الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمّه لخضر – الوادي

كلية العلوم الدقيقة

قسم الفيزياء

دروس مُفصّلـــــــــــــــة لمُقرّر الرياضيـــــــــــــــات1

المقيـــــــاس: رياضيـــــات1

التخـــصـص: علـــوم المادة

المستــــــوى: سنة أولى ليسانس جذع مشترك علوم المادة

إعداد: د. غندير عون عبد اللطيف

أستاذ محاضر بجامعة حمه لخضر – الوادي

قسم الرياضيات – كلية العلوم الدقيقة

المحتويات

محتوى الجبر1:

المقدمة

لقد أنجزنا هذه المطبوعة المُوجّهة إلى طلبة سنة أولى ليسانس جذع مشترك علوم المادة، والمتكوّنة من دروس مُفصّلة تتخلّلها تطبيقات متنوّعة في مقياس الرياضيات1 بفرعيه التحليل1 و الجبر1 وفق البرنامج المُعتمد من الوزارة الوصّية واستنادا لعدّة مراجع معتمدة لهذا المقياس.

تمّت هيكلة مضامين هذا المقياس بما يضمن تحقيق الكفاءات المُستهدفة من تعلّم الرياضيات في هذا المستوى من التعليم لِما له من أهمّية في التنسيق الأفقي مع بعض المقاييس كالفيزياء و الكيمياء وغيرهما من العلوم.

إن الرياضيات علم يعتمد على الدقّة و وضوح الأفكار والهدف من تدريسها نُلخّصها فيما يلي:

- مواصلة الدراسة في التخصصات العلمية المختلفة
- التكوين الذاتي المستمر و البحث المنهجي و الابتكار
- النقد الموضوعي و التعبير عن المواقف و الآراء بالحجج والأدلة.

وفيما يخص الكفاءات المستهدفة من تعلّم الرياضيات نُلخّصها فيما يلي:

- التفكير المنطقي و حل المشكلات (بفهم المعطيات وحصرها لحل المشكل المطروح، حصر الحجج والمُبرّرات وتنظيمها في تسلسل استنتاجي، اختيار الإجراء المُناسب في كل مرّة والسير فيه نحو تحقيق الهدف المُسطّر)
- التوجّه السليم في التعلّم واكتساب العمل الفعّال (بدقّة الملاحظة، ضبط الأفكار الأساسية في مسألة مطروحة والبحث عن المعلومات الضرورية للقيام بعمل ما)
- التبليغ بواسطة التعبير الرياضي (بالتحكّم في المفردات اللغوية التي تُساعد على ربط الجمل الاستنتاجية، تحرير حل لمسألة مطروحة تحريرا سليما مع تقديم التبريرات المُناسبة في كل مرحلة للوُصول إلى المعلومة المُناسبة).

كما تهدف الرياضيات في مستوى علوم المادة إلى منح الطالب معارف وكفاءات تسمح له بتوظيفها في الفيزياء والكيمياء وغيرهما هذا من جهة ومن جهة أخرى فهي ترمي إلى:

- تدريب الطالب على قراءة ومعالجة معلومات ونقدها نقدا بنّاءا
- تكوين الطالب وتدريبه في كلّ مرّة على مُمارسة خُطّة علمية من خلال معالجة التطبيقات المتنوّعة باكتساب طرائق للحل باستعمال الملاحظة و التحليل و الاستنتاج.

– المساهمة في تكوين شخصية الطالب بتنمية الثقة بالنفس لديه والاستقلالية وحثّه على بذل الجهد والمثابرة وتدريبه على التعبير السليم وتشجيعه على البحث من خلال المُراجعة وحل التمارين المُناسبة وتوجيهه توجيها صحيحا نحو هذا البحث بمُرافقته وتقويم أعماله.

اعتمدنا في إنجاز هذه المطبوعة على التسلسل المعرفي لمضامين الدروس بالاعتماد على استحضار المكتسبات القبلية في الرياضيات من المرحلة الثانوية من التعليم للتعمق فيها أحيانا وتأسيس معارف جديدة أحيانا أُخرى مع تعزيز هذه الدروس في كلّ مرّة بأمثلة توضيحية، وترسيخها بتطبيقات مُتنوّعة مع حلولها المُفصّلة، وإدراج تمارين غير محلولة في نهاية كل فصل تُترك للحل حتّى يتمرّن عليها الطالب من أجل التقويم الذاتي.

قُسّم هذا المقياس إلى فرعين:

التحليل1: الذي يضم المواضيع التالية:

–نظرية المجموعات: المنطق الرياضي وأنماط البرهان، المجموعات، العلاقات (علاقة التكافؤ، علاقة الترتيب)، التطبيقات (المتباين، الغامر، التقابل، الصورة المباشرة، الصورة العكسية).

–بنية حقل الأعداد الحقيقية على $\mathbb{R}$: علاقة الترتيب الكلي على $\mathbb{R}$، القيمة المُطلقة، المجال، المجموعة المحدودة.

–الدوال العددية لمتغيّر حقيقي: مجموعة التعريف، تركيب الدوال، الدوال الدورية، الدوال الزوجية، الدوال الفردية، الدوال المحدودة، إتجاه تغير الدوال.

–نهايات الدوال: تعريف النهاية، النهاية على اليمين، النهاية على اليسار، النهايات غير المنتهية والنهاية عند اللانهاية، حالات عدم التعيين، العمليات الجبرية على النهايات، نهاية الدالة المُركّبة.

–الدوال المُستمرّة: تعريف الاستمرار عند قيمة، الاستمرار على اليمين، الاستمرار على اليسار، التمديد بالاستمرار، العمليات الجبرية على الدوال المستمرة، استمرار الدالة المركبة، الدالة المستمرة على مجال، نظرية القيم المتوسطة، الدوال الرتيبة و المستمرة.

–الدوال العكسية: وُجود و خصائص الدالة العكسية، الدوال العكسية للدوال المثلثية، الدوال الزائدية.

الجبر1: الذي يضم المواضيع التالية:

–البُنى الجبرية: قانون التركيب الداخلي (العملية الداخلية)، الزمرة، الحلقة و الحقل.

–الفضاءات الشعاعية: الأُسس و الأبعاد المنتهية.

-التطبيقات الخطية: النواة، الصورة، عمليات على التطبيقات الخطية، نظرية الرتبة للتطبيق الخطي.

نأمل أن تكون هذه المطبوعة وسيلة عمل فعّالة، تستجيب لِما ينتظره كل مستعمليها وخاصة طلبتنا الأعزّاء.

إن هذا العمل لا يخلو من نقائص، لذا سنكون من الشاكرين مُسبقا لكل أحد يُقدّم لنا ملحوظة أو اقتراح.

في الختام، نسأل الله العليم الكريم أن نكون قد وُفّقنا في إعداد هذه المطبوعة والتي نأمل أن تكون خدمة للعلم والمعرفة.

إعداد: د. غندير عون عبد اللطيف

أستاذ محاضر بجامعة حمه لخضر -الوادي

قسم الرياضيات-كلية العلوم الدقيقة

البريد الالكتروني: ghendirmaths@gmail.com

التحليل 1

- ✓ نظرية المجموعات
- ✓ بنية حقل الأعداد الحقيقية على $\mathbb{R}$
- ✓ الدوال العددية لمتغيّر حقيقي
- ✓ نهايات الدوال
- ✓ الدوال المُستمرّة
- ✓ الدوال العكسية

الفصل الأوّل: نظرية المجموعات

مقدمة: نبدأ هذا الفصل بعرض حول مبادئ المنطق الرياضي و المتمثلة في القضايا ونفيها، الروابط المنطقية، جداول الحقيقة، المُكمّمات والجمل المُكمّمة، يليها أنماط البرهان وهي أنماط تستخدم أشكال من قواعد المنطق الرياضي ونعرض في هذا الصدد الأنواع التالية: الاستنتاج، البرهان بالخُلف، البرهان بمثال مضاد، البرهان بالعكس النقيض، البرهان بفصل الحالات والبرهان بالتراجع. ثم نتطرق في الجزء الثاني من هذا الفصل إلى المجموعات لعرض العمليات على المجموعات وبعض خصائصها. وفي الجزء الثالث نعرض العلاقات مع التركيز على العلاقات الثنائية وخواصها ومن ثمّ التطرق إلى النوعين علاقة التكافؤ وعلاقة الترتيب. في الجزء الرابع لهذا الفصل نُعالج التطبيقات بتقديم مفهوم التطبيق، تركيب تطبيقين وخواص التطبيق: المتباين، الغامر، التقابل ثم التطبيق العكسي، مع إدراج الصورة المباشرة والصورة العكسية لتطبيق.
لتوضيح المفاهيم والمعارف الواردة في هذا الفصل نُعالج أمثلة وتطبيقات متنوعة للتمرّن على كيفية توظيفها وتطبيقها.

1.1 المنطق الرياضي

تمهيد: نبدأ الفصل ببعض المبادئ في المنطق الرياضي والتي لها أهمية في هذا الفصل والفصول اللاحقة، وهي ضرورية لبناء أنماط البرهان أو الاستدلال المستعملة لحل المسائل الرياضية ثم نتطرق إلى بعض هذه الأنماط، و الاستدلال، بوجه عام، هو كيفية التركّز على تسلسل الحجج المُؤدّية إلى بيان نتيجة أو تأكيد صحتها باللجوء إلى قواعد مُعيّنة تختلف باختلاف المواضيع المطروحة، والاستدلال الرياضي استدلال يخضع لقواعد المنطق الرياضي، فلا يمكن إقامة برهان في الرياضيات دون الاعتماد على تلك القواعد.

القضية و نفيها: نُسمي قضية كل عبارة تحتمل الصحة أو الخطأ، ونرمز لها بأحد الرموز R ,Q ,P...
نفي القضية P هو القضية التي نرمزلها بالرمز $\overline{P}$، التي تكون صحيحة عندما تكون P خاطئة، وتكون خاطئة عندما تكون P صحيحة.

أمثلة:

1) العبارة $(3<2)$ قضية، وهي قضية خاطئة.
2) (الجزائر دولة إفريقية) قضية، وهي قضية صحيحة.
3) نفي القضية (الجزائر دولة إفريقية) هي (الجزائر ليست دولة إفريقية).

الروابط المنطقية : لتكن P و Q قضيتان.

الوصل: وصل القضيتين P و Q القضية التي نرمز لها بالرمز $P \wedge Q$ ونقرأُ P و Q ، والتي لاتكون صحيحة إلاّ إذا كانت P و Q صحيحتين معًا.

مثلا: القضية $\left(2=\left(\sqrt{2}\right)^2\right)\wedge\left(\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\right)$ خاطئة.

الفصل: فصل القضيتين P و Q القضية التي نرمز لها بالرمز $P \vee Q$ ونقرأُ P أو Q ، والتي لاتكون خاطئة إلاّ إذا كانت P و Q خاطئتين معًا.

مثلا: القضية $\left(\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\right)\vee\left(\left(\sqrt{2}\right)^2=2\right)$ صحيحة.

الاستلزام: نرمز للقضية $\overline{P}\vee Q$ بـ $P\Rightarrow Q$ ، ونسميها استلزاما، ونقرأ (P تستلزم Q) كما نقرأ (إذا كان P فإن Q)، والذي لايكون خاطئا إلاّ إذا كانت P صحيحة و Q خاطئة، أي أنّ (الصحيح لا يستلزم الخطأ).

مثلا: الاستلزام $(-5<3)\Rightarrow\left((-5)^2<(3)^2\right)$ خاطئ.

التكافؤ المنطقي: نُسمي القضية المُركبة $(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow P)$ تكافؤا منطقيا ونرمز لها اختصارا بالرمز $P\Leftrightarrow Q$ ، كما نقرأ (P إذا وفقط إذا Q)، والتي لاتكون صحيحة إلاّ إذا كانت P و Q صحيحتين معًا أو خاطئتين معًا.

مثلا: القضية ($(2\le 3)\Leftrightarrow(2<3)\vee(2=3)$) صحيحة، بينما القضية ($\left(\frac{1}{2}<\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow(2<4)$) خاطئة.

جدول الحقيقة: إذا كانت القضية P صحيحة ندل عليها بـ 1 وإذا كانت خاطئة ندل عليها بـ 0.

ولنا جدول الحقيقة التالي الذي يُلخص ما ورد أعلاه، من أجل قضيتين P و Q :

P	Q	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	$P\Rightarrow Q$	$P\Leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

خواص الروابط المنطقية: لتكن P ، Q و R ثلاث قضايا، باستعمال جداول الحقيقة يمكن التأكد من صحة الخواص التالية :

- $\overline{\overline{P}}\Leftrightarrow P$. $P\wedge P\Leftrightarrow P$. $P\vee P\Leftrightarrow P$
- $P\wedge\overline{P}$ خاطئة دوما (مبدأ عدم التناقض)
- $P\vee\overline{P}$ صحيحة دوما (مبدأ الثالث المرفوع)
- $P\wedge Q\Leftrightarrow Q\wedge P$ ، $P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P$ (خاصية التبديل)
- $(P\wedge Q)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$ ، $(P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$ (خاصية التجميع)
- $P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$ (الوصل توزيعي على الفصل، و العكس كذلك صحيح)
- $\overline{P\wedge Q}\Leftrightarrow\overline{P}\vee\overline{Q}$ (نفي الوصل)
- $\overline{P\vee Q}\Leftrightarrow\overline{P}\wedge\overline{Q}$ (نفي الفصل)
- $\left((P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R)\right)\Rightarrow(P\Rightarrow R)$ (خاصية التعدّي)
- $(P\Rightarrow Q)\Leftrightarrow\left(\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}\right)$ (العكس النقيض).

تطبيق: لتكن P و Q قضيتان. أثبت صحة مايلي: $\overline{P\Rightarrow Q}\Leftrightarrow P\wedge\overline{Q}$.

الحل:

–الطريقة الأولى: باستعمال الخواص

بما أن $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{P} \vee Q$ فإن

$$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P} \vee Q}$$
$$\Leftrightarrow \overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q}$$
$$\Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$$

–الطريقة الثانية: باستعمال جدول الحقيقة

P	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P \Rightarrow Q}$	$P \wedge \overline{Q}$	$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1

نلاحظ أن التكافؤ المُعطى صحيح في جميع الحالات، فهو صحيح.

المُكمّمات: نُسمي جملة مفتوحة مُعرّفة على مجموعة E كل جملة تحتوي على متغيرا أو أكثر، وتُصبح قضية إذا استبدلنا هذا المتغير بأي عنصر من عناصر المجموعة E ، ونرمز لها عادة بأحد الرموز: $P(x)$ ، $Q(x)$ ، ...

–إذا كانت $P(x)$ صحيحة من أجل كل عنصر x من E نكتب: $\forall x \in E,\ P(x)$

حيث الرمز $\forall$ يُعبّر على المكمم الكلّي.

–إذا وُجد على الأقل عنصرا x من E بحيث $P(x)$ صحيحة نكتب: $\exists x \in E,\ P(x)$

حيث الرمز $\exists$ يُعبّر على المكمم الوجودي.

مثلا:

- الجملة $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ هي قضية صحيحة.
- الجملة $\forall x \in \mathbb{N},\ x+4=2x$ خاطئة، بينما الجملة $\exists x \in \mathbb{N},\ x+4=2x$ صحيحة.
- الجملة $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ x<y$ صحيحة، بينما الجملة $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N},\ x<y$ خاطئة (ترتيب المكمّمين مهم).

نفي قضية مكمّمة:

لنفي قضية مكممة نستبدل الرمز $\forall$ بـ $\exists$ والعكس مع نفي الجملة المفتوحة التي تلي المكمّمين.

مثلا:

- $\overline{(\forall x \in \mathbb{Z},\ x^2=4)} \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{Z},\ x^2 \neq 4)$
- $\overline{(\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ x<y)} \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N},\ x \geq y)$.

أنماط البرهان: نجد في الرياضيات عدّة أنماط من البراهين، لنذكر بعضها.

أ–البرهان المباشر(الاستنتاج): يعتمد على القاعدة التالية:

إذاكانت القضية P صحيحة و $(P \Rightarrow Q)$ فإن Q صحيحة.

تطبيق: a و b عددان صحيحان. المطلوب اثبات $a^2+b^2 \geq 2ab$.

الحل:

نعلم أن $a^2+b^2-2ab\geq 0 \Rightarrow a^2+b^2\geq 2ab$ ، فيكفي اثبات أن $a^2+b^2-2ab\geq 0$.

بالفعل، بما أن $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$ فإن $a^2+b^2-2ab\geq 0$ وبالتالي نستنتج أن $a^2+b^2-2ab\geq 0$.

ب–البرهان بالخُلف: وهو برهان غير مباشر يعتمد على القاعدة التالية:

لإثبات صحة قضية ما P ، نفرض أن $\overline{P}$ صحيحة ونُبيّن أن هذا يُؤدّي إلى تناقض، عندئذ نستنتج أن P صحيحة.

تطبيق: أثبت أن $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

الحل: باستعمال الخُلف، نفرض أن $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ معناه $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ حيث $\frac{a}{b}$ كسر غير قابل للاختزال مع a و b عددان صحيحان و $b\neq 0$، فينتج $\frac{a^2}{b^2}=2$ أي $a^2=2b^2$ بمعنى a^2 زوجي ومنه a زوجي فنكتب $a=2k$ مع $k\in\mathbb{Z}$ وتصبح $b^2=2k^2$ بمعنى b^2 زوجي ومنه b زوجي، وبما أن a و b زوجيان فالكسر $\frac{a}{b}$ قابل للاختزال وهذا تناقض مع ما فرضنا. إذن $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

ج–البرهان بمثال مضاد: يُستعمل هذا النوع من البراهين إذا طُلب إثبات عدم صحة القضية من الشكل $(\forall x\in E,\ P(x))$ ، فيكفي إيجاد عنصر x_0 من E بحيث تكون $P(x_0)$ خاطئة.

مثلا: لاثبات عدم صحة القضية $\forall n\in\mathbb{N},\ n^2=2^n$ ، يكفي أخذ $n=3$ لنجد $3^2=2^3$ خاطئة $(9\neq 8)$.

د–البرهان بالعكس النقيض: يعتمد على التكافؤ التالي $(P\Rightarrow Q)\Leftrightarrow(\overline{Q}\Rightarrow\overline{P})$ **(خاصية العكس النقيض).**

فلكي نثبت صحة الاستلزام $(P\Rightarrow Q)$ يكفي أن نثبت صحة الاستلزام $(\overline{Q}\Rightarrow\overline{P})$.

مثال تطبيقي: لإثبات أن:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ (n^2 \text{ زوجي})\Rightarrow(n \text{ زوجي})$$

يكفي أن نثبت أن

$$\forall n\in\mathbb{N},\ (n \text{ فردي})\Rightarrow(n^2 \text{ فردي})$$

فليكن n عدد طبيعي،

$$\begin{aligned}(n \text{ فردي}) &\Rightarrow n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}\\ &\Rightarrow n^2=2\left(2k^2+2k\right)+1,\ k\in\mathbb{N}\\ &\Rightarrow (n^2 \text{ فردي})\end{aligned}$$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N},\ (n^2 \text{ زوجي})\Rightarrow(n \text{ زوجي})$

هـ–البرهان بفصل الحالات: يعتمد على القاعدة التالية:

إذاكانت القضية $(P\Rightarrow Q)\wedge(\overline{P}\Rightarrow Q)$ صحيحة ينتج أن Q صحيحة.

مثال تطبيقي: لنثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n(n+1)$ زوجي.

فمن أجل كل عدد طبيعي n ، نميز حالتين:

1– إذاكان n زوجي فإن $n=2k,\ k\in\mathbb{N}$ ومنه $n(n+1)=2k(2k+1)$ فهو زوجي.

2– إذاكان n فردي فإن $n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}$ ومنه $n(n+1)=2(2k+1)(k+1)$ فهو زوجي.

و–البرهان بالتراجع: يعتمد على المبدأ التالي:

إذا كانت $P(n)$ خاصية تتعلق بعدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ وتحقق الشرطين التاليين:

1)– $P(n_0)$ صحيحة.

2)– الاستلزام $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ صحيح من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$.

عندئذ تكون الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$.

مثال تطبيقي: لنثبت أن:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

نستعمل البرهان بالتراجع، لنضع الخاصية

$$P(n): \left(1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}\right).$$

1)– $P(0)$ صحيحة لأن $0 = \frac{0(0+1)}{2}$.

2)– نفرض أن $P(n)$ صحيحة، ونثبت صحة $P(n+1)$ أي

$$1+2+\cdots+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

لدينا:

$$1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

إذن $\forall n \in \mathbb{N},\ 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2.1 المجموعات

تمهيد: مفهوم المجموعة من المفاهيم الأساسية في الرياضيات، فالمجموعة كائن رياضي قائم بذاته مكوّن من عدّة أفراد يتصف بمايلي:

- أفراد المحموعة متمايزة، أي أنّه لاداعي لتكرار أي فرد من أفرادها، فمجموعة أرقام العدد 2021 هي $\{0,1,2\}$ حيث أن الرقم 2 لم يُذكر سوى مرّة واحدة رغم ظهوره مرتين في العدد المذكور.
- المجموعة مُعيّنة تعيينا تاما بحيث يمكننا أن نقول عن أي فرد أنه من المجموعة أو غريب عنها، فتتحدّد المجموعة تحديدا نهائيا إذا تمّ تحديد مفهوم الانتماء بوضوح، أي أنّنا نستطيع أن نُحدّد وبدون غموض إن كان عنصرا a ينتمي أو لا ينتمي إلى المجموعة E، أي أنّنا نستطيع أن نحكم وبدون غموض على صحة إحدى القضيتين $a \in E$ أو $a \notin E$. وفي حالة $a \in E$ نقول أن a عنصرا من E.

تجدر الإشارة هنا إلى كيفية تعيين المجموعة، فتتعيّن المجموعة إذا عُرفت جميع عناصرها وفي هذه الحالة يمكن كتابة عناصرها بين حاضنتين مثل المجموعة $\{0,1,2\}$، كما تتعين المجموعة بذكر خاصية تُميّز عناصر هذه المجموعة، على سبيل المثال المجموعة السّابقة يمكن كتابتها على الشكل $\{x \in \mathbb{N} : x \leq 2\}$.

- ترتيب الأفراد (العناصر) غير مهم في المجموعة، فالمجموعة $\{0,1,2\}$ يمكن كتابتها $\{1,0,2\}$ ....

إنّ أكثر المجموعات تداولا في الدراسات الرياضية هي المجموعات العددية: مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$، مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$، مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

نفرض في كل ما سيأتي، E مجموعة، A و B مجموعتان جزئيتان من E.

الاحتواء: نقول أن المجموعة A محتواة في المجموعة B إذا تحقق الاستلزام التالي:

$$\forall x \in E, (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$$

ونكتب $A \subset B$.

المساواة: نقول أن المجموعة A تساوي المجموعة B إذا تحقق التكافؤ التالي:

$$\forall x \in E, (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$$

ونكتب $A = B$.

ملاحظات:

- $(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$.
- نقبل بوجود مجموعة لا تشمل أي عنصر تسمى المجموعة الخالية ونرمز لها بالرمز $\varnothing$، وهي محتواة (اصطلاحا) في أي مجموعة .
- الاحتواء هو علاقة بين مجموعتين بينما الانتماء بين عنصر و مجموعة. فمثلا، $1 \in \mathbb{N}$ بينما $\{1\} \subset \mathbb{N}$.

عمليات على المجموعات:

أ–التقاطع: تقاطع المجموعتين A و B هو مجموعