 دينار.
- الكلفة الإجمالية بموجب اقل التكاليف = 38 دينار.
- الكلفة الإجمالية بموجب طريقة فوقل = 38 دينار.

من خلال حساب تكلفة النقل بالطرق الثلاثة نجد أن طريقة أقل التكاليف وطريقة فوقل أعطتنا أقل تكلفة من طريقة الزاوية الشمالية الغربية، وتعتبر طريقة فوقل وسنكتشف ذلك في قادم المحاضرات أفضل طرق الحل الأولي للوصول إلى أل تكلفة ممكنة، لذلك عندما نخير بين الطرق الثلاثة السابقة فالأفضل هو حل مشكل النقل بطريقة فوقل لأنها أقرب دائما للحل الأمثل، وتوفر لنا خطوات الحل الأمثل (أقل تكلفة ممكنة).

ثالثا: نموذج النقل الغير متوازن

لقد ذكرنا سابقا أن مجموع قيم العرض يجب أن تكون متساوية مع مجموع قيم الطلب، ولكن في بعض الحالات قد تكون هذه القيم غير متساوية و بالتالي يكون النموذج غير متوازن، ولكي نوازن النموذج نضيف إلى الأقل قيمة الفرق و تكون التكلفة الموازية لها أصفار.

بحيث يكون الشكل الطبيعي كما يلي:

العرض **الطلب**

$$\sum_{i=1}^{m} ai = \sum_{j=1}^{n} bj$$

حيث : عدد المراكز $i=1.2.3 \ldots\ldots m$

عدد المصادر $j=1.2.3 \ldots\ldots n$

وهو شرط تساوي العرض مع الطلب ويطلق عليه شرط التوازن، غير أنه عمليا يصعب تحقق هذا الشرط في الواقع ، إذ يكون الطلب أكبر من العرض أحيانا أو العرض أكثر من الطلب أحيانا أخرى، وفي هذه الحالة ينبغي العمل على توفير شرط التوازن تحايلا و ذلك كما يلي:

الحالة الأولى : العرض أكثر من الطلب، أي :

$$\sum_{i=1}^{m} ai < \sum_{j=1}^{n} bj$$

ينبغي في هذه الحالة إضافة مركز تسويقي (عمود) خيالي إلى جدول المسألة و تكاليف النقل من أي مصدر إلى هذا المركز نفترضها معدومة.

الحالة الثانية: الطلب أكثر من العرض ، أي:

$$\sum_{i=1}^{m} ai > \sum_{j=1}^{n} bj$$

ينبغي في هذه الحالة إضافة مصدر (سطر) خيالي إلى جدول المسألة، حيث نفترض أن الكمية التي يعرضها هي قيمة الفرق بين العرض و الطلب و تكاليف النقل من هذا المصدر إلى مركز تسويقي نفترضها معدومة.

- وفي الحالتين نقوم بعد ذلك بإيجاد الحل الأساسي الأول بصفة عادية ، ثم في النهاية نحذف السطر أو العمود الذي تمت إضافته.

من أجل ذلك نورد المثالين التاليين لنكتشف كل حالة من الحالتين:

مثال 1: وازن نموذج النقل التالي ، ثم اوجد الحل الأولي بطريقة أقل التكاليف

مراكز الطلب

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	2	1	3	100
S_2	5	4	0	150
S_3	2	3	6	50
الطلب	100	120	60	300 / 280

نلاحظ هنا أن مجموع قيم العرض =300 وحدة نقدية و مجموع قيم الطلب =280 وحدة نقدية، وبالتالي نضيف عمود آخر قيمة الطلب فيه =20، والتكاليف = صفر كالآتي:

مراكز الطلب

المصادر

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	2	1	3	0	100
S_2	5	4	0	0	150
S_3	2	3	6	0	50
الطلب	100	120	60	20	300 280

إذن الحل الأولي للنموذج بطريقة أقل التكاليف كما يلي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	2	1 100	3	0	~~100~~ 0
S_2	5 70	4 20	0 60	0	~~150~~ ~~90~~ ~~70~~ 0
S_3	2 30	3	6	0 20	~~08~~ ~~30~~ 0
الطلب	~~100~~ ~~70~~ 0	~~120~~ ~~20~~ 0	~~60~~ 0	~~20~~ 0	300 300

وبالتالي إجمالي التكاليف هو:

Total Cost =100+350+80+60 = 590 وحدة نقدية

مثـال2 : وازن نموذج النقل التالي ن ثم اوجد الكلفة الكلية بطريقة فوقل

	D_1	D_2	D_3	العرض
S1	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	120
S_2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	100
العرض	100	100	50	

نلاحظ أن الطلب أكثر من العرض ، وبالتالي نضيف صف قيمته 30 وتكاليف = صفر كالآتي:

مراكز الطلب

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	120
S_2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	100
S_3	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	30
الطلب	100	100	50	250

ويكون الحل الأولي للتكلفة الكلية بطريقة فوقل كما يلي:

	D_1	D_2	D_3	العرض	الفرق
S_1	$\boxed{0}$ 100	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$ 20	~~100~~ ~~120~~	1 1 1
S_2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$ 100	$\boxed{5}$	~~100~~ 0	1 1 1
S_3	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 30	~~30~~ 0	0
الطلب	~~100~~	~~100~~ 0	~~50~~ ~~20~~ 0	250	
الفرق	0	1	2		
	2	2	3		
		2	2		

رابعا: اختبار مثالية الحل

إن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية المشكلة و إنما يجب أن تستخدم أساليب أخرى لاختبار هل الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق إحدى الطرق السابقة هو الحل الأمثل، ونعني بذلك أنه هل هذا الحل لا يوجد حل أفضل منه أم أن هناك حلول أفضل منه ؟

وفيما يلي سنتعرف على طرق اختبار الحل الأمثل (أقل تكلفة ممكنة)، بحيث هناك طريقتان لاختبار أمثلية الحل وهما:

- طريقة المسار المتعرج " طريقة الحجر المتنقل " The Stepping Stone Method
- طريقة التوزيع المعدلة Modified Distribution Method

I. طريقة المسار المتعرج

تقتضي طريقة المسار المتعرج بتقييم جميع الخلايا الغير مشغولة (الفارغة) وجدول الحل الأولي لمعرفة أثر استخدام كل خلية فارغة على مجموع التكاليف ويتم ذلك من خلال عمل مسار مغلق لكل خلية فارغة.

وإذا وجدنا أن ملء خلية معينة فارغة سيؤدي إلى تقليل التكاليف النقل فإن جدول النقل يتم تعديله للاستفادة من ذلك .

وتتم عملية تقييم كل جدول نقل إلى أن يتضح أن شغل أي خلية فارغة لن يؤدي إلى تقليل تكاليف النقل بل سيؤدي إلى زيادتها.

كما يجب ملاحظة أن أية مشكلة للنقل تكون قابلة للحل الأمثل دون أي إجراءات إضافية إذا تحقق الشرط الآتي وهو أن عدد الخلايا المشغولة يجب أن تساوي دائما مجموع عدد الصفوف وعدد الأعمدة ناقص واحد، أي أن:

عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1

عدد الخلايا المشغولة = $(m + n - 1)$

أما القواعد التي يجب مراعاتها لتطبيق هذه الطريقة هي كما يلي:

- تكوين مسار معلق لكل خلية غير مشغول، بحيث يبدأ و ينتهي المسار المغلق عند الخلية الفارغة المراد تقييمها ، ويجب أن يتألف المسار المغلق من مجموعة من المستقيمات الأفقية والعمودية بحيث تقع الخلايا المشغولة عند الزوايا القائمة للمسار المغلق، بحيث يوجد مسار مغلق واحد لكل خلية غير مشغولة.
- يتم وضع إشارة زائد (+) للخلية المراد تقييمها ثم إشارة (−) للخلية التي تليها في المسار، ثم زائد (+) للخلية التالية في المسار، وهكذا تتالي الإشارة الموجبة والسالبة حتى نصل إلى الخلايا التي بدأنا بها.
- نقوم بحساب التكلفة غير المباشرة للخلية (تقييم الخلية)، وذلك بجمع الكلفة للخلايا الواقعة على المسار بعد وضع الإشارات عليها.
- نكرر الخطوات السابقة في حالة وجود أكثر من خلية غير مشغولة، فإذا كانت الكلف غير المباشرة موجبة أو صفر فإن الحل الذي بين أيدينا هو الحل الأمثل، أما إذا كانت هناك خلية غير مشغولة أو أكثر من خلية غير مشغولة تكون الكلفة الغير المباشرة لها سالبة، فهذا يعني أن هناك إمكانية لتطوير الحل وتخفيض التكاليف، وتعطى الأولوية للخلية التي لها أكبر قيمة سالبة للكلفة الغير مباشرة لأنها تساهم في تخفيض التكاليف وتؤدي إلى تحسين الحل.
- يتم إشغال الخلية الغير مشغولة من الخلايا المشغولة التي تحمل إشارة سالبة في نفس المسار.
- نكرر الخطوات السابقة بنقل القيم بين الخلايا واختبار الخلايا الغير مشغولة بنفس الطريقة حتى يتم الحصول على الحل الأمثل.
- في حالة عدم تحقق شرط عدد الخلايا = $(m + n - 1)$ (حالة حل مفكك) ، في هذه الحالة نضيف إلى أحد الخلايا الغير مشغولة و التي تحتوي على أقل كلفة قيمة صفر بحيث لا يؤثر على الحل و تساعدنا في اختيار الخلايا الغير مشغولة.

ومن أجل إيضاح هذه الطريقة نورد المثال التالي :

مثال: تنتج شركة ثلاثة أنواع من السلع الكهربائية وتقوم هذه الشركة بتجهيز ثلاثة مراكز تسويقية، الجدول أدناه يبين تكاليف نقل الوحدة الواحدة والكميات المعروضة والمطلوبة، استخدم طريقة الركن الشمالي الغربي لإيجاد الحل الأولي المقبول، ثم أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المعرج.

المراكز التسويقية

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	7	3	10	22
S_2	4	6	0	24
S_3	5	8	9	14
الطلب	18	22	20	60

الحل:

بعد التحقق من شرط التوازن والتحقق من أن مجموع الطلب يساوي مجموع العرض، نقوم بالحل الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية، فنحصل على الحل التالي:

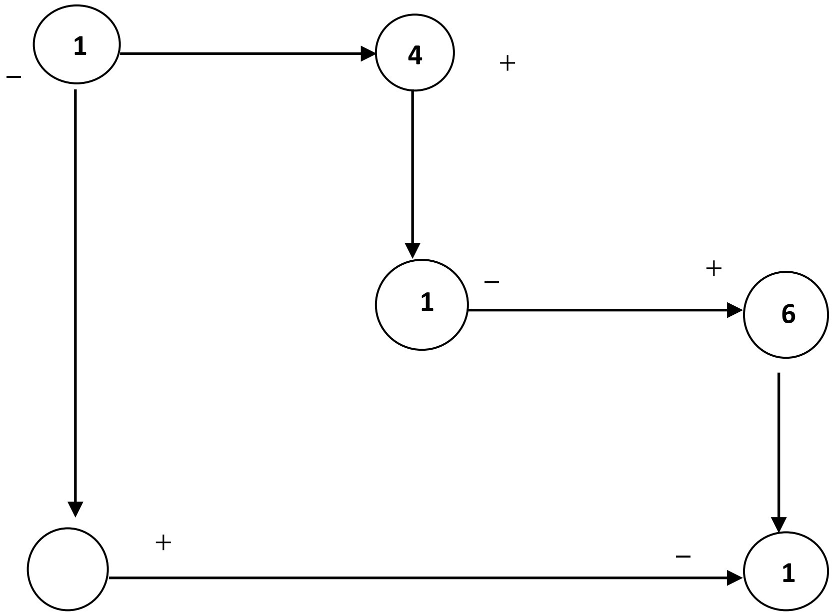
	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	$\boxed{7}$ 18	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{10}$	22
S_2	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$ 18	$\boxed{0}$ 6	24
S_3	$\boxed{5}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$ 14	14
الطلب	18	22	20	60

بعد الحل نحسب اجمالي التكاليف نجدها تساوي 372 وحدة نقدية.

- يتم التأكد من أن الحل الأولي قابل للحل الأمثل ونلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة تساوي 5 وأن شرط عدم التفكك محقق (عدد الخلايا = 3+3−1)، أي أن عدد الخلايا المشغولة يساوي $m+n-1$.
- يتم رسم مسار مغلق للخلايا الغير المشغولة.
- يتم حساب الكلف الغير المباشرة للمسارات المغلقة للخلايا الغير مشغولة و كالآتي :.

الكلفة الغير مباشرة	المسار المغلق	الخلية الغير مشغولة
+10-0+6-3 = 13	$X(1,3) \to X(2,3) \to X(2,2) \to X(1,2) \to X(1,3)$	X (1,3)
+4-7+3-6 = -6	$X(2,1) \to X(1,1) \to X(1,2) \to X(2,2) \to X(2,1)$	X(2,1)
+5-7+3-6+0-9 = -14	$X(3,1) \to X(1,1) \to X(1,2) \to X(2,2) \to X(2,2) \to X(2,3) \to X(3,3) \to X(3,1)$	X(3,1)
+8-6+0-9 = -7	$X(3,2) \to X(2,2) \to X(2,3) \to X(3,3) \to X(3,2)$	X(3,2)

- من التكاليف الغير مباشرة التي تم حسابها نجد أن الخلية X(3.1) لها أكبر قيمة سالبة ولذلك يتم اختيارها لأنها تؤدي إلى تخفيض التكاليف، ويتم أشغالها بنقل كميات إليها حيث تحدد الكمية التي ستنقل إليها من خلال المسار المغلق على أساس أقل مقدار للخلية التي تحمل الإشارة السالبة، ويمكن تمثيل مسار الخلية X(3.1) كالآتي:



- إن عدد الوحدات الواجب نقلها إلى الخلية $X(3.1)$ تتحدد من المسار المغلق أعلاه، وإن أقل عدد من الوحدات في هذا المسار في الخلية ذات الإشارة السالبة (14) وحدة، يتم إضافة هذه القيمة إلى الخلايا الموجبة وطرحها من الخلايا السالبة وبذلك تتغير قيم الخلايا في المسار المغلق وتصبح كالآتي:

$X(3,1) = 14$

$X(1,1)=18-14 = 4$

$X(1,2) = 4+14 =18$

$X(2,2) = 18-14 = 4$

$X(2,3) = 6+14 = 20$

$X(3,3) = 14-14 = 0$

بالتالي يصبح جدول النقل كالآتي:

	1	2	3	العرض
1	$\boxed{7}$ 4	$\boxed{3}$ 18	$\boxed{10}$	22
2	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$ 4	$\boxed{0}$ 20	24
3	$\boxed{5}$ 14	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	14
الطلب	18	22	20	60

أما التكاليف الكلية:

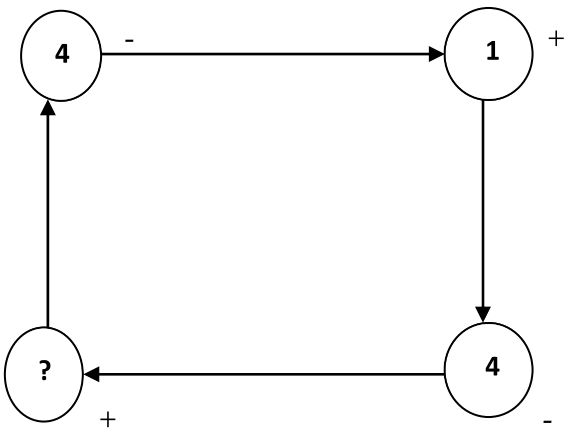
$$T.C = (7)(4)+(3)(18)+(6)(4)+0(20)+(5)(14)+(9)(0) = 176$$ وحدة نقدية

كانت الكلفة الكلية باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية 372 وحدة نقدية، في حين بلغت الكلفة الكلية بعد أن تم تعديل الجدول بـ 176 وحدة نقدية، أي هناك تخفيض في التكاليف بقيمة 196وحدة نقدية.

- إن الحل المحقق في الجدول السابق يمكن أن يكون حلا أمثلا أولا يكون كذلك، أي هل هناك إمكانية في الحصول على نتائج أفضل من النتيجة السابقة، ويتطلب ذلك اختيار الجدول الذي تم التوصل إليه طبقا لنفس القواعد السابقة التي تتمثل في دارسة أثر اشغال الخلايا الغير مشغولة على التكلفة الكلية كما يلي:

الخلية الغير مشغولة	المسار المغلق	التكلفة الغير مباشرة
X(1,3)	X(1,3) → X(2,3) → X(2,2) → X(1,2) → X(1,3)	+10-0+6-3=13
X(2,1)	X(2,1) → X(1,1) → X(1,2) → X(2,2) → X(2,1)	+4-7+3-6= -6
X(3,2)	X(3,2) → X(3,1) → X(1,1) → X(1,2) → X(3,2)	+8-5+7-3= 7
X(3,3)	X(3,3) → X(3,1) → X(1,1) → X(1,2) → X(2,2) → X(2,3) → X(3,3)	-3+6-0=14 +9-5+7

من التكاليف الغير مباشرة التي تم احتسابها نجد أن الخلية $X(2,1)$ لها قيمة سالبة ولذلك يتم اختيارها لأنها تؤدي إلى تخفيض التكاليف، ويتم إشغالها بنقل كميات إليها حيث تتحدد الكمية التي ستنتقل إليها من خلال المسار المغلق على أساس أقل مقدار للخلية التي تحمل الإشارة السالبة ويمكن تمثيل مسار الخلية $X(2,1)$ كالآتي:



إن عدد الوحدات الواجب نقلها إلى الخلية $X(2,1)$ تتحدد من المسار المغلق أعلاه، وهي عبارة عن أصغر عدد من الوحدات في الخلايا التي تأخذ الإشارة السالبة في المسار.

إن أقل عدد من الوحدات في هذا المسار في الخلية ذات الإشارة السالبة هي (4) وحدات، يتم إضافة هذه القيمة إلى الخلايا الموجبة وطرحها من الخلايا السالبة وبذلك تتغير قيم الخلايا في المسار المغلق و تصبح كالآتي:

$X(1,1) = 4-4 = 0$

$X(1,2) = 18+4 = 22$

$X(2,1) = 4$

$X(2,2) = 4-4 = 0$

و كما يتضح في الجدول الآتي:

	1	2	3	العرض
1	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 22	$\boxed{10}$	22
2	$\boxed{4}$ 4	$\boxed{6}$	$\boxed{0}$ 20	24
3	$\boxed{5}$ 14	$\boxed{8}$	$\boxed{3}$	14
الطلب	18	22	20	60

أما التكلفة الكلية:

$T.C = (22)(3)+(4)(4)+(20)(0)+(14)(5) = 152$ وحدة نقدية

كانت التكلفة الكلية 176 وحدة نقدية في التعديل الأول للجدول في حين بلغت الكلفة الكلية بعد أن تم تعديل الجدول للمرة الثانية 152 وحدة نقدية، أي أن هناك تخفيض في التكاليف بمقدار 24 وحدة نقدية.

- إن الحل المتحقق في الجدول قد يكون هو الحل الأمثل و بذلك يتم اختبار أمثلية الجدول الأخير، بحيث نلاحظ في هذا الجدول أنه لا يحقق الشرط كون عدد الخلايا لمشغولة = $(m + n-1)$، إذ أن الخلايا المشغولة أصبحت (4) لذلك يتم إضافة صفر إلى أحد الخلايا الغير مشغولة و التي لها أقل تكلفة وهي الخلية $X(2,2)$ لمساعدتنا في اختبار الخلايا الغير مشغولة و الجدول التالي يوضح ذلك:

	1	2	3	العرض
1	7	3 / 22	10	22
2	4 / 4	6 / 0	0 / 20	24
3	5 / 14	8	9	14
الطلب	18	22	20	60

يتم اختبار أمثلية الجدول الأخير بنفس القواعد السابقة التي تتمثل في دراسة أثر إشغال الخلايا الغير مشغولة على التكلفة الكلية كالآتي:

الخلية الغير مشغولة	المسار المغلق	التكلفة الغير مباشرة
X(1,1)	X(1,1) → X(1,2) → X(2,2) → X(2,1) → X(1,1)	+7-3+6-4 = 6
X(1,3)	X(1,3) → X(2,3) → X(2,2) → X(1,2) → X(1,3)	+10-0+6-3 = 13
X(3,2)	X(3,2) → X(3,1) → X(2,1) → X(2,2) → X(3,2)	+8-5+4-6 = 1
X(3,3)	X(3,3) → X(3,1) → X(2,1) → X(2,3) → X(3,3)	+9-5+4-0 = 8

إن التكلفة الغير مباشرة للخلايا الغير المشغولة هي أرقام موجبة ، لذلك فإن إشغال أي من هذه الخلايا سوف لن يخفض من التكاليف وبذلك يكون الحل للجدول الأخير هو الحل الأمثل والتكاليف 152وحدة نقدية.

ملاحظة : الجدول الأخيرة الذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة المسار الحرج هو نفس الجدول الذي تم الحصول عليه عند استخدامنا طريقة أقل التكاليف وطريقة فوقل مما يدل أن هاتين الطريقتين تعطي في أغلب الأحيان الحل الأمثل لمشكلة النقل.

II. طريقة التوزيع المعدل Modified Distribution Method:

ولاستخدام هذه الطريقة نتبع الخطوات الآتية :

- التأكد من أن عدد الخلايا المشغولة يساوي $m + n - 1$
- يتم تكوين معادلة لكل خلية مشغولة في جدول الحل الأولي على أساس المعادلة الآتية:

$$C_{ij} = U_i + V_j$$

حيث :

U_i : المتغير الخاص بالصف i والذي تقع فيه الخلية المعنية .

V_j : المتغير الخاص بالعمود j و التي تقع فيه الخلية المعنية .

C_{ij} : كلفة الخلية التي تقع في الصف i و العمود j

- إيجاد الحل للمعادلات للخلايا المشغولة وحسب الصيغة التي تم ذكرها في الخطوة السابقة.
- حساب الكلفة الغير مباشرة للخلايا الغير مشغولة وفقا للمعادلة الآتية الكلفة الغير مباشرة للخلية

$$(i\text{-}j) = (C_{ij} - U_i - V_j)$$

فإذا كانت هناك خلية أو أكثر من خلية غير مشغولة تكون الكلفة الغير مباشرة لها سالبة، فهذا يعني أن هناك إمكانية لتطوير الحل وتخفيض التكاليف، وتعطي الأولوية للخلية التي لها أكبر قيمة سالبة، و نكمل الحل كما هو متبع في طريقة المسار المتعرج.

ولغرض التوضيح هذه الطريقة نستعين بالمثال السابق

مثال: من جدول الحل الأولي والذي تم الحصول عليه بطريقة الزاوية الشمالية الغربية ، وجد الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدل.

	1	2	3	العرض
1	$\boxed{7}$ 18	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{10}$	22
2	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$ 18	$\boxed{0}$ 6	24
3	$\boxed{5}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$ 14	14
الطلب	18	22	20	60

من الجدول نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة 5 و بذلك يتم تكوين خمسة معادلات و كالآتي:

$C_{11} = U_1 + V_1 = 7$ ....(1)

$C_{12} = U_1 + V_2 = 3$ ....(2)

$C_{22} = U_2 + V_2 = 6$ ....(3)

$C_{23} = U_2 + V_3 = 0$ ....(4)

$C_{33} = U_3 + V_3 = 9$ ....(5)

بما أنه لدينا عدد المتغيرات أكثر من عدد المعادلات و لغرض تسهيل الحل، نفرض أن أحد المتغيرات يساوي صفر حتى نتمكن من إيجاد قيم المتغيرات الأخرى، ولنفرض أن U_1 يساوي صفر، ومن المعادلات سوف نحصل على النتائج الآتية :

$V_1 = 7$ $\quad$ $U_1 = 0$

$V_2 = 3$ $\quad$ $U_2 = 3$

$V_3 = -3$ $\quad$ $U_3 = 12$

ويتم تقييم الخلايا الغير المشغولة وذلك بحساب التكلفة الغير مباشرة لكل خلية غير مشغولة حسب العلاقة:

$$(C_{ij} - U_i - V_j) = \text{الكلفة الغير مباشرة}$$

التكلفة الغير مباشرة $(C_{ij} - U_i - V_j)$	الخلية الغير مشغولة
10-0-(-3) = 13	X(1,3)
4-3-7 = -6	X(2,1)
5-12-7 = -14	X(3,1)
8-12-3 = -7	X(3,2)

من التكاليف الغير مباشرة التي تم حسابها نجد أن الخلية X(3,1) لها أكبر قيمة سالبة، لذلك يتم اشتغالها بنقل كميات إليها و طبقا لما تم شرحه في طريقة المسار المتعرج حيث يتم رسم لتحديد عدد الوحدات الواجب نقلها ، وهكذا نستمر في عملية تحسين الحل إلى أن تكون جميع التكاليف الغير مباشرة للخلايا الفارغة معدومة أو موجبة (أكبر من أو تساوي الصفر).

تطبيقات

التمرين رقم (01): تمتلك منشأة لصناعة الطحين (3) معامل في الجزائر العاصمة ووهران وعنابة، وأن الطاقة الإنتاجية لهذه المعامل (350)، (300)، (300) طن من الطحين يوميا على الترتيب. حيث تقوم بتجهيز (4) أسواق في ولايات هي الوادي، قسنطينة، المسيلة، غرداية حيث يبلغ احتياجاتها من الطحين (350)، (225)، (100)، (125) طن يوميا، إن كلفة نقل الطحين من الجزائر العاصمة إلى الوادي ، قسنطينة، المسيلة، غرداية هي (10)، (8)، (12)، (14) ألف دينار للطن الواحد على الترتيب، وأن كلفة نقل الطحين من وهران إلى الوادي، قسنطينة، المسيلة، غرداية هي (6)، (7)، (13)، (11) ألف دينار للطن الواحد على الترتيب، وأن كلفة نقل الطحين من عنابة إلى غرداية، المسيلة، قسنطينة، الوادي هي: (5)، (10)، (9)، (4) ألف دينار للطن الواحد على الترتيب.

المطلوب:

- كون جدول النقل لهذه المسألة.

- إيجاد الحل الأساسي الأولي بطريقة أقل التكاليف وأحسب التكاليف الكلية.

الحل:

- تكوين جدول النقل:

العرض	غرداية	المسيلة	قسنطينة	الوادي	
350	14	12	8	10	الجزائر العاصمة
300	11	13	7	6	وهران
300	5	10	9	4	عنابة
	125	100	225	350	الطلب

- ايجاد الحل الأساسي الاولي بطريقة أقل التكاليف:

- قبل ذلك نتحقق من شرط التوازن:

نجد أن العرض≠ الطلب بحيث(العرض= 950 والطلب = 800)

وبالتالي نضيف سوق وهمي بتكاليف صفرية وقيمة الطلب=150 وحدة من أجل أن يصبح العرض=الطلب (وتحقيق شرط التوازن)

	الوادي	قسنطينة	المسيلة	غرداية	سوق وهمي	العرض
الجزائر العاصمة	10	8	12 100	14 100	0 150	~~350~~ ~~200~~ ~~100~~ 0
وهران	6 50	7 225	13	11 25	0	~~300~~ ~~250~~ ~~25~~ 0
عنابة	4 300	9	10	45	0	~~300~~ 0
الطلب	~~350~~ ~~50~~ 0	~~225~~ 0	~~110~~ 0	~~125~~ 0 ~~100~~	~~150~~ 0	950/950

- طريقة أقل تكاليف: ففيها نختار أقل تكلفة في الجدول ونشغل الخلية وفي حالة أكثر من خلية لديها تكلفة صغيرة ومتساوية نختار عشوائيا، بعد ملئ الجدول نحسب التكلفة الكلية.

- التكلفة الكلية:

TC=(12*100)+(14*100)+(0*150)+(6*50)+(7*225)+(11*25)+(4*300)

=5950 الف دينار

التمرين رقم (02): تريد مؤسسة توزيع البضاعة (X) نقل هذه البضاعة من مخازنها الأربعة إلى مختلف نقاط التوزيع الستة بأقل تكلفة إجمالية، إذا علمت أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل مخزن إلى كل نقطة بالدينار هي:

		نقـــاط التوزيـــع					
		1	2	3	4	5	6
المخـازن	I	12	27	61	49	83	35
	II	23	39	78	28	65	42
	III	67	56	92	24	53	54
	IV	71	43	91	67	40	49

وأن الكميات المعروضة في كل مخزن بآلاف الوحدات هي على التوالي: 18 ، 32 ، 14 ، 9 .

وأن الكميات الممكن استقبالها في كل نقطة توزيع بآلاف الوحدات هي على التوالي: 9 ، 11 ، 28 ، 6 ، 14 ، 5.

المطلوب:

- إيجاد الحل الأساسي الأولي بكل الطرق التي تعرفها.

الحل:

1. الحل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

شرط التوازن محقق: لان مجموع العرض = مجموع الطلب = 73 ألف

	1	2	3	4	5	6	العرض
I	12 9	27 9	61	49	83	35	~~18~~ ~~9~~ 0
II	23	39 2	78 28	28 2	65	42	~~32~~ ~~30~~ ~~2~~ 0
III	67	56	92	24 4	53 10	54	~~14~~ ~~8~~ ~~3~~ 0
IV	71	43	91	67	40 4	49 5	~~9~~ ~~5~~ 0
الطلب	~~9~~ 0	~~11~~ ~~2~~ 0	~~28~~ 0	~~6~~ ~~4~~ 0	~~14~~ ~~4~~ 0	~~5~~ 0	73/73

$TC=(12\times9)+(27\times9)+(39\times2)+(78\times28)+(28\times2)+(24\times4)+(53\times10)$
$+(49\times5)+(40\times4)$ = 3808 الف دينار (لأن الكمية بالآلاف والتكلفة بالدينار)

2. الحل بطريقة أقل التكاليف:

شرط التوازن محقق: لان مجموع العرض = مجموع الطلب = 73 ألف

	1	2	3	4	5	6	العرض
I	12 9	27 9	61	49	83	35	~~18~~ ~~9~~ 0
II	23	39 2	78 25	28	65	42 5	~~32~~ ~~30~~ ~~2~~ 0
III	67	56	92 3	24 6	53 5	54	~~14~~ ~~8~~ ~~3~~ 0
IV	71	43	91	67	40 9	49	~~9~~ 0
الطلب	~~9~~ 0	~~11~~ ~~2~~ 0	~~28~~ ~~3~~ 0	~~6~~ 0	~~14~~ ~~5~~ 0	~~5~~ 0	73/73

$TC=(12\times9)+(27\times9)+(39\times2)+(78\times25)+(42\times5)+(92\times3)+(24\times6)$
$+(53\times5)+(40\times4)$ = 3634 الف دينار

3. الحل بطريقة فوقل التقريبية:

شرط التوازن محقق: لان مجموع العرض = مجموع الطلب = 73 ألف

	1	2	3	4	5	6	العرض	الفرق1	الفرق2	الفرق3	الفرق4	الفرق5	الفرق6	الفرق7
I	12	27	61 18	49	83	35	~~18~~ 0	15	15	X	X	X	X	X
II	23 9	39 11	78 7	28	65	42 5	~~32~~ ~~23~~ ~~12~~ ~~7~~ 0	5	16	16	3	3	23	13
III	67	56	92 3	24 6	53 5	54	~~14~~ ~~8~~ ~~3~~ 0	29	1	1	1	1	1	39
IV	71	43	91	67	40 9	49	~~9~~ 0	3	3	3	3	X	X	X
الطلب	~~9~~ 0	~~11~~ 0	~~28~~ ~~10~~ ~~3~~ 0	~~6~~ 0	5 14 ~~0~~	~~5~~ 0	73/73							
الفرق1	11	12	17	4	13	7								
الفرق2	11	12	17	X	13	7								
الفرق3	44	4	13	X	13	7								
الفرق4	X	4	1 13	X	12 13	7								
الفرق5	X	17	14	X	12	12								
الفرق6	X	X	14	X	12	12								
الفرق7	X	X	14	X	12	X								

$TC=(61\times18)+(23\times9)+(39\times11)+(78\times7)+(42\times5)+(92\times3)+(24\times6)$

$+(53\times5)+(40\times9)$ = 3535 الف دينار

التمرين رقم (03): لدينا جدول النقل التالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	العرض
S_1	5	2	4	3	11	1200
S_2	0	6	1	0	2	1400
S_3	9	5	0	10	2	700
S_4	8	5	6	0	3	800
S_5	12	6	5	7	1	900
الطلب	1500	600	1100	1400	400	

المطلوب: أوجد:

1- تكلفة النقل الأولية بطريقة فوجل.

2- الحل الأمثل باستخدام بطريقة المسار المتعرج.

الحل:

1- ايجاد تكلفة النقل الأولية بطريقة فوجل:

شرط التوازن محقق العرض= الطلب 5000

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض	الفرق1	الفرق2	الفرق3	الفرق4	الفرق5	الفرق6	الفرق7
S1	5 100	2 500	4	3 600	11	~~1200~~ ~~1100~~ ~~500~~ 0	1	1	1	1	1	1	2
S2	0 1400	6	1	0	2	~~1400~~ 0	0	X	X	X	X	X	X
S3	9	5	0 700	10	2	~~700~~ 0	2	2	X	X	X	X	X
S4	8	5	6	0 800	3	~~800~~ 0	3	3	3	5	X	X	X
S5	12	6 100	5 400	7	1 400	~~900~~ ~~500~~ ~~100~~ 0	4	4 1 1	4	1	1	1	1
الطلب	~~1500~~ ~~100~~ 0	~~600~~ ~~100~~ 0	~~1100~~ ~~400~~ 0	~~1400~~ ~~600~~ 0	~~400~~ 0	5000/5000							
الفرق1	5	3	4	0	1								
الفرق2	3	3	4 16	3	1								
الفرق3	3	3	1	3	2								
الفرق4	3	3	1	3	X								
الفرق5	7	4	1	4	X								
الفرق6	X	4 6	1	4 7	X								
الفرق7	X	4	1	X	X								

$TC=(5\times100)+(2\times500)+(3\times600)+(0\times1400)+(0\times700)+(0\times800)+$

$(6\times100)+(5\times400)+(1\times400)=$ 6300 وحدة نقدية

2- ايجاد الحل الأمثل باستخدام بطريقة المسار المتعرج.

نتحقق أولا من شرط عدم التفكك $(m+n-1)=9$
عدد الخلايا المشغولة $=9$
محقق

الآن نختبر الخلايا الفارغة من خلال المسار المغلق لكل خلية فارغة وحساب التكلفة الغير المباشرة كما يلي:

التكلفة غير المباشرة	الخلية الفارغة	التكلفة غير المباشرة	الخلية الفارغة
10-3+2-6+5-0=8	(S3-D4)	4-5+6-2=3	(S1-D3)
2-0+5-1=6	(S3-D5)	11-1+6-2=14	(S1-D5)
8-5+3-0=6	(S4-D1)	6-0+5-2=9	(S2-D2)
5-2+3-0=6	(S4-D2)	لا يوجد لها مسار مغلق	(S2-D3)
6-5+6-2+3-0=8	(S4-D3)	0-0+5-3=2	(S2-D4)
3-1+6-2+3-0=9	(S4-D5)	لا يوجد لها مسار مغلق	(S2-D5)
12-5+2-6=3	(S5-D1)	لا يوجد لها مسار مغلق	(S3-D1)
7-6+2-3=0	(S5-D4)	-0+5-6=45	(S3-D2)

بما أن جميع الخلايا الفارغة تكلفتها الغير مباشرة موجبة وبالتالي فنحن أمام الحل الأمثل والتكلفة الاجمالية تقدر بـ TC= 6300 وحدة نقدية

التمرين رقم (04): لدينا جدول النقل التالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	5	1	0	4	100
S_2	7	5	2	3	50
S_3	6	10	9	0	75
S_4	2	4	1	6	25
الطلب	20	100	30	100	

المطلوب:

1. أوجد الحل الأولي بإستخدام طريقة أقل التكاليف.

2. أوجد الحل الأمثل بإستخدام طريقة التوزيع المعدلة.

