

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمة الأخضر – الوادي
كلية العلوم الدقيقة
قسم الرياضيات

مقياس: الجبر 1
لطلبة السنة الأولى رياضيات وإعلام آلي

الفصل الثاني:
العلاقات الثنائية - التطبيقات

I. العلاقات الثنائية (Relations binaires)

عموميات:

E و F مجموعتان مختلفتان عن \emptyset .

I. **تعريف:** نسمي **علاقة ثنائية** مجموعة بدئها E و مجموعة وصولها F كل جملة مفتوحة

$\mathcal{R}(x, y)$ معرفة على الجداء الديكارتي $E \times F$.

تحدد علاقة ثنائية بإعطاء مجموعتي بدئها ووصولها والجملة $\mathcal{R}(x, y)$

$\mathcal{R}(x, y)$: تُقرأ الثنائية (x, y) تحقق العلاقة R ونكتبها أحيانا xRy .

مثال: $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ $F = \{-8, -4, -7, 1, 13\}$ ولتكن العلاقة الثنائية \mathcal{R} بين E و F المعرفة بما يلي: $\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow y = x^2 - 8$.

نلاحظ أن الثنائيات $(2, -4)$, $(-1, -7)$, $(0, -8)$ جميعها تحقق العلاقة \mathcal{R} لأن

$$-4 = (2)^2 - 8 \text{ و } -7 = (-1)^2 - 8 \text{ و } -8 = (0)^2 - 8$$

وأن $(1, -4)$, $(3, 13)$ لا تحقق \mathcal{R} أي لأن $-4 \neq (1)^2 - 8$ و $13 \neq (3)^2 - 8$ أي أن القضايا $\mathcal{R}(1, -4)$ و $\mathcal{R}(3, 13)$ خاطئة.

II. **بيان العلاقة \mathcal{R} :** هو مجموعة الثنائيات التي تحققها أي

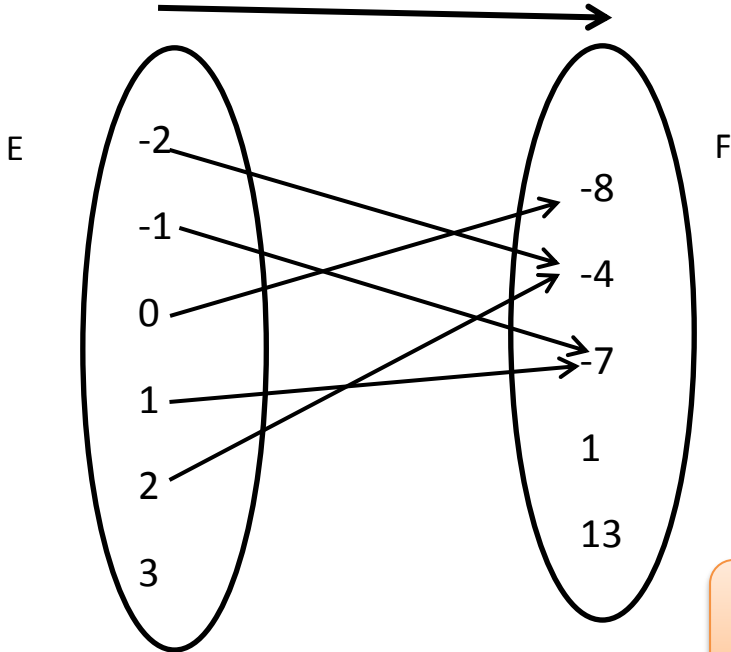
$$\Gamma_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in E \times F; \mathcal{R}(x, y)\}$$

$$(x, y) \notin \Gamma_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \overline{\mathcal{R}(x, y)}$$

مثال: بيان العلاقة المعرفة في المثال السابق هو

$$\Gamma_{\mathcal{R}} = \{(-2, -4), (-1, -7), (0, -8), (1, -7), (2, -4)\}$$

المخطط السهمي لعلاقة: تمثل كل ثنائية (x, y) تحقق العلاقة \mathcal{R} بسهم ينطلق من x ليستقر في y .



العلاقة في المثال السابق مخططها السهمي هو

III. **العلاقة العكسية للعلاقة \mathcal{R} :**

هي العلاقة الثنائية \mathcal{R}^{-1} التي مجموعة بدئها F

و مجموعة وصولها E والمعرفة كما يلي:

$$\forall (x, y) \in E \times F; \mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow \mathcal{R}^{-1}(y, x)$$

حسب هذا التعريف فإن بيان \mathcal{R}^{-1} هو

$$\Gamma_{\mathcal{R}^{-1}} = \{(y, x) \in F \times E; \mathcal{R}(x, y)\}$$

$$(x, y) \in \Gamma_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow (y, x) \in \Gamma_{\mathcal{R}^{-1}}$$

مثال : بيان العلاقة العكسية لـ \mathcal{R} في المثال السابق هو

$$\Gamma_{\mathcal{R}^{-1}} = \{(-4, -2), (-7, -1), (-8, 0), (-7, 1), (-4, 2)\}$$

II. التطبيقات (Applications)

1. تعريف : نسمي تطبيقا f للمجموعة E في المجموعة F كل علاقة ترفق بكل عنصر x من E عنصرا وحيدا y من F . ونكتب اختصارا:

في المخطط السهمي لتطبيق كل عنصر من مجموعة البدء ينطلق منه سهم وحيد فقط

$$f: E \rightarrow F$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

E و F : مجموعتا البدء والوصول بهذا الترتيب. y هي صورة x بالتطبيق f و x هي سابقة y .

2. أمثلة

(1) في المثال المذكور أعلاه العلاقة \mathcal{R} ليست تطبيقا لـ E في F لأن العنصر 3 ليس له صورة.

(2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = 3x + 2$ هو تطبيق لـ \mathbb{R} في نفسها لأن لكل عدد حقيقي x صورة وحيدة $y = 3x + 2 \in \mathbb{R}$ نثبت وحدانية الصورة. ليكن x, x' عدنان حقيقيان

$$x = x' \Rightarrow 3x = 3x'$$

$$\Rightarrow 3x + 2 = 3x' + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x')$$

(3) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $g(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ ليس تطبيقا لأن الأعداد الحقيقية $x \in [-1; 2]$ ليس لها صور بالعلاقة g .

(4) العلاقة الثنائية \mathcal{R} من المجموعة $E = [-2, 2]$ نحو المجموعة \mathbb{R} المعرفة كما يلي:

$\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ ليس تطبيقا لأن لكل $x \in [-2, 2]$ صورتان في \mathbb{R} هما $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$.

(5) $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ حيث $h[(n, m)] = \frac{n+m}{2}$ ليس تطبيقا لأن (3,8) ليس لها صورة حيث أن $\frac{3+8}{2} = \frac{11}{2} \notin \mathbb{N}$.

(6) $Id_E: E \rightarrow E$ حيث $Id_E(x) = x$ هو تطبيق للمجموعة E في نفسها يسمى **التطبيق المطابق** (Application identique sur E).

3. أنواع التطبيقات

ليكن $f: E \rightarrow F$ تطبيق.

(a) التطبيق المتباين (*Application injective*): نقول أن f متباين (أو فقط تباين) إذا حقق:

$$\forall (x, x') \in E^2; x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

أو بصيغة أخرى (نأخذ العكس النقيض للاستلزام)

$$\forall (x, x') \in E^2; f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

مثال 1: في المثال (1) السابق التطبيق f متباين لأن: من أجل $(x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x') \Rightarrow 3x + 2 = 3x' + 2$$

$$\Rightarrow 3x = 3x'$$

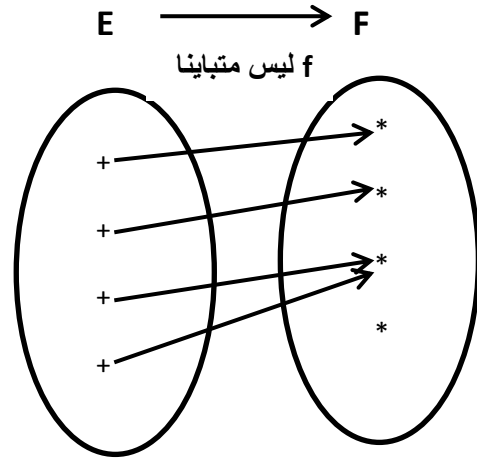
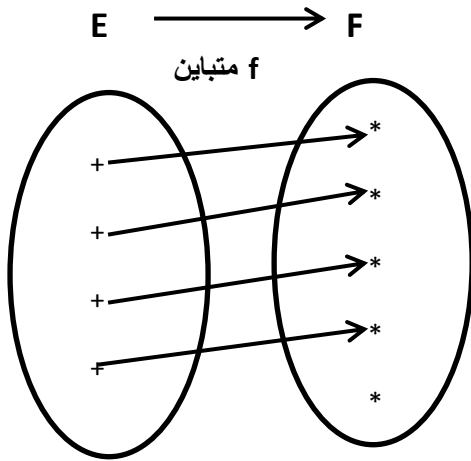
$$\Rightarrow x = x'.$$

مثال 2: التطبيق $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $g(x) = 3x^2 - 2x$ ليس متبايناً لأن:

$g(1) = g\left(\frac{-1}{3}\right) = 1$ أي أنه يوجد على الأقل عددين حقيقيين مختلفان و لهما نفس الصورة بصيغة

أخرى $\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2; f(x) = f(x') \wedge x \neq x'$.

لإثبات أن f تطبيق غير متباين يكفي إيجاد مثال مضاد يتمثل في عنصرين مختلفين من E لهما نفس الصورة



(b) التطبيق الغامر (*Application surjective*): نقول أن f غامر (أو فقط غمر) إذا حقق:

$$\forall y \in F, \exists x \in E; f(x) = y$$

أي أن المعادلة $f(x) = y$ تقبل على الأقل حلاً $x \in E$ من أجل كل $y \in F$.

مثال 1: التطبيق $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $g(x) = 3x^2 - 2x$ نلاحظ أنه يمكن أن نكتب

$$\forall x \in \mathbb{R}; g(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3}$$

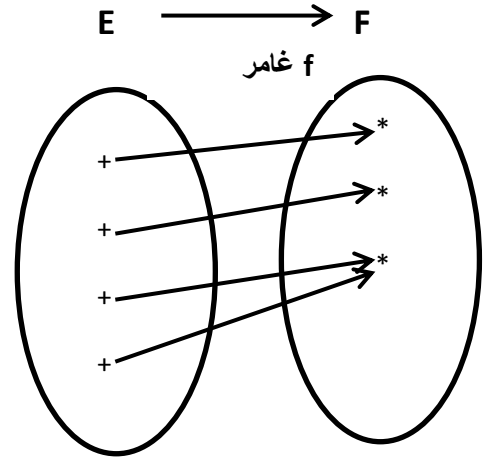
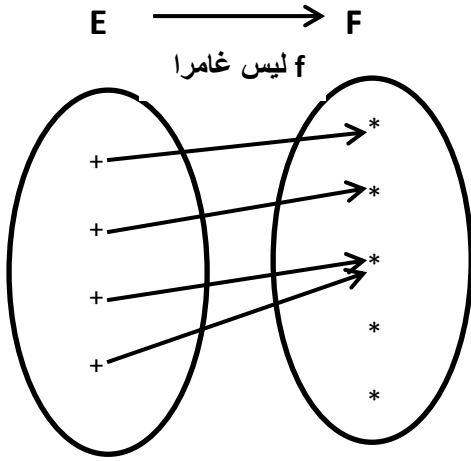
وبالتالي من أجل $y = -1$ المعادلة $g(x) = -1$ ليس لها حل في \mathbb{R} أي أن -1 ليس له سابقة

بالتطبيق و عليه فإن g ليس غامراً (هنا كل الأعداد الأقل من $-\frac{1}{3}$ تماماً ليس لها سابق).

مثال (2) $h: \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ حيث $h(x) = 3x^2 - 2x$ هو تطبيق غامر لأنه من أجل $y \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ كفي

$$h(x) = y \Rightarrow 3x^2 - 2x = y \Rightarrow 3x^2 - 2x - y = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية مميزها $\Delta = 4(1 + 3y) \geq 0$ لأن $y \geq -\frac{1}{3}$ ومن للمعادلة السابقة حلين متمايزين أو متساويين هما: $x = \frac{1 - \sqrt{1+3y}}{3}$ و $x' = \frac{1 + \sqrt{1+3y}}{3}$. أي أن لكل عنصر من مجموعة الوصول سابقة أو أكثر.



(c) **التطبيق التبادلي: (Application bijective)** اذا كان التطبيق f متباينا وغامرا في نفس الوقت نسميه تطبيقا تبادليا (أو فقط تقابل).

وفي هذه الحالة فإن المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلا وحيدا $x \in E$ من أجل كل $y \in F$.

مثال: التطبيق $f:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = \ln x$ هو تطبيق تبادلي لأنه من أجل $x, x' \in]0; +\infty[$

$\ln x = \ln x' \Rightarrow x = x'$ ومن أجل كل $y \in \mathbb{R}$ وبالتالي $\ln x = y \Rightarrow x = \exp(y)$ غامر.

التطبيق العكسي لتبادلي تقابل (Application reciproque)

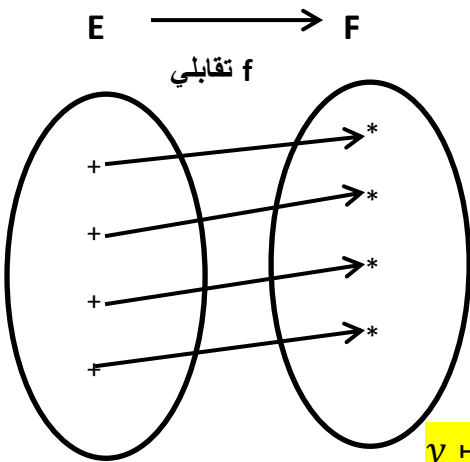
اذا كان $f: E \rightarrow F$ تطبيقا تبادليا فإنه يقبل تطبيق عكسيا نرسم له بـ f^{-1}

معرف كما يلي :

$$f^{-1}: F \rightarrow E$$

سابقة y بالتطبيق $y \mapsto f^{-1}(y) = x = f^{-1}(y)$

مثال: في المثال السابق التطبيق العكسي للتطبيق \ln هو التطبيق



$$\exp(y) = x \Leftrightarrow y = \ln x \quad \text{حيث} \quad \ln^{-1} = \exp: \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$$

لحساب $f^{-1}(y)$ صورة y بالتطبيق العكسي نحل المعادلة $f(x) = y$ ذات المجهول x أي نحسب y بدلالة x .
 $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

4. تركيب التطبيقات:

مركب التطبيقين $f: E \rightarrow F$ و $g: F \rightarrow G$ بهذا الترتيب هو التطبيق الذي نرمز له بـ $g \circ f$ والمعروف بما يلي: $g \circ f: E \rightarrow G$ حيث $g \circ f(x) = g[f(x)]$.

$$E \rightarrow F \rightarrow G$$

$$x \mapsto f(x) \mapsto g[f(x)]$$

تركيب تطبيقين عملية غير ممكنة الا اذا كانت مجموعة وصول الأول تساوي مجموعة بدء الثاني

ملاحظة: بصفة عامة $g \circ f \neq f \circ g$.

مركب تطبيق تقابلي وتطبيقه العكسي: $f: E \rightarrow F$ تطبيق تقابلي تطبيقه العكسي $f^{-1}: F \rightarrow E$.

$$\text{ومنه: } f \circ f^{-1}: F \rightarrow F \text{ بحيث: } f \circ f^{-1}(y) = f[f^{-1}(y)] = f(x) = y$$

$$\text{و: } f^{-1} \circ f: E \rightarrow E \text{ بحيث: } f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}[y] = x$$

نتيجة: مركب تطبيق مع تطبيقه العكسي هو التطبيق المطابق. أي أن

$$f^{-1} \circ f = Id_E \quad \text{و} \quad f \circ f^{-1} = Id_F$$

تمرين محلول: يعطى التطبيق $f: \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$ حيث $f(x) = \frac{3x-2}{x-4}$ بين أن تطبيق f تقابلي وعين تطبيقه العكسي f^{-1} ثم حدد التطبيقات: $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$.

الحل: نثبت أن f متباين. ليكن x, x' عددا حقيقيا نختلفان عن 4

$$f(x) = f(x') \Rightarrow \frac{3x-2}{x-4} = \frac{3x'-2}{x'-4}$$

$$\Rightarrow (3x-2)(x'-4) = (x-4)(3x'-2)$$

$$\Rightarrow 3xx' - 12x - 2x' + 8 = 3xx' - 2x - 12x' + 8$$

$$\Rightarrow -10x = -10x' \Rightarrow x = x'$$

ومنه f متباين. ليكن $y \neq 3$ لنحل المعادلة $f(x) = y$ باعتبار x هو المجهول

$$f(x) = y \Rightarrow \frac{3x - 2}{x - 4} = y$$

$$\Rightarrow 3x - 2 = y(x - 4)$$

$$\Rightarrow 3x - 2 = yx - 4y$$

$$\Rightarrow 3x - yx = 2 - 4y$$

$$\Rightarrow x(3 - y) = 2 - 4y$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 - 4y}{3 - y} \quad (\text{لأن } y \neq 3)$$

وبالتالي فإن f غامر وبما أنه متباين كذلك فهو تقابلي و تطبيه العكسي هو

$$f^{-1}(y) = \frac{2-4y}{3-y} \quad \text{حيث } f^{-1}: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{4\}$$

من أجل كل $y \neq 3$ نجد

$$f \circ f^{-1}(y) = \frac{3f^{-1}(y)-2}{f^{-1}(y)-4} = \frac{3\left(\frac{2-4y}{3-y}\right)-2}{\left(\frac{2-4y}{3-y}\right)-4} = \frac{3(2-4y)-2(3-y)}{(2-4y)-4(3-y)} = \frac{-10y}{-10} = y$$

ومنه $f \circ f^{-1} = Id_{\mathbb{R}-\{3\}}$ ومن أجل كل $x \neq 4$ نجد

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f(x) &= \frac{2 - 4f(x)}{3 - f(x)} = \frac{2 - 4\left(\frac{3x - 2}{x - 4}\right)}{3 - \left(\frac{3x - 2}{x - 4}\right)} = \frac{2(x - 4) - 4(3x - 2)}{3(x - 4) - (3x - 2)} \\ &= \frac{-10x}{-10} = x \end{aligned}$$

ومنه $f^{-1} \circ f = Id_{\mathbb{R}-\{4\}}$.

5. تساوي تطبيقين: يتساوى التطبيقان $f: E \rightarrow F$ و $g: H \rightarrow G$ اذا تحقق ما يلي:

$$F = G \quad \text{و} \quad E = H \quad (a)$$

$$\forall x \in E; f(x) = g(x) \quad (b)$$

في التمرين السابق $f^{-1} \circ f \neq f \circ f^{-1}$ لأن اشرط الأول غير محقق.

اقتصار تطبيق على مجموعة: ليكن التطبيق $f: E \rightarrow F$ و D مجموعة جزئية من E بحيث

$$D \neq E$$

في عبارة التطبيق يمكن استبدال رمز المتغير بأي رمز آخر وعادة ما نستخدم x كرمز للمتغير المستقل و y كرمز للمتغير التابع

تعريف: التطبيق $g: D \rightarrow F$ الذي يحقق $g(x) = f(x) \forall x \in D$ يسمى اقتصار
التطبيق f على المجموعة D ونرمز له بـ $f|_D$.

وإذا كانت S مجموعة تحوي E تماما أي $E \subset S$ بحث $E \neq S$. فإن التطبيق $g: S \rightarrow F$ الذي يحقق $g(x) = f(x) \forall x \in E$ يسمى امتداد التطبيق f إلى S .

مثال: ليكن التطبيق $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = |x - 3| + |x + 1| - 2$.

بكتابة $f(x)$ بدون استعمال رمز القيمة المطلقة نستنتج أن التطبيقات $\mathbb{R} \rightarrow]-\infty; -1[$ g_1 :
حيث $g_1(x) = -2x - 4$, $g_2:]-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $g_2(x) = 2$ و
 $\mathbb{R} \rightarrow]3; +\infty[$ حيث $g_3(x) = 2x - 4$ هي اقتصارات للتطبيق f على المجالات
] $-\infty; -1[$, $] -1; 3]$ و $] 3; +\infty [$ بهذا الترتيب و نكتب اختصارا :

$$g_3 = f|_{]3; +\infty[} \quad g_2 = f|_{]-1; 3]} \quad , \quad g_1 = f|_{]-\infty; -1[}$$

6. الصورة المباشرة الصرة العكسية لمجموعة بواسطة تطبيق:

ليكن $f: E \rightarrow F$ و A مجموعة جزئية من E و B مجموعة جزئية من F .

- مجموعة صور عناصر A بالتطبيق f تسمى **الصورة المباشرة للمجموعة A** بالتطبيق f ورمزها $f(A)$ ونكتب اختصارا

$$f(A) = \{f(x) \in F; x \in A\}$$

- مجموعة سوابق عناصر B بالتطبيق f تسمى **الصورة العكسية للمجموعة B** بالتطبيق f ورمزها $f^{-1}(B)$ ونكتب اختصارا

$$f^{-1}(B) = \{x \in E; f(x) \in B\}$$

مثال: في حالة التطبيق $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = \sin x$ والمجموعات

$$B = \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \quad , \quad A = \left\{\frac{\pi k}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\begin{aligned} f(A) &= \left\{\sin \frac{\pi k}{4} \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{\sin \frac{\pi k}{4}; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\right\} \\ &= \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right\} \end{aligned}$$

$$f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$$

عناصر الصورة العكسية لمجموعة
 B بالتطبيق f تمثل حلول
المعادلات $f(x) = b$ عندما b
يمسح المجموعة B

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \left\{x \in \mathbb{R}; f(x) \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}; (\sin x = 0) \vee \left(\sin x = \frac{1}{2}\right)\right\} \\ &= \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

III. العلاقة في مجموعة

1. تعريف: العلاقة في مجموعة E هي كل علاقة ثنائية R مجموعتي بدئها ووصولها تساويان E.

أمثلة: (1) العلاقة "...قاسم لـ...." رمزها "..../...." والمعرفة في المجموعة \mathbb{N}^* كما يلي:

$$b/a \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^*; a = m.b$$

13/91 لأن $91 = 7 \times 13$ لكن 8 ليس قاسما لـ 25 لأن $25 \neq m.8$; $\forall m \in \mathbb{N}^*$.

(2) العلاقة "...أصغر أو يساوي...." ورمزها "...≤.." والمعرفة في \mathbb{R} بما يلي:

$$a \leq b \Leftrightarrow (a - b) \in \mathbb{R}_-$$

(3) الموافقة بترديد عدد طبيعي $n > 1$ معطى ورمزها \equiv والمعرفة في \mathbb{Z} كما يلي:

$$a \equiv b[n] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; a - b = k.n$$

مثلا: نأخذ $n = 7$. نلاحظ أن $48 \equiv -1[7]$ لأن $48 - (-1) = 49 = 7.7$.

2. خواص العلاقة في مجموعة E: R علاقة في مجموعة E.

(a) العلاقة الانعكاسية: (relation réflexive)

R انعكاسية تعني أن كل عنصر يحقق العلاقة R مع نفسه

نقول أن R علاقة انعكاسية اذا حققت: $\forall x \in E; R(x, x)$

(b) العلاقة التناظرية: (relation symétrique)

نقول أن R علاقة تناظرية اذا حققت:

$$\forall (x, y) \in E^2; R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$$

R تناظرية تعني أنه اذا حققت ثنائية (x, y) العلاقة R فإن نظيرتها (y, x) تحققها كذلك.

(c) العلاقة المتعدية: (relation transitive)

نقول أن R علاقة متعدية اذا حققت:

$$\forall (x, y, z) \in E \times E \times E; R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$$

(d) العلاقة ضد التناظرية: (relation antisymétrique)

نقول أن R علاقة ضد تناظرية اذا حققت:

$$\forall (x, y) \in E^2; R(x, y) \wedge R(y, x) \Rightarrow x = y$$

R ضد تناظرية تعني أنه لا يمكن لـ (x, y) و (y, x) أن تحققا معا العلاقة R إلا في حالة $x = y$

أمثلة (1) العلاقة "...قاسم لـ...." في \mathbb{N}^*

• انعكاسية لأن كل عدد طبيعي غير معدوم قاسم لنفسه حيث $x = 1.x$; $\forall x \in \mathbb{N}^*$.

• ليست تناظرية لأن : $(y \text{ ليس قاسم لـ } x) \wedge (x \text{ قاسم لـ } y) ; \exists (x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$
 يكفي أن نأخذ $x = 3$ و $y = 12$ واضح أن 3 قاسم لـ 12 و 12 ليس قاسما لـ 3 .

• ضد تناظرية لأن : من أجل (x, y) ثنائية كيفية من \mathbb{N}^{*2}
 نفرض أن $\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, x)$ ونبت أن $x = y$

$$\mathcal{R}(x, y) \Rightarrow x/y \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* ; y = mx \dots\dots\dots(1)$$

$$\mathcal{R}(y, x) \Rightarrow y/x \Rightarrow \exists m' \in \mathbb{N}^* ; x = m'y \dots\dots\dots(2)$$

بضرب المساوتين (1) و (2) نجد $yx = mm'xy$ ومنه $mm' = 1$ لأن $yx \neq 0$ وبما أن m و m' أعداد طبيعية فإن : $m = m' = 1$ أي أن $x = y$.

• متعدية لأن من أجل x, y, z من \mathbb{N}^* نفرض أن $\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z)$ ونثبت أن $\mathcal{R}(x, z)$.

$$\mathcal{R}(x, y) \Rightarrow x/y \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* ; y = mx \dots\dots\dots(3)$$

$$\mathcal{R}(y, z) \Rightarrow y/z \Rightarrow \exists m' \in \mathbb{N}^* ; z = m'y \dots\dots\dots(4)$$

بالتعويض عن y من (3) في (4) نجد : $z = m'mx$ ومنه x/z (يكفي وضع $m'' = m'm \in \mathbb{N}^*$) .

(2) العلاقة \leq في \mathbb{R} يمكن إثبات أنها انعكاسية وضد تناظرية ومتعدية لكنها ليست تناظرية (استخدم نفس المنهجية السابقة في الإثبات) .

(3) العلاقة " $<$ " (.... أصغر تماما ...) في \mathbb{R} ليست انعكاسية لأن : $2 < 2$ قضية خاطئة .
 ليست تناظرية لأن $2 < 3 \Rightarrow 3 < 2$ قضية خاطئة . لكنها متعدية لأن :

$$x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$$

(4) علاقة الموافقة بترديد عدد طبيعي $n > 1$ في \mathbb{Z}

• علاقة انعكاسية لأن :

$$\forall x \in \mathbb{Z}; x \equiv x[n] \quad \text{ومنه} \quad \forall x \in \mathbb{Z}; x - x = 0 = 0.n$$

• علاقة تناظرية لأن:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2; a \equiv b[n] \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; a - b = k.n$$

$$\Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}; b - a = k'.n$$

$$\Rightarrow b \equiv a[n]$$

$$\text{حيث } k' = -k$$

• علاقة متعدية لأن : من أجل a, b, c 3 أعداد صحيحة

$$a \equiv b[n] \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; a - b = k.n \dots\dots\dots(3')$$

$$b \equiv c[n] \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}; b - c = k'.n \dots \dots (4')$$

بجمع (3') و (4') نجد $a - c = (k + k').n$ ومنه $a \equiv c[n]$ لأن $k + k' \in \mathbb{Z}$.

(5) علاقة الاحتواء في مجموعة أجزاء مجموعة كيفية E و رمزها " \subset " هي علاقة

- انعكاسية لأن $\forall A \in P(E); A \subset A$
- ضد تناظرية لأن $\forall A, B \in P(E); (A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow A = B$.
(تعريف تساوي مجموعتين)
- متعدية لأن $\forall A, B, C \in P(E); (A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.

ملاحظة: بفرض أن $\Gamma_{\mathcal{R}}$ هو بيان العلاقة و أن $\Delta = \{(x, y) \in E \times E; x = y\}$.

$$\mathcal{R} \text{ علاقة انعكاسية} \Leftrightarrow \Delta \in \Gamma_{\mathcal{R}}$$

$$\mathcal{R} \text{ علاقة تناظرية} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2; (x, y) \in \Gamma_{\mathcal{R}} \Rightarrow (y, x) \in \Gamma_{\mathcal{R}}$$

$$\mathcal{R} \text{ علاقة ضد تناظرية} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2; (x, y) \in \Gamma_{\mathcal{R}} \wedge (y, x) \in \Gamma_{\mathcal{R}} \Rightarrow (x, y) \in \Delta$$

3. علاقة التكافؤ: \mathcal{R} علاقة في المجموعة E

(a) تعريف: نقول أن \mathcal{R} علاقة تكافؤ اذا كانت: انعكاسية و تناظرية و متعدية.
أمثلة:

- علاقة الموافقة بترديد العدد الطبيعي $n = 3$ هي علاقة تكافؤ في المجموعة \mathbb{Z} . (أنظر الأمثلة السابقة).
- العلاقة "...يوازي..." و رمزها " \parallel " في مجموعة مستقيمات المستوي هي علاقة تكافؤ (يمكن ملاحظة الخواص الثلاثة بسهولة).
- في مجموعة المجموعات المنتهية العلاقة المعرفة بـ

$$\mathcal{R}(A, B) \Leftrightarrow \text{card}A = \text{Card}B$$

هي علاقة تكافؤ رمزها $\#$. (عدد عناصر المجموعة $A = \text{card}A$).

(b) **صنف تكافؤ عنصر:** \mathcal{R} علاقة تكافؤ في المجموعة E , ليكن $a \in E$.

صنف تكافؤ العنصر a هو مجموعة العناصر من E التي تحقق العلاقة \mathcal{R} مع a و رمزها \dot{a} ونكتب اختصارا:

$$\dot{a} = \{x \in E; \mathcal{R}(x, a)\}$$

مثال: 1- علاقة الموافقة بترديد $n = 3$ في \mathbb{Z} (هي علاقة تكافؤ كما رأينا).

$$\dot{a} = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv a[3]\} = \{x - a = 3k; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{x = a + 3k; k \in \mathbb{Z}\}$$

صنف تكافؤ العدد 0 هو: $\dot{0} = \{x = 3k; k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$

صنف تكافؤ العدد 1 هو: $\dot{1} = \{x = 1 + 3k; k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$

صنف تكافؤ العدد 2 هو: $\dot{2} = \{x = 2 + 3k; k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$

نلاحظ أن صنف تكافؤ كل عدد صحيح هو أحد الأصناف الثلاثة السابقة مثلا: $\dot{0} = \dot{3} = \dot{6} = \dot{-3}$

وان $\dot{1} = \dot{4} = \dot{7}$.

خواص:

$$(1) \dot{a} \neq \emptyset \text{ (لأن } \mathcal{R} \text{ انعكاسية وبالتالي فإن } \mathcal{R}(a, a) \text{ أي أن } a \in \dot{a}\text{)}$$

$$(2) \mathcal{R}(a, b) \Leftrightarrow \dot{a} = \dot{b}$$

$$(3) \forall (a, b) \in E^2; (\dot{a} = \dot{b}) \vee (\dot{a} \cap \dot{b} = \emptyset)$$

(الاثبات: 2) \Rightarrow نفرض أن: $\mathcal{R}(a, b)$ ونثبت أن $\dot{a} = \dot{b}$.

$$(x \in \dot{a} \Rightarrow \mathcal{R}(x, a) \text{ (حسب تعريف صنف تكافؤ عنصر)})$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}(x, b) \text{ (حسب الفرضية } \mathcal{R}(a, b) \text{ وخاصة العلاقة المتعدية)}$$

$$\Rightarrow x \in \dot{b} \text{ (حسب تعريف صنف تكافؤ عنصر)}$$

$$\text{ومنه } \dot{a} \subset \dot{b}$$

\Leftarrow نستخدم نفس المنهجية لإثبات أن $\dot{b} \subset \dot{a}$ مع استخدام خاصيتي العلاقة التناظرية والمتعدية.

$$\text{ومنه } \dot{a} = \dot{b}$$

(3) نفرض أن $(\dot{a} \neq \dot{b}) \wedge (\dot{a} \cap \dot{b} \neq \emptyset)$ أي أنه يوجد على الأقل $x \in \dot{a} \cap \dot{b}$

$$x \in \dot{a} \cap \dot{b} \Leftrightarrow (x \in \dot{a}) \wedge (x \in \dot{b})$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{R}(a, x) \wedge \mathcal{R}(x, b)$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}(a, b) \Rightarrow \dot{a} = \dot{b}$$

وهذا تناقض مع $\dot{a} \neq \dot{b}$ ومنه صحة (3).

(c) مجموعة حاصل القسمة لعلاقة التكافؤ: هي مجموعة كل أصناف التكافؤ وفق علاقة التكافؤ \mathcal{R}

$$\text{في } E \text{ . ورمزها } E/\mathcal{R} \text{ ونكتب اختصاراً } \{ \dot{a}; a \in E \}$$

مثال: مجموعة حاصل القسمة لعلاقة الموافقة بتريديد 3 هي $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{0, 1, 2\}$ ورمزها $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$ أو $\frac{\mathbb{Z}}{[3]}$.

نتيجة: مجموعة حاصل القسمة E/\mathcal{R} تشكل تجزئة للمجموعة E

لأنه و حسب الخواص (1) و (3) فإن كل صنف تكافؤ غير خال وان كل صنفين مختلفين منفصلان. بقي اثبات أن $\bigcup_{a \in E} \dot{a} = E$.

لدينا $\bigcup_{a \in E} \dot{a} \subset E$ لأن $\dot{a} \subset E$; $\forall a \in E$. من جهة أخرى

$$x \in E \Rightarrow x \in \dot{x} \Rightarrow x \in \bigcup_{a \in E} \dot{a}$$

إذا $\bigcup_{a \in E} \dot{a} = E$ ومنه $E \subset \bigcup_{a \in E} \dot{a}$

4. علاقة الترتيب:

تعريف: نقول أن علاقة ترتيب في المجموعة E إذا كانت: انعكاسية و ضد تناظرية و متعدية.

أمثلة: (1) "...قاسم لـ..." هي علاقة ترتيب في \mathbb{N}^* .

(2) "... \subset ..." هي علاقة ترتيب في $P(E)$.

(3) "... \leq ..." هي علاقة ترتيب في \mathbb{R} .

الترتيب الكلي والترتيب الجزئي: لتكن \mathcal{R} علاقة ترتيب في المجموعة E .

إذا كان $\mathcal{R}(x, y) \vee \mathcal{R}(y, x)$ $\forall (x, y) \in E^2$ نقول أن \mathcal{R} علاقة ترتيب كلي

وإذا لم يكن كذلك نقول أن \mathcal{R} علاقة ترتيب جزئي.

مثال: العلاقة "... \subset ..." في $P(E)$ هي علاقة ترتيب جزئي لأن: $\underbrace{\{1, 2, 5\} \not\subset \{2, 3\}}_{\mathcal{R}(x, y)}$ و

$$\underbrace{\{2, 3\} \not\subset \{1, 2, 5\}}_{\mathcal{R}(x, y)}$$

العلاقة "... \leq ..." في \mathbb{R} هي علاقة ترتيب كلي لأننا نستطيع مقارنة أي عددين حقيقيين بواسطتها.

يكون الترتيب جزئيا اذا
وجد عنصران x, y من E
بحيث:

$$\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, x)$$