الحل:

1. ايجاد الحل الأولي بطريقة أقل التكاليف.

نتحقق من شرط التوازن: العرض=250 وحدة و الطلب=250 وحدة، وبالتالي العرض = الطلب (معناه أن شرط التوازن المحقق)

في البداية نبدأ بالخلية التي لديها أقل تكلفة ونجد أن الخلية(S1-D3) تكلفتها (0) والخلية (S3-D4) تكلفتها (0) وبالتالي نختار عشوائيا أي خلية منهم وبالتالي سنختار (S3-D4) ونبدأ بها.

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	5	1 70	0 30	4	~~100~~ ~~70~~ 0
S_2	7	5 25	2	3 25	~~50~~ ~~25~~ 0
S_3	6	10	9	0 75	~~75~~ 0
S_4	2 20	4 5	1	6	~~25~~ ~~5~~ 0
الطلب	~~20~~ 0	~~100~~ ~~30~~ ~~25~~ 0	~~30~~ 0	~~100~~ ~~25~~ 0	250

$TC=(2\times20)+(1\times70)+(5\times25)+(4\times5)+(0\times30)+(3\times25)+(0\times75) =$

330 وحدة نقدية

ملاحظة: بالنسبة للذين بدؤوا بالخلية (S1-D3) يمكن أن يتحصلوا على تكلفة مختلفة لكن لا يهم لأنها تكلفة حل أولي فقط.

2- ايجاد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدلة

نتحقق من شرط عدم التفكك (عدد الأسطر + عدد الأعمدة-1= عدد الخلايا المشغولة)

فنجد أن (4+4-1=7) وبالتالي الشرط محقق

- نشكل معادلات للخلايا المشغولة من الشكل Cij=Ui+Vj

$C_{12}+U_1+V_2=1$..........(1)

$C_{13}=U_1+V_3=0$.........(2)

$C_{22}=U_2+V_2=5$.........(3)

$C_{24}=U_2+V_4=3$.........(4)

$C_{34}=U_3+V_4=0$.........(5)

$C_{41}=U_4+V_1=2$.........(6)

C42=U4+V2=4.......(7)

- نقوم بحب المعادلات السابقة من أجل ايجاد قيمة المتغيرات:

لدينا 07 معادلات و08 مجاهيل وبالتالي نفرض أن(U1=0) ونجد باقي المتغيرات بالتعويض في المعادلات:

$V_1=-1$ $U_1=0$

$V_2=1$ $U_2=4$

$V_3=0$ $U_3=1$

$V_4=-1$ $U_4=3$

- نختبر الخلايا الفارغة بمعدلات من الشكل Cij-Ui-Vj:

$(S1-D1)=C_{11}-U_1-V_1=5-0-(-1)=6$

$(S1-D4)=C_{14}-U_1-V_1=4-0-(-1)=5$

$(S2-D1)=C_{21}-U_2-V_1=7-4-(-1)=4$

$(S2-D3)=C_{23}-U_2-V_3+2-4-(0)= -2$

$(S3-D1)=C_{31}-U_3-V_1=6-1-(-1)=6$

$(S3-D2)=C_{32}-U_3-V_2=10-1-1=8$

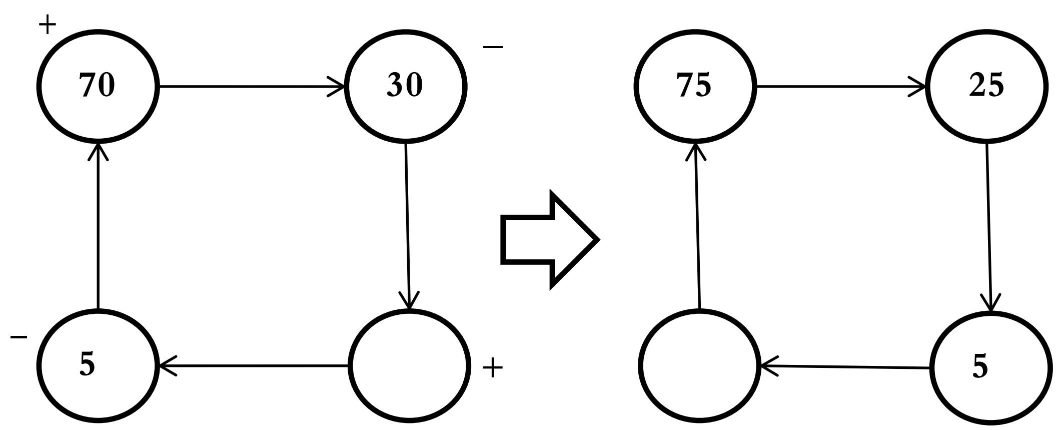
$(S3-D3)=C_{33}-U_3-V_3=9-1-0=8$

$(S4-D3)=C_{43}-U_4-V_3= 1-3-0= -2$

$(S4-D4)= C_{44}-U_4-V_4=6-3-(-1)=4$

بما أن هناك خلايا فارغة تكلفتها الغير مباشرة سالبة فإننا لم نصل إلى الحل الأمثل ويجب ادخال الخلية التي تكلفتها الغير مباشرة في الحل ونبدأ بأكبر قيمة سالبة، فنجد أن (S2-D3) و(S4-D3) تكلفتهم الغير مباشرة(-2) وبالتالي نختار أحداهما عشوائيا:

نختار الخلية (S4-D3) وندخلها في الحل من خلال مسارها المغلق كما يلي:



بحيث اخترنا أقل قيمة بإشارة(-) وننقصها في الخلايا السالبة ونضيفها إلى الخلايا الموجبة وهذه القيمة هي (5)، مع عدم احتساب الاشارات التي فوق الخلايا خلال العمليات الحسابية.

فنتحصل على الجدول التالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	5	1 75	0 25	4	100
S_2	7	5 25	2	3 25	50
S_3	6	10	9	0 75	75
S_4	2 20	4	1 5	6	25
الطلب	20	100	30	100	250

$TC=(1\times75)+(0\times25)+(5\times25)+(3\times25)+(0\times75)+(2\times20)+(1\times5)=$ 320 وحدة نقدية

نلاحظ أن التكلفة انخفضت، الآن نختبر أمثلية هذا الحل كما في الطريقة السابقة كالاتي:

- التحقق من شرط عدم التفكك(عدد الأسطر + عدد الأعمدة-1= عدد الخلايا المشغولة)

محقق لأن (7=7)

- تكون معادلات للخلايا المشغولة من الشكل $Cij=Ui+Vj$

$C_{12}=U_1+V_2=1......(1)$

$C_{13}=U_1+V_3=0......(2)$

$C_{22}=U_2+V_2=5......(3)$

$C_{24}=U_2+V_4=3......(4)$

$C_{34}=U_3+V_4=0......(5)$

$C_{41}=U_4+V_1=2......(6)$

$C_{43}=U_4+V_3=1......(7)$

- نقوم بحل المعدلات من أجل اجاد قم المتغيرات:

بما أن المجاهيل أكثر من المعادلات نفرض أن ($U_1=0$) وكذا بقية المتغيرات

$U_1=0 \qquad V_1=1$

$U_2=4 \qquad V_2=1$

$U_3=1 \qquad V_3=0$

$U_4=1 \qquad V_4=-1$

- نختبر الخلايا الفارغة بمعادلات من الشكل Cij-Ui-Vj:

$(S1-D1)=C_{11}-U_1-V_1=5-0-1=4$

$(S1-D4)=C_{14}-U_1-V_4=4-0-(-1)=5$

$(S2-D1)=C_{21}-U_2-V_1=7-4-1=2$

$(S2-D3)= C_{23}-U_2-V_3=2-4-0= -2$

$(S3-D1)= C_{31}-U_3-V_1=6-1-1= 4$

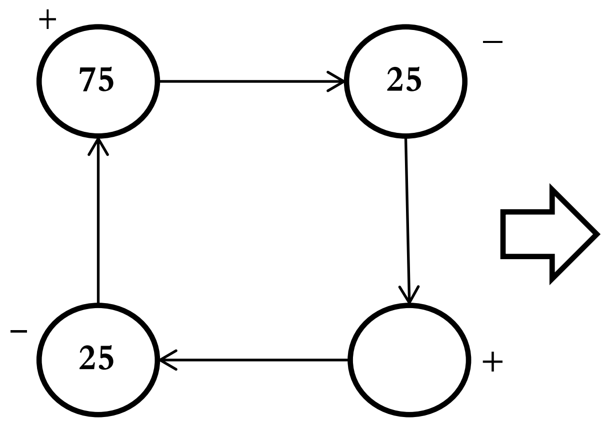
$(S3-D2)=C_{32}-U_3-V_2=10-1-1=8$

$(S3-D3)= C_{33}-U_3-V_3=9-1-0=8$

$(S4-D2)=C_{42}-U_4-V_2=4-1-1=2$

$(S4-D4)=C_{44}-U_4-V_4=6-1-(-1)=6$

من خلال التكاليف الغير مباشرة للخلايا الفارغة نلاحظ أن الخلية (S2-D3) خلية سالبة، وبالتالي ندخلها في الحل(نشغلها) من خلال مسارها المغلق كما يلي:



فيصبح الجدول كما يلي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	5	1 100	0 0	4	100
S_2	7	5	2 25	3 25	50
S_3	6	10	9	0 75	75
S_4	2 20	4	1 5	6	25
الطلب	20	100	30	100	250

$TC=(1\times100)+(2\times25)+(3\times25)+(0\times75)+(2\times20)+(1\times5)=$

270 وحدة نقدية

نلاحظ أن التكلفة انخفضت، الآن نتحقق من أمثلية هذا الحل، كما ف الطريقتين السابقتين كما يلي:

- التحقق من شرط عدم التفكك: عدد الأسطر + عدد الأعمدة-1=7
عدد الخلايا المشغولة= 6
الشرط غير محقق

نلاحظ أن الشرط غير محقق وبالتالي نضيف خلية مشغولة ليتحقق الشرط، وذلك باعتبار الخلية الفارغة والتي فيها أقل تكلفة وهي(S1-D3) نعتبرها مشغولة وعدد الوحدات فيها هو (0) وحدة، بحيث لا يؤثر ذلك على التكلفة الكلية لكنه يحقق لنا شرط عدم التفكك، ثم نكمل بقية خطوات البحث عن الحل الأمثل:

- تكوين معادلات للخلايا المشغولة من الشكل Cij=Ui+Vj:

$C_{12}= U_1+V_2=1\ldots\ldots(1)$

$C_{13}= U_1+V_3=0\ldots\ldots(2)$

$C_{23}= U_2+V_3=2\ldots\ldots(3)$

$C_{24}=U_2+V_4=3\ldots\ldots(4)$

$C_{34}=U_3+V_4=0\ldots\ldots(5)$

$C_{41}=U_4+V_1=2\ldots\ldots(6)$

$C_{43}=U_4+V_3=1\ldots\ldots(7)$

- حل المعادلات وايجاد قيم المتغيرات:

بما أن المجاهيل أكثر من المعادلات نفرض أن (U1=0) ونجد بقية قيم المتغيرات:

$V_1=1$ $U_1=0$

$V_2=1$ $U_2=2$

$V_3= 0$ $U_3= -1$

$V_4=1$ $U_4=1$

- نختبر الخلايا الفارغة بمعادلات من الشكل Cij-Ui-Vj:

$(S1-D1)= C_{11}-U_1-V_1=5-0-1=4$

$(S1-D4)= C_{14}-U_1-V_4= 4-0-1=3$

$(S2-D1)=C_{21}-U_2-V_1=7-2-1=4$

$(S2-D2)=C_{22}-U_2-V_2=5-2-1=2$

$(S3-D1)=C_{32}-U_3-V_2=6-(-1)-1=6$

$(S3-D2)=C_{32}-U_3-V_2=10-(-1)-1=10$

$(S3-D3)=C_{33}-U_3-V_3=9-(-1)-0=10$

$(S4-D2)=C_{42}-U_4-V_2=4-1-1=2$

$(S4-D4)=C_{44}-U_4-V_4=6-1-1=4$

بما أن جميع الخلايا الفارغة تكاليفها ايجابية وبالتالي لقد وصلنا إلى الحل الأمثل والتكلفة المثلى تقدر بـ TC=270 وحدة نقدية، كما هو موضح في آخر جدول.

المحاضرة الثالثة

نماذج التخصيص (مشاكل التعين)

يمكن القول أن مشاكل التخصيص هي عبارة عن حالة خاصة من مشاكل النقل، وتتعلق بتخصيص عدد معين من الأجهزة أو العمال لإنجاز عدد من الوظائف و ذلك عن طريق تعيين جهاز واحد أو عامل واحد لأداء وظيفة واحدة، وهذا يتطلب تساوي عدد الأجهزة مع عدد الوظائف، والمشكلة هنا تتعلق باختبار أفضل تعيين بحيث يؤدي ذلك إلى تخفيض التكاليف أو تعظيم الأرباح.

أولا: **طرق حل مشاكل التخصيص**:

هناك عدة طرق متبعة لحل مشاكل التخصيص منها:

- طريقة العد الكامل.
- الطريقة الهنغارية.
- طريقة البرمجة الخطية.
- طريقة النقل.

I. طريقة العد الكامل : Complete Enumération

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الطرق المستخدمة في حل مشاكل التخصيص ، وتعتمد على تحديد جميع البدائل المحتملة ثم نختار التخصيص المناسب الذي يؤدي إلى تحقيق الهدف المنشود (تخفيض التكاليف أو تعظيم الأرباح).

إن عدد البدائل المحتملة لكل مشكلة تخصيص تساوي مضروب عدد الصفوف أو عدد الأعمدة ((!) Factorial)

فإذا كان لدينا عدد العمال مثلا يساوي N فإن عدد البدائل يساوي N! ، فإذا كان لدينا عدد الصفوف يساوي 3 فإن $6 = 3x2x1 = 3!$ أي أن هناك 6 بدائل محتملة لعملية التخصيص.

مثال رقم 1: ليكن لدينا ثلاثة أجهزة (A,B,C) لإنجاز ثلاثة وظائف (1,2,3)، وكانت تكاليف إنجاز هذه الوظائف على هذه الأجهزة بالدينار معطاة في الجدول التالي:

الأجهزة	الوظائف		
	1	2	3
A	16	8	14
B	10	4	8
C	8	2	10

المطلوب: استخدم طريقة العد الكامل لتحديد أفضل تخصيص لتقليل التكاليف ؟

الحل:

- عدد الأجهزة أو الوظائف 3 ، لذا فإن عدد البدائل: $3! = 6$
- الجدول التالي يعطي البدائل الستة والتكاليف الناتجة عن كل بديل:

البدائل	الأجهزة			إجمالي التكاليف
	A	B	C	
1	1	2	3	16+4+10 = 30
2	1	3	2	16+8+2 = 26
3	2	1	3	8+10+10 = 28
4	2	3	1	8+8+8 = 24
5	3	1	2	14+10+2 = 26
6	3	2	1	14+4+8 = 26

نلاحظ من الجدول أن أفضل البدائل هو البديل رقم (4) وهو تخصيص:

الجهاز (A) لإنجاز الوظيفة (2) .

الجهاز (B) لإنجاز الوظيفة (3) .

الجهاز (C) لإنجاز الوظيفة (1) .

مثال رقم 2: شركة ترغب في تخصيص ثلاث عمال لإنجاز ثلاث وظائف فإذا كانت الأرباح الناجمة عن القيام بهذه الوظائف بالدينار مبنية في الجدول التالي:

العمال	الوظائف		
	1	2	3
A	6	15	4
B	9	7	6
C	7	1	11

المطلوب: استخدم طريقة العد الكامل لتحديد أفضل تعيين يحقق أعظم ربح ممكن ؟

الحل:

- عدد البدائل = $3! = 6$ بدائل.
- الجدول التالي يعطي البدائل السنة و الأرباح الناجمة عن كل بديل

الأرباح	العمال			البدائل
	C	B	A	
6+7+11 = 24	3	2	1	1
6+11+1 = 18	2	3	1	2
15+9+11 = 35	3	1	2	3
15+6+7 = 28	1	3	2	4
4+9+1 = 14	2	1	3	5
4+7+7 = 18	1	2	3	6

الحل الأمثل الذي يحقق أعظم ربح ممكن هو عند إجراء التخصيص التالي:

العامل (A) لإنجاز الوظيفة (2)

العامل (B) لإنجاز الوظيفة (1)

العامل (C) لإنجاز الوظيفة (3)

ويكون الربح الناتج عن هذا التعيين هو 35 دينار.

هذه الطريقة قد تبدو بسيطة خاصة إذا كان عدد الوظائف قليل لا يتجاوز 3 وظائف ولكن إذا كانت المشكلة تتعلق بأربعة وظائف فإن عدد البدائل يساوي 24 بديلا، وفي حالة خمسة وظائف فإن عدد البدائل يساوي 120 بديلا، وهكذا كلما زادت البدائل كلما أصبحت هذه الطريقة غير عملية، وفي هذه الحالة نلجأ إلى الطريقة الأخرى والتي سنعرضها في العنصر الموالي.

II. الطريقة الهنجارية (المجرية): Hungarian Method

خطوات تطبيق هذه الطريقة لأقل التكاليف هي :

- تطرح أقل قيمة في كل عمود من باقي القيم في ذلك العمود.
- ثم نطرح أقل قيمة في كل صف من باقي القيم في ذلك الصف.
- نعطي الأصفار (في الصفوف و الأعمدة) بأقل عدد ممكن من المستقيمات .
- إذا كان عدد المستقيمات يساوي عدد صفوف الجدول فإننا قد وصلنا إلى الحل ونقوم بعملية التعيين بأخذ القيمة الأصلية المناظرة للصفر في الجدول .
- إذا كان عدد المستقيمات أقل من عدد صفوف الجدول ، فإننا نختار أقل قيمة من القيم غير المغطاة و نطرحها من كل القيم غير المغطاة ، ونضيف هذه القيمة إلى نقاط تقاطع المستقيمات.
- يجري تكرار التغطية حتى يتم التوصل إلى عدد مستقيمات مساوي لعدد الصفوف أو الأعمدة.

ملاحظة: في حالة تعظيم الأرباح نحول الجدول من جدول أرباح إلى جدول تكاليف، ويتم ذلك عن طرح جميع القيم من أعلى قيمة في الجدول، ومن ثم نطبق الخطوات السابقة.

مثال1: ترغب إدارة أحد المصانع في تعيين أربع عمال لإنجاز أربعة وظائف فإذا كانت تكاليف إنجاز هذه الوظائف بالدينار معطاة في الجدول التالي:

	الوظائف			
العمال	1	2	3	4
A	5	6	2	4
B	9	5	1	9
C	1	2	6	1
D	7	6	15	12

المطلوب: استخدم الطريقة الهنغارية لإيجاد أفضل تعيين يحقق أقل تكلفة ؟

الحل:

- نطرح أقل قيمة في كل عمود من باقي القيم في ذلك العمود، (طرح الأعمدة)

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	4	4	1	3
B	8	3	0	8
C	0	0	5	0
D	6	4	14	11

- أقل قيمة في كل صف من باقي القيم في ذلك الصف، (طرف الصفوف)

	1	2	3	4
A	3	3	0	2
B	8	3	0	8
C	0	0	5	0
D	2	0	10	7

- نغطي كل صف و كل مود يحتوي عل صفر فأكثر بأقل عدد ممكن من المستقيمات .

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	3	3	0	2
B	8	3	0	8
C	0	0	5	0
D	2	0	10	7

- بما أن عدد المستقيمات الأفقية والعمودية أقل من عدد صفوف الجدول لذا نختار أقل قيمة من القيم غير المغطاة ونطرحها من باقي القيم الغير مغطاة، ونضيفه إلى نقاط تقاطع المستقيمات.

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	1	3	0	0
B	6	3	0	6
C	0	2	7	0
D	0	0	10	5

بهذه الخطوة نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل و يتم اختيار الحل كالتالي:

- اختيار الصفر الوحيد في أي صف أو عمود أولا و يشطب أي صفر آخر في ذلك الصف أو العمود .
- في الصف الأول نختار الصفر (A4) و يشطب باقي الأصفار في العمود الرابع .
- في الصف الثاني نختار الصفر (B3) و يشطب باقي الأصفار في العمود الثالث .
- في الصف الثالث نختار الصفر (C1) و يشطب باقي الأصفار في العمود الأول .
- و أخيرا . في الصف الرابع نختار الصفر (D2) .

وعلى هذا الأساس يتم تخصيص العمال على الوظائف كما يلي:

✍ تعيين العامل (**A**) لإنجاز الوظيفة (4)

✍ تعيين العامل (**B**) لإنجاز الوظيفة (3)

✍ تعيين العامل (**C**) لإنجاز الوظيفة (1)

✍ تعيين العامل (**D**) لإنجاز الوظيفة (2)

وبالتالي فإن أقل التكاليف من الجدول الأصلي و الناجمة عن هذا التخصيص هي:

$$4+1+1+6 = 12\ \mathbf{D}$$ (دينار)

مثال2: مؤسسة تجارية ترغب في تخصيص عدد من العمال لإنجاز عدد من الوظائف، فإذا كان عدد العمال أربعة وكانت الأرباح الناتجة عن قيام العمال بالوظائف هي كالتالي :

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	6	15	4	5
B	9	7	6	1
C	5	11	1	7
D	14	18	9	10

المطلوب: إيجاد الحل المثالي و مجموع الأرباح لهذه المسألة؟

الحل:

- لأن المسألة تعظيم الأرباح ، لذا يتم طرح جميع الأرقام من أعلى رقم في الجدول وهو "18"

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	12	3	14	13
B	9	11	12	17
C	13	7	17	11
D	4	0	9	8

- طرح أقل رقم في كل صف لا يوجد به صفر من باقي الأرقام في الصف

الوظائف

العمـال

	1	2	3	4
A	9	0	11	10
B	0	2	3	8
C	6	0	10	4
D	4	0	9	8

- طرح أقل رقم في كل عمود لا يوجد به صفر من باقي الأرقام في العمود

الوظائف

العمـال

	1	2	3	4
A	9	0	8	6
B	0	2	0	4
C	6	0	7	0
D	4	0	6	4

- نغطي كل صف وكل عمود يحتوي على صفر بأقل عدد من المستقيمات

الوظائف

العمـال

	1	2	3	4
A	9	0	8	6
B	0	2	0	4
C	6	0	7	0
D	4	0	6	4

- وحيث أن عدد المستقيمات " الأفقية و العمودية " أقل من عدد الصفوف لذا نختار أقل رقم من الأرقام غير المغطاة وهو "4" و نطرحه من جميع الأرقام غير المغطاة و نضيفه إلى نقاط تقاطع المستقيمات ، لينتج الجدول التالي:

	1	2	3	4
A	5	0	4	2
B	0	6	0	4
C	6	4	7	0
D	0	0	5	0

الحل الأمثل هو:

- تعيين العامل (**A**) لإنجاز الوظيفة (2) .
- تعيين العامل (**B**) لإنجاز الوظيفة (3) .
- تعيين العامل (**C**) لإنجاز الوظيفة (4) .
- تعيين العامل (**D**) لإنجاز الوظيفة (1) .

مجموع الأرباح للحل المثالي "من الجدول الأصلي" هو :

15 + 6 + 7+ 14 = 42**D** (دينار)

ملاحـظة : هنا بدأنا بطرح الصفوف في البداية ومن ثم الأعمدة ، لكن إذا أخذنا الأعمدة في البداية فإن النتيجة ستكون واحدة .

III. طريقة النقل Transportation Méthode

في هذه الطريقة يتم التعامل مع مشكلة التخصيص على أنها مشكلة نقل، وتعتبر قيم العرض والطلب جميعها مساوية إلى واحد ،نجد الحل الابتدائي بأحد الطرق الثلاثة المعروضة في الفصل السابق ثم نجد الحل الأمثل.

IV. طريقة البرمجة الخطية Linear Progrramming Method

لتوضيح مشكلة التخصيص وفق أسلوب البرمجة الخطية نعتمد المثال التالي:

مثال: أوجد التخصيص الأمثل للعمال على الآلات بطريقة البرمجة الخطية؟

	1	2	3
A	9	13	7
B	14	14	6
C	10	13	8

فإذ كانت X_{ij} تمثل تخصيص العامل **i** للآلة **j** فإن نموذج البرمجة الخطية يكون بالشكل الآتي:

$$Min\ Z = 9X_{11} + 13X_{12} + 7X_{13} + 14X_{21} + 14X_{22} + 6X_{23} + 10X_{31} + 13X_{32} + 8X_{33}$$

S.t

$$9X_{11}+13X_{12}+7X_{13} = 1$$

$$14X_{21}+14X_{22}+6X_{23} = 1$$

$$10X_{31}+13X_{32}+8X_{33} = 1$$

$$9X_{11}+14X_{21}+10X_{31} = 1$$

$$13X_{12}+13X_{22}+13X_{32} = 1$$

$$7X_{13}+6X_{23}+8X_{33} = 1$$

$$X_{ij} \geq 0 \qquad i=1.2.3 \qquad j=1.2.3$$

ثانيا: مشاكل التخصيص غير متوازنة Unbalanced Problems

إذا كان عدد الأجهزة لا يساوي عدد المهام أو الوظائف، فإن مشكلة التخصيص هذه تسمى بمشكلة غير متوازنة ، ويمكن إزالة عدم التوازن هذا بإضافة صفوف وهمية أو أعمدة وهمية، كما يمكن إضافة أكثر من صف أو عمود حتى يكون عدد الصفوف مساويا إلى عدد الأعمدة.

التكاليف والأرباح الواجب وضعها في الصفوف الجديدة أو الأعمدة تحدد من طبيعة المشكلة، ففي حالة تخفيض التكاليف تكون عناصر الصف أو العمود الجديد تساوي صفر وبعد ذلك يتم إتباع خطوات الطريقة الهنغارية لإيجاد الحل الأمثل.

أما في حالة تعظيم الأرباح فإننا طرح قيم المصفوفة الأولية للأرباح من أعلى قيمة فيها ونحولها إلى المصفوفة الأولية للتكاليف، ثم بعد ذلك يتم إضافة الصف أو العمود الوهمي، ثم نتبع نفس خطوات حالة تخفيض التكاليف.

مثال: استخدم الطريقة الهنغارية لإيجاد أفضل تخصيص لعملية إنتاج ثلاثة سلع باستخدام أربعة آلات إذا علمت أن كلفة إنتاج السلعة المعنية على الآلة المعنية كما في الجدول الآتي:

السلع

الآلات

	A	B	C
1	27	43	24
2	24	50	12
3	15	40	6
4	21	46	15

الحل :

إن المصفوفة الأولية للتكاليف غير متوازنة لأن عدد الصفوف لا يساوي عدد الأعمدة و عليه لابد من إضافة عمود وهمي بكلفة إنجاز تساوي صفر، و بالتالي تصبح مصفوفة التكاليف كما يلي:

	A	B	C	D
1	27	43	24	0
2	24	50	12	0
3	15	40	6	0
4	21	46	15	0

وبالتالي أصبحت مشكلة التخصيص متوازنة، وبالتالي نطبق الطريقة الهنغارية كما يلي :

- لا حاجة لطرح أقل قيمة في كل صف لأنها تساوي الصفر.
- طرح أقل قيمة في كل عمود من جميع قيم ذلك العمود كالآتي:

	A	B	C	D
1	12	3	18	0
2	9	10	6	0
3	0	0	0	0
4	6	6	9	0

- تغطية القيم الصفرية بأقل عدد من الأصفار .

	A	B	C	D
1	12	3	18	0
2	9	10	6	0
3	0	0	0	0
4	6	6	9	0

نلاحظ أن عملية التغطية تمت بخطين فقط و الذي يعني أننا لم نصل إلى التخصيص الأمثل.

- نطور الحل بطرح أقل قيمة غير مغطاة من جميع القيم الغير المغطاة و إضافتها إلى نقاط تقاطع المستقيمات حيث أن أقل قيمة = 3

	A	B	C	D
1	9	0	15	0
2	6	7	3	0
3	0	0	0	3
4	3	3	6	0

- نكرر الخطوة 4 لتعذر تنفيذ عملية التخصيص ، باختيار أقل قيمة = 3

	A	B	C	D
1	9	0	15	3
2	3	4	0	0
3	0	0	0	6
4	0	0	3	0

في مصفوفة التكاليف الأخيرة نلاحظ أنه يمكن تغطية القيم الصفرية بأربعة خطوط عمودية وأفقية، أي أن عدد الخطوط يكون مساويا لعدد الصفوف أو الأعمدة، ولهذا يمكن إجراء عملية التخصيص كما يلي :

التكلفة	السلعة المخصصة	الآلة
43	B	1
12	C	2
15	A	3
0	D	4
70	التكاليف الكلية	

في هذا التخصيص تكون الآلة 4 معطلة عن العمل .

التكلفة	السلعة المخصصة	الآلة
43	B	1
0	D	2
6	C	3
21	A	4
70	التكاليف الكلية	

وفي هذا التخصيص تكون الآلة 2 معطلة عن العمل .

ثالثا: عدم قبول التخصيص Handling Unacceptable Assignment

في بعض مشاكل التخصيص نلاحظ عدم إمكانية تخصيص أحد الأقسام لإنتاج سلعة معينة مثلا أو كان لا يمكن تخصيص عامل معين إلى الآلة معينة لاعتبارات مانعة.

سبق وتعرفتم على المتغيرات الاصطناعية في البرمجة الخطية وعالجنا ضمان عدم ظهورها في الحل الأمثل وذلك بإعطاء تكاليف عالية جدا لمشاكل الحد الأدنى ، وأرباح قليلة جدا لمشاكل الحل الأعلى، أما في حالة عدم قبول التخصيص ولكي نتجنب عملية التخصيص الخاطئة، يمكن استخدام نفس الطريقة (الأسلوب) حيث تتضمن مصفوفة التكاليف الأولية **M+** في الأماكن محظورة التخصيص، بينما تتضمن مصفوفة الأرباح الأولية **M–** وعند تحويل مصفوفة الأرباح الأولية إلى مصفوفة تكاليف أولية فإن **M–** تتحول إلى **M+** .

مثال: أردنا في شركة صناعية تعيين أربعة عمال على أربع آلات بحيث أن العامل الأول لا يستطيع تشغيل الآلة الرابعة و العامل الثالث لا يستطيع تشغيل الآلة الثانية ، وكانت تكلفة تعيين كال عامل على كل من هذه الآلات كما في الجدول التالي:

	1	2	3	4
A	5	0	3	M
B	2	3	2	0
C	3	M	0	0
D	0	8	0	2

المطلوب: أوجد أفضل تخصيص باستخدام الطريقة الهنغارية؟

الحل:

نضع قيمة الكلفة **M** في الخلايا التي لا يمكن إجراء التخصيص فيها و بتطبيق الخطوة الأولى من خطوات الطريقة الهنغارية (طرح الصفوف) تصبح مصفوفة التكاليف كما يلي:

أيضا نلاحظ أن مصفوفة التكاليف هذه تحتوي على صفر في كل عمود لذلك لا داعي لتطبيق الخطوة الثانية (طرح الأعمدة) لذلك نغطي القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من المستقيمات فيكون عدد المستقيمات مساويا لعدد الصفوف و تكون عملية التخصيص كما يلي:

	1	2	3	4
A	5	0	3	M
B	2	3	2	0
C	3	M	0	0
D	0	1	0	2

العامل **A** ⟵ الآلة 2

العامل **B** ⟵ الآلة 4

العامل **C** ⟵ الآلة 3

العامل **D** ⟵ الآلة 1

والتكاليف الكلية تكون

$3+8+3+7 = 21$

رابعا: مشاكل التخصيص بوجود قيم سالبة (مسالة مختلطة بين الأرباح والخسائر)

في بعض الحلات ونحن نشكل جدول نموذج التخصيص نجد أنفسنا أمام مسألة بها أعداد سالبة وأخرى موجبة، بمعنى أن الأعداد السالبة تمثل الخسائر أو التكاليف أما الأعداد الموجبة فهي العوائد أو الأرباح، ونحن في ما سبق تطرقنا إلى أن الجدول إما يكون أرباح أو أرقامه كلها تكاليف، لذلك سمينا هذه الحالة بالمشاكل المختلطة لأنها تجمع الارباح والتكاليف في نفس الجدول.

في مثل هذه المسائل فإنه وقيل البدء في عملية الحل بأحد الطرق المدروسة سابقا يجب تعديل الجدول من أجل تسهيل الحل، وذلك عن طريق إضافة القيمة المطلقة لأكبر عدد سالب (أقل قيمة) في الجدول، فنتحصل على جدول قيمه كلها موجبة ونقوم بالحل بإحدى الطرق التي يطلبها منا، مع

العلم أن الجدول المتحصل عليه هو جدول أرباح، لأن القيم السالبة والتي تمثل التكاليف لم تعد موجودة.

مثال: يريد أحد الأشخاص أن يستثمر أربعة مبالغ مالية على أربعة مشاريع استثمارية، على أن يخصص كل مبلغ على مشروع واحد فقط، بعد دراسة جدوى المشاريع تبين للمستثمر أن هناك امكانيات مختلفة للربح والخسارة في بعض الأحيان، وتقدر بآلاف الوحدات النقدية كما هي موضحة في الجدول التالي:

	المشروع 1	المشروع 2	المشروع 3	المشروع 4
المبلغ 1	6	10	-12	4
المبلغ 2	10	-7	2	10
المبلغ 3	4	8	13	14
المبلغ 4	2	4	-8	6

الحل:

- بما أن أقل قيمة في الجدول (12-) وهي أكبر قيمة سالبة، فإننا نضيف قيمة (12) لجميع عناصر المصفوفة، فتصبح كما يلي:

	المشروع 1	المشروع 2	المشروع 3	المشروع 4
المبلغ 1	18	22	0	16
المبلغ 2	22	5	14	22
المبلغ 3	16	20	25	26
المبلغ 4	14	16	4	18

- الجدول المتحصل عليه هو جدول أرباح وبما أننا سنقوم بالحل بالطريقة المجرية (الهنقارية) فأننا نحوله إلى جدول تكاليف وذلك بطرح أكبر قيمة في الجدول (26) من جميع القيم فنتحصل على الجدول التالي:

	المشروع 1	المشروع 2	المشروع 3	المشروع 4
المبلغ 1	8	4	26	10
المبلغ 2	4	21	12	4
المبلغ 3	10	6	1	0
المبلغ 4	12	10	22	8

- طرح الأعمدة: نطرح أقل قيمة في كل عمود على باقي قيم العمود، فنتحصل على الجدول التالي:

	المشروع 1	المشروع 2	المشروع 3	المشروع 4
المبلغ 1	4	0	25	10
المبلغ 2	0	17	11	4
المبلغ 3	6	2	0	0
المبلغ 4	8	6	21	8

- طرح الصفوف: نطرح أقل قيمة في كل صف على باقي قيم الصف، فنتحصل على الجدول التالي:

	المشروع 1	المشروع 2	المشروع 3	المشروع 4
المبلغ 1	4	0	25	10
المبلغ 2	0	17	11	4
المبلغ 3	6	2	0	0
المبلغ 4	2	0	15	2

- تغطية الاصفار: في الجدول السابق نغطي الاصفار بأقل عدد ممكن من المستقيمات.

- بعد تغطية الاصفار نلاحظ أن عدد المستقيمات المغطى بها تساوي (3) وعدد المبالغ أو المشاريع تساوي (4)، وبالتالي لم نصل للحل الامثل لأن (4≠3)، وبالتالي نضيف خطوة أخرى وهي بطرح أقل قيمة غير مغطاة في الجدول السابق (2) من باقي القيم ونضيفها إلى نقاط تقاطع المستقيمات، وباقي القيم تبقى على حالها، فنتحصل على الجدول التالي:

	المشروع 1	المشروع 2	المشروع 3	المشروع 4
المبلغ 1	4	0	23	8
المبلغ 2	0	17	9	2
المبلغ 3	8	4	0	0
المبلغ 4	2	0	13	0

- من خلال الجدول الأخير نلاحظ أن عدد المستقيمات المغطى بها تساوي (4)، وعدد المبالغ والمشاريع تساوي (4)، وبالتالي فلقد وصلنا إلى الحل الأمثل لأن (4=4)، ويمكن تخصيص المبالغ على المشاريع عند القيم الصفرية (0) في الجدول كما يلي:
- وبالتالي التخصيص الأولي يكون كالآتي:
  - المبلغ 1 ⟵ المشروع 2
  - المبلغ 2 ⟵ المشروع 1
  - المبلغ 3 ⟵ المشروع 3 أو ~~المشروع 4~~
  - المبلغ 4 ⟵ ~~المشروع 2~~ أو المشروع 4
- وبالتالي التخصيص الأمثل يكون كالآتي:
  - المبلغ 1 ⟵ المشروع 2
  - المبلغ 2 ⟵ المشروع 1
  - المبلغ 3 ⟵ المشروع 3
  - المبلغ 4 ⟵ المشروع 4

أما العوائد الناجمة عن هذا التخصيص نستخرجها من الجدول الأول الذي يحتوي على الأرباح والتكاليف، وهذه العوائد الناجمة عن هذا الاستثمار هي كالآتي:

$$10000+10000+13000+6000=39000$$ وحدة نقدية

تطبيقات

التمرين رقم (01): إذا كان لدينا مصنع أربع آلات وثلاثة عمال فنيين للعمل على هذه الآلات الأربعة، والجدول التالي يعطي إنتاج كل عامل على كل آلة من هذه الآلات:

		الآلات			
		1	2	3	4
العمال	A	10	15	12	20
	B	17	13	18	10
	C	7	9	11	9

المطلوب: ما هي الآلة التي يجب أن لا تعمل ليعطي النموذج أعلى إنتاج ممكن، وما هو هذا الإنتاج مستخدما الطريقة المجرية ؟

الحل:

لدينا في التمرين جدول أرباح غير متوازن وبالتالي نحوله إلى جدول تكاليف عن طريق طرح أكبر قيمة من الجدول وهي(20) من باقي القيم نتحصل على:

		الآلات			
		1	2	3	4
العمال	A	10	5	8	0
	B	3	7	2	10
	C	13	11	9	11

ثم نضيف عامل وهي(D) بتكاليف صفرية(0) من أجل موازنة المشكل:

10	5	8	0
3	7	2	10
13	11	9	11
0	0	0	0

- طرح الأعمدة:

يبقى نفس الجدول لأن الأعمدة كلها فيها قيمة (0) لأننا سنأخذ أقل قيمة في كل عمود وننقصها من بقية القيم وبالتالي يبقى نفس الجدول(لا يتغير).

- طرح الأسطر(الصفوف)

نأخذ أقل قيمة في كل صف وننقصها من باقي القيم نتحصل على الجدول التالي:

10	5	8	0
1	5	0	8
4	2	0	2
0	0	0	0

- تغطية الأصفار: بأقل عدد ممكن من المستقيمات،

بعد التغطية في الجدول السابق نلاحظ أن عدد المستقيمات المغطى بها (3) وعدد الصفوف والأعمدة (4)، (3 ≠4)، وبالتالي لم نصل إلى الحل الأمثل نضيف خطوة أخرى وهي بأخذ أقل قيمة غير مغطاة (1) وننقصها من باقي القيم الغير مغطاة، ونضيفها إلى نقاط تقاطع المستقيمات، وباقي القيم لا تتغير، فنتحصل على الجدول التالي:

	1	2	3	4
A	10	5	9	0
B	0	4	0	7
C	3	1	0	1
D	0	0	1	0

بما أن عدد المستقيمات المغطى بها يساوي عدد الصفوف والأعمدة(4=4) فإننا وصلنا إلى الحل الأمثل ونضع التخصيص الأولي مكان الأصفار التي في الجدول:

- ✓ التخصيص الأولي

العامل A ⟵ الآلة 4

العامل B ⟵ الآلة 1 و ~~3~~

العامل C ⟵ الآلة 3

العامل D ⟵ الآلة ~~1~~ و 2 و ~~4~~

- ✓ التخصيص الأمثل

العامل A ⟵ الآلة 4

العامل B ⟵ الآلة 1

العامل C ⟵ الآلة 3

العامل D ⟵ الآلة 2

الآلة التي تعمل هي الآلة 2 لأن (العامل D) هو عامل وهمي غير موجود استعننا به من أجل موازنة المشكلة فقط.

والإنتاج الأمثل TP هو:(نستخرجه من الجدول الأول في التمرين الأصلي)

$TP=20+17+11+0=48$ وحدة

التمرين رقم (02): طلب من مدير مصنع أن يخصص صناعة أربعة أنواع من المنتجات على أربعة أقسام بسبب اختلاف التجربة وعبء العمل، يمكن للأقسام المختلفة إنتاج المنتجات الجديدة بكميات مختلفة والجدول أدناه يبين كمية الإنتاج اليومية لكل نوع من المنتجات في كل قسم من

الأقسام، فما هو التخصيص الأمثل للمنتجات الجديدة بحيث تزيد الإنتاج اليومي الكلي إلى أعلى حد مستخدما الطريقة الهنغارية؟

المنتجات

		A	B	C	D
الأقسام	1	90	65	125	90
	2	100	90	160	100
	3	110	70	140	120
	4	85	60	100	75

الحل:

بما أن الجدول هو أرباح(إنتاج) نحوله إلى تكاليف بإنقاص أكبر قيمة (160) من بقية القيم:

	A	B	C	D
1	70	95	35	70
2	60	70	0	60
3	50	90	20	40
4	75	100	60	85

- طرح الأعمدة

20	25	35	30
10	0	0	20
0	20	20	0
25	30	60	45

- طرح الصفوف

0	5	15	10
10	0	0	20
0	20	20	0
0	5	35	20

- تغطية الأصفار: بعد التغطية نجد أن المستقيمات المغطى بها (3) وعدد الصفوف والأعمدة (4)، ($3\neq4$)، وبالتالي لم نصل إلى الحل الأمثل نضيف خطوة أخرى وهي بأخذ أقل قيمة غير مغطاة (1) وننقصها من باقي القيم الغير مغطاة، ونضيفها إلى نقاط تقاطع المستقيمات، وباقي القيم لا تتغير، فنتحصل على الجدول التالي:

	A	B	C	D
1	0	0	10	10
2	15	0	0	25
3	0	15	15	0
4	0	0	30	20

بما أن عدد المستقيمات المغطى بها 4 وعدد الصفوف والأعمدة 4، ($4=4$) إذن وصلنا إلى الحل الأمثل ونقوم بالتخصيص الأولي ثم نستخرج التخصيص الأمثل.

التخصيص الأولي

القسم1 ⟵ المنتج A، B

القسم2 ⟵ المنتج B، C

القسم3 ⟵ المنتج A، D

القسم4 ⟵ المنتج A، B

من خلال التخصيص الاولي نلاحظ أن هناك أكثر من تخصيص، وهما كما يلي:

✓ التخصيص الأول:

القسم 1 ⟵ المنتج A

القسم2 ⟵ المنتج C

القسم 3 ⟵ المنتج D

القسم 4 ⟵ المنتج B

TP=90+160+120+60=430وحدة

✓ التخصيص الثاني:

القسم1 ⟵ المنتج B

القسم 2 ⟵ المنتج C

القسم3 ⟵ المنتج D

القسم 4 ⟵ المنتج A

TP=65+160+120+85=430 وحدة

في هذه الحالة لدينا تخصيصين اثنين وكلاهما نصل إلى أقصى إنتاج ممكن وهو 430 وحدة.

التمرين رقم (03): في مكتب قانوني لتدقيق الحسابات هناك أربع مجاميع تدقيق، وكانت هناك أربع شركات يجب تدقيق حساباتها بسرعة لمعرفة مركزها المالي في سوق الأوراق المالية وكان الوقت اللازم لتدقيق كل مجموعة كما هو في الجدول الآتي:

الشركات

المجاميع		الشركة 1	الشركة2	الشركة3	الشركة4
	المجموعةA	27	18	19	21
	المجموعةB	18	15	16	19
	المجموعةC	19	17	18	15
	المجموعةD	20	23	15	24

المطلوب: إجراء التخصيص الأمثل لتخفيض فترة التدقيق أقل ما يمكن باستخدام الطريقة الهنغارية؟

الحل:

الجدول في هذا التمرين هو عبارة عن جدول تكاليف لأنه يمثل الوقت وبالتالي نبدأ بالخطوات مباشرة.

- طرح الأعمدة:

9	3	4	6
0	0	1	4
1	2	3	0
2	8	0	9

- طرح الصفوف:

	ش1	ش2	ش3	ش4
م A	6	0	1	3
م B	0	0	1	4
مC	1	2	3	0
م D	2	8	0	9

تغطية الأصفار: بما أن عدد المستقيمات المغطى بها تساوي عدد الصفوف والاعمدة (4=4)، فيعنني أننا وصلنا إلى الحل الأمثل ونبدأ عملية التخصيص.

- التخصيص الأولي

المجموعة A ⟵ الشركة 2

المجموعة B ⟵ الشركة 1أو ~~2~~

المجموعة C ⟵ الشركة 4

المجموعة D ⟵ الشركة 3

✓ التخصيص الأمثل

المجموعة A ⟵ الشركة 2

المجموعة B ⟵ الشركة 1

المجموعة C ⟵ الشركة 4

المجموعة D ⟵ الشركة 3

التكاليف $TC= 18+18+15+15= 66$ وحدة زمنية

التمرين رقم (04): في جدول التخصيص التالي:

	1	2	3	4
A	2	3	7	8
B	1	5	6	2
C	4	2	9	7
D	9	8	1	10

المطلوب: استخدم طريقة النقل في إيجاد اقل التكاليف، (طريقة فوجل، والمسار المتعرج)

الحل:

بالنسبة لطريقة النقل نحول جدول التخصيص إلى جدول نقل بإضافة قيم العرض والطلب كما يلي:

	1	2	3	4	العرض	الفرق1	الفرق2	الفرق3
A	2 1	3 0	7 /	8 /	~~1~~ 0	1	1	1
B	1 0	5 /	6 /	2 1	~~1~~ 0	1	1	X
C	4 0	2 1	9 /	7 /	~~1~~ 0	1	2	2 4
D	9 /	8 /	1 1	10 /	~~1~~ 0	7	X	X
الطلب	~~1~~ 0	~~1~~ 0	~~1~~ 0	~~1~~ 0	4/4			
الفرق1	1	1	5	5				
الفرق2	1	1	X	5				
الفرق3	2 4	1	X	X				

- نقوم بالحل الأولي لطريقة فوجل:

- لدينا شرط التوازن محقق لأن مجموع العرض يساوي مجموع الطلب.

العرض=4

الطلب=4

محقق

- التأكد من الحل الأمثل بطريقة المسار المنعرج

نتحقق من شرط عدم التفكك: عدد الأسطر + عدد الأعمدة−1=7

عدد الخلايا المشغولة=4

غير محقق

الشرط غير محقق ($7\neq4$) وبالتالي نضيف الخلايا(03) الفارغة والتي لديها أقل تكلفة ونشغلها بقيمة(0) حتى لا يتأثر الحل الأولي(أنظر الجدول النقل السابق) .

- نشكل مسار مغلق لكل خلية فارغة ونحسب التكاليف الغير مباشرة

التكلفة غير المباشرة	الخلية الفارغة	التكلفة غير المباشرة	الخلية الفارغة
7-4+1-2=2	(C-4)	لا يوجد لديها مسار	(A.3)
لا يوجد لديها مسار	(D.1)	+8-2+1=5	(A.4)
لا يوجد لديها مسار	(D.2)	5-1+2-3=3	(B.2)
لا يوجد لديها مسار	(D.4)	لا يوجد لديها مسار	(B.3)
		لا يوجد لديها مسار	(C.3)

بما أن جميع الخلايا التي لديها مسار موجبة (الخلايا التي ليس لديها مسار لا تدخل في الحل) فإننا وصلنا إلى الحل الأمثل والتخصيص يكون مكان الخلايا المشغولة.

التخصيص الأمثل:

$A \longrightarrow 1$

$B \longrightarrow 4$

$C \longrightarrow 2$

$D \longrightarrow 3$

وحدة نقدية $TC=2+2+2+1=7$ إجمالي التكاليف

التمرين رقم (05): في شركة صناعية إذا أردنا تعيين أربعة عمال على أربع آلات بحيث أن العامل الأول لا يستطيع تشغيل الآلة الرابعة والعامل الثالث لا يستطيع تشغيل الآلة الثانية وكانت تكلفة كل عامل على كل آلة معطاة في الجدول التالي:

الآلات

		الآلة1	الآلة2	الآلة3	الآلة4
العمال	أحمد	20	50	30	/
	علي	40	20	30	70
	مُحَمَّد	20	/	50	60
	عثمان	30	50	40	10

المطلوب: أوجد التخصيص الأمثل بإستخدام الطريقة المجرية؟

الحل:

بالنسبة لعدم قبول التخصيص فإننا نضع قيمة كبيرة جدا لأن الجدول هو مشكل تكلفة، أو لا نستخدم الخلية أصلا(المهم نضمن عدم ظهور الصفر في الخلايا الغير قابلة للتخصيص).

- نقوم بطرح الأعمدة:

	الآلة 1	الآلة 2	الآلة3	الآلة4
أحمد	0	30	0	/
علي	20	0	0	60
مُحَمَّد	0	/	20	50
عثمان	10	30	10	0

- طرح الأسطر: يبقى نفس الجدول لأن جميع الأسطر بها أصفار.
- تغطية الأصفار: بما أن عدد المستقيمات المغطى بها هو (4) وعدد الصفوف والأعمدة(4) إذن وصلنا إلى الحل الأمثل.

التخصيص الأولي:

أحمد ⟵ الآلة ~~1~~ و3

علي ⟵ الآلة 2 و~~3~~

محمد ⟵ الآلة 1

عثمان ⟵ الآلة 4

التخصيص الأمثل

أحمد ⟵ الآلة 3

علي ⟵ الآلة 2

محمد ⟵ الآلة 1

عثمان ⟵ الآلة 4

التكلفة الاجمالية $TC = 30+20+20+10=80$ وحدة نقدية

التمرين رقم (06): مؤسسة للنقل تملك ثلاث حافلات مختلفة الحمولة تريد تخصيصها لنقل ركاب ثلاثة أحياء مختلفة، الدراسة الأولية بينت لها أنه وفقا للتعريفة الجاري العمل بها ووفقا لحجم حركة الركاب فإن الأرباح التي يمكن جنيها من جراء تخصيص كل حافلة لكل حي موضحة كما يلي:

الأحياء / الحافلات	08 ماي	18 فيفري	20 أوت
A	72	24	56
B	48	56	40
C	64	32	40

المطلوب: أوجد التخصيص الذي يسمح للمؤسسة بالحصول على أعلى الأرباح بالطرق الأربع المدروسة سلفا؟

الحل:

المطلوب في هذا التمرين حل المثال بجميع الطرق الأربعة المدروسة سابقا وهي كما يلي:

1. الحل بطريقة العد الكامل:

- التحقق من شرط التوازن: عدد الصفوف والأعمدة=3 وبالتالي مشكل التخصيص متوازن.

– نعد الآن جميع البدائل الممكنة وعددها: ! 3

$3!=3\times2\times1=6$ بدائل

البدائل	الوصف	إجمالي الأرباح
1	A1 B2 C3	72+56+40=168
2	A1 B3 C2	72+40+32=144
3	A2 B1 C3	24+48+40=112
4	A2 B3 C1	24+40+64=128
5	A3 B1 C2	56+48+32=136
6	A3 B2 C1	56+56+64=176

نلاحظ أن أكبر ربح هو البديل رقم 6 بتقدير 176 وحدة وهذا التخصص هو:

الحافلة A ⟵ حي 20 أوت

الحافلة B ⟵ حي 18فيفري

الحافلة C ⟵ حي 08 ماي

TB =176وحدة نقدية

2. الحل بالطريقة المجربة (الهنغارية):

وذلك بإتباع الخطوات التالية:

- تحويل جدول الأرباح إلى جدول تكاليف: يجب أن نحول الجدول إلى تكاليف وذلك لأن الطريقة الهنغارية تتطلب ذلك، وذلك بطرح (72) من جميع القيم.

0	48	16
24	16	32
8	40	32

- طرح الأعمدة:

0	32	0
24	0	16
8	24	16

- طرح الأسطر:

	08 ماي	18 فيفري	20 أوت
الحافلةA	0	32	0
الحافلة B	24	0	16
الحافلة C	0	16	8

- تغطية الأصفار: بما أن عدد المستقيمات المغطى بها تساوي عدد الصفوق والاعمدة ،فهذا يعني أننا وصلنا إلى الحل الأمثل ونقوم بعملية التخصيص

التخصيص الأولي:

الحافلة A ⟵ ~~8 ماي~~، 20 أوت

الحافلة B ⟵ 18 فيفري

الحافلة C ⟵ 08 ماي

✓ التخصيص الأمثل:

الحافلة A ⟵ حي 20 أوت

الحافلة B ⟵ حي 18 فيفري

الحافلة C ⟵ حي 08 ماي

إجمالي الأرباح TB=56+56+64=176 وحدة نقدية

3. الحل بطريقة النقل:

- نحول جدول الارباح إلى جدول تكاليف:

بالنسبة لمشاكل النقل تعاملنا فقط مع التكاليف وبالتالي نحول جدول الأرباح إلى تكاليف وذلك بإنقاص قيمة (72) من باقي القيم فنتحصل على الجدول التالي:

0	48	16
24	16	32
8	40	32

- نحول جدول التخصيص إلى جدول نقل: وذلك بإضافة العرض والطلب ونحل بطريقة النقل (فوقل للحل الأولي والمسار المتعرج للحل الأمثل).

بما أنه لم يطلب بأي طرف النقل نعالج المشكل فإننا سنختار طريقة فوجل للحل الأولي (لأنها الأقرب لإيصالنا إلى الحل الأمثل) ثم نتأكد من الحل الأمثل بطريقة المسار المتعرج لأنها أسهل (عدد الخطوات أقل).

- في البداية نتحقق من شرط التوازن:

$$\left.\begin{array}{r}\text{مجموع العرض}=3\\ \text{مجموع الطلب}=3\end{array}\right\} \text{محقق}$$

	1	2	3	العرض	الفرق1	الفرق2
A	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{48}$ /	$\boxed{16}$ 1	~~1~~ 0	16	16
B	$\boxed{24}$ 0	$\boxed{16}$ 1	$\boxed{32}$ /	~~1~~ 0	8	X
C	$\boxed{8}$ 1	$\boxed{40}$ /	$\boxed{32}$ /	~~1~~ 0	24	24
الطلب	0 ~~1~~	0 ~~1~~	0 ~~1~~	4/4		
الفرق1	8	24	16			
الفرق2	8	X	16			

- قبل بداية البحث عن الحل الأمثل نتأكد من شرط عدم التفكك

عدد الأسطر + عدد الأعمدة-1= 5

عدد الخلايا المشغولة= 3

غير محقق

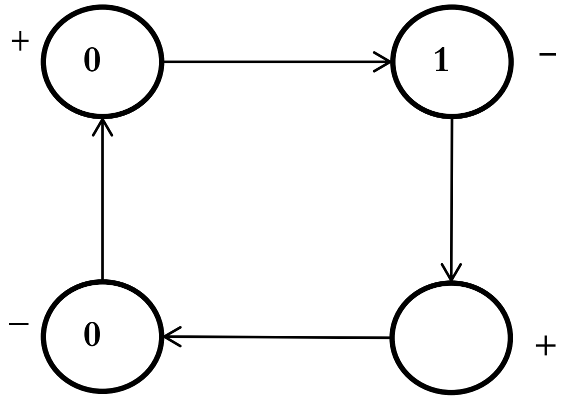
لدينا 5≠3 وبالتالي شرط عدم التفكك غير محقق، ومن أجل تحقيقه نضيف للخليتين التي لها أقل تكلفة قيمة(0) ونعتبرها مشغولة ليتحقق شرط عدم التفكك وفي نفس الوقت لا يتأثر الحل الأولي لأننا أضفنا قيمة صفر(0).

نقوم بحساب التكلفة الغير مباشرة للخلايا الفارغة لغرف الحل الأمثل

الخلية الفارغة	التكلفة الغير مباشرة
(18 فيفري، الحافلة A)	+48-16+24-0=56
(20 أوت، الحافلة B)	32-24+0-16=8-
(18 فيفري، الحافلة C)	40-8+24-16=40
(20 أوت، الحافلة C)	32-8+0-16=8

بما أن التكاليف الغير مباشرة للخلايا الفارغة التي تم حسابها وجدنا أن الخلية(20 أوت،B) لديها إشارة سالبة(-8) وبالتالي ندخلها في الحل من أجل تحسين الحل

بالنسبة لإشغال الخلية الفارغة فإننا سنختار أقل قيمة من القيم للخلايا(−) فنجدها(0) وبالتالي القيم لا تتغير والحل يبقى نفسه كما يلي:



و التخصيص يكون في الخلايا المشغولة(1) كالتالي:

الحافلة A ⟵ حي 20 أوت

الحافلة B ⟵ حي 18 فيفري

الحافلة C ⟵ حي 08 ماي

إجمالي الأرباح $TB=56+56+64=176$وحدة نقدية

4. طريقة البرمجة الخطية: وهي طريقة غير عملية بالنسبة لمشاكل التخصيص وبالتالي سنكتفي بكتابة البرنامج الخطي للمشكلة فقط.

فإذا كانت X_{ij} تمثل تخصيص الحافلة i للحي j فإن نموذج البرمجة الخطية يكون بالشكل الآتي:

$$\text{Max } Z = 72X_{11} + 24X_{12} + 56X_{13} + 48X_{21} + 56X_{22} + 40X_{23} + 64X_{31} + 32X_{32} + 40X_{33}$$

S.t

$$\begin{cases} 72X_{11}+24X_{12}+56X_{13} = 1 \\ 48X_{21}+56X_{22}+40X_{23} = 1 \\ 64X_{31}+32X_{32}+40X_{33} = 1 \\ 72X_{11}+48X_{21}+64X_{31} = 1 \\ 24X_{12}+56X_{22}+32X_{32} = 1 \\ 56X_{13}+40X_{23}+40X_{33} = 1 \end{cases}$$

$X_{ij} \geq 0 \quad i=1.2.3 \quad j=1.2.3$

وعند حل هذا البرنامج بطريقة (simplex, big M) نتحصل على نفس التخصيص ونفس النتائج المتحصل عليها في الطرق الثلاثة السابقة، وهي الملاحظة التي يجب التنويه لها بأن الحل الأمثل بجميع الطرق يبقى نفسه ويكون دائما له نفس النتيجة وهي في هذا التمرين 176 وحدة نقدية مهما كانت طريقة الحل.

المحاضرة الرابعة

برمجة الأعداد الصحيحة

بعض المتغيرات الاقتصادية الخاصة بالكميات (الفيزيائية) لا يمكن تجزئتها، وإلا فقدت صفتها، فعندما نكون مثلا بصدد تحديد كميات الإنتاج اليومي لأجهزة التلفاز لمصنع معين ونقول 40.66 تلفاز، فالجهاز يجب أن يكون وحدة كاملة فنقول أن الإنتاج اليومي يجب أن يكون 40 تلفاز أو 41 تلفاز.

وفي البرامج الخطية كثيرا ما يعطينا الحل الأمثل قيمها بالفاصلة وهو ما أدى إلى البحث إلى التخلص من هذا المشكل، وهو ما يعرف ببرمجة الأعداد الصحيحة .

فبرمجة الأعداد الصحيحة هي طريقة من طرف البرمجة الخطية تقتضي البحث عن الحل الأمثل للبرامج الخطية بحيث يحتوي الحل الأمثل على متغيرات قيمها أعداد صحيحة ويتطلب ذلك المرور بعدة مراحل:

أولا: المرحلة الأولى

إيجاد الحل الأمثل وفق البرنامج الأصلي، إذ حصل حل أمثل متغيراته صحيحة فذلك هو المطلوب، أما إذا حصل حل أمثل قيمة غير صحيحة ننتقل إلى المرحلة الثانية.

ثانيا: المرحلة الثانية

وهناك طريقتان للحل هما:

- الطريقة البيانية
- طرية البرمجة الخطية

وسنتطرق إليهما تباعا في النقاط التالية:

I. الطريقة البيانية:

وهناك طريقتين

- طريقة المستوى القاطع لجوري Geomory's Cutting plane Method
- طريقة الحد و الفرع Branch and Bound Method

1- طريقة المستوى القاطع :

وتعتمد على الخطوات التالية:

أ- نجد الحل الأمثل بطريقة الرسم البياني و تحديد منطقة الحل و نقطة الحل الأمثل .

ب- نعمل قاطع لـ X_2 عند أقرب عدد صحيح لنقطة الحل .

ت- نعمل قاطع آخر لـ X_1 عند أقرب عدد صحيح لنقطة الحل .

مثال 1: حل نموذج البرمجة بأعداد صحيحة التالي:

$$Max\ (Z) = 14X_1 + 16X_2$$

St :

$$4X_1 + 3X_2 \leq 12$$

$$6X_1 + 8X_2 \leq 24$$

$$X_1 , X_2 \geq 0 \quad \text{أعداد صحيحة}$$

الحل : نحول القيود إلى معادلات

- المعادلة (1): $4X_1+3X_2=12$

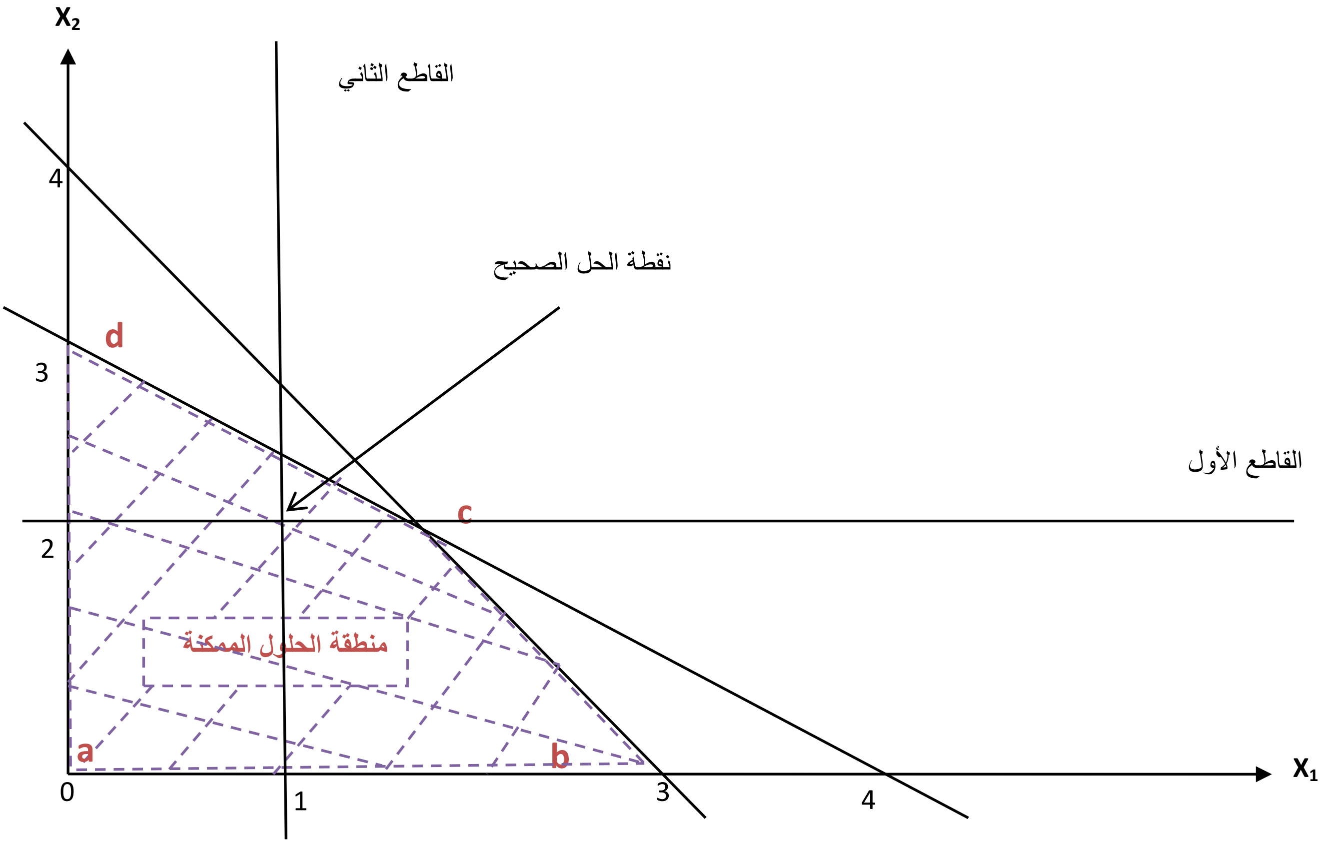
نفرض أن $X_1=0$ فنجد أن $X_2=4$ (4.0)

نفرض أن $X_1=3$ فنجد أن $X_2=0$ (0.3)

- المعادلة (2): $6X_1+8X_2=24$

نفرض أن $X_1=0$ فنجد أن $X_2=3$ (3.0)

نفرض أن $X_1=4$ فنجد أن $X_2=0$ (0.4)



نجد إحداثيات نقاط الحل :

$$(-6)[\ 4(X_1 + 3X_2 \quad = 12\ ] = -24X_1 - 18X_2 = -72$$

$$(4)[\ 6X_1 + 8X_2 \quad = 24] \ = 24X_1 + 32X_2 \ = 96$$

بالجمع $= 14X_2 = 24 \Longrightarrow X_2 = \frac{24}{14} = 1.71$

$X_1 = 1.71$ $X_2 = 1.71$

الحل	X_1	X_2	Z
A	0	0	0
B	3	0	42
C	1.71	1.71	51.3
D	0	3	48

الحل الأمثل

وبالتالي يكون الحل الأمثل الصحيح (بأعداد صحيحة) هو:

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = 2$$

$$Z = 46$$

مثال 02 : أوجد الحل الصحيح لنموذج البرمجة الخطية التالي :

$$Max\ Z = 7X_1 + 10X_2$$

S.T :

$$-X_1 + 3X_2 \leq 6$$

$$7X_1 + X_2 \leq 35$$

$X_1, X_2 \geq 0$: وأعداد صحيحة

الحل: تحويل القيود إلى معادلات

- المعادلة (1): $-X_1 + 3X_2 = 6$

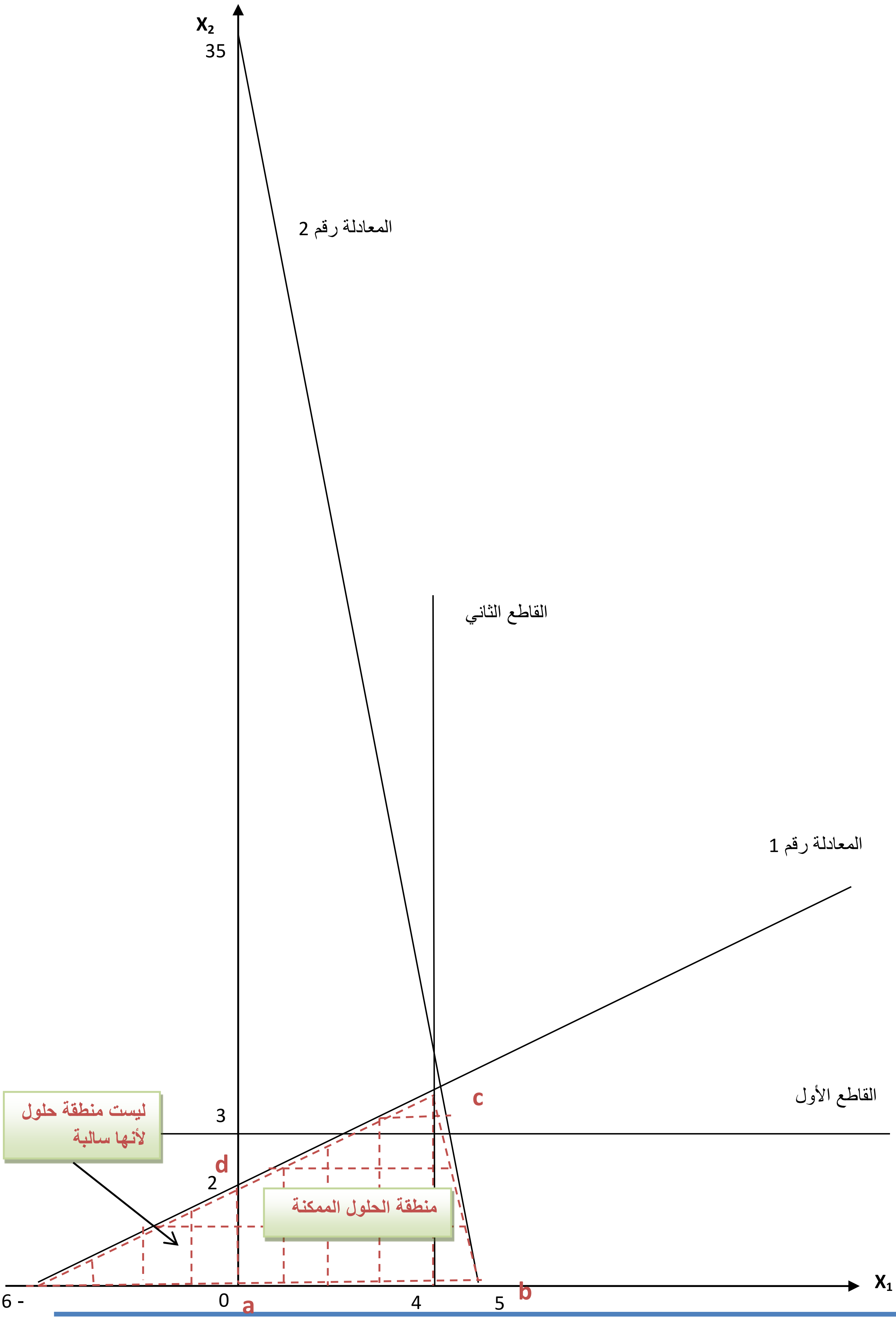
نفرض أن $X_1=0$ فنجد أن $X_2=2$ (2.0)

نفرض أن $X_1= -6$ فنجد أن $X_2=0$ $(0.-6)$

- المعادلة (2): $7X_1+ X_2 = 35$

نفرض أن $X_1=0$ فنجد أن $X_2=35$ (35.0)

نفرض أن $X_1=5$ فنجد أن $X_2=0$ (0.5)


X_2
35
المعادلة رقم 2
القاطع الثاني
المعادلة رقم 1
القاطع الأول
c
3
ليست منطقة حلول لأنها سالبة
d
2
منطقة الحلول الممكنة
X_1
6 -
0
a
4
5
b

إيجاد إحداثيات النقطة C :

نضرب المعادلة (1)×7 $(7)[-X_1+3X_2=6] \Rightarrow -7X_1+21X_2=42$ بالجمع

$$7X_1+X_2=35 \qquad 7X_1+X_2=35$$

$$22X_2=77 \Rightarrow X_2=77/22=3.5$$

$$X_1=4.5$$

$$X_2=3.5$$

$$Z=66.5$$

النقاط	X_1	X_2	Z
A	0	0	0
B	5	0	35
C	4.5	3.5	66.5
D	0	2	20

الحل الأمثل

وبالتالي يكون الحل الأمثل الصحيح (بأعداد صحيحة) هو :

$$X_1=4$$

$$X_2=3$$

$$Z=58$$

2- طريقة الحد والفرع:

للحل بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية :

أ- نجد الحل الأمثل بالطريقة البيانية.

ب- نأخذ كل أزواج النقاط الصحيحة ضمن منطقة الحل الأمثل (يمكن أخذ أقرب مربع لنقطة الحل الأمثل و ذلك للاختصار).

ت- يكون الحل لأكبر قيمة تعطي حل بأعداد صحيحة إذا كانت دالة الهدف (Max)، وأقلها إذا كانت (Min) .

مثال 01 :

أوجد حل نموذج البرمجة الصحيحة التالي:

$$Max\ Z = X_1 + 2X_2$$

S.T

$$5X_1+7X_2 \leq 35$$

$$4X_1 + 9X_2 \leq 35$$

$X_1 .X_2 \geq 0$ شرط أن تكون أعداد صحيحة

الحل :

- المعادلة (1): $5X_1 + 7X_2 = 35$

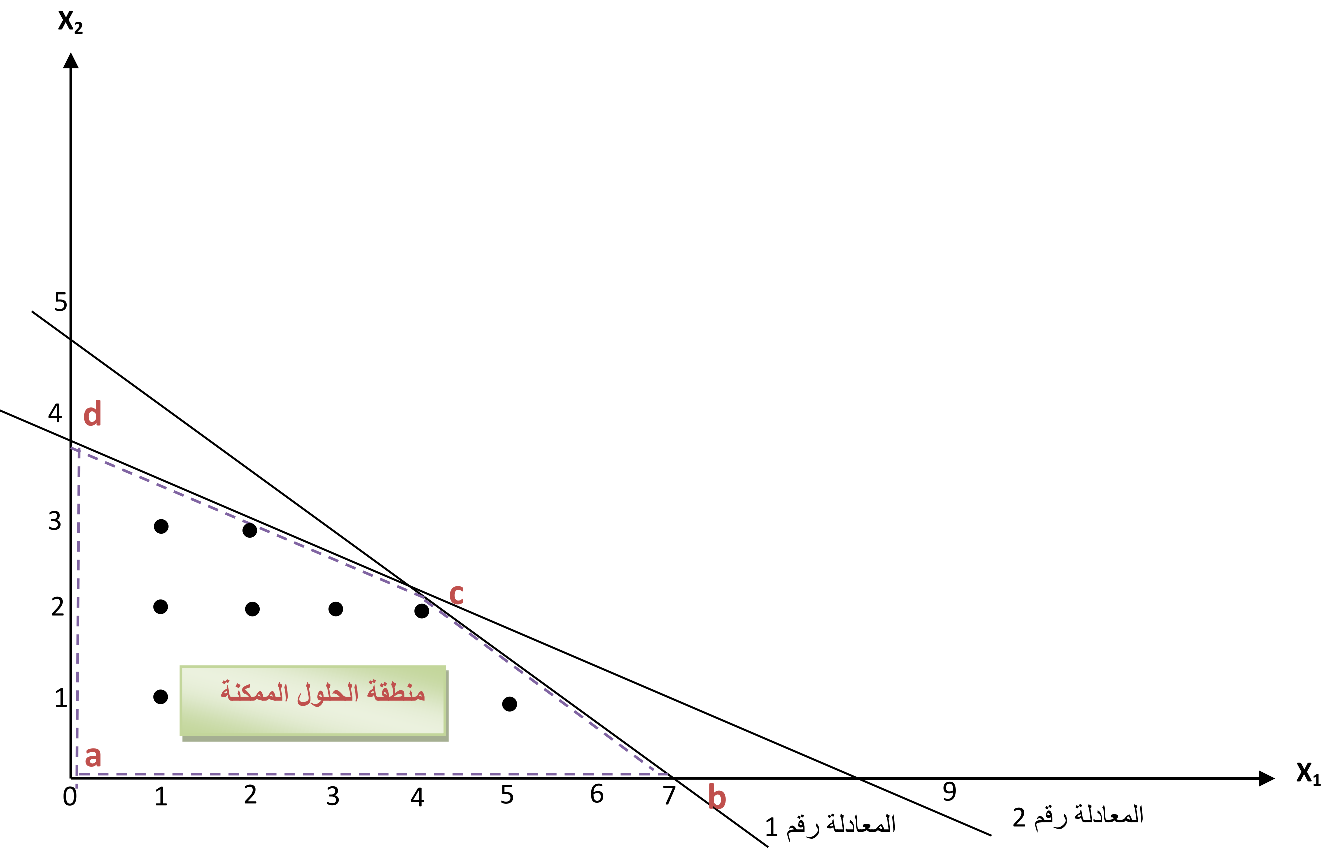
نفرض أن $X_1=0$ فنجد أن $X_2=5$ (5.0)

نفرض أن $X_1=7$ فنجد أن $X_2=0$ (0.7)

- المعادلة (2): $4X_1+9X_2 = 36$

نفرض أن $X_1=0$ فنجد أن $X_2=4$ (4.0)

نفرض أن $X_1=9$ فنجد أن $X_2=0$ (0.9)



نقاط الحل :

النقاط	X1	X2	Z
A	0	0	0
B	7	0	7
C	3.71	2.35	8.41
D	0	4	8

إيجاد النقطة C :

بالجمع $20X_1+28X_2=140 \Rightarrow (4)5X_1+7X_2=35$](4) نضرب المعادلة $(1)\times(4)$

$-20X_1-45X_2=-180 \Rightarrow (-5)4X_1+9X_2=36$ نضرب المعادلة $(2)\times(-5)$

$$17X_2=-40 \Rightarrow \quad X_2=40/17 \Rightarrow X_2=2.35$$

$$\Rightarrow X_1=3.71$$

بالإمكان أخذ كامل النقاط أو أخذ النقاط الأقرب للحل الأمثل :

$(X_1 . X_2)$	Z
(2 . 2)	Z = 6
(3 . 2)	Z = 7
(4 . 2)	Z = 8
(2 . 3)	Z = 8

وحتى النقطة (4 .0) أيضا تحقق الحل الأمثل، وعلى صاحب المشروع أن يختار لأن هذا البرنامج لديه أكثر من حل أمثل (حالة تعدد الحلول).

II. الطريقة المبسطة (simplex) (طريقة التفريع)

و تتم في مرحلة التفريغ إضافة قيود جديدة للبرنامج الأصلي ، وطبعا ذلك من أجل الحصول على حل أمثل آخر متغيراته تأخذ قيما صحيحة ، وتستمر عملية إضافة القيود لحين التوصل إلى حل أمثل جميع متغيراته صحيحة، وهناك طريقتان هما:

1. طريقة التفريع و التحديد
2. طريقة القطع

ونظرا لأن الطريقة الأولى الأكثر شيوعاً وسهولة و الأكثر استخدامًا سنقتصر عليها فقط.

1. طريقة التفريغ والتحديد

نبدأ بحل البرنامج الأصلي إذا تحصلنا على حل صحيح (متغيرات صحيحة) نتوقف ويكون ذلك هو الحل ، أما إذا كانت المتغيرات المتحصل عليها للبرنامج الأصلي ليست قيما صحيحة عندها نقوم بتوليد برنامج جديد حيث نضيف للبرنامج الأصلي قيد جديد وفق القاعدة التالية :

إذا كان المتغير في الحل الأمثل هو X_j حيث يأخذ قيمة غير صحيحة وليكن b_i ، فإنه يمكن كتابته ضمن مجال كما يلي:

$$b_{i1} < X_j < b_{i2}$$

حيث b_{i1} و b_{i2} أعداد صحيحة غير سالبة، ولتجنيب المتغير قيمة ضمن هذا المجال فإنه يتم اشتقاق قيدين جديدين هما :

$$X_j \geq b_{i2} \quad \text{و} \quad X_j \leq b_{i1}$$

ونضيف كل منهما إلى البرنامج الأصلي فنحصل على برنامجين آخرين ، نقوم بحل كل واحد منهما حلاً مستقلاً ، إذا كانت متغيرات الحل الأمثل صحيحة نتوقف ، ونأخذ الحل الذي يعطي أكبر قيمة للدالة الاقتصادية من بين الحلين في حالة التعظيم ، و أقل قيمة للدالة الاقتصادية في حالة التدنئة.

وإلا سنستمر في تفريع البرنامج الذي أعطى حل أمثل للدالة ، وهذا إلى غاية الوصول إلى حل أمثل قيم متغيراته صحيحة ، (وهذا هو التفريع).

ويمكن توضيح العملية عن طريق المخطط التالي:


البرنامج الأصلي
الخيار الأول: إذا كان حل البرنامج الأصلي أعداد صحيحة، فذلك هو المطلوب ونتوقف لأننا وصلنا إلى الحل الأمثل
الخيار الثاني: إذا كان حل البرنامج الألي أعداد غير صحيحة، فإننا نفرعه إلى برنامجين وكل برنامج نضيف له قيد حسب القاعدة المذكورة سابقا
البرنامج الفرعي رقم 1 يتكون من: البرنامج الأصلي، ونضيف له القيد من الشكل:
$X_j \leq b_{i1}$
البرنامج الفرعي رقم 2 يتكون من: البرنامج الأصلي، ونضيف له القيد من الشكل:
$X_j \geq b_{i2}$
نقوم بحل البرنامجين، إذا وجدنا أحدهما متغيراته أعداد صحيحة فنتوقف وذلك هو المطلوب، أما إذا لم نتحصل على حل بأعداد صحيحة فنستمر بتفريع البرامج على أساس القاعدة السابقة إلى أن نتوصل إلى برنامج حله الأمثل أعداد صحيحة

مثال: أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي :

$$Max\ Z = 20X_1+2X_2$$

Subject to:

$$4X1+10X_2 \leq 22$$

$X_1 \geq 0 \quad , X_2 \geq 0$ وهي أعداد صحيحة

الحل:

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$Max\ Z = 20\ X1 + 2\ X2 + 0\ S1 \qquad Z-20X_1-2X_2 = 0$

Subject to:

$$4X_1+10X_2+S_1= 22$$

$$x1\ ,\ x2,\ S1 \geq 0$$

2 – إعداد جدول الحل الأولي:

	X_1	X_2	S_1	الثابت
S_1	4	10	1	22
Z	-20	-2	0	0

العمود المحوري   العنصر المحوري   السطر المحوري

من خلال جدول الحل الأولي يظهر أن الحل ليس حل أمثل، لأننا انطلقنا من دالة تعظيم (max) وقيم دالة الهدف (Z) فيها قيم سالبة، وبالتالي يجب ادخال أحد المغيرين إلى النموذج، والقانون يقول

يجب ادخال المتغير الذي لديه أكبر قيمة سالبة، وفي هذه الحالة هو المتغير $X1$ لأن معامله في دالة الهدف (−20)، ويخرج من النموذج المتغير الوحيد $S1$.

- بالنسبة للسطر $X1$ نجده بقسمة الصف $S1$ على العنصر المحوري (4).
- أما عناصر Z الجديدة نجدها بالقاعدة التالية:

Zالجديدة = Zالقديمة − (عنصر Z الواقع في العمود المحوري) (الصف المحوري وهو صف $X1$ الجديد، أي في الجدول الثاني)

$$
\begin{array}{lcccc}
 & -20 & -2 & 0 & 0 \\
- & & & & \\
 & (-20)[(1) & 5/2 & 1/4 & 5.5] \\
= & 20 & 50 & 5 & 100 \\
\hline
 & 0 & 48 & 5 & 110
\end{array}
$$

فنتحصل على جدول الحل رقم 2 التالي:

	X_1	X_2	S_1	الثابت
X_1	1	5/2	1	5.5
Z	0	49	0	110

من خلال الجدول وبما أن قيم معاملات دالة الهدف (Z) موجبة يعني أننا وصلنا إلى الحل الأمثل، وبالتالي قيم المتغيرات ودالة الهدف كما يلي:

$$X_1 = 5.5$$

$$X_2 = 0$$

$$Z = 110$$

صحيح أن هدا هو الحل الامثل للمسألة، لكن المطلوب إيجاد المتغيرات بأعداد صحيحة، وهنا لدينا قيمة المتغير $X1$ هي 5.5 وهي عدد غير صحيح، بالتالي نذهب للخطوة الثانية وهي تفريع البرنامج الأصلي إلى برنامجين كما يلي:

نلاحظ أن : $5 < X_1 < 6$

وبالتالي استنتاج قيدين هما : $X_1 \leq 5$ $X_1 \geq 6$

وبالتالي بإضافة كل قيد للبرنامج الأصلي نحصل على برنامجين جديدين هما :

البرنامج الأول:

$$Max\ Z = 20X_1 + 2X_2$$

Subject to:

$$4X_1 + 10X_2 \leq 22$$

$$X_1 \leq 5$$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

البرنامج الثاني:

$$Max\ Z = 20X_1 + 2X_2$$

Subject to:

$$4X_1 + 10X_2 \leq 22$$

$$X_1 \geq 6$$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

هذا البرنامج متناقض، وبالتالي ليس له حل وبالتالي يتم الاستغناء عنه (في حال $X_1=6$ فقط (القيد الثاني) ، فإن القيد الأول يساوي 24 وهو يجب أن يكون 22 أو أقل).

وبالتالي نحاول إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الفرعي الأول كما يلي :

$$\text{Max } Z = 20X_1 + 2X_2$$

Subject to:

$$4X_1+10X_2 \leq 22$$

$$X_1 \leq 5$$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$\text{Max } Z = 20\,X1 + 2\,X2 + 0\,S1 + 0\,S2$ $\quad Z-20X_1-2X_2 = 0$

Subject to:

$$4X_1+10X_2+S_1= 22$$

$$X_1 + S_2 = 5$$

$$x1 , x2, S1, S2 \geq 0$$

2 – إعداد جدول الحل الأولي:

المتغير الداخل

	X_1	X_2	S_1	S_2	الثابت	
S_1	4	10	1	0	22	5.5
S_2	1	0	0	1	5	5
Z	-20	-2	0	0	0	/

العنصر المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (1) (جدول الحل الأولي) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم X1 وX2 لكن سيدخل للنموذج المتغير X1 لأن لديه أكبر قيمة سالبة (‎-20).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر الصف الداخل X1 ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير S2 من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة 5 وهي أقل من 5.5، وبالتالي يخرج S2 من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 2) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف X1 فنجدها بقسمة الصف X2 (الجدول 1) على العنصر المحوري(1) فنتحصل على عناصر السطر X1 (الجدول رقم 2)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (2).
- بالنسبة للصفوف المتبقية (S1,Z) فإننا نجدها بالقانون التالي:

العنصر الصف الجديد= العنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل)x(عناصر الصف المحوري، أي عناصر X1 في الجدول رقم 2)

وبالتالي لدينا قيم السطر S1 وقيم السطر Z وسنجدهم كما يلي:

- S1 الجديدة = S1 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S1 (4)) x (الصف المحوري X1)

$$
\begin{array}{ccccc}
4 & 10 & 1 & 0 & 22 \\
- & & & & \\
\left\{ (4)[1 \right. & 0 & 0 & 1 & \left. 5\,] \right\} \\
= 4 & 0 & 0 & 4 & 20 \\
\hline
0 & 10 & 1 & -4 & 2
\end{array}
$$

- Z الجديدة= Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z(−20)) x (الصف المحوري X1)

$$
\begin{array}{ccccc}
-20 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
- & & & & \\
\left\{ (-20)[1 \right. & 0 & 0 & 1 & \left. 5\,] \right\} \\
= -20 & 0 & 0 & -20 & -100 \\
\hline
0 & -2 & 0 & 20 & 100
\end{array}
$$

بعد حساب جميع الصفوف نتحصل على الجدول رقم (2) التالي:

الجدول رقم (02)

المتغير الخارج   المتغير الداخل

	X_1	X_2	S_1	S_2	الثابت	
S_1	0	10	1	–4	2	0.2
X_1	1	0	0	1	5	غير معرفة
Z	0	–2	0	20	100	/

الصف المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (2) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم X2 الذي سيدخل للنموذج لأنه الوحيد الذي لديه قيمة سالبة (–2).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر الصف الداخل X2 ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير S1 من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة 0.2 وهي أقل من اليمة الأخرى الغير معرفة بقسمة 5 على 0، وبالتالي يخرج المتغير S1 من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 3) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف X2 فنجدها بقسمة الصف S1 (الجدول 2) على العنصر المحوري(10) فنتحصل على عناصر السطر X2 (الجدول رقم 3)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (3).
- بالنسبة للصفوف المتبقية (X1,Z) فإننا نجدها بالقانون التالي:

العنصر الصف الجديد= العنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل)x(عناصر الصف المحوري، أي عناصر $X2$ في الجدول رقم 3)

وبالتالي لدينا قيم السطر $X1$ وقيم السطر Z وسنجدهم كما يلي:

- $X1$ الجديدة = $X1$ القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف $X1$ (0)) x (الصف المحوري $X2$)

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
- & & & & \\
(0)[0 & 1 & 0.1 & -0.4 & 0.2\,] \\
=0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 5
\end{array}
$$

- Z الجديدة= Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z(-2)) x(الصف المحوري $X2$)

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & -2 & 0 & 20 & 100 \\
- & & & & \\
(-2)[0 & 1 & 0.1 & -0.4 & 0.2\,] \\
=0 & -2 & -0.2 & 0.8 & -0.4 \\
\hline
0 & 0 & 0.2 & 19.2 & 100.4
\end{array}
$$

بعد حساب جميع الصفوف نتحصل على الجدول رقم (3) التالي:

الجدول رقم (03)

	X_1	X_2	S_1	S_2	الثابت
X_2	0	1	0.1	-0.4	0.2
X_1	1	0	0	1	5
Z	0	0	0.2	19.2	100.4

من خلال الجدول رقم (03) يظهر أنه جدول الحل النهائي لأننا وصلنا إلى الحل الأثل لأن قيم دالة الهدف (Z) كلها موجبة (أكبر من أو تساوي الصفر)، وقيم المتغيرات ودالة الهدف كما يلي:

$X_1=5$ $X_2=0.2$ $Z=100.4$

من خلال الحل يتوضح أن قيم المتغير X_2 لا تأخذ قيم صحيحة $X_2=0.2$ وبالتالي :

$$0 < X_2 < 1$$

ويمكننا أن نضيف القيود التالية للبرنامج الفرعي الأول: $X_2 \geq 1$ و $X_2 \leq 0$

وبالتالي فالبرنامج الجديدين المتفرعين عن البرنامج الفرعي الأول هما :

البرنامج الثالث:

$\text{Max } Z = 20X_1 + 2X_2$

Subject to:

$4X_1+10X_2 \leq 22$

$X_1 \leq 5$

$X_2 \geq 1$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي أعداد صحيحة

البرنامج الرابع:

$$\text{Max } Z = 20X_1 + 2X_2$$

Subject to:

$4X_1+10X_2 \leq 22$

$X_1 \leq 5$

$X_2 \leq 0$ ⟸ **هذا الشرط متناقض مع عدم السلبة**

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي أعداد صحيحة

هذا البرنامج متناقض لأن القيد الثالث ($X_2 \leq 0$) متنافي مع شرط عدم السلبة أي أن $X_2=0$ أو أقل أي سالب، وهذا منافي لأحد شروط البرمجة الخطية بحيث يجب أن المتغيرات التي نبحث عنها إما معدومة أو قيم موجبة.

وبالتالي نقوم بحل البرنامج الفرعي الثالث التالي والبحث عن الحل الأمثل:

حل البرنامج الثالث:

$$\text{Max } Z = 20X_1 + 2X_2$$

Subject to:

$4X_1+10X_2 \leq 22$

$X_1 \leq 5$

$X_2 \geq 1$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي أعداد صحيحة

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$Max\ Z = 20X_1+2X_2+0S_1+0S_2+0S_3-MA_1$$

$$\Rightarrow Max\ Z - 20X_1-2X_2+A_1M = 0$$

$$4X_1+10X_2+S_1 = 2........(1)$$

$$X_1+S_2 = 5 ....(2)$$

$$X_2-S_3+A_1= 1 ....(3)$$

من المعادلة رقم (3) نستخرج قيمة A فنجدها تساوي: $(A_1=1-X_2+S_3)$

نعوضها في دالة الهدف فنتحصل على :

$$Max\ Z - 20X_1 - 2X_2 + M(1-X_2+S_3)$$

$$Max\ Z - 20X_1 - 2X_2 + M - MX_2 + MS_3 = 0$$

$$Max\ Z - 20X_1 + X_2(-2-M) + MS_3 = -M$$

2 – إعداد جدول الحل الأولي:

المتغير الداخل

المتغير الخارج

الجدول رقم (01)

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	الثابت	
S_1	4	10	1	0	0	0	22	2.2
S_2	1	0	0	1	0	0	5	/
A_1	0	1	0	0	-1	1	1	1
Z	-20	-2-M	0	0	M	0	-M	/

العنصر المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (1) (جدول الحل الأولي) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم X1 وX2 لكن سيدخل للنموذج المتغير X2 لأن لديه أكبر قيمة سالبة (-2-2M).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر الصف الداخل X2 ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير A1 من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة 1 وهي أقل من 2.2 أما القيمة الأخرى فهي غير معرفة، وبالتالي يخرج A1 من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 2) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف X2 فنجدها بقسمة الصف A1 (الجدول 1) على العنصر المحوري وهو (1) فنتحصل على عناصر السطر X2 (الجدول رقم 2)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (2).
- بالنسبة للصفوف المتبقية (S1;S2,Z) فإننا نجدها بالقانون التالي:

عنصر الصف الجديد= عنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل)x(عناصر الصف المحوري، أي عناصر X2 في الجدول رقم (2))

وبالتالي لدينا قيم السطر S1 وقيم السطر S2 وقيم السطر Z سنجدهم كما يلي:

- S1 الجديدة = S1 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S1 (10)) x (الصف المحوري X2)
- S2 الجديدة = S2 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S2 (0)) x (الصف المحوري X2)

- Z الجديدة = Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z ‏(‎(-2-M)) x (الصف المحوري X2)

بعد القيام بجميع العمليات الحسابية الماضية نتحصل على الجدول رقم (02) التالي:

الجدول رقم (02):

المتغير الخارج ‏ المتغير الداخل

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	الثابت	
S_1	4	0	1	0	10	-10	12	3
S_2	1	0	0	1	0	0	5	5
X_2	0	1	0	0	-1	1	1	/
Z	-20	0	0	0	2+2 M	2+M	2	/

العنصر المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (2) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم X1 الذي سيدخل للنموذج لأنه الوحيد الذي لديه قيمة سالبة (-20).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر الصف الداخل X1 ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير S1 من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة (3)وهي أقل من القيمة الأخرى (5) أما بالنسبة للقيمة الأخرى فهي غير معرفة بقسمة 1 على 0، وبالتالي يخرج المتغير S1 من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 3) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف X1 فنجدها بقسمة الصف S1 (الجدول 2) على العنصر المحوري(4) فنتحصل على عناصر السطر X1 (الجدول رقم 3)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (3).
- بالنسبة للصفوف المتبقية (S2,X2,Z) فإننا نجدها بالقانون التالي:

عنصر الصف الجديد= عنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل)x(عناصر الصف المحوري، أي عناصر X1 في الجدول رقم 3)

وبالتالي لدينا قيم السطرS2 وقيم السطر X2 وقيم السطر Z سنجدهم كما يلي:

- S2 الجديدة = S2 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S2 (1)) x (الصف المحوري X1)
- X2 الجديدة = X2 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف X2 (0)) x (الصف المحوري X1)
- Z الجديدة = Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z (-20)) x (الصف المحوري X1)

بعد القيام بجميع العمليات الحسابية الماضية نتحصل على الجدول رقم (03) التالي:

الجدول رقم (03):

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	الثابت
X_1	1	0	1/4	0	10/4	-10/4	3
S_2	0	0	-1/4	1	-10/4	10/4	2
X_2	0	1	0	0	-1	1	1
Z	0	0	5	0	52+2M	-18+M	62

من خلال الجدول رقم (03) يظهر أنه جدول الحل النهائي لأننا وصلنا إلى الحل الأمثل لأن قيم دالة الهدف (Z) كلها موجبة (أكبر من أو تساوي الصفر)، وقيم المتغيرات ودالة الهدف كما يلي:

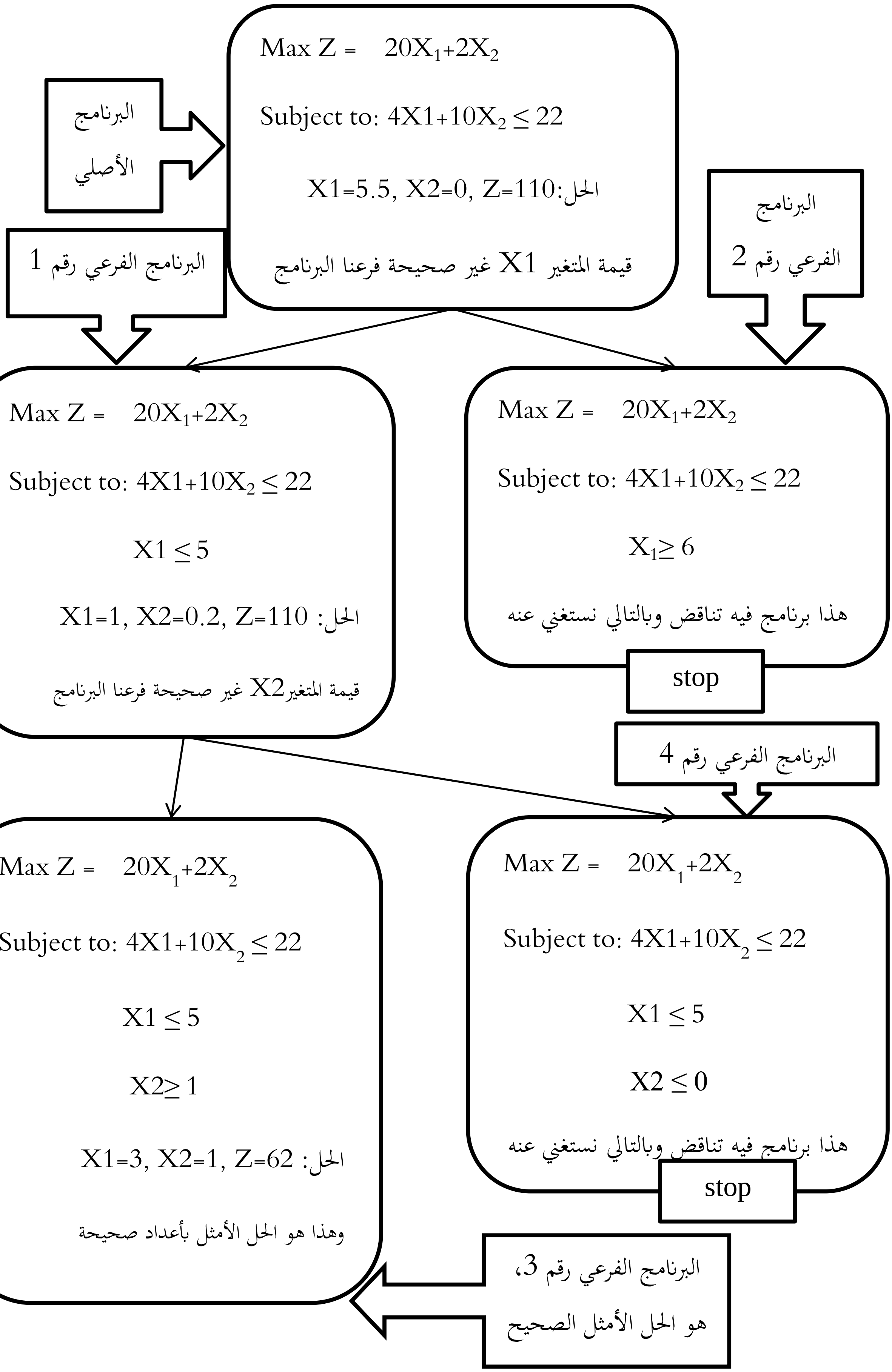
$X_1=3$ $S_2=2$

$X_2=1$

$Z=62$

وهو الحل الأمثل الصحيح للنموذج الأصلي، بحيث نلاحظ أن قيم المتغيرات X1 وX2 أعداد صحيحة، وهذا هو المطلوب.

ويمكن توضيح كيفية تفريع البرامج للوصول إلى الحل الأمثل بأعداد صحيحة في الشكل البياني التالي:


البرنامج الأصلي
Max Z = $20X_1+2X_2$
Subject to: $4X1+10X_2 \leq 22$
الحل: X1=5.5, X2=0, Z=110
قيمة المتغير X1 غير صحيحة فرعنا البرنامج
البرنامج الفرعي رقم 1
البرنامج الفرعي رقم 2
Max Z = $20X_1+2X_2$
Subject to: $4X1+10X_2 \leq 22$
$X1 \leq 5$
الحل: X1=1, X2=0.2, Z=110
قيمة المتغير X2 غير صحيحة فرعنا البرنامج
Max Z = $20X_1+2X_2$
Subject to: $4X1+10X_2 \leq 22$
$X_1 \geq 6$
هذا برنامج فيه تناقض وبالتالي نستغني عنه
stop
البرنامج الفرعي رقم 4
Max Z = $20X_1+2X_2$
Subject to: $4X1+10X_2 \leq 22$
$X1 \leq 5$
$X2 \geq 1$
الحل: X1=3, X2=1, Z=62
وهذا هو الحل الأمثل بأعداد صحيحة
Max Z = $20X_1+2X_2$
Subject to: $4X1+10X_2 \leq 22$
$X1 \leq 5$
$X2 \leq 0$
هذا برنامج فيه تناقض وبالتالي نستغني عنه
stop
البرنامج الفرعي رقم 3، هو الحل الأمثل الصحيح

تطبيقات

التمرين رقم (1):

توجد في نوعين من غذاء الرجيم، A وB ثلاثة مركبات معدنية هي اليود، الفوسفور والحديد، والجدول التالي يعطي نسبة كل معدن في كل نوع غذاء:

	نوع الغذاء	
المعدن	A	B
اليود	0.15	0.10
الفسفور	0.75	1.70
الحديد	1.30	1.10

فإذا كانت تكلفة الغذاء (A) هي (2 دولار) والغذاء (B) هي (1.7 دولار)، وتكون الاحتياجات اليومية الأساسية من هذه المركبات هي على الاقل (1.0 ملغ) من اليود و(7.5 ملغ) من الفسفور و(10.0 ملغ) من الحديد.

– ما هي عدد الغرامات المصنعة من كل نوع من الأغذية الذي يحقق أقل تكلفة بالطريق البيانية (طريقة المستوي القاطع)؟ على أن يكون عددها عدد صحيح.

الحل:

- في البداية نكون النموذج الرياضي للمسألة:

- نفترض أن X1 هي عدد الغرامات المنتجة من الغذاء A
- نفترض أن X2 هي عدد الغرامات المنتجة من الغذاء B

$$\text{Min} : Z = 2X_1 + 1.7X_2$$

$$S/c \quad \begin{cases} 0.15X_1 + 0.10X_2 \geq 1.0 \\ 0.75X_1 + 1.70X_2 \geq 7.5 \\ 1.3X_1 + 1.10X_2 \geq 10 \end{cases}$$

$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$ أعداد صحيحة

- نقوم الآن بالحل بالطريقة البيانية:

✓ نحول القيود إلى معادلات:

$0.15X_1 + 0.10X_2 = 1.0$ ....(1)

$0.75X_1 + 1.70X_2 = 7.5$ ....(2)

$1.3X_1 + 1.10X_2 = 10$ ....(3)

✓ نبحث عن احداثيات المستقيمات:

- من المعادلة (1):

نفرض أن $X_1=0$ فنجد أن $10X_2=$ (0.10)

نفرض أن $X_1= 6.7$ فنجد أن $X_2=0$ (6.7 .0)

- من المعادلة (2):

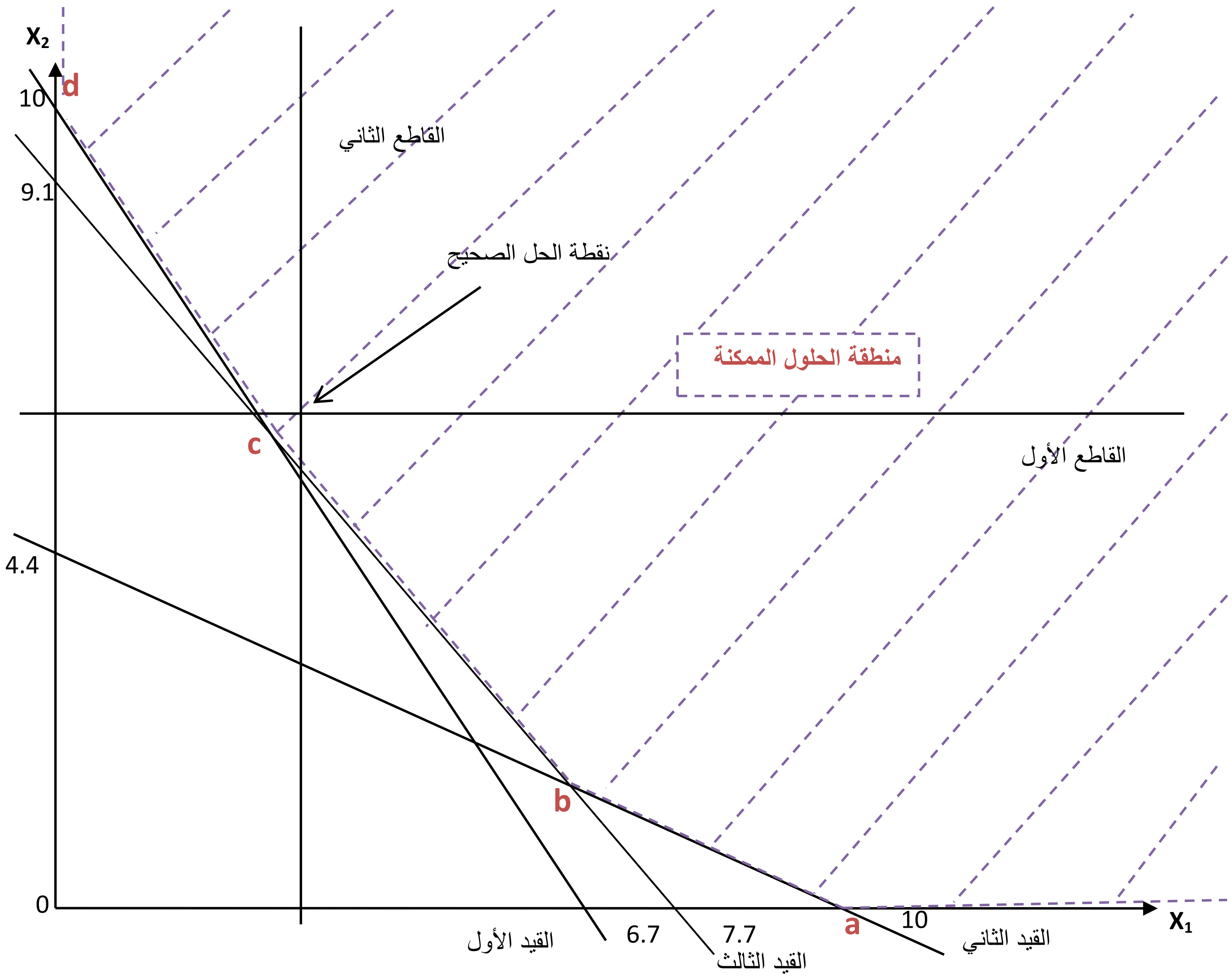
نفرض أن $X_1=0$ فنجد أن $X_2=4.4$ (0. 4.4)

نفرض أن $X_1=10$ فنجد أن $X_2=0$ (10.0)

- من المعادلة (3):

نفرض أن $X_1=0$ فنجد أن $X_2=9.1$ (0. 9.1)

نفرض أن $X_1=7.7$ فنجد أن $X_2=0$ (7.7 .0)



- نبحث عن إحداثيات النقاط (a, b, c, d)
  - احداثيات (a) هي (10 .0)
  - احداثيات (b) هي (0 .10)
  - احداثيات (c) هي عند تقاطع القيدين (1) و(3)

$$0.15X_1+0.10X_2 = 1.0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$1.3X_1+1.10X_2 = 10 \;\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$(1.3)[\,0.15X_1 + 0.10X_2 = 1\,] = 0.195X_1 + 0.13X_2 = 1.3$$

$$(-0.15)[\,1.3X_1 + 1.1X_2 = 10] = 0.195X_1 - 0.165X_2 = -1.5$$

$$-0.035X_2 = -0.2 \Rightarrow X_2 = \frac{-0.2}{-0.035} = 5.71$$ بالجمع

نعوض في المعادلة (1) أو (3) نحصل على قيمة $X_1=2.86$

احداثيات (c) هي (5.71، 2.86)

- احداثيات (b) هي عند تقاطع القيدين (2) و(3)

$$0.75\,X_1 + 1.70X_2 = 7.5 \;\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$1.3X_1 + 1.10X_2 = 10 \;\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$(1.3)[\,0.75X_1 + 1.70X_2 = 7.5\,] = 0.975X_1 + 2.21X_2 = 9.75$$

$$(-0.75)[\,1.3X_1 + 1.1X_2 = 10] = -0.975X_1 - 0.825X_2 = -7.5$$

$$1.385X_2 = 2.25 \Rightarrow X_2 = \frac{2.25}{1.385} = 1.62$$ بالجمع

نعوض في المعادلة (1) أو (3) نحصل على قيمة $X_1=6.32$

احداثيات (b) هي (1.62، 6.32)

وبالتالي نقاط الحل كما يلي:

الحل	X_1	X_2	Z
A	10	0	20
B	6.32	1.62	15.39
C	2.86	5.71	15.43
D	0	10	17

الحل الأمثل

الحل الامثل والذي يقلل التكاليف إلى أقل ما يمكن هو عند النقطة (b) لكنه ليس حل بأعداد صحيحة، لذلك نضع قاطع عند النقطة ($X_1=7$) و النقطة ($X_2=2$) فنجد قيمة دالة الهدف (Z) تساوي 17.4 دولار ، وبالتالي هناك حل صحيح أفضل منها

بالقرب من النقطة عند النقطة (c)، وبالتالي نضع قاطع عند النقطة (X_1=3) والنقطة (X_2=6) فنجد قيمة دالة الهدف (Z) تساوي 16.2 دولار.

وبالتالي يكون الحل الأمثل الصحيح (بأعداد صحيحة) هو:

X_1= 3ملغ

X_2= 6ملغ

Z= 16.2

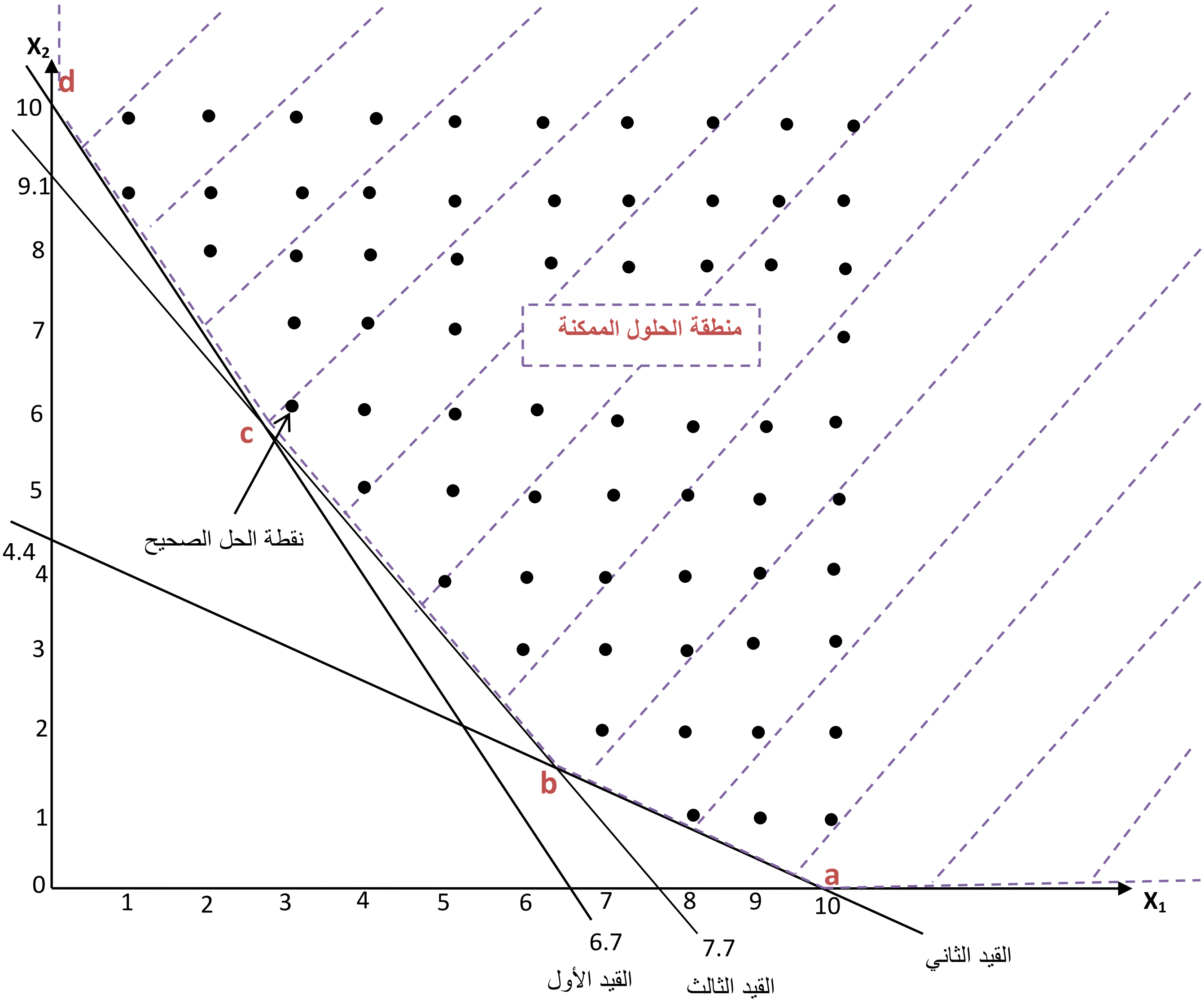
التمرين رقم (2):

نستخدم نفس التمرين رقم واحد، لكن الاختلاف يكون في طريقة الحل كما يلي:

- ما هي عدد الغرامات المصنعة من كل نوع من الأغذية الذي يحقق أقل تكلفة بالطريق البيانية (طريقة الحد والفرع)؟ على أن يكون عددها عدد صحيح.

الحل:

سيكون نفس الحل التغيير يكون فقط في التمثيل البياني عند البحث عن الحل الأمثل الصحيح بطريقة الحد والفرع كما يلي:



كما تم حل هذا التمرين سابقا فإن نقاط الحل كما يلي:

الحل	X_1	X_2	Z
A	10	0	20
B	6.32	1.62	15.39
C	2.86	5.71	15.43
D	0	10	17

الحل الأمثل

من خلال نقاط الحل نجد أن الحل الأمثل عند النقطة (b) لكن قيم المتغيرات (X_1) و(X_2) ليست قيم بأعداد صحيحة، وبالتالي وعند استخدام طريقة الحد والفرع فغننا نحدد جميع النقاط التي

تكون ضمن منطقة الحل بحيث تكون قيم المتغيرات(X_1) و(X_2) أعداد صحيحة (كما هو موضح في التمثيل البياني)، ونجرب هذه النقاط في دالة الهدف(Z) ونختار الأقل قيمة، كما أنه بالإمكان أخذ كامل النقاط أو أخذ النقاط الأقرب للحل الأمثل، لأنه كلما ابتعدنا عن نقاط الحل الامثل كلما زادت قيمة دالة الهدف وبالتالي الابتعاد عن الحل الأمثل، وسنختار النقاط التالية والتي سيكون منها الحل الأمثل بأعداد صحيحة كما يلي:

$(X_1 . X_2)$	$Z=2X_1 + 1.7X_2$
(9 . 1)	Z =19.7
(8 . 1)	Z =17.7
(7 . 2)	Z =17.4
(6 . 3)	Z =17.1
(5 . 4)	Z =16.8
(4 . 5)	Z = 16.5
(3 . 6)	Z =16.2
(3 . 7)	Z = 17.9
(2 . 8)	Z =17.6
(1 . 9)	Z = 17.3

وبالتالي ومن خلال الجدول السابق، يكون الحل الأمثل الصحيح (بأعداد صحيحة) هو:

$X_1= 3$ملغ

$X_2= 6$ملغ

$Z= 16.2$

وهو نفس الحل الذي وجدناه بالطريقة بطريقة المستوى القاطع في التمرين رقم (1).

التمرين رقم (3):

أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

$$Max\ Z = 21X_1+11X_2$$

Subject to:

$$7X1+4X_2 \leq 13$$

$X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$ وهي أعداد صحيحة

الحل:

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$Max\ Z = 21\ X1 + 11\ X2 + 0\ S1$ $\qquad Z-21X_1-11X_2 = 0$

Subject to:

$$7X_1+4X_2+S_1= 13$$

$$x1\ ,\ x2,\ S1 \geq 0$$

2 – إعداد جدول الحل الأولي:

	X_1	X_2	S_1	الثابت
S_1	7	4	1	13
Z	-21	-11	0	0

العمود المحوري العنصر المحوري السطر المحوري

من خلال جدول الحل الأولي يظهر أن الحل ليس حل أمثل، لأننا انطلقنا من دالة تعظيم (max) وقيم دالة الهدف (Z) فيها قيم سالبة، وبالتالي يجب ادخال أحد المغيرين إلى النموذج، والقانون يقول

يجب ادخال المتغير الذي لديه أكبر قيمة سالبة، وفي هذه الحالة هو المتغير X1 لأن معامله في دالة الهدف (−21)، ويخرج من النموذج المتغير الوحيد S1.

- بالنسبة للسطر X1 نجده بقسمة الصف S1 على العنصر المحوري (7).
- أما عناصر Z الجديدة نجدها بالقاعدة التالية:

Zالجديدة = Zالقديمة − (عنصر Z الواقع في العمود المحوري) (الصف المحوري وهو صف X1 الجديد، أي في الجدول الثاني)

$$
\begin{array}{lcccc}
 & -21 & -11 & 0 & 0 \\
- & & & & \\
 & (-21)[(1) & 4/7 & 1/7 & 13/7\ ] \\
= & -21 & -12 & -3 & -39 \\
\hline
 & 0 & 1 & 3 & 39
\end{array}
$$

فنتحصل على جدول الحل رقم 2 التالي:

	X_1	X_2	S_1	الثابت
X_1	1	4/7	1/7	13/7
Z	0	1	3	39

من خلال الجدول وبما أن قيم معاملات دالة الهدف (Z) موجبة يعني أننا وصلنا إلى الحل الأمثل، وبالتالي قيم المتغيرات ودالة الهدف كما يلي:

$$X_1 = 1.85$$

$$X_2 = 0$$

$$Z = 39$$

صحيح أن هدا هو الحل الامثل للمسألة، لكن المطلوب إيجاد المتغيرات بأعداد صحيحة، وهنا لدينا قيمة المتغير $X1$ هي 1.85 وهي عدد غير صحيح، بالتالي نذهب للخطوة الثانية وهي تفريع البرنامج الأصلي إلى برنامجين كما يلي:

نلاحظ أن : $1 < X_1 < 2$

وبالتالي استنتاج قيدين هما : $X_1 \leq 1$ $X_1 \geq 2$

وبالتالي بإضافة كل قيد للبرنامج الأصلي نحصل على برنامجين جديدين هما:

البرنامج الأول:

$$Max\ Z = 21X_1 + 11X_2$$

Subject to:

$$7X_1 + 4X_2 \leq 13$$

$$X_1 \leq 1$$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

البرنامج الثاني:

$$Max\ Z = 21X_1 + 11X_2$$

Subject to:

$$7X_1 + 4X_2 \leq 13$$

$$X_1 \geq 2$$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

هذا البرنامج متناقض، وبالتالي ليس له حل وبالتالي يتم الاستغناء عنه (في حال $X_1=2$ فقط (القيد الثاني) ، فإن القيد الأول يكون $13 \leq 14$ وهذا مستحيل).

وبالتالي نحاول إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الفرعي الأول كما يلي :

$$Max\ Z = 21X_1 + 11X_2$$

Subject to:

$$7X_1+4X_2 \leq 13$$

$$X_1 \leq 1$$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$Max\ Z = 21\ X1 + 11\ X2 + 0\ S1 + 0\ S2$ $\qquad Z-21X_1-11X_2 = 0$

Subject to:

$$7X_1+4X_2+S_1= 13$$

$$X_1 + S_2 = 1$$

$$x1\ ,\ x2,\ S1,\ S2 \geq 0$$

2 – إعداد جدول الحل الأولي:

المتغير الداخل

	X_1	X_2	S_1	S_2	الثابت	
S_1	7	4	1	0	13	1.85
S_2	1	0	0	1	1	1
Z	-21	-11	0	0	0	/

العنصر المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (1) (جدول الحل الأولي) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم X1 وX2 لكن سيدخل للنموذج المتغير X1 لأن لديه أكبر قيمة سالبة (21-).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر الصف الداخل X1 ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير S2 من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة 1 وهي أقل من 1.85، وبالتالي يخرج S2 من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 2) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف X1 فنجدها بقسمة الصف S2 (الجدول 1) على العنصر المحوري(1) فنتحصل على عناصر السطر X1 (الجدول رقم 2)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (2).
- بالنسبة للصفوف المتبقية (S1,Z) فإننا نجدها بالقانون التالي:

العنصر الصف الجديد= العنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل)x(عناصر الصف المحوري، أي عناصر X1 في الجدول رقم 2)

وبالتالي لدينا قيم السطر S1 وقيم السطر Z وسنجدهم كما يلي:

- S1 الجديدة = S1 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S1 (7)) x (الصف المحوري X1)

$$\begin{array}{ccccc} 7 & 4 & 1 & 0 & 13 \\ - & & & & \\ (7)[1 & 0 & 0 & 1 & 1\,] \\ = 7 & 0 & 0 & 7 & 7 \\ \hline 0 & 4 & 1 & -7 & 5 \end{array}$$

- Z الجديدة= Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z(-21))x (الصف المحوري X1)

$$\begin{array}{ccccc} -21 & -11 & 0 & 0 & 0 \\ - & & & & \\ (-21)[1 & 0 & 0 & 1 & 1\,] \\ = -21 & 0 & 0 & -21 & -21 \\ \hline 0 & -11 & 0 & 21 & 21 \end{array}$$

بعد حساب جميع الصفوف نتحصل على الجدول رقم (2) التالي:

الجدول رقم (02)

المتغير الخارج

المتغير الداخل

	X_1	X_2	S_1	S_2	الثابت	
S_1	0	4	1	-7	5	1.25
X_1	1	0	0	1	1	غير معرفة
Z	0	-11	0	21	21	/

الصف المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (2) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم X2 الذي سيدخل للنموذج لأنه الوحيد الذي لديه قيمة سالبة (11-).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر العمود الداخل X2 ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير S1 من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة 1.25 وهي القيمة الوحيدة لأن القيمة الأخرى هي قيمة غير معرفة بقسمة 1 على 0، وبالتالي يخرج المتغير S1 من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 3) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف X2 فنجدها بقسمة الصف S1 (الجدول 2) على العنصر المحوري(4) فنتحصل على عناصر السطر X2 (الجدول رقم 3)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (3).
- بالنسبة للصفوف المتبقية (X1,Z) فإننا نجدها بالقانون التالي:

العنصر الصف الجديد= العنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل)x(عناصر الصف المحوري، أي عناصر X2 في الجدول رقم 3)

وبالتالي لدينا قيم السطر X1 وقيم السطر Z وسنجدهم كما يلي:

- X1 الجديدة = X1 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف X1 (0)) x (الصف المحوري X2)

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
- & & & & \\
(0)[0 & 1 & 1/4 & -7/4 & 5/4\,] \\
=0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

- Z الجديدة= Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z(-11)) x (الصف المحوري X2)

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & -11 & 0 & 21 & 21 \\
- & & & & \\
(-11)[0 & 1 & 1/4 & -7/4 & 5/4\,] \\
=0 & -11 & -2.75 & 19.25 & -13.75 \\
\hline
0 & 0 & 2.75 & 1.75 & 34.75
\end{array}
$$

بعد حساب جميع الصفوف نتحصل على الجدول رقم (3) التالي:

الجدول رقم (03)

	X_1	X_2	S_1	S_2	الثابت
X_2	0	1	1/4	-7/4	1.25
X_1	1	0	0	1	1
Z	0	0	2.75	1.75	34.75

من خلال الجدول رقم (03) يظهر أنه جدول الحل النهائي لأننا وصلنا إلى الحل الأثل لأن قيم دالة الهدف (Z) كلها موجبة (أكبر من أو تساوي الصفر)، وقيم المتغيرات ودالة الهدف كما يلي:

$$X_1=1 \qquad X_2=1.25 \qquad Z=34.75$$

من خلال الحل يتوضح أن قيم المتغير X_2 لا تأخذ قيم صحيحة $X_2=1.25$ وبالتالي :

$$1 < X_2 < 2$$

ويمكننا أن نضيف القيود التالية للبرنامج الفرعي الأول: $X_2 \geq 2$ و $X_2 \leq 1$

وبالتالي فالبرنامج الجديدين المتفرعين عن البرنامج الفرعي الأول هما :

البرنامج الثالث:

Max $Z = 21X_1 + 11X_2$

Subject to:

$7X_1+4X_2 \leq 13$

$X_1 \leq 1$

$X_2 \leq 1$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

البرنامج الرابع:

$$Max\ Z = 21X_1 + 11X_2$$

Subject to:

$7X_1+4X_2 \leq 13$

$X_1 \leq 1$

$X_2 \geq 2$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

حل البرنامج الثالث:

وبالتالي نقوم بحل البرنامج الفرعي الثالث التالي والبحث عن الحل الأمثل:

$$Max\ Z = 21X_1 + 11X_2$$

Subject to:

$7X_1+4X_2 \leq 13$

$X_1 \leq 1$

$X_2 \leq 1$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$Max\ Z = 21X_1+11X_2+0S_1+0S_2+0S_3$$

$$\Rightarrow \text{Max } Z - 20X_1 - 2X_2 = 0$$

$$7X_1+4X_2+S_1 = 13 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$X_1+S_2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$X_2+S_3 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

2 – إعداد جدول الحل الأولي:

المتغير الخارج المتغير الداخل

الجدول رقم (01)

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الثابت	
S_1	7	4	1	0	0	13	1.85
S_2	1	0	0	1	0	1	1
S_3	0	1	0	0	1	1	غير معرف
Z	-21	-11	0	0	0	0	/

العنصر المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (1) (جدول الحل الأولي) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم X1 وX2 لكن سيدخل للنموذج المتغير X1 لأن لديه أكبر قيمة سالبة (-21).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر الصف الداخل X1 ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير S2 من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة 1 وهي أقل من 1.85 أما القيمة الأخرى فهي غير معرفة، وبالتالي يخرج S2 من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 2) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف X1 فنجدها بقسمة الصف S2 (الجدول 1) على العنصر المحوري وهو (1) فنتحصل على عناصر السطر X1 (الجدول رقم 2)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (2).
- بالنسبة للصفوف المتبقية (S1,S3,Z) فإننا نجدها بالقانون التالي:

عنصر الصف الجديد= عنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل)x(عناصر الصف المحوري، أي عناصر X1 في الجدول رقم (2))

وبالتالي لدينا قيم السطر S1 وقيم السطر S2 وقيم السطر Z سنجدهم كما يلي:

- S1 الجديدة = S1 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S1 (7)) x (الصف المحوري X1)
- S3 الجديدة = S3 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S3 (0)) x (الصف المحوري X1)
- Z الجديدة = Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z (21-)) x (الصف المحوري X1)

بعد القيام بجميع العمليات الحسابية الماضية نتحصل على الجدول رقم (02) التالي:

الجدول رقم (02):

المتغير الخارج   المتغير الداخل

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الثابت	
S_1	0	-3	1	-7	0	6	-2
X_1	1	0	0	1	0	1	غير معرف
S_3	0	1	0	0	1	1	1
Z	0	-11	0	21	0	21	/

العنصر المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (2) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم X2 الذي سيدخل للنموذج لأنه الوحيد الذي لديه قيمة سالبة (20-).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر الصف الداخل X2 ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير S3 من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة (1)وهي القيمة الوحيدة، لأن لدينا قيمة غير معرفة بقسمة 1 على 0، وقيمة سالبة (2-)، وهما يلغيان من الاعتبار في تحديد المتغير الداخل إلى النموذج، وبالتالي يخرج المتغير S3 من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 3) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف X2 فنجدها بقسمة الصف S3 (الجدول 2) على العنصر المحوري(1) فنتحصل على عناصر السطر X1 (الجدول رقم 3)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (3).

- بالنسبة للصفوف المتبقية (S1,X1,Z) فإننا نجدها بالقانون التالي:

عنصر الصف الجديد= عنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل)x(عناصر الصف المحوري، أي عناصر X2 في الجدول رقم 3)

وبالتالي لدينا قيم السطر S1 وقيم السطر X1 وقيم السطر Z سنجدهم كما يلي:

- S1 الجديدة = S1 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S1 (-3)) x (الصف المحوري X2)
- X1 الجديدة = X1 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف X1 (0)) x (الصف المحوري X2)
- Z الجديدة = Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z (-11)) x (الصف المحوري X2)

بعد القيام بجميع العمليات الحسابية الماضية نتحصل على الجدول رقم (03) التالي:

الجدول رقم (03):

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الثابت
S_1	1	0	1	-7	3	8
X_1	0	0	0	1	0	1
X_2	0	1	0	0	1	1
Z	0	0	0	21	11	33

من خلال الجدول رقم (03) يظهر أنه جدول الحل النهائي لأننا وصلنا إلى الحل الأمثل لأن قيم دالة الهدف (Z) كلها موجبة (أكبر من أو تساوي الصفر)، وقيم المتغيرات ودالة الهدف كما يلي:

$S_1=8$ $\quad$ $X_1=1$

$X_2=1$

$$Z=33$$

وهو الحل الأمثل الصحيح للنموذج الأصلي، بحيث نلاحظ أن قيم المتغيرات X1 وX2 أعداد صحيحة، وهذا هو المطلوب، لكن يجب أن نقوم بحل البرنامج رقم (4)، فإذا كان حل البرنامج رقم (4) يعطينا أعدادا غير صحيحة فإننا سنعتمد حل البرنامج رقم (3)، أما إذا كان حل البرنامج رقم (4) أعطانا أعدادا صحيحة فإننا سنقارنه بحل البرنامج رقم (3) ونختار الأفضل يعني قيمة دالة الهدف (Z) الأكبر لأننا نبحث عن تعظيم دالة الهدف.

حل البرنامج الرابع:

$\text{Max } Z = 21X_1 + 11X_2$

Subject to:

$7X_1+4X_2 \leq 13$

$X_1 \leq 1$

$X_2 \geq 2$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$\text{Max } Z = 21X_1+11X_2+0S_1+0S_2+0S_3-MA_1$

$\Rightarrow \text{Max } Z - 21X_1-11X_2+A_1M = 0$

$7X_1+4X_2+S_1 = 13$........(1)

$X_1+S_2 = 1$ ....(2)

$X_2-S_3+A_1= 2$ ....(3)

من المعادلة رقم (3) نستخرج قيمة A فنجدها تساوي: $(A_1=2-X_2+S_3)$

نعوضها في دالة الهدف فنتحصل على :

$$\text{Max } Z - 21X_1 - 11X_2 + M(2-X_2+S_3)$$

$$\text{Max } Z - 21X_1 - 11X_2 + 2M - MX_2 + MS_3 = 0$$

$$\text{Max } Z - 21X_1 + X_2(-11-M) + MS_3 = -2M$$

2 – إعداد جدول الحل الأولي:

المتغير الداخل

المتغير الخارج

الجدول رقم (01)

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	الثابت	
S_1	7	4	1	0	0	0	13	3.25
S_2	1	0	0	1	0	0	1	غير معرفة
A_1	0	1	0	0	-1	1	2	2
Z	-21	-11-M	0	0	M	0	-2M	/

العنصر المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (1) (جدول الحل الأولي) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم X1 وX2 لكن سيدخل للنموذج المتغير X2 لأن لديه أكبر قيمة سالبة (-11-M).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر الصف الداخل X2 ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير A1 من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل

نتحصل على قيمة 2 وهي أقل من 3.25 أما القيمة الأخرى فهي غير معرفة، وبالتالي يخرج A1 من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 2) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف X2 فنجدها بقسمة الصف A1 (الجدول 1) على العنصر المحوري وهو (1) فنتحصل على عناصر السطر X2 (الجدول رقم 2)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (2).
- بالنسبة للصفوف المتبقية (S1;S2,Z) فإننا نجدها بالقانون التالي:

عنصر الصف الجديد= عنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل)x(عناصر الصف المحوري، أي عناصر X2 في الجدول رقم (2))

وبالتالي لدينا قيم السطر S1 وقيم السطر S2 وقيم السطر Z سنجدهم كما يلي:

- S1 الجديدة = S1 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S1 (4)) x (الصف المحوري X2)
- S2 الجديدة = S2 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S2 (0)) x (الصف المحوري X2)
- Z الجديدة = Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z (-11-M)) x (الصف المحوري X2)

بعد القيام بجميع العمليات الحسابية الماضية نتحصل على الجدول رقم (02) التالي:

الجدول رقم (02):

المتغير الخارج المتغير الداخل

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	الثابت	
S_1	7	0	1	0	4	−4	5	0.71
S_2	1	0	0	1	0	0	1	1
X_2	0	1	0	0	−1	1	2	غير معرفة
Z	-21	0	0	0	−11	11+M	22	/

العنصر المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (2) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم X1 و S3 لكن الذي سيدخل للنموذج هو X1 لأن لديه أكبر قيمة سالبة (−20)، لأن S3 قيمته في دالة الهدف (−11).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر الصف الداخل X1 ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير S1 من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة (0.71)وهي أقل من القيمة الأخرى (1) أما بالنسبة للقيمة الأخرى فهي غير معرفة بقسمة 2 على 0، وبالتالي يخرج المتغير S1 من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 3) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف X1 فنجدها بقسمة الصف S1 (الجدول 2) على العنصر المحوري(7) فنتحصل على عناصر السطر X1 (الجدول رقم 3)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (3).

- بالنسبة للصفوف المتبقية (S2,X2,Z) فإننا نجدها بالقانون التالي:

عنصر الصف الجديد= عنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل)x(عناصر الصف المحوري، أي عناصر X1 في الجدول رقم 3)

وبالتالي لدينا قيم السطر S2 وقيم السطر X2 وقيم السطر Z سنجدهم كما يلي:

- S2 الجديدة = S2 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S2 (1)) x (الصف المحوري X1)
- X2 الجديدة = X2 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف X2 (0)) x (الصف المحوري X1)
- Z الجديدة = Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z (-21)) x (الصف المحوري X1)

بعد القيام بجميع العمليات الحسابية الماضية نتحصل على الجدول رقم (03) التالي:

الجدول رقم (03):

الثابت	A_1	S_3	S_2	S_1	X_2	X_1	
5/7	-4/7	4/7	0	1/7	0	1	X_1
2/7	4/7	-4/7	1	-1/7	0	0	S_2
2	1	-1	0	0	1	0	X_2
37	-1+M	1	0	3	0	0	Z

من خلال الجدول رقم (03) يظهر أنه جدول الحل النهائي لأننا وصلنا إلى الحل الأمثل لأن قيم دالة الهدف (Z) كلها موجبة (أكبر من أو تساوي الصفر)، وقيم المتغيرات ودالة الهدف كما يلي:

$X_1=5/7$ $S_2=2/7$

$X_2=2$

$$Z=37$$

بعد حل البرنامج الرابع نلاحظ أن المتغير X1 لديه قيمة غير صحيحة، ونحن نبحث عن المتغيرات بأعداد صحيحة، وبالتالي وفي هذه الحالة سنعتبر حل البرنامج رقم (3) هو الحل الأمثل الصحيح للنموذج الأصلي، بحيث نلاحظ أن قيم المتغيرات X1 وX2 أعداد صحيحة، والتي كانت كما يلي:

$$X_1=1 \qquad S_1=8$$

$$X_2=1$$

$$Z=33$$

وهذا هو المطلوب.

المحاضرة الخامسة

نماذج شبكات الأعمال (التخطيط الشبكي)

الهدف من دراسة الشبكات هو إعطاء فكرة حول تقنية التخطيط و الجدولة والرقابة للمشاريع والنشاطات التي تقوم بها المؤسسات . بالإضافة إلى توضيح الطرق المستعملة في رسم الشبكات التي تحتوي على النشاطات و الوظائف المختلفة للمشاريع التي عادة تكون كبيرة و معقدة .

وبالنسبة للمفهوم الاقتصادي لشبكات الأعمال هو كيفية استخدام الموارد المحددة لتحقيق أهداف المؤسسة ، ويعتمد هذا الأسلوب إلى تخطيط وجدولة ورقابة الإنتاج في المؤسسات على مختلف أنشطتها .

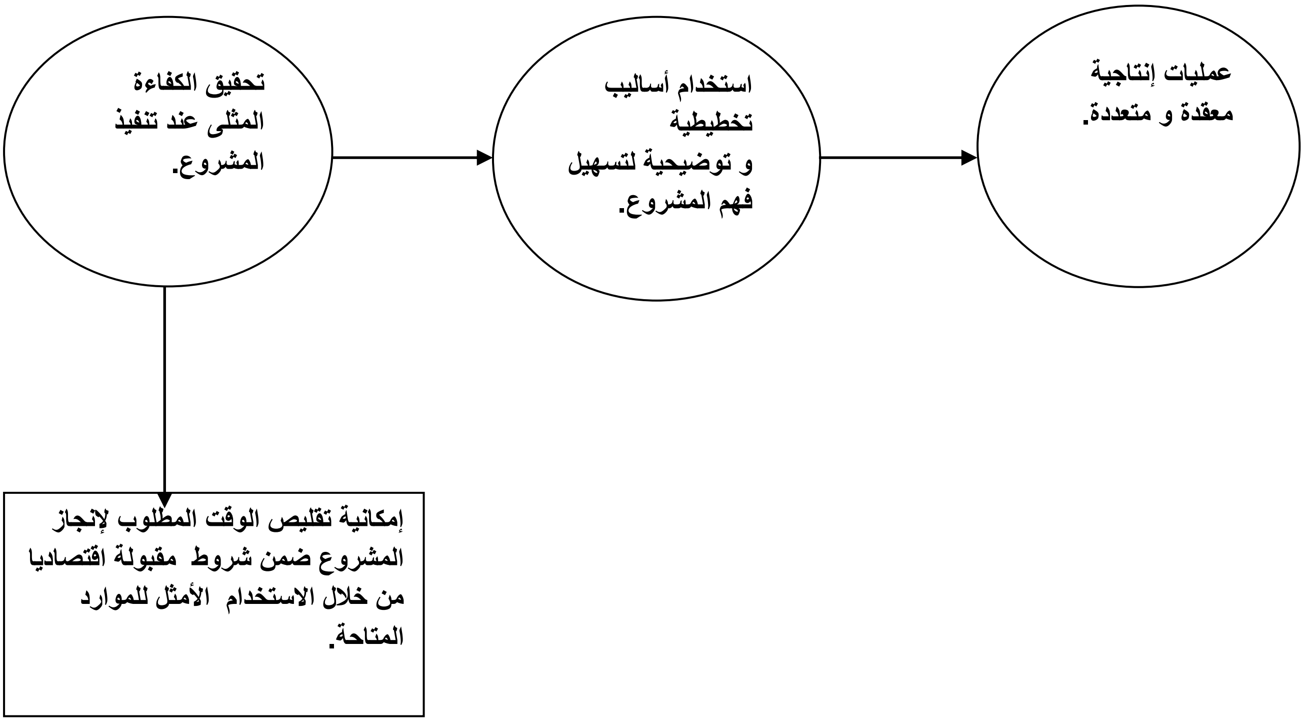
ويعود الفضل في استخدام هذا الأسلوب إلى هنري جانت " Henry Gantt" عام 1917.

وتهدف الشبكات عموما إلى تجزئة العملية الإنتاجية إلى مجموعة من الأنشطة المترابطة، وكم يستغرق النشاط من وقت و موارد لإنجازه ، ووصف كل نشاط لتوضيح التتابع المنطقي له في العمل، فضلا عن تحديد أوقات الابتداء و الانتهاء من تنفيذ كل مرحلة من مراحل المشروع .

وبالتالي على المسير أن يجد الطريقة التي تساعده للإجابة على الأسئلة التالية :

- ما هو الزمن الكلي لإنجاز المشروع .
- ما هو زمن البداية و زمن النهاية لكل نشاط .
- ما هو النشاط الحرج ، الذي يجب أن ينتهي كما هو مبرمج للحفاظ على زمن الإنجاز المشروع ككل .
- ما هو ومن تأخر النشاطات غير الحرجة الذي لا يؤثر على إنهاء المشروع في وقته المخطط له .

سنقوم فيما يلي بتوضيح أهمية الشبكات في تحقيق الكفاءة المثلى :



ومن بين أساليب التحليل الكمي المفضلة التي تساعد المدراء في التخطيط و البرمجة والمتابعة والرقابة على المشاريع كبيرة الحجم و المعقدة نجد طريقتين هما:

- طريقة المسار الحرج (CPM) (Critirol Path Method)
- طريقة مراجعة و تقييم المشروع (PERT) (Program Evolution and Review Technique)

وبالتالي تساعد تحليلات شبكات الأعمال بالإستعانة بطريقتي (CPM) و (PERT) على جدولة و تخطيط المشاريع بأقل تكلفة أو أقل زمن ممكن في ظل الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة.

I. مراحل جدولة المشروع:

يمكن تقسيم مراحل جدولة المشروع إلى ثلاثة مراحل وهي:

1. مرحلة التخطيط :

وتشتمل هذه المرحلة تحديد الأنشطة التي يتكون منها المشروع ، وتحديد العلاقة بينها ، كما تشمل تحديد الزمن اللازم لإنجاز كل نشاط.

2.مرحلة الجدولة

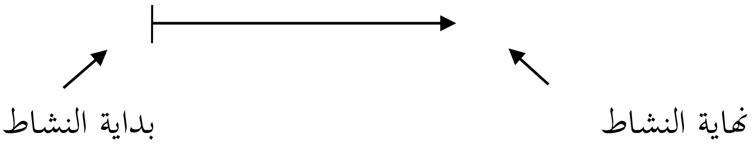
ويتم في هذه المرحلة تحديد وقت ابتداء وانتهاء كل نشاط ،و تحديد المسار الحرج الذي يحتوي على الأنشطة التي تحتاج إلى عناية خاصة لأنها توثر على زمن انتهاء المشروع ، وكذا تحديد الزمن المرن للأنشطة غير الحرجة و التي تقع خارج المسار.

3.مرحلة الرقابة و السيطرة

وتتبع المرحلتين الأوليتين، وتتضمن إعداد تقرير دوري عن تقدم المشروع، و تحديد بذلك العوامل والمؤثرات على المشروع ، ليتسنى اتخاذ القرارات المناسبة بناءا على التقرير.

III. مفاهيم حول مصطلحات التخطيط الشبكي : (تعاريف أساسية)

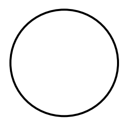
1. النشاط : هو وظيفة أو عمل يحتاج زمن و موارد لإنجازه و يمثل على الشبكة بـ :



طول السهم و اتجاهه ليس له علاقة بحجم النشاط.

2. الحدث :

هو فاصلة أو نقطة من الزمن توضح بداية و نهاية النشاط ، وتمثل على الشبكة بـــ :



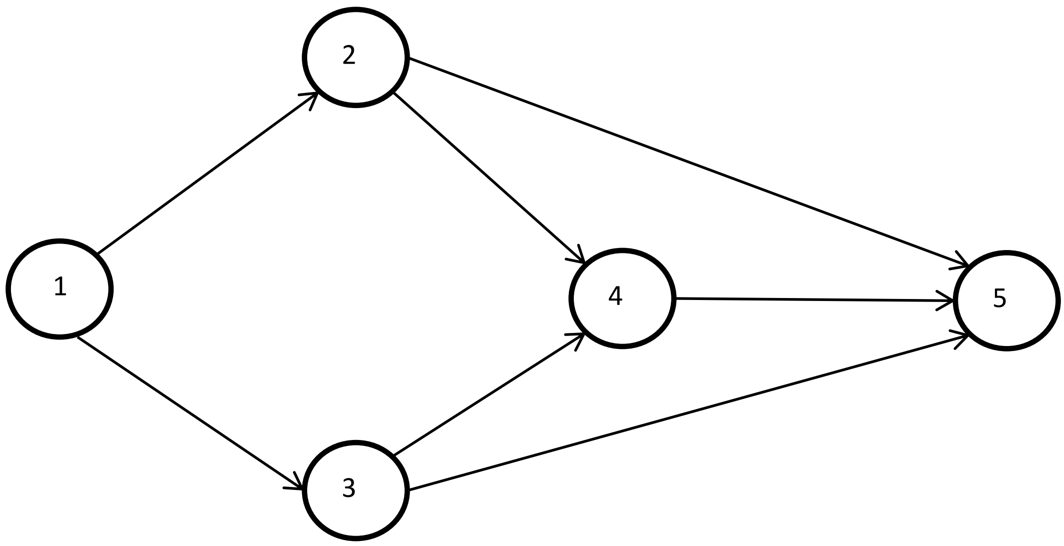
3.النشاط الوهمي: هو نشاط الذي لا يستهلك زمن أو موارد أو تكاليف أو غيرها ويستعمل للمساعدة في تمثيل النشاطات مع الأحداث التي لها نفس حدث البداية ونفس حدث النهاية.

Dummy 

4.المسار Poth : هو سلسلة من الأنشطة المتتابعة

5.شبكة الأعمال : هي مجموعة من النشاطات و الأحداث المتتابعة و متسلسلة منطقيا للمشروع والممثلة في شكل بياني ، وتسمى أيضا بالمخطط السهمي.

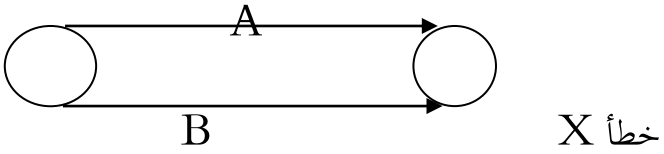
الشكل : شبكة الأعمال



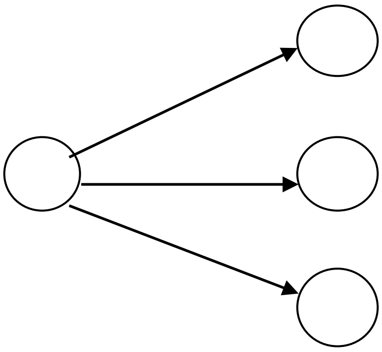
IV. قواعد رسم الشبكة (كيفية بناء شبكة الأعمال) :

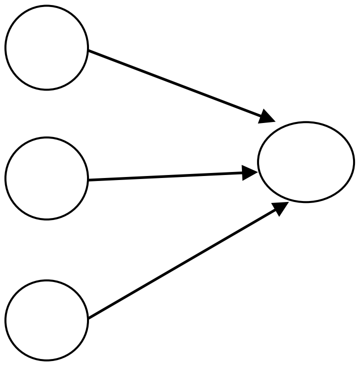
يجزء المشروع إلى مجموعة من الأنشطة الأخرى و ترتيبها ترتيب منطقي ، ونحن نرسم لشبكة يجب الأخذ بعين الاعتبار النقاط التالية :.

1. كل نشاط داخل الشبكة يمثل بسهم واحد فقط، وهذا يعني أنه لا يظهر نشاط مرتين في الشبكة.
2. يجب تجنب عدم تكرار رقم الحدث أكثر من مرة في الشبكة.
3. لا يمكن لنشاطين أن يعرفا بنفس حدث البداية ونفس حدث النهاية أي لا يجوز رسم الحالة التالية:



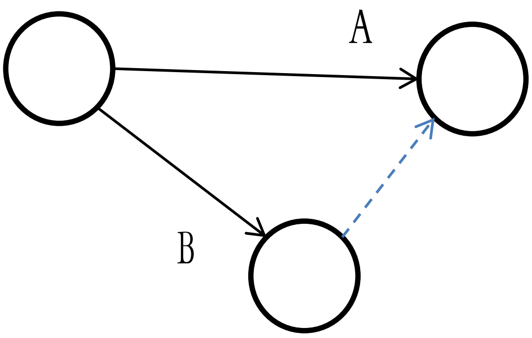
بل يمكن أن يكون لنشاطين أو أكثر نفس حدث البداية فقط أو نفس حدث النهاية فقط مثل:

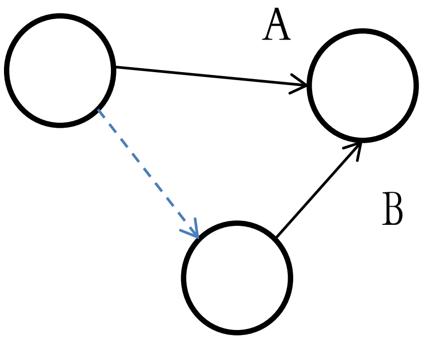


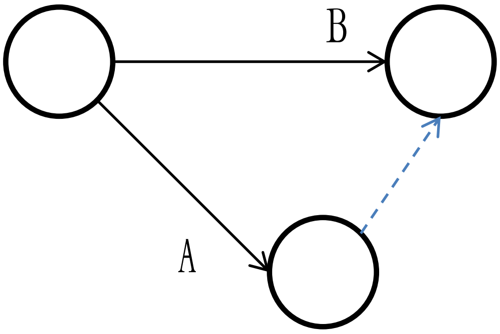


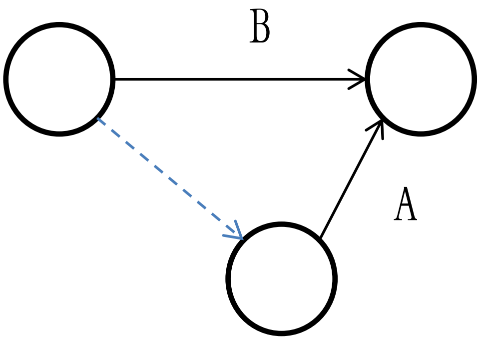
أما في حالة وجود نشاطين أو أكثر لهما نفس حدث البداية ونفس حدث النهاية نستعين بالنشاط الوهمي (Dummy) ولتفادي التداخل في الأنشطة.

فيمكن التمثيل الصحيح لهذه الحالة كما يلي:



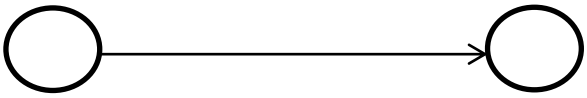






وهذا حسب موقع الذي يمكن أن يكون فيه النشاط الوهمي .

4. كل نشاط يجب أن يبدأ بحدث بداية و ينتهي بحدث نهاية

حدث النهاية  حدث البداية

5.يهدف التأكد من التتابع المنطقي و محتها في الشبكة ، يجب الإجابة على الأسئلة الآتية عند إضافة أي نشاط :

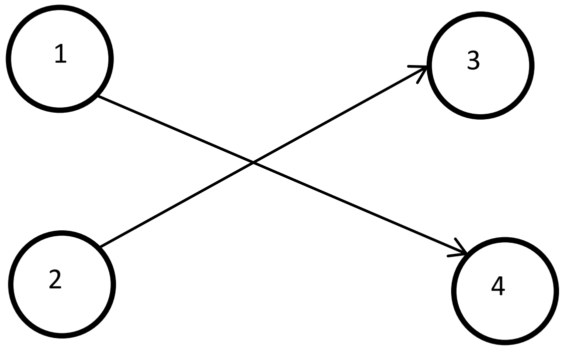
أ- ما هي الأنشطة التي يجب أن تنتهي حالاً قبل بداية هذا النشاط ؟

ب-ما هي الأنشطة التي تتبع هذا النشاط (تأتي بعده) ؟

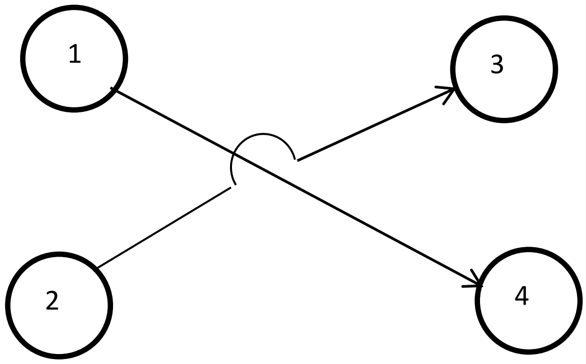
ت-ما هي الأنشطة التي تنطلق مع هذا النشاط ، ويمكن أن يكون لها نفس الحدث؟

6.عدم استخدام النشاط الوهمي إلاّ في حالة الضرورة .

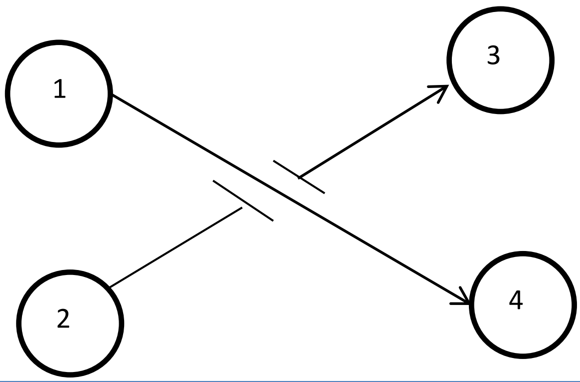
7.تجنب تقاطع الأسهم داخل الشبكة .



ويمكن معالجة ذلك برسم الأنابيب:

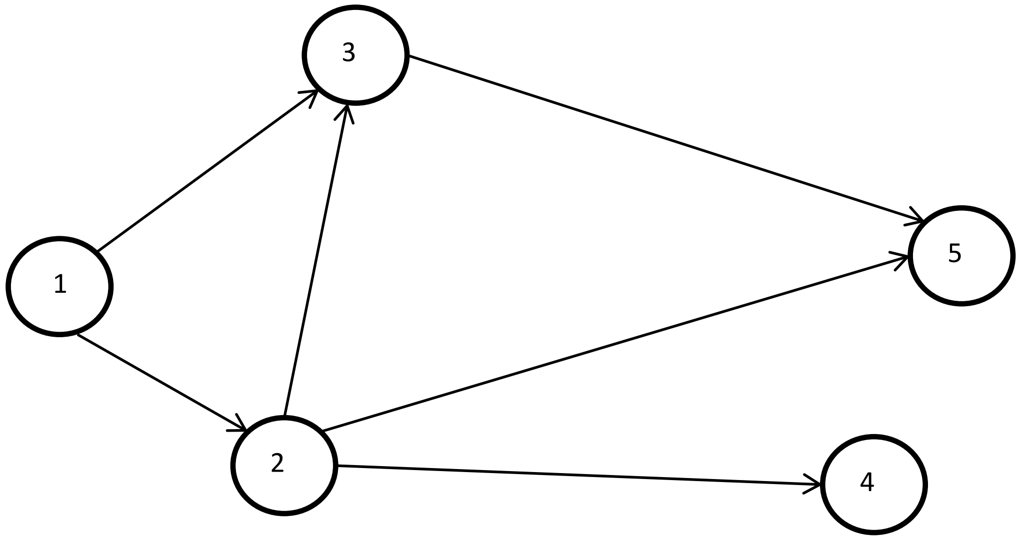


أو بإستخدام رسم تقاطع الأنشطة:



8. الشبكة يجب أن يكون لها حدث بداية واحد وحدث نهاية واحد، أي لا يكون لنشاط ما حدث نهاية غير حدث نهاية الشبكة .

وبالتالي هذا رسم خاطئ:



9. لا ينتهي الحدث حتى تنتهي جميع الأنشطة الموجهة له .
10. الرجوع في الشبكة غير مسموح به ، أي يجب أن تكون متجهة دائما إلى الأمام ، وتكون موجهة من اليسار إلى اليمين.
11. طول أو قصر السهم لا يعني طول أو قصر الزمن.
12. ليس بالضرورة رسم السهم عرضيا أو مائلا لكن يجب أن يكون موجها من اليسار إلى اليمين.

في الحقيقة الشبكات تنقسم إلى ثلاثة أنواع :

1) **شبكة الأعمال التقليدية** CPM: وجود وقت محدد و مؤكد لزمن إنجاز كل نشاط
2) **شبكة الأعمال الاحتمالية** PERT: وتستخدم في حالة عدم التأكد حيث توجد تقريرات مختلفة (متفائلة – متشائمة – أكثر احتمالاً) لزمن إنجاز كل نشاط.
3) **شبكة أدنى وقت وأدنى تكلفة** : تساعد في المفاضلة بين الإسراع في زمن إنجاز المشروع والزيادة في التكلفة ، وبالتالي المقارنة بين بدائل مختلفة من توافق الوقت والتكلفة إنجاز المشروع في أدنى وقت و بأقل تكلفة.

مثال توضيحي:

ترغب الجامعة في توسعة التخصصات التي تدرسها ، فقررت فتح تخصص الاقتصاد ، وتحقيقا لذلك قررت إدارة الجامعة في إقامة كلية للاقتصاد بها العديد من التخصصات ، و الجدول التالي يوضح الوقت اللازم لكل نشاط من الأنشطة التي يجب القيام بها .

النشاط	التوصيف	الوقت
1	الحصول على تصريح من وزارة التعليم العالي	8 أسابيع
2	تحديد موقع المشروع	10
3	إعداد المبنى	15
4	توفير العمالة الإدارية	7
5	توفير أعضاء هيئة التدريس	10
6	قبول الطلاب	12
7	إعداد المقررات الدراسية	6
8	بدء الدراسة	4
		72

السؤال : ما هو الزمن اللازم لإنجاز هذا المشروع ؟

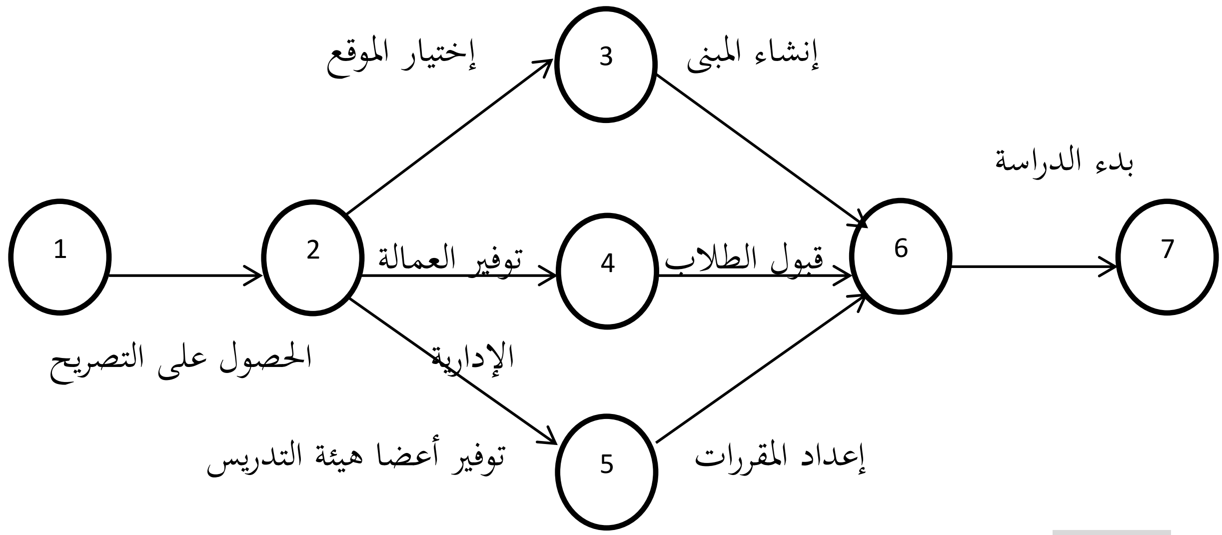
الحل : الزمن اللازم هو مجموع أزمنة الأنشطة المختلفة

$T= 8+10+15+7+10+12+6+4 = 72$ أسبوع

ولكن هل يمكن إنجاز المشروع في وقت أقل من ذلك ، وهذا يتوقف على طبيعة علاقات التتابع بين الأنشطة المشروع.

وعند ملاحظة هذا المثال نلاحظ أن هناك أنشطة متتابعة أي لا يمكن البدء بنشاط قبل انتهاء الآخر، وهناك أنشطة متوازية أي يمكن القيام بها في نفس الوقت.

ويمكن توضيح ذلك من خلال رسم الشبكة التالية :



مثال01:

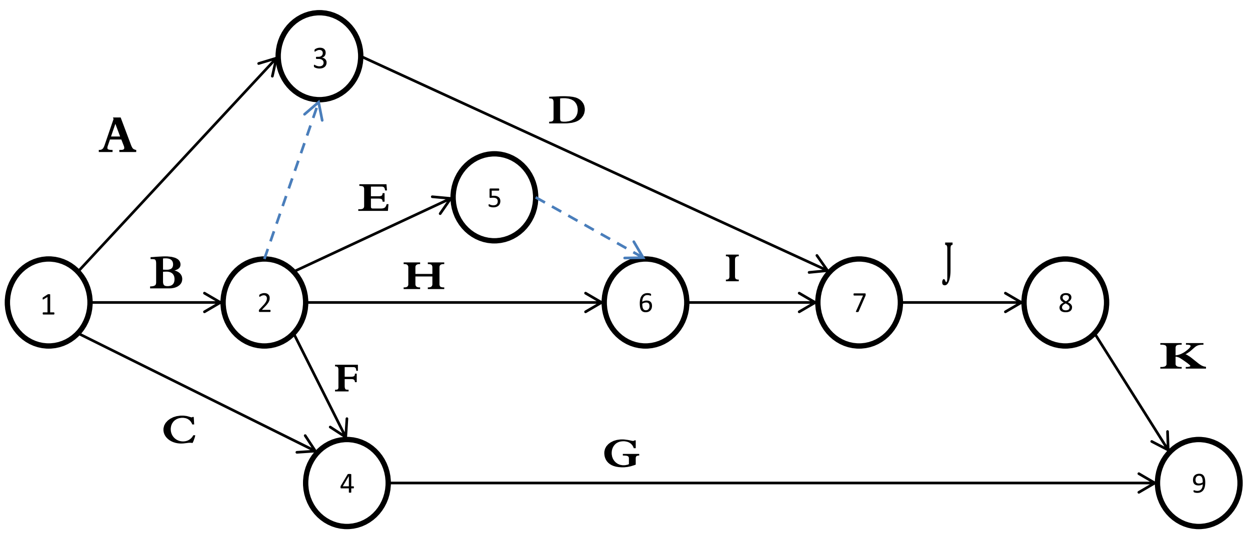
الأنشطة الآتية تمثل أنشطة مشروع معين ، المطلوب رسم المخطط الشبكي لهذه الأنشطة مع الأخذ بعين الاعتبار العلاقات بين الأنشطة :

1. يبدأ المشروع بالأنشطة A,B,C .
2. النشاط A و B يسبقان النشاط D .
3. النشاط B يسبق الأنشطة E,F,H .
4. النشاطان F,C يسبقان النشاط G.
5. النشاطان H,E يسبقان النشاط I .
6. النشاطان I,D يسبقان النشاط J .
7. النشاط J يسبق النشاط K .
8. ينتهي المشروع بنهاية الأنشطة K,G .

الحل:

قبل البدء برسم المخطط الشبكي ، نحول العلاقات السابقة إلى جدول بالشكل التالي :

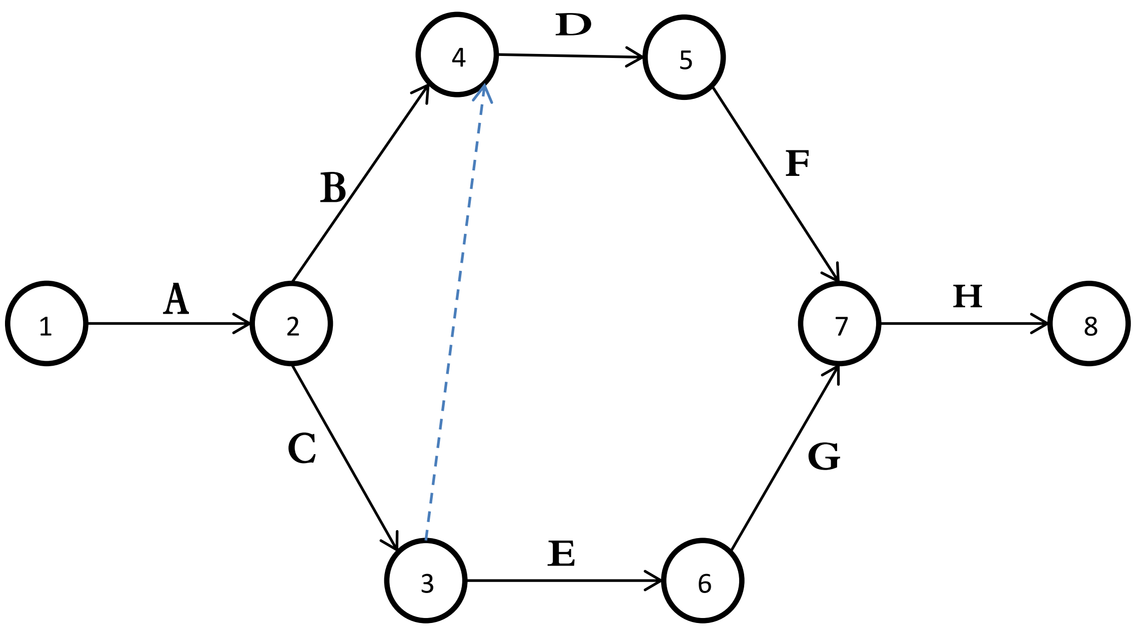
النشاط السابق	النشاط
—	A
—	B
—	C
A.B	D
B	E
B	F
C.F	G
B	H
E.H	I
P.I	J
J	K



مثال02: مشروع لإنجاز أجهزة الكومبيوتر يتطلب القيام بالنشاطات الآتية:

النشاط	الوصف	الزمن اللازم بالأشهر	الفعالية السابقة
A	دراسة الجدوى الاقتصادية	4	_
B	وضع التصاميم الهندسية والأشكال المظهرية	3	A
C	شراء المكائن	4	A
D	توفير الأيدي العاملة	8	B.C
E	تنظيم خطوط الإنتاج	4	C
F	تدريب الفنيين	6	D
G	توفير المستلزمات الثانوية والإنتاج	3	E
H	الإنتاج التجريبي والاستلام	7	G.F

الحل:



V. طرق حل الشبكات

كما أشرنا سابقا ومن أجل أن نقوم بتخطيط وجدولة ورقابة المشروع و إمكانية تنفيذه بأقل تكلفة ممكنة في ظل الموارد المتاحة، والأهم التحكم في زمن انتهاء المشروع نستعين بالطريقتين التاليتين وهما:

1- طريقة المسار الحرج CPM

يعرف المسار الحرج على أنه مجموعة النشاطات ذات العلاقات المتعاقبة فيما بينها وتشكل السلسلة الحرجة للوظائف التي يكون في مجملها المشروع الكلي.

ويشير هذا المفهوم إلى هناك بعض الأنشطة تحتاج زمن أطول من الأنشطة الأخرى في نفس الشبكة، وبالتالي زمن انتهاء المشروع يكون مرتبط بزمن النشاطات الأكثر زمناً.

وتجدر الإشارة إلى أن الأنشطة الحرجة لا يوجد فيها زمن فائض أي أن الزمن الفائض فيها يساوي صفر، و أن أي تأخير فيها يؤدي إلى تأخير المشروع.

وبالتالي فإن المسار الحرج هو أطول مسار وقتاً في شبكة الأعمال.

أ- طريقة تحديد المسار الحرجة (CPM)

وتتضمن حسابات المسار الحرج تطبيق نوعين، وهي الحسابات الأمامية والحسابات الخلفية.

*** الحسابات الأمامية:**

وتسمى بحساب وقت الابتداء المبكر Earliest Start time (ES) وهو حساب يبدأ من بداية الشبكة (الحدث 01) إلى الحدث الأخير في نهاية الشبكة، وتميل الوقت الذي يمكن أن يبدأ عنده نشاط بصورة مبكرة و الصيغة العامة لوقت الابتداء المبكر للحدث j هي:

$$ES_j = Max_i (ES_i + D_{ij})$$

حيث أن:

ES_i = هو حدث البداية للنشاط (i , j) حيث $i<j$

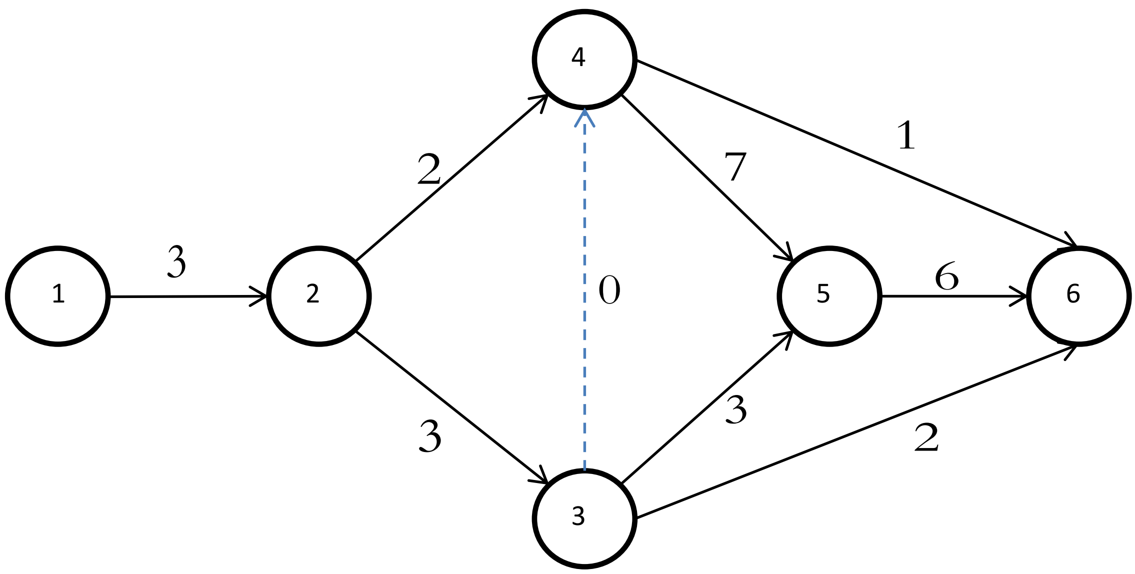
ES_j = هو حدث النهاية للنشاط (i , j)

D_{ij} = هو الوقت اللازم لتنفيذ النشاط (i , j)

وتوضح هذه الأرقام في $\square$ عند الحدث J

مع العلم أن $ES_1=0$ لأن بداية المشروع لا تستغرق أي زمن.

مثال: أحسب وقت الابتداء المبكر لشبكة الأعمال التالية:



$ES_1 = 0$

$ES_2 = ES_1 + D_{12} = 0+ 3 =0$

$ES_3 = ES_2 + D_{23} = 3 + 3 = 6$

$ES_4 = \text{Max}\ (ES_2 + D_{24}\ ,\ ES_3 + D_{34})$

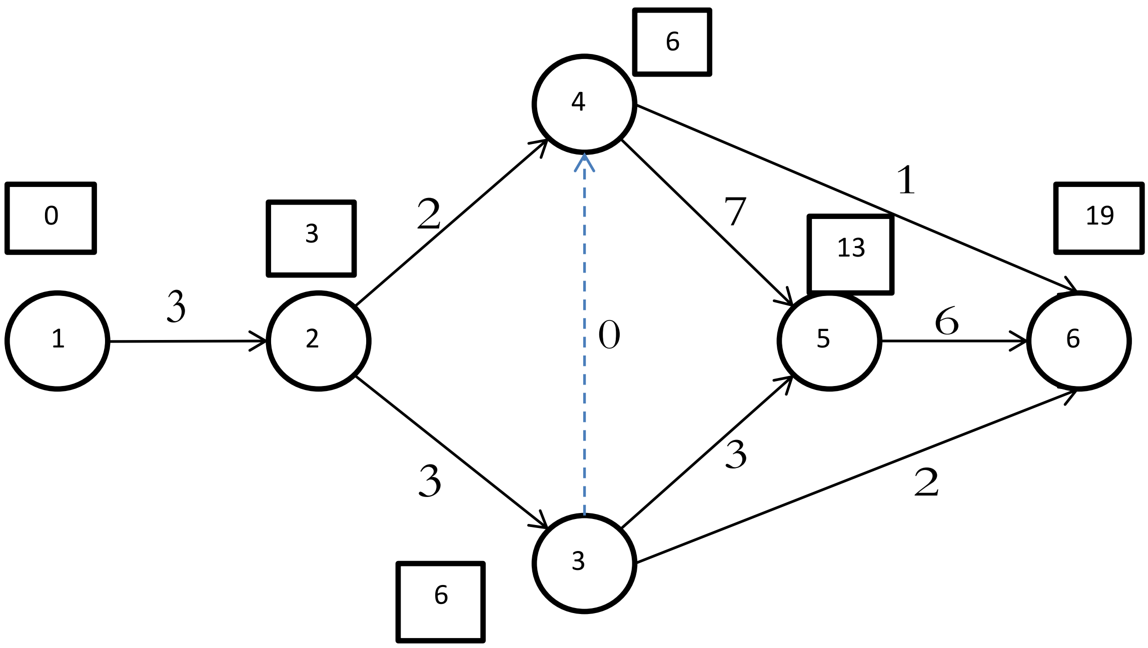
$$= \text{Max}\,(3+2\ ,\ 6+0) = \text{Max}\,(5,6) = 6$$

$$ES_5 = \text{Max}\,(ES_4+D_{45}\ ,\ ES_3+D_{35})$$

$$= \text{Max}\,(6+7\ ,\ 6+3) = \text{Max}\,(13,9) = 13$$

$$ES_6 = \text{Max}\,(ES_4+D_{46}\ ,\ ES_5+D_{56}\ ,\ ES_3+D_{36})$$

$$= \text{Max}\,(6+1\ ,\ 13+6\ ,\ 6+2\ ) = \text{Max}\,(7,19,8) = 19$$



*** الحسابات الخلفية :**

وتسمى بحساب وقت الإنجاز المتأخر Latest Completion time (L C) وهو حساب الوقت بالإتجاه الخلفي لكافة الأنشطة المؤدية إلى الحدث، حيث يبدأ من نهاية الشبكة ويستمر باتجاه خلفي حتى يصل إلى بداية الشبكة الحدث (01).

وباختصار هو آخر وقت يمكن أن ينتهي عنده نشاط ما دون أن يؤدي ذلك إلى تأخير في وقت إنجاز المشروع و يحسب لكلل حدث i وفق الصيغة التالية:

$$LC_i = Min_j [\ LC_j - D_{ij}\ ]$$

LC_i : هو الانجاز المتأخر للحدث i للنشاط (i,j) $i < j$

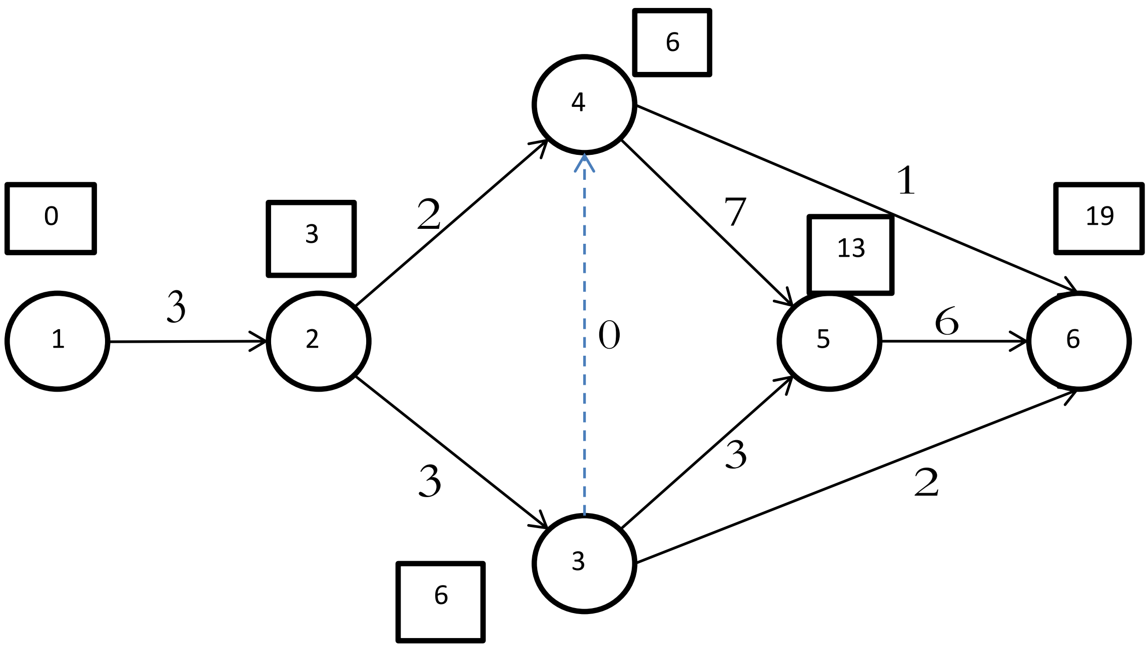
LC_j : هو الانجاز المتأخر للحدث j للنشاط (i,j)

D_{ij} : الوقت اللازم لتنفيذ النشاط (i,j)

وتوضح هذه الأرقام في $\triangle$ عند الحدث i .

مع العلم أنه إذا كان لدينا عدد الأحداث e فإن : $LC_e = ES_e$

مثال: أوجد الحسابات الخلفية للشبكة التالية:



$LC_6 = ES_6 = 19$

$LC_5 = Min\ (LC_6 - D_{56}) = Min\ (19 - 6) = 13$

$LC_4 = Min\ (LC_5 - D_{45}\ ,\ LC_6 - D_{46})$

$= Min\ (13 - 7\ ,\ 19 - 1)$

$= Min\ (6\ ,\ 18) = 6$

$LC_3 = Min\ (LC_4 - D_{34}\ ,\ LC_5 - D_{35}\ ,\ LC_6 - D_{36})$

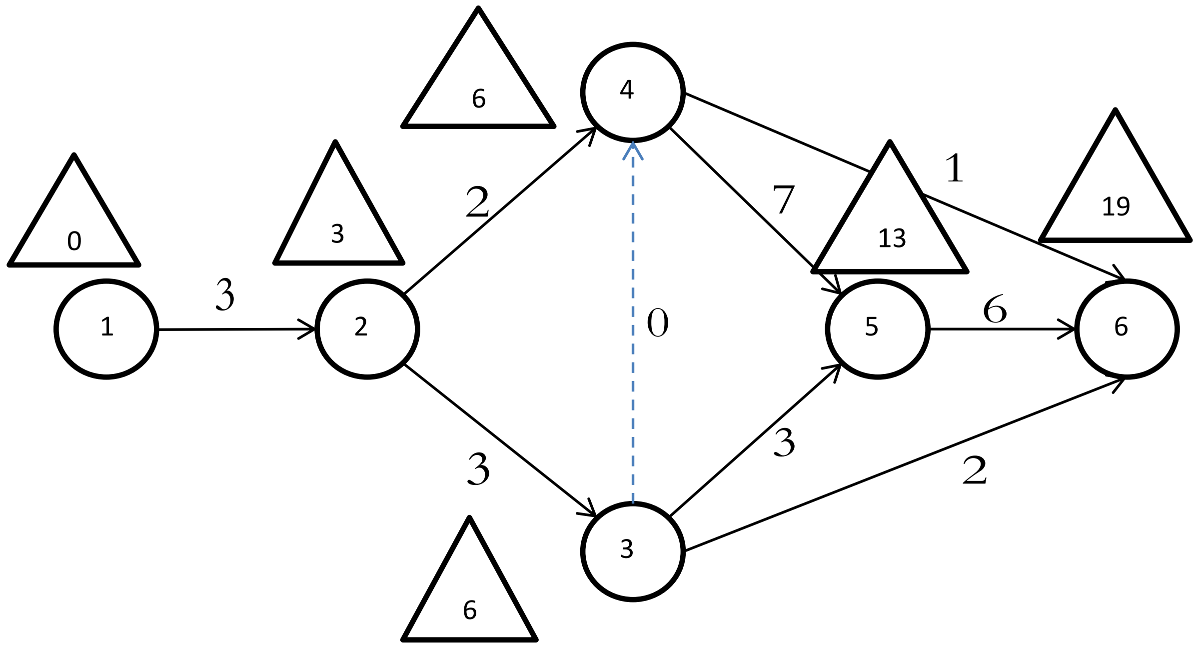
$= Min\ (6 - 0\ ,\ 13 - 3\ ,\ 19 - 2)$

$= Min\ (6\ ,\ 10\ ,\ 17) = 6$

$LC_2 = Min\ (LC_4 - D_{24}\ ,\ LC_3 - D_{23})$

$= Min\ (6 - 2\ ,\ 6 - 3) = Min\ (4\ ,\ 3) = 3$

$LC_1 = LC_2 - D_{12} = 3 - 3 = 0$



*** تحديد المسار الحرج:**

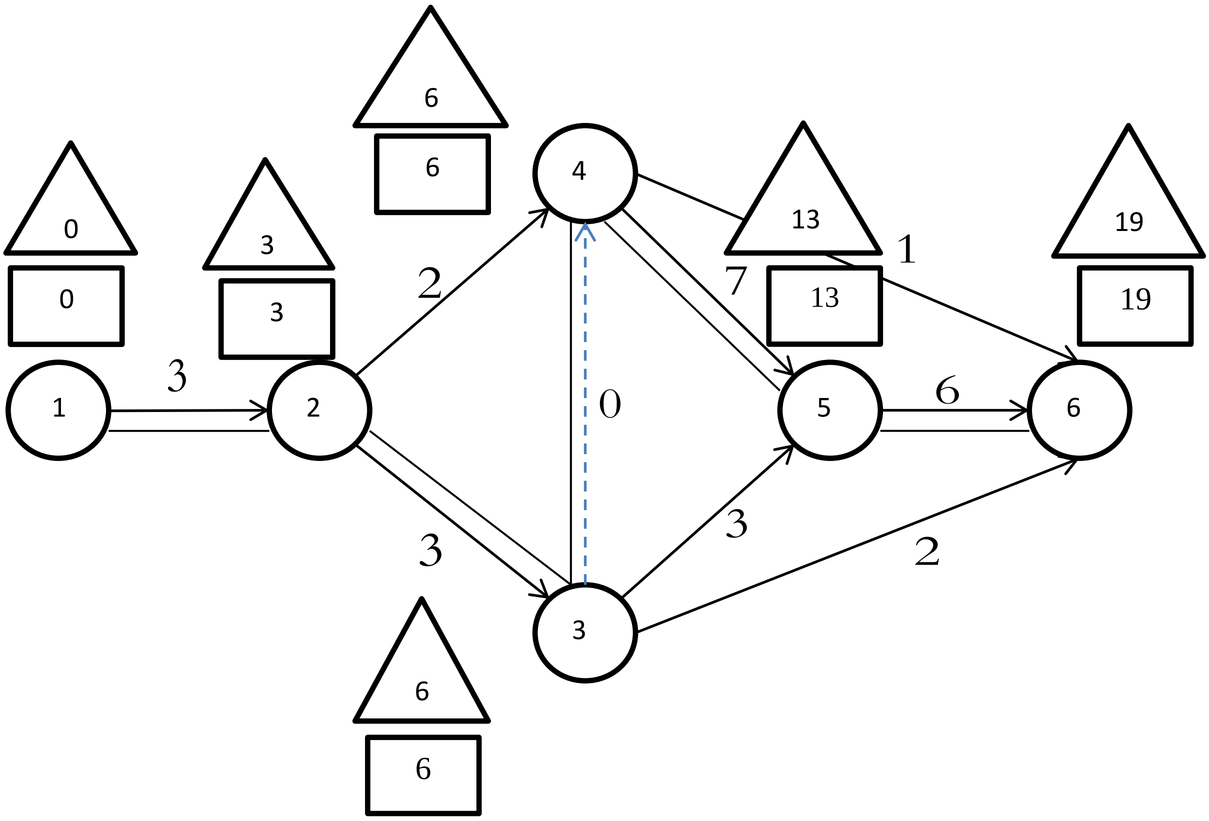
وبالتالي تحديد المسار الحرج يمر بمرحلتين وهي تحديد وقت الابتداء المبكر، وتحديد زمن الانتهاء المتأخر.

وبالتالي فإن النشاط (i , j) يقع على المسار الحرج إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

$$E\,S_i = L\,C_i$$

$$E\,S_j = L\,C_j$$

$$E\,S_j - E\,S_i = L\,C_j - L\,C_i = D_{ij}$$



ومن الشكل أعلاه نلاحظ أن النشاطات (5،6) و (4،5) و (3،4) و (2،3) و (1،2)

هي نشاطات حرجة تشكل المسار الحرج ، وهو أكثر وقت لإنجاز المشروع.

أما النشاطات (4،6) و (3،6) و (3،5) و (2،4) فهي نشاطات غير حرجة، وهي تحقق الشرطين الأول و الثاني و لا تحقق الشرط الثالث.

ب- تحديد الوقت الفائض :

يمكن تحديد المسار الحرج من خلال حساب الوقت الفائض بحيث يكون لنشاط حرجاً عندما يكون الوقت الفائض لهذا النشاط مساوي للصفر ، وقبل تحديد الوقت الفائض يجب أن نتعرف على نوعين من الأزمنة:

- **وقت الابتداء المتأخر (LS) (Latest Start time):**

وهو آخر وقت يمكن أن يبدأ فيه النشاط (i , j) بدون أن يتأخر المشروع . ويحسب بالقانون التالي:

$$LS_{ij} = LC_j - D_{ij}$$

- **وقت الانجاز المبكر (EC) (Earliest Completion time) :**

وهو وقت إنتهاء النشاط (i , j) التي بدأت في وقت الابتداء المبكر لها ويحسب كما يلي:

$$EC_{ij} = ES_i + D_{ij}$$

وهناك نوعان من الوقت الفائض هما:

- **الوقت الفائض المرن (المرونة الحرة) (Free floot) (FF):**

ويعرف الوقت الفائض المرن للنشاط (i , j) هو مقدار التجاوز بين الوقت المتاح (ES_j-ES_i) والوقت اللازم لتنفيذ ذلك النشاط D_{ij}.

$$FF_{ij} = ES_j - ES_i - D_{ij}$$

- **الوقت الفائض الكلي (Total float) (TF):**

وهو الزمن الذي يمكن للنشاط أن يمتد بمقداره ، وهو الفرق بين أكبر وقت متاح $(LC_j - ES_i)$ والوقت اللازم لتنفيذ النشاط D_{ij}.

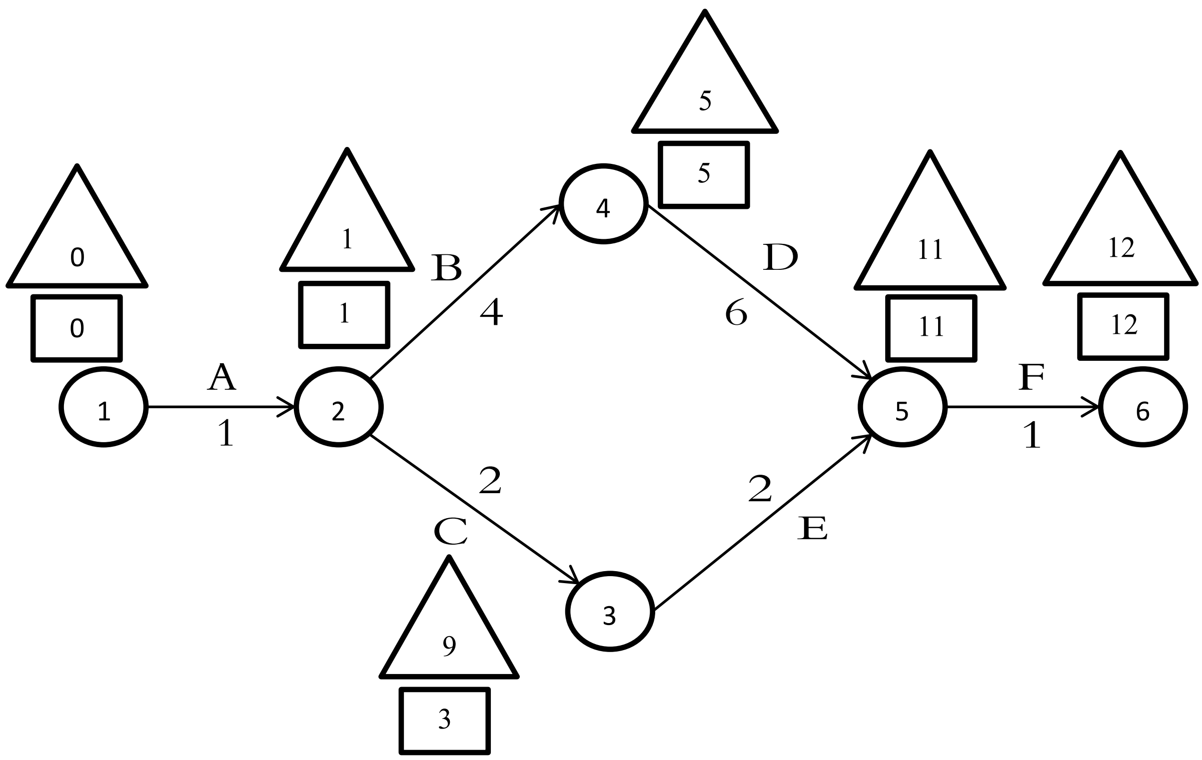
$$TF_{ij} = LC_j - ES_i - D_{ij}$$

مثال:

من البيانات الآتية أرسم شبكة الأعمال و أحسب الفائض الكلي و الفائض المرن للأنشطة؟

النشاط	النشاط السابق	الزمن بالأشهر
A	—	1
B	A	4
C	A	2
D	B	6
E	C	2
F	D,E	1

الحل:



- حساب وقت الابتداء المبكر (**ES**):

$ES_1=0$

$ES_2=ES_1+D_{12}= 0+1=1$

$ES_3=ES_2+D_{23}= 1+2=3$

$ES_4=ES_2+D_{24}= 1+4 = 5$

$ES_5=Mox_{34}(ES_3+D_{35} , ES_4+D_{45}) = (3+2 , 5+6) = 11$

$ES_6= ES_5+D_{56}= 11+1 = 12$

- حساب وقت الانجاز المتأخر (**LC**)

$LC_6=ES_6=12$

$LC_5=LC_6-D_{56}=12-1=11$

$LC_4= LC_5-D_{45}= 11-6=5$

$LC_3=LC_5-D_{35}=11-2=9$

$LC_2=Min_{34}(LC_3-D_{23} , LC_4-D_{24}) = (9-2 , 5-4) = (7,1) = 1$

$LC_1=LC_2-D_{12}=1-1=0$

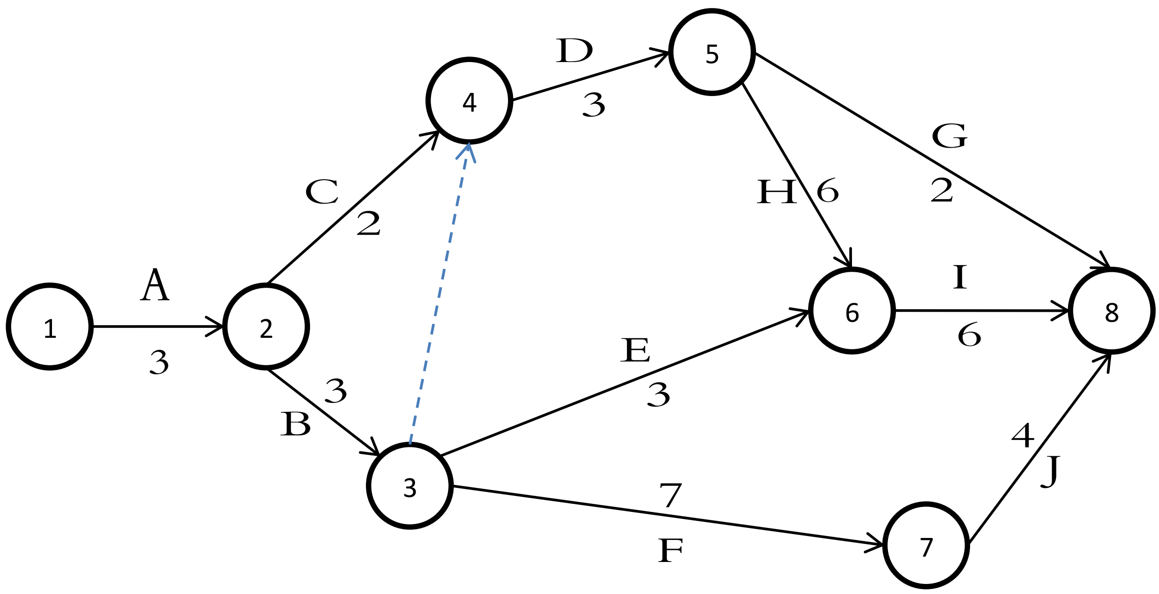
النشاط	المسار	D_{ij}	ES_i	LC_j	ES_j	FF_{ij}	TF_{ij}
A	1.2	1	0	1	1	0	0
B	2.4	4	1	5	5	0	0
C	2.3	2	1	9	3	0	6
D	4.5	6	5	11	11	0	0
E	3.5	2	3	11	11	6	6
F	5.6	1	11	12	12	0	0

$FF_{ij} = ES_j - ES_i - D_{ij}$

$TF_{ij} = LC_j - ES_i - D_{ij}$

مثال 02:

لديك شبكة الأعمال التالية:

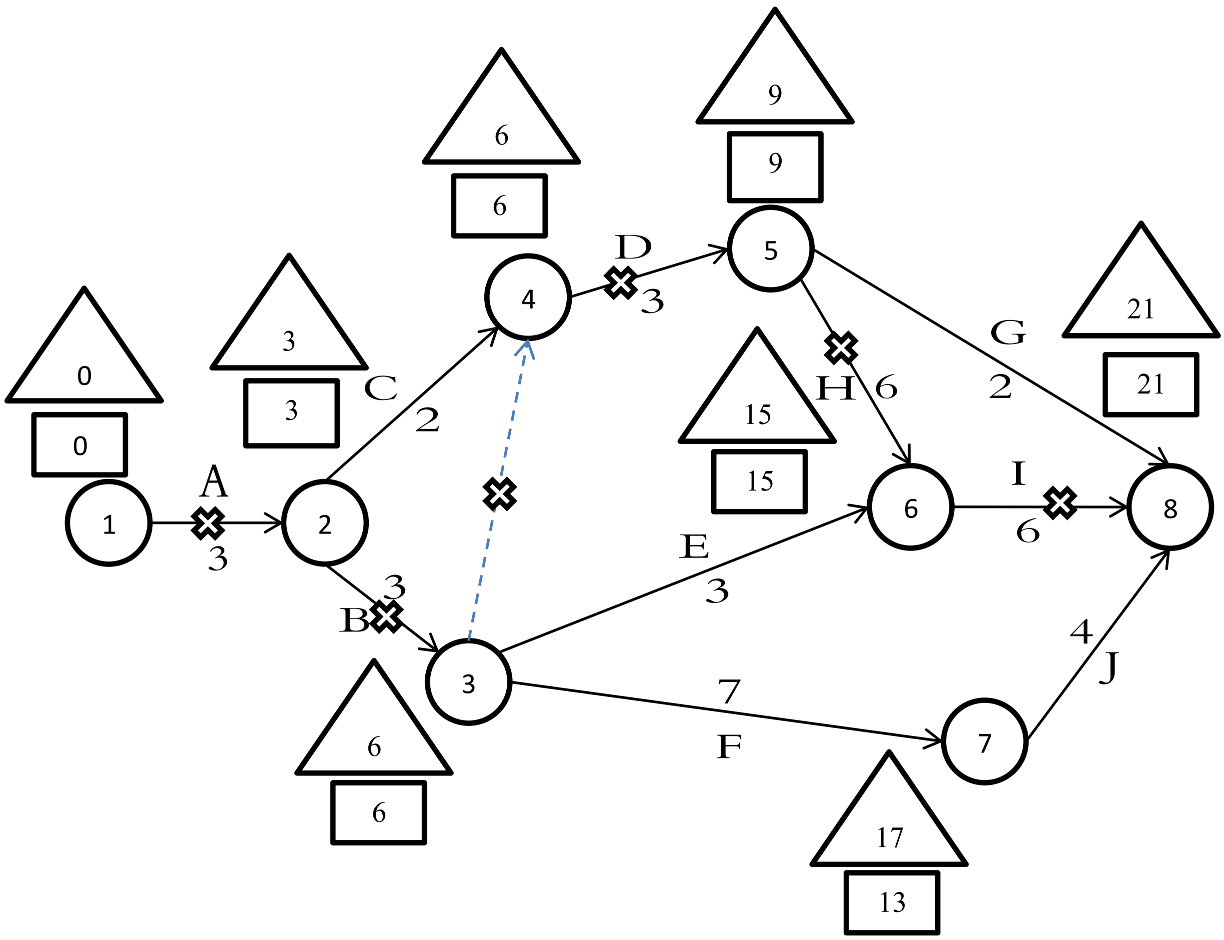


من الشبكة التالية أوجد التالي:

1. المسار الحرج . CPM
2. المرونة الكلية . FT
3. المرونة الحرة . FF

الحل:

- نرسم أولا شبكة الأعمال:



- نحسب البداية المبكرة لكل نشاط (ES_i):

$ES_1=0$

$ES_2=ES_1+D_{12}= 0+3=3$

$ES_3=ES_2+D_{23}= 3+3=6$

$ES_4=Mox_{23}(ES_2+D_{24}\ ,\ ES_3+D_{34})=(3+2\ ,\ 6+0)=(5\ ,\ 6)=6$

$ES_5=ES_4+D_{45}=\ 6+3=9$

$ES_6=Mox_{5,3}(ES_3+D_{36}\ ,\ ES_5+D_{56})=(6+3\ ,\ 9+6)=(9\ ,\ 15)=15$

$ES_7=ES_3+D_{37}=6+7=13$

$ES_8=Mox_{5,6,7}(ES_5+D_{58}\ ,\ ES_6+D_{68}\ ,\ ES_7+D_{78})=(9+2\ ,\ 15+6\ ,$
$+13+4)=(11,21,17)=21$

- نحسب النهاية المتأخرة (LC_j):

$LC_8=21$

$LC_7=Min(LC_8-LC_{78})=21-4=17$

$LC_6=Min(LC_8-LC_{68})=21-6=15$

$LC_5=Min_{6,8}(LC_6-D_{56}\ ,\ LC_8-D_{58})=(15-6\ ,\ 21-2)=(9\ ,\ 19)=9$

$LC_4=Min_5(LC_5-D_{45})=9-3=6$

$LC_3=Min_{4,6,7}(LC_4-D_{34}\ ,\ LC_6-D_{36}\ ,\ LC_7-D_{37})=(6-0\ ,\ 15-3\ ,\ 17-$
$7)=(6,12,10)=6$

$LC_2=Min_{3,4}=(LC_3-D_{23}\ ,\ LC_4-D_{24})=(6-3\ ,\ 6-2)=(3,4)=3$

$LC_1=LC_2-LC_{12}=3-3=0$

النشاط	المسار	D_{ij}	ES_i	LC_j	ES_j	FF_j	TF_{ij}	نوع النشاط
A	1.2	3	0	3	3	0	0	حرج
B	2.3	3	3	6	6	0	0	حرج
C	2.4	2	3	6	5	0	1	
D	4.5	3	6	9	9	0	0	حرج
E	3.6	3	6	15	9	0	6	
F	3.7	7	6	17	13	0	4	
H	5.6	6	9	15	15	0	0	حرج
G	5.8	2	9	21	11	0	10	
I	6.8	6	15	21	21	0	0	حرج
J	7.8	4	13	21	17	0	4	

2- طريقة مراجعة وتقييم المشروع (PERT)

إذا كانت العمليات الإنتاجية للمشروع متكررة فإنه يسهل علينا تحديد الزمن اللازم تنفيذه كل نشاط، أما إذا كانت العمليات غير متكررة لم تحدث من قبل بنفس الطريقة، ولا تتوفر معلومات سابقة يمكن الاعتماد عليها، لهذا نلجأ غلى استخدام أسلوب (PERT) ، هذا الأسلوب يفترض لتنفيذ النشاط ثلاثة أزمنة متوقعة وهي كما يلي:

- **الزمن التفاؤلي:**

وهو أقل وقت يلزم لتنفيذ النشاط، وبالتالي افتراض أن كل شيء سيتم على أحسن ما يرام، ويرمز له بـ a_{ij}

- **الزمن التشاؤمي:**

وهو أطول وقت لازم لتنفيذ النشاط، بافتراض أن النشاط ستعترضه كل العقبات المتوقع حدوثها، مثل تعطل المكائن، عجز في الموارد ، تأخر استلام المواد الأولية، وغيرها من الأسباب والمشاكل بصفة عامة، ويرمز له بـ b_{ij}

- **الزمن الأكثر احتمالاً:**

وهو أكثر الأوقات شيوعا، ويشمل أحسن تقديرات الفترة الزمنية اللازمة لتنفيذ النشاط في ظل الظروف الطبيعية، مع الأخذ بالاعتبار جميع الاحتمالات المتوقعة أثناء التنفيذ و يرمز له بالرمز m_{ij}

وبعد تحديد الأزمنة الثلاثة السابقة بإمكاننا تحديد الوقت الطبيعي (الزمن المتوقع) وهو متوسط الأزمنة الثلاثة السابقة بأوزان مختلفة.

بحيث تعطى أربعة أوزان للزمن الأكثر احتمالاً (m).

ووزن واحد للزمن التفاؤلي (a).

ووزن واحد للزمن التشاؤمي (b).

وبالتالي فإن الزمن الطبيعي (المتوقع) t_{ij} (u) وفقا لطريقة PERT فإن قيمته التقديرية وفقا للتوزيع الاحتمالي Beat (بيتا) الذي تكون نقطة تحديه الوحيدة عند النقطة التي تمثل متوسط التقديرات النظرية ونهاية التقديري a,b كما يلي:

وبالتالي يكون الزمن الطبيعي (t_{ij}) (المتوقع(u)) كما يلي :.

$$Tij = \frac{a+b+4m}{6}$$

وتباينه

$$Vij = (\frac{b-a}{6})^2$$

إن الوقت الطبيعي $T_{i\,j}$ يقابل في طريقة CPM وقت تنفيذ المشروع D_{ij} وبالتالي فإنه يمكن استخدام الوقت الطبيعي T_{ij} لتحديد المسار الحرج للأنشطة وذلك لحساب وقت البداية المبكرة والنهاية المتأخرة لتحديد الأنشطة الحرجة، كما في الطريقة السابقة.

مثال:

الجدول التالي يمثل أنشطة لمشروع معين و الأزمنة التقديرية اللازمة لتنفيذ كل نشاط.

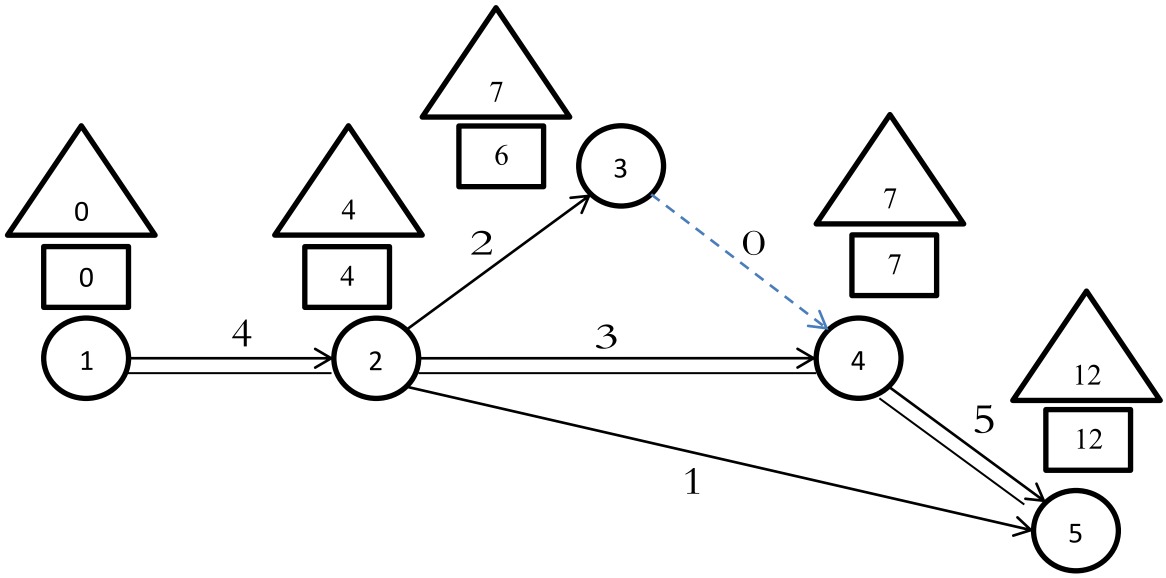
المطلوب : حساب الوقت الطبيعي (المتوقع) ورسم المخطط الشبكي و تحديد المسار الحرج ؟

النشاط	a_j	m_{ij}	b_i
1-2	2	3	10
2-3	1	1	7
2-4	2	3	4
2-5	1	1	1
3-4	0	0	0
4-5	3	4	11

t_{ij}
4
2
3
1
0
5

الحل :

1. تحديد الوقت الطبيعي T_{ij} وفق القانون $Tij = \frac{a+b+4m}{6}$
2. رسم الشبكة:



بالنسبة للشبكات الاحتمالية كما سبق و أشرنا أنه لا تتوفر معلومات دقيقة لمتخذ القرار لوضع زمن محدد لإنجاز المشروع ، وبالتالي يحاول على التغلب على هذا الموقف من خلال وضع تقديرات مختلفة لزمن الانجاز (تفاؤلي ، تشاؤمي ، أكثر احتمال) للوصول إلى الزمن المتوقع لإنجاز كل نشاط.

لكن المشكلة لا تقف عند هذا الحد، وذلك لأن عدم توفر بيانات كاملة و دقيقة تحتم على متخذ القرار أن يقدر مدى الانحراف بين زمن الإنجاز الفعلي والزمن المتوقع، في ضوء التقديرات التي قام بوضعها لزمن الإنجاز.

ومن أجل توضيح ذلك نورد المثال التالي:

مثـال: هناك شركة تريد إتمام أحد مشروعاتها وليس لدى الشركة معلومات دقيقة عن زمن الإنجاز لكل نشاط فلجأ مدير المشروع إلى وضع ثلاث تقديرات لزمن الإنجاز على النحو التالي:

النشاط	المسار	متفائل	أكثر احتمالا	متشائم
أ	1 , 2	2	6	10
ب	1 , 3	1	3	5
ج	1 , 5	6	8	10
د	2 , 4	4	7	10
هـ	3 , 4	3	4	5
و	3 , 6	10	12	26
ع	4 , 7	10	16	34
ل	5 ,6	5	8	17
ط	6 , 7	7	9	17

الحل:

1.إيجاد الوقت المتوقع (u) (t_{ij}):

t_{12} = 2+24(6)+10 / 6 = 2+24+10/6 = 36/6 = 6

t_{13} = 1+3(4)+5 / 6 = 1+12+5 / 6 = 18/6 =3

t_{15} = 6+8(4)+10 / 6 = 6+32+10 / 6 =48 / 6 = 8

$t_{2,4}$ = 4+7(4)+10 / 6 = 42 / 6 = 7

t_{34} = 3+4(4)+5 / 6= 3+16+5/6 = 24/6 = 4

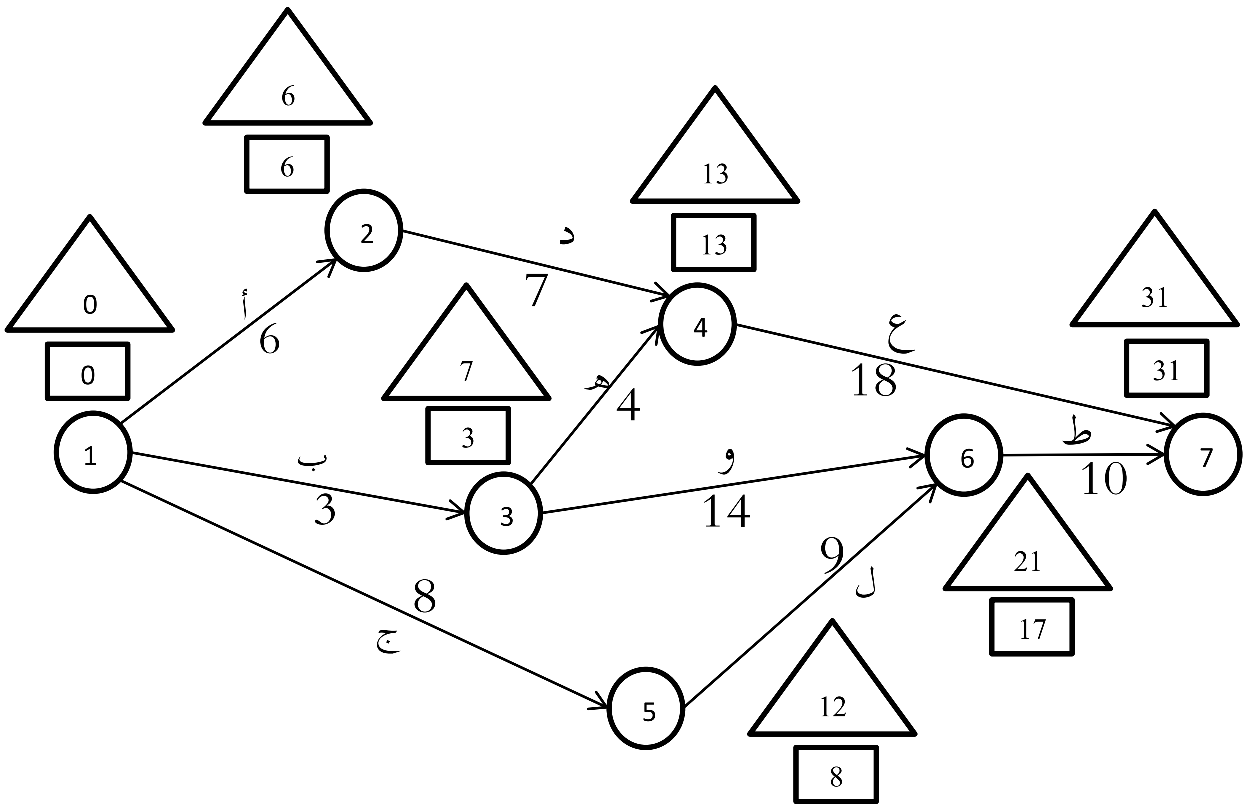
t_{36} = 10+12(4)+26 / 6 = 10+48+26 / 6 = 14

t_{47} = 10+16(4)+34 / 6 = 10+64+34 / 6 = 18

t_{56} = 5+8(4)+17 / 6 = 5+32+17 / 6 = 54/6 = 9

$t_{6,7}$ = 7+9(4)+17 / 6 = 7+36+17 / 6 = 60/6 = 10

2.رسم الشبكة على ضوء الوقت المتوقع:



3.تحديد المسار الحرج : CPM

نلاحظ أن المسار الحرج هو أ ، د ، ع

(1,2) ⟶ (2,4) ⟶ (4,7)

النشاط	المسار	E (u)	Var (u)
أ	1–2	6	1,77
د	1,2,4	13	2,77
ع	1,2,4,7	31	18,77

$V_{12} = (10-2/6)^2 = (8/6)^2 = 1.77$

$V_{24} = (10-4/6)^2 = (6/6)^2 = 1$

$V_{4,7} = (34-10/6)^2 = (24/6)^2 = (4)^2 = 16$

احتمال الإنجاز في 35 أسبوع

$$Z = \frac{ST - E(u)}{\sqrt{Var(u)}}$$

$$Z = \frac{35 - 31}{\sqrt{18.77}}$$

$$Z = \frac{4}{4.33} = 0.923$$

من خلال جدول التوزيع الطبيعي، نجد أن نسبة أو احتمال انجاز المشروع في 35 أسبوع هو 0.82121 أي باحتمال 82.21 %

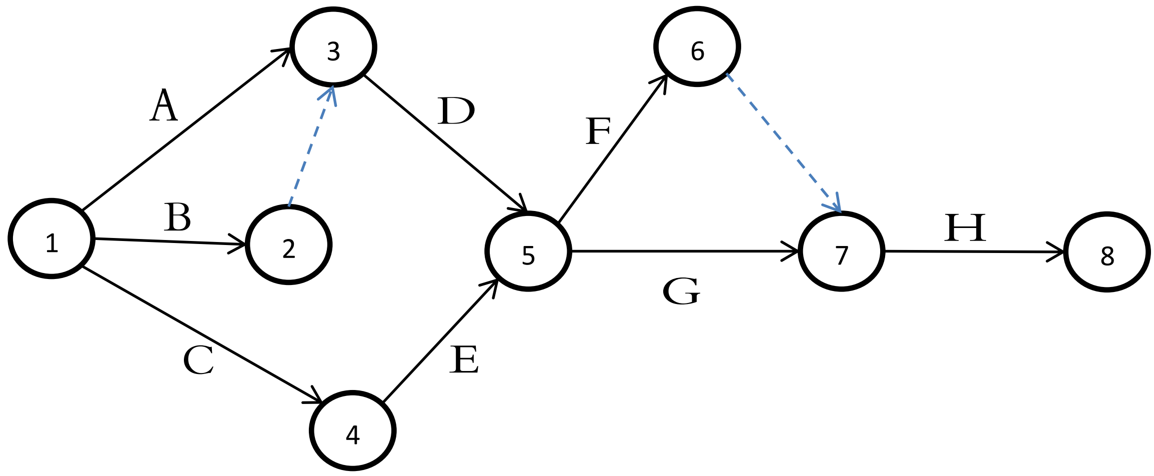
تطبيقات

التمرين رقم (1):

أرسم المخطط الشبكي لتمثيل النشاطات الآتية:

النشاط	A	B	C	D	E	F	G	H
النشاط السابق	/	/	/	A,B	C	D,E	D,E	F, G

الحل:

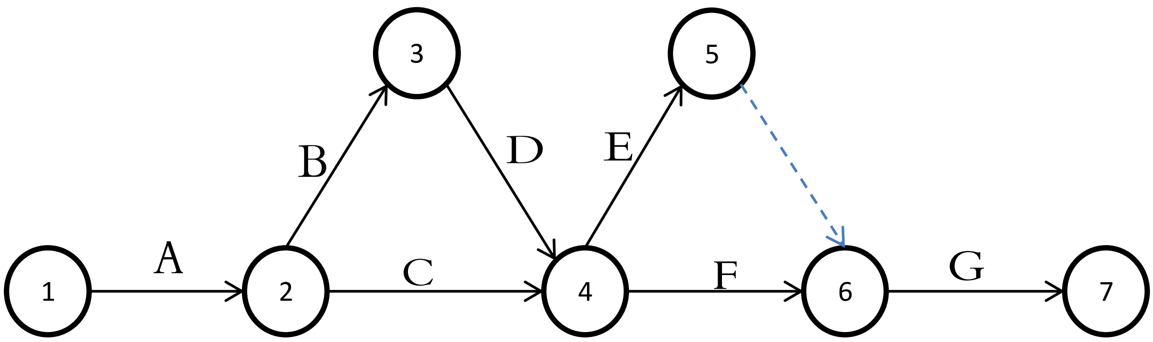


التمرين رقم (2):

أرسم شبكة الأعمال الآتية:

النشاط	النشاط السابق
A	/
B	A
C	A
D	B
E	C,D
F	C,D
G	E,F

الحل:



التمرين رقم (3):

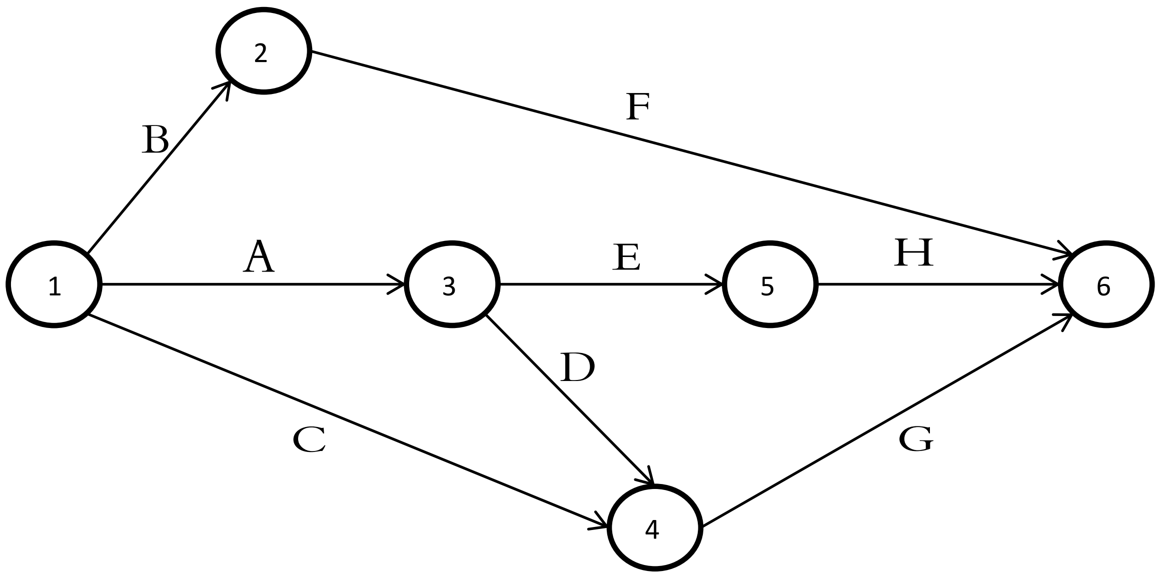
أحد المشروعات يحتوي على الوظائف من A إلى H حيث:

1- C,B,A النشاطات المبتدئ بها المشروع.

2- تتابع الوظائف.

- D,E يجب أن تتبع A
- F يجب أن تتبع B
- G يجب أن تتبع C,D
- H يجب أن تتبع E

الحل:



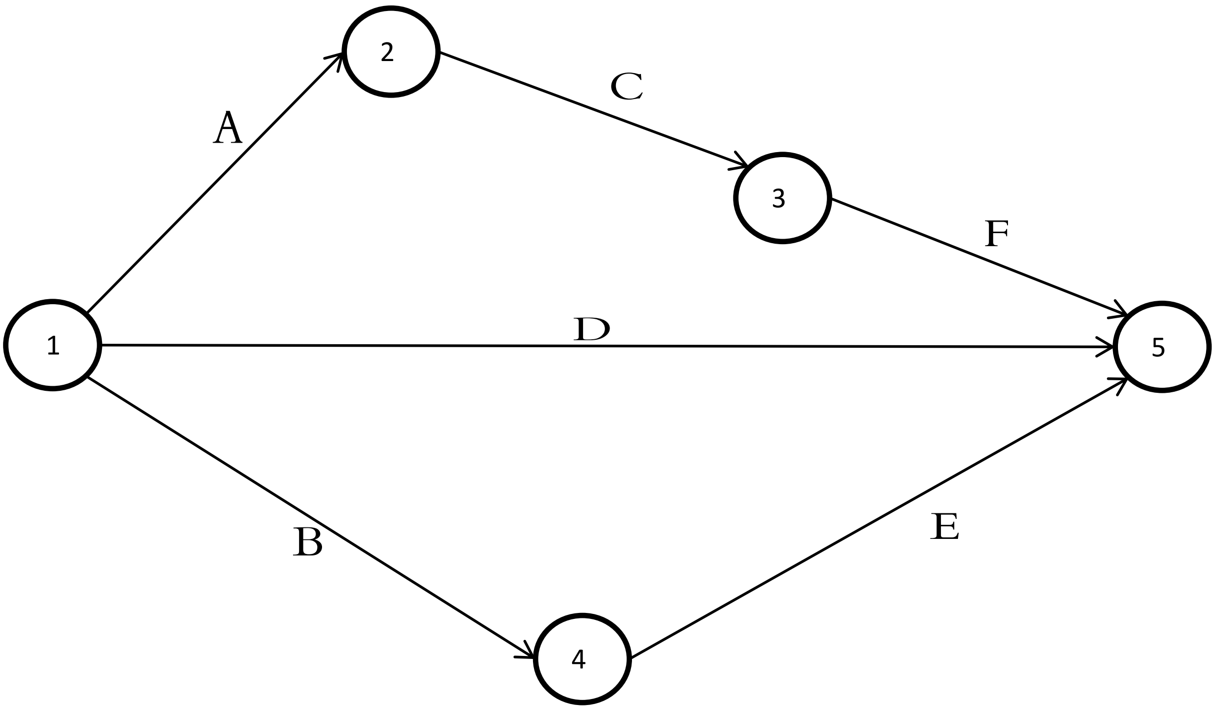
التمرين رقم (4):

المشروع التالي ممثل حسب المعطيات التالية:

النشاط	A	B	C	D	E	F
النشاط السابق	/	/	A	/	B	C

المطلوب: تمثيل المشروع شبكيا.

الحل:



التمرين رقم (5):

لدينا المشروع التالي ويتكون من الأنشطة التالية:

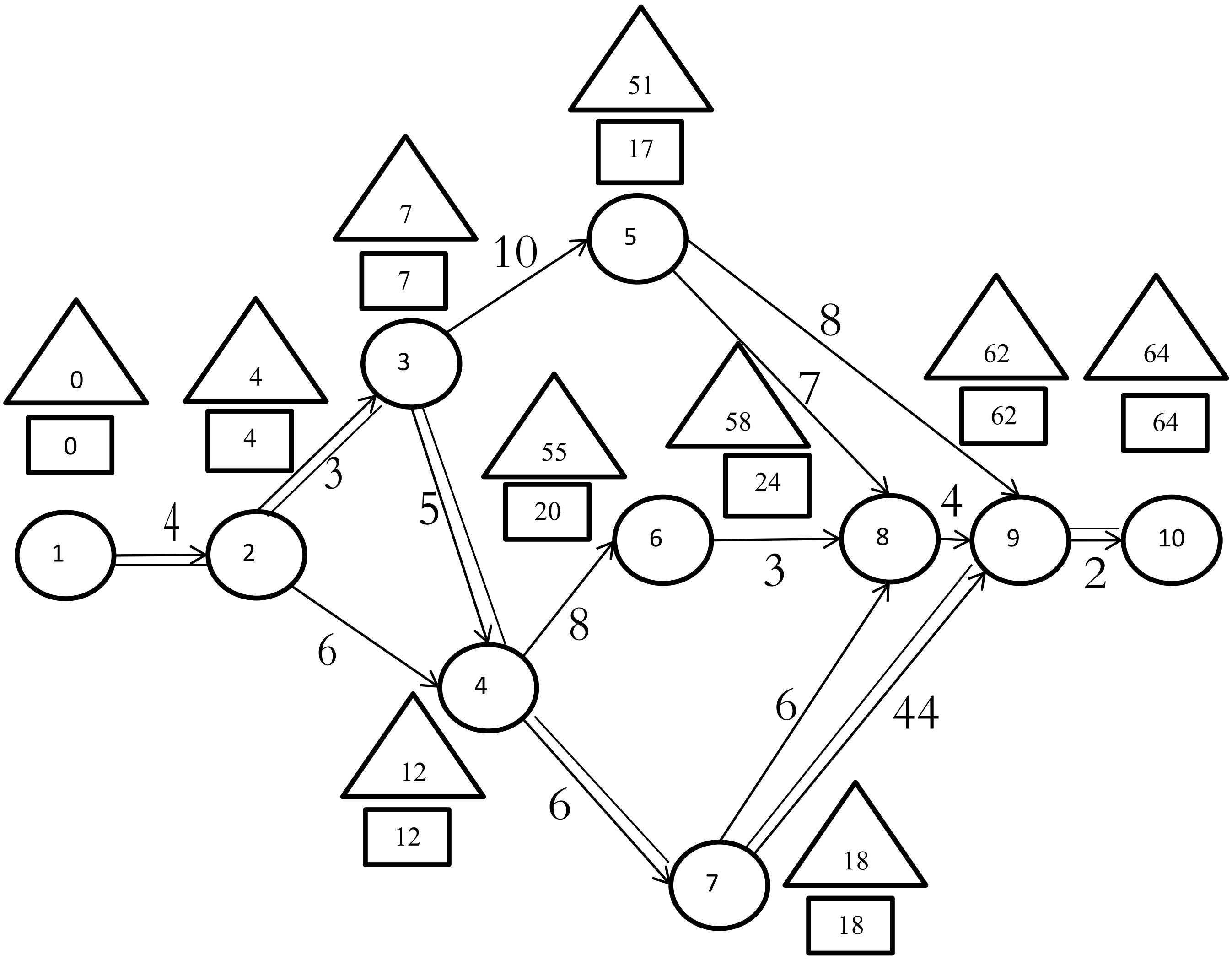
النشاط	الوقت اللازم
1.2	04
2.3	03
2.4	06
3.4	05
3.5	10
4.6	08
4.7	06
5.8	07
5.9	08
6.8	03
7.8	06
7.9	44
8.9	04
9.10	02

المطلوب:

1. إعداد شبكة الأعمال لهذا المشروع؟
2. تحديد المسار الحرج؟
3. أوجد المرونة الكلية والمرونة الحرة، وماذا نقصد بكليهما؟

الحل:

1. رسم الشبكة:



2. تحديد المسار الحرج:

ـ من أجل ذلك نحسب وقت البداية المبكرة (ES) ووقت النهاية المتأخرة (LC) وفق القوانين التالية:

$$ES_j=Max_i\ (ES_i+Dij)$$

$$LC_i=Min_j\ (LC_j+Dij)$$

(بالنسبة للحسابات الأمامية والخلفية أنظر الشبكة)

ـ بالنسبة للمسار الحرج يجب أن تتوفر فيه الشروط التالية:

$$ECi=LCi$$

ESj=LCj

ESJ-ESi=LCj-LCi= Dij

ونجدها تتوفر في الأنشطة التالية والتي تمثل المسار الحرج:

(1-2) (2-3) (3-4) (4-7) (7-9) (9-10)

3.ايجاد المرونة الكلية (TF) والمرونة الحرة (FF): ونجدهم بالقوانين التالية:

FF=Esj-ESi-Dij

TF=LCj-ESi-Dij

النشاط	Dij	ESi	ESj	LCj	FF	TF	نوع النشاط
1-2	4	0	4	4	0	0	حرج
2-3	3	4	7	7	0	0	حرج
2-4	6	4	12	12	2	2	مرن
3-4	5	7	12	12	0	0	حرج
3-5	10	7	17	51	0	34	مرن
4-6	8	12	20	55	0	35	مرن
4-7	6	12	18	18	0	0	حرج
5-8	7	17	24	58	0	34	مرن
5-9	8	17	62	62	37	37	مرن
6-8	3	20	24	58	1	35	مرن
7-8	6	18	24	58	0	34	مرن
7-9	44	18	62	62	0	0	حرج
8-9	4	24	62	62	34	34	مرن
9-10	2	62	64	64	0	0	حرج

- المقصود بالمرونة الحرة هي مقدار التأخر في النشاط الذي يؤثر في النشاط الموالي فقط.
- أما المقصود بالمرونة الكلية هي مقدار التأخر في النشاط الذي يؤثر على تأخر المشروع ككل.

التمرين رقم (6):

النشاط	A	B	C	D	E	F	G	H
النشاط السابق	-----	----	----	A/B	C	D/E	D/E	F/G
الوقت بالشهر	2	5	3	2	4	8	4	7

المطلوب:

1. أرسم شبكة الأعمال؟

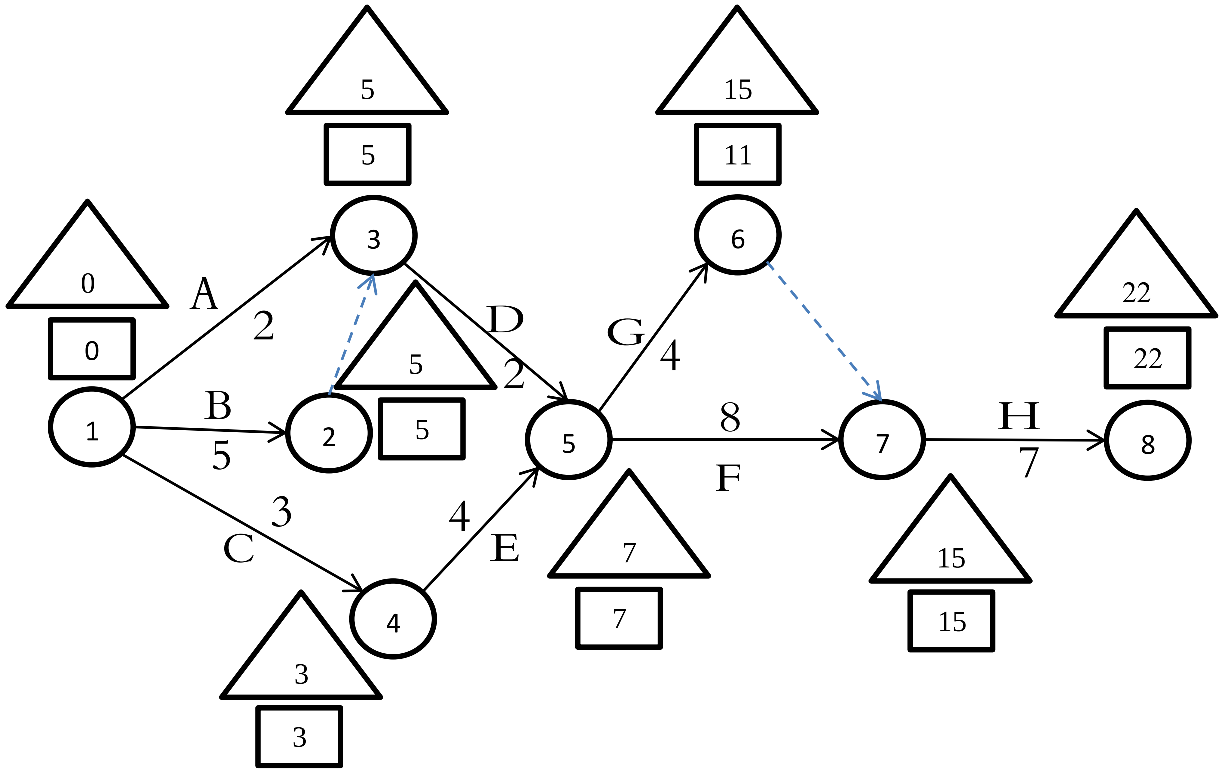
2. حدد المسار الحرج من خلال الفائض الزمني؟

3. إذا تأخر النشاط A ب 3 أشهر، هل يؤثر ذلك على النشاط الموالي؟ وهل يؤثر ذلك على نهاية المشروع ككل؟

4. إذا تأخر النشاط C بيوم واحد فقط، هل يؤثر ذلك على تأخر المشروع؟

الحل:

1. رسم الشبكة:



2. تحديد المسار الحرج:

النشاط	المسار	Dij	ESi	ESj	LCj	FF	TF	نوع النشاط
A	1-3	2	0	5	5	3	3	مرن
B	1-2	5	0	5	5	0	0	حرج
C	1-4	3	0	3	3	0	0	حرج
D	2-5	2	5	7	7	0	0	حرج
E	4-5	4	3	7	7	0	0	حرج
F	5-7	8	7	15	15	0	0	حرج
G	5-6	4	7	11	15	0	4	مرن
H	7-8	7	15	22	22	0	0	حرج

وبالتالي الأنشطة الحرجة هي: (B) (C) (D) (E) (F) (H)

نلاحظ في هذه الشبكة بالنسبة للمسار الحرج لدينا مسارين هما:

المسار الحرج الأول هو: (H) (F) (D) (B)

المسار الحرج الثاني هو: (H) (F) (E) (C)

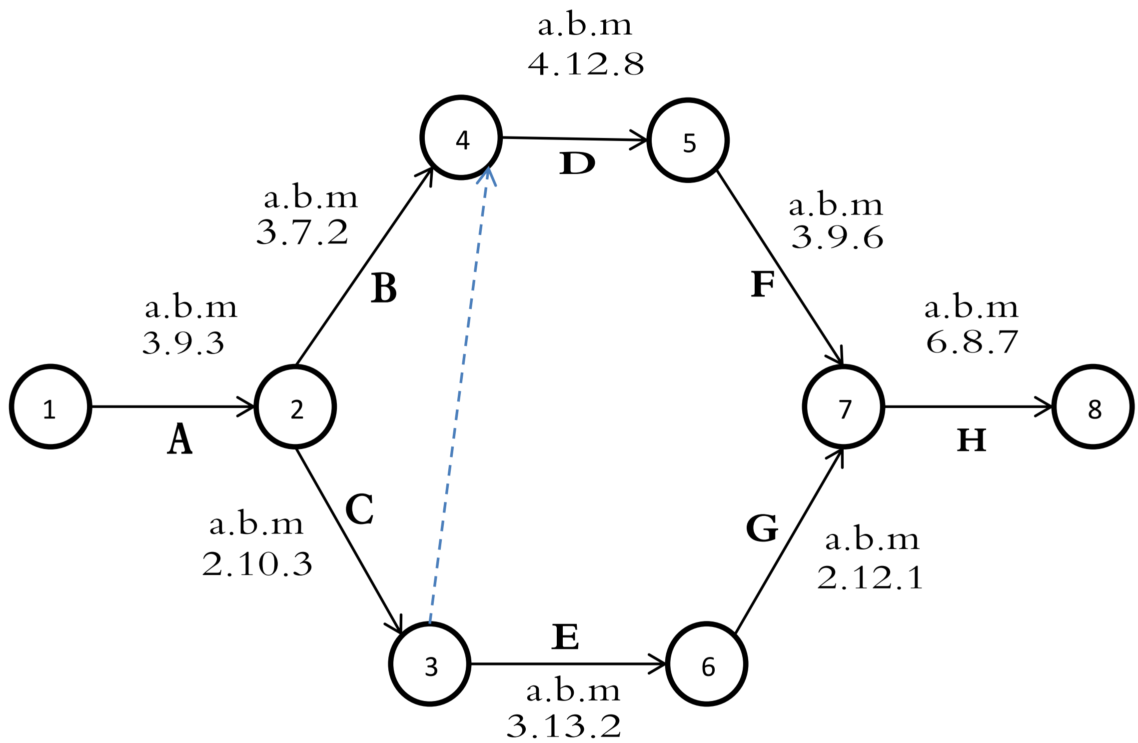
وهذه الحالة نتيجة أن مجوع وقت النشاطين (D) و (B) يساوي مجموع وقت النشاطين (E) و(C) ويساوي كلا المجموعين 7 أشهر.

3.إذا تأخر النشاط (A) بـ 3 أشهر فإنه لا يؤثر على النشاط الموالي لأن (FF=3)، ولا يؤثر كذلك على تأخر المشروع ككل لأن (TF=3).

4.إذا تأخر النشاط (C) بيوم واحد فقط فغنه يؤثر على نهاية أو تأخر المشروع لأنه نشاط حرج و (TF=0).

التمرين رقم (7):

لدينا شبكة الأعمال التالية، مع العلم أن كل نشاط له ثلاثة أزمنة مقدرة، أحسب احتمال انجاز هذا المشروع في 34 يوم.



الحل: من أجل معرفة احتمال انجاز المشروع في 34 يوم نتبع الخطوات التالية:

1. حساب الوقت الطبيعي: عن طريق القانون التالي:

$$T = \frac{a+4m+b}{6}$$

$$TA = \frac{3+(4\times3)+9}{6} = 4 \qquad TB = \frac{3+(4\times2)+7}{6} = 3$$

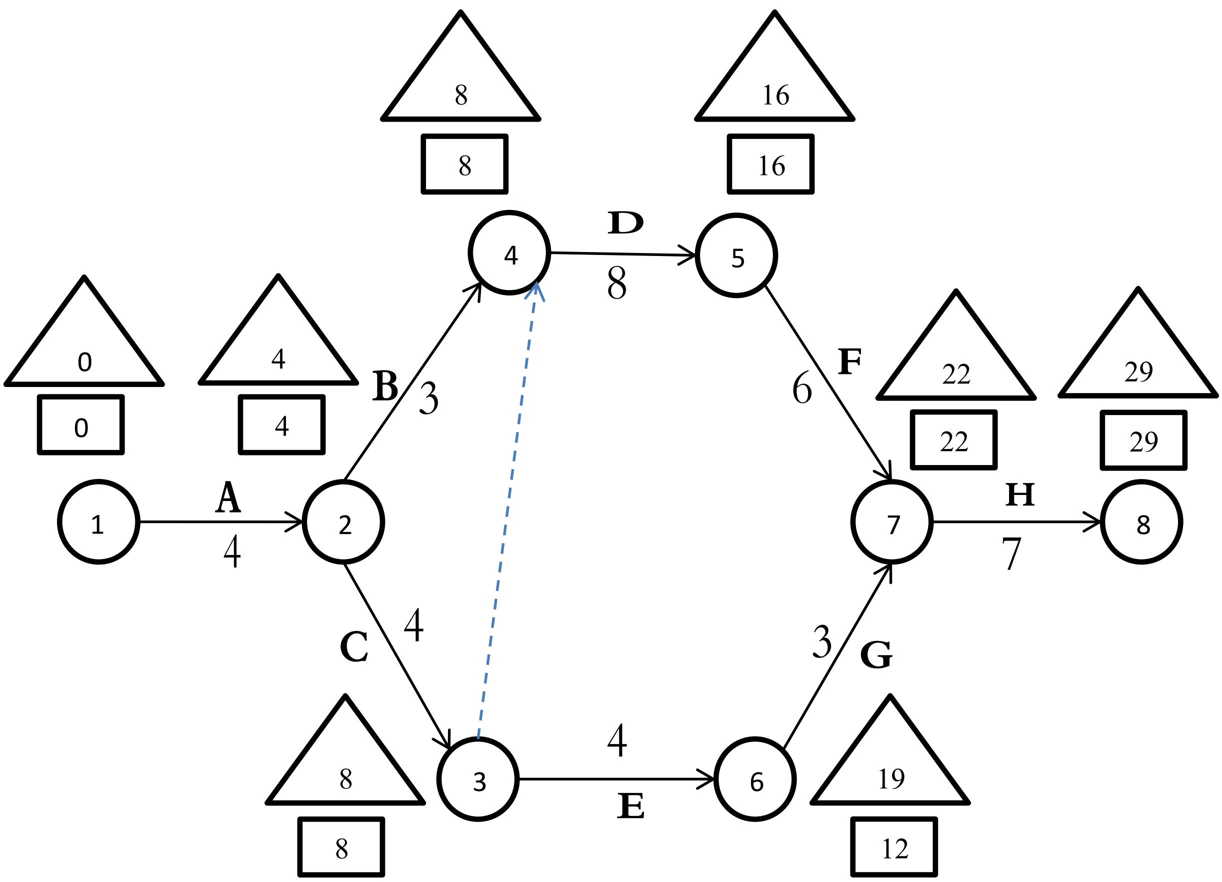
$$TC = \frac{2+(4\times3)+10}{6} = 4 \qquad TD = \frac{4+(4\times8)+12}{6} = 8$$

$$TE = \frac{3+(4\times2)+13}{6} = 4 \qquad TF = \frac{3+(4\times6)+9}{6} = 6$$

$$TG = \frac{2+(4\times1)+12}{6} = 3 \qquad TH = \frac{6+(4\times7)+8}{6} = 7$$

ثم نضع الأرقام الخاصة بالوقت على رسم الشبكة:

2. نرسم الشبكة:



3.تحديد المسار الحرج:

من أجل ذلك نحسب وقت البداية المبكرة (ES) ووقت النهاية المتأخرة (LC) وفق القوانين التالية:

$$ES_j=Max_i\ (ES_i+Tij)$$

$$LC_i=Min_j\ (LC_j+Tij)$$

(بالنسبة للحسابات الأمامية والخلفية أنظر الشبكة)

ـ بالنسبة للمسار الحرج يجب أن تتوفر فيه الشروط التالية:

ECi=LCi

ESj=LCj

ESJ-ESi=LCj-LCi= Tij

وبالتالي المسار الحرج يتكون من الأنشطة (H) (F) (D) (C) (A)، مع العلم أن النشاط (C) متصل مباشرة بالنشاط (D)، أما النشاط الوهمي فهو لتسهيل الرسم فقط وهو غير موجود في الواقع.

4.حساب احتمال انجاز المشروع في 34 يوم:

ونجده عن طريق القانون التالي:

$$P(z \leq t) = \frac{St-E(u)}{\sqrt{V}}$$

بحيث:

ST: هو الوقت الذي نريد أن نعرف احتمال انجاز المشروع فيه، وهو 34 يوم.

E(u): هو مجموع أوقات الأنشطة الحرجة، أو وقت المسار الحرج ، وهو 29 يوم.

$\sqrt{V}$: هو الانحراف المعياري لمجموع الأنشطة الحرجة فقط.

قبل ذلك نحسب تباين الأنشطة الحرجة بالقانون التالي $V = (\frac{b-a}{6})^2$

$$VA = \left(\frac{9-3}{6}\right)^2 = 1 \qquad VC = \left(\frac{10-2}{6}\right)^2 = 1.77$$

$$VD = (\frac{12-4}{6})^2 = 1.77 \qquad VF = (\frac{9-3}{6})^2 = 1$$

$$VH = (\frac{8-6}{6})^2 = 0.11$$

$$\sum V = V_A+V_C+V_D+V_F+V_H = 5.65 \qquad \sqrt{V} = \sqrt{5.65} = 2.37$$

نحسب الآن احتمال انجاز المشروع في 34 يوم، ونطبق القانون نجد:

$$P(z \leq 34) = \frac{34-29}{2.37} = 2.10$$

من خلال جدول التوزيع الطبيعي نجد أن احتمال انجاز المشروع في 34 يوم هو 98.214%

التمرين رقم (8):

النشاط	النشاط السابق	الزمن التفاؤلي	الزمن الأكثر احتمالا	الزمن التشاؤمي
A	_	42	60	78
B	A	42	60	78
C	A	20	30	52
D	B	9	18	27
E	C/D	10	20	42
F	C/D	30	50	70
G	E/F	9	18	27

المطلوب:

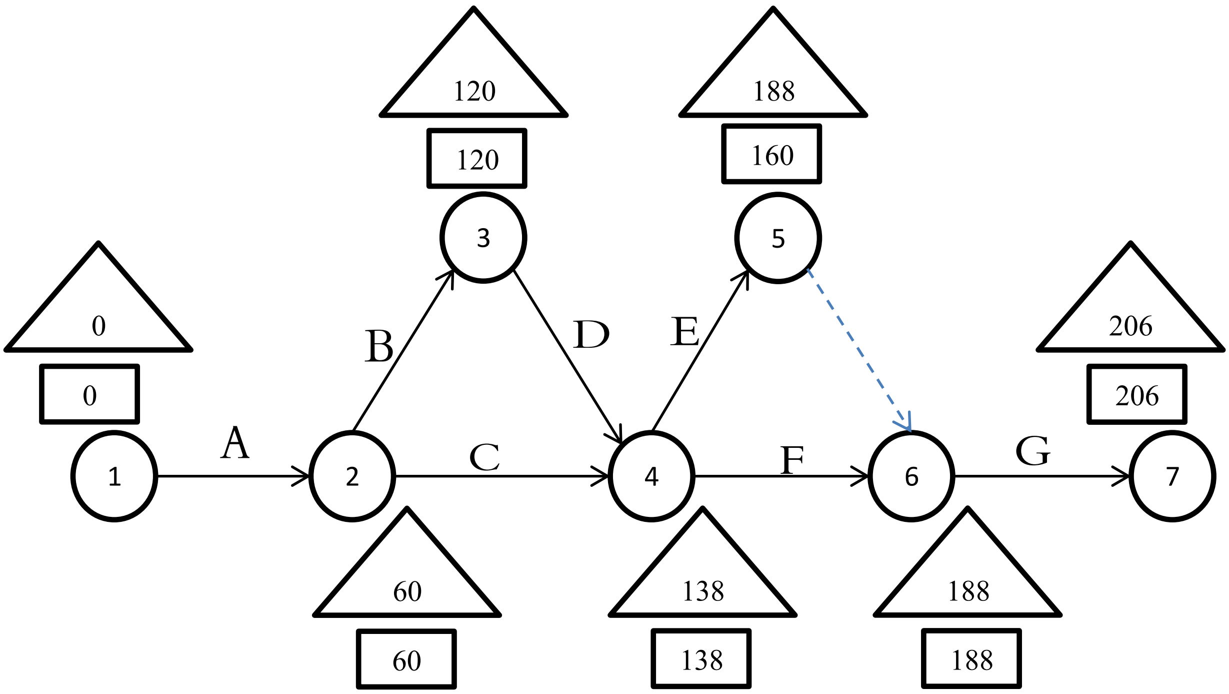
1. أوجد احتمال انجاز المشروع في الفترة الممتدة بين 200 يوم و 210 أيام ؟

2. أوجد احتمال انجاز المشروع في أكثر من 208 يوم؟

الحل:

من أجل حساب احتمال انجاز المشروع في مدة معينة يجب المرور بعديد الخطوات أولا وهي:

1. رسم الشبكة:



2. حساب الوقت الطبيعي: عن طريق القانون التالي:

$$T=\frac{a+4m+b}{6}$$

$$TA=\frac{42+(4\times 60)+78}{6}=60 \qquad TB=\frac{42+(4\times 60)+78}{6}=60$$

$$TC=\frac{20+(4\times 30)+52}{6}=32 \qquad TD=\frac{9+(4\times 18)+27}{6}=18$$

$$TE = \frac{10 + (4 \times 20) + 42}{6} = 22 \qquad TF = \frac{30 + (4 \times 50) + 70}{6} = 50$$

$$TG = \frac{9 + (4 \times 18) + 27}{6} = 18$$

ثم نضع الأرقام الخاصة بالوقت على رسم الشبكة.

3. تحديد المسار الحرج:

من أجل ذلك نحسب وقت البداية المبكرة (ES) ووقت النهاية المتأخرة (LC) وفق القوانين التالية:

$$ES_j = Max_i\ (ES_i + Tij)$$

$$LC_i = Min_j\ (LC_j + Tij)$$

(بالنسبة للحسابات الأمامية والخلفية أنظر الشبكة)

ـ بالنسبة للمسار الحرج يجب أن تتوفر فيه الشروط التالية:

ECi=LCi

ESj=LCj

ESJ-ESi=LCj-LCi= Tij

وبالتالي المسار الحرج يتكون من الأنشطة (G) (F) (D) (B) (A)

4. حساب احتمال انجاز المشروع في مدة زمنية معينة أو فترة معينة نجده باستخدام القانون التالي:

$$P(z \le t) = \frac{St - E(u)}{\sqrt{V}}$$

بحيث:

ST: هو الوقت الذي نريد أن نعرف احتمال انجاز المشروع فيه، وقد يكون فترة من إلى زمن معين.

E(u): هو مجموع أوقات الأنشطة الحرجة، أو وقت المسار الحرج ، وهو 206 يوم في هذا التمرين.

$\sqrt{V}$: هو الانحراف المعياري لمجموع الأنشطة الحرجة فقط.

قبل ذلك نحسب تباين الأنشطة الحرجة بالقانون التالي $V = (\frac{b-a}{6})^2$

$$VA = \left(\frac{78-42}{6}\right)^2 = 36 \qquad VB = \left(\frac{78-42}{6}\right)^2 = 36$$

$$VD = \left(\frac{27-9}{6}\right)^2 = 9 \qquad VF = \left(\frac{70-30}{6}\right)^2 = 44.4$$

$$VG = \left(\frac{27-9}{6}\right)^2 = 9$$

$$\sum V = V_A+V_B+V_D+V_F+V_G = 134.4 \quad \sqrt{V} = \sqrt{134.4} = 11.59$$

نحسب الآن الاحتمالات الواردة في أسئلة التمرين، وهما احتمالان كما يلي:

1. ايجاد احتمال انجاز المشروع في الفترة الممتدة بين 200 يوم و210 أيام ؟

في هذه الحالة نجد احتمال انجاز المشروع في 200 يوم، ثم نجد احتمال انجاز المشروع في 210 يوم، ثم نحسب الفرق بين النسبتين كما يلي:

- احتمال انجاز المشروع في 200 يوم:

$$P(Z \leq 200) = \frac{200-206}{11.59} = -0.51$$

من خلال جدول التوزيع الطبيعي فإن هذه القيمة (0.30503) وبالتالي احتمال انجاز المشروع في 200 يوم هو 30.503%

- احتمال انجاز المشروع في 210 يوم:

$$P(Z \leq 210) = \frac{210 - 206}{11.59} = 0.34$$

من خلال جدول التوزيع الطبيعي فإن هذه القيمة (0.63307) وبالتالي احتمال انجاز المشروع في 210 يوم هو 63.307%

وبالتالي احتمال انجاز المشروع في الفترة بين 200 و210 يوم هي الفرق بين النسبتين السابقتين كما يلي:

$$P(200 \leq Z \leq 210) = 0.63307 - 0.30503 = 0.32804$$

وبالتالي احتمال انجاز المشروع في الفترة ما بين 200 يوم و210 يوم هو 32.804%

2. ايجاد احتمال انجاز المشروع في أكثر من 208 يوم؟

في هذه الحالة نجد احتمال انجاز المشروع في 208 يوم، وبما أن السؤال هو البحث عن احتمال انجاز المشروع في أكثر من 208 يوم، فإنه سيكون الاحتمال العكسي للاحتمال الأول كما يلي:

- نحسب أولا احتمال انجاز المشروع في 208 يوم:

$$P(Z \leq 208) = \frac{208 - 206}{11.59} = 0.17$$

من خلال جدول التوزيع الطبيعي فإن هذه القيمة (0.56749) وبالتالي احتمال انجاز المشروع في 208 يوم هو 56.749%

- ثانيا نرجع للسؤال وهو احتمال انجاز المشروع في أكثر من 208 يوم:

$$P(Z \geq 208) = 1 - P(Z \leq 208)$$
$$P(Z \geq 208) = 1 - 0.56749 = 0.4325$$

يعني احتمال انجاز المشروع في أكثر من 208 يوم هو 43.25%

قائمة المراجع

1- أكرم محمد عرفان المهتدي، **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية (بحوث العمليات)**، الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2010م/1431هـ.

2- حمدي طه، **مقدمة في بحوث العمليات** ، الجزء الأول النماذج المحددة، ترجمة أحمد حسين علي حسين، دار المريخ للنشر، الرياض، المملكة العربية السعودية، بدون تاريخ.

3- حمدي طه، **مقدمة في بحوث العمليات** ، الجزء الثاني النماذج الاحتمالية، ترجمة أحمد حسين علي حسين، دار المريخ للنشر، الرياض، المملكة العربية السعودية، بدون تاريخ.

4- دلال صادق الجواد وحميد ناصر الفتال، **بحوث العمليات**، الطبعة العربية، دار اليازوري للنشر، عمان، الأردن، 2008.

5- رابح بوقرة، **بحوث العمليات**، الجزء الأول، جامعة المسيلة، الجزائر، 2010/2009.

6- رابح بوقرة، **بحوث العمليات – مدخل لاتخاذ القرارات**، الجزء الثاني، جامعة المسيلة، الجزائر، 2012.

7- فتحي خليل حمدان، **بحوث العمليات – مع تطبيقات باستخدام الحاسوب** ، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2010.

8- محمد راتول، **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006 .

9- محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، أحمد شهاب الحمداني، **بحوث العمليات**، الطبعة الثانية ، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2011.

10- محمد عبيدات، **الأساليب الكمية في إتخاذ القرار**، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2006.

11- محمد الطراونة وسليمان عبيدات، **مقدمة في بحوث العمليات**، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر، عمان، الأردن، 2009.

12- منعم زمزير الموسوي، **بحوث العمليات – مدخل علمي لإتخاد القرارات**، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2009.

13- اليمين فالته، **بحوث العمليات**، الجزء الأول، دار إيتراك للطباعة والنشر والتوزيع، القاهرة، مصر، 2006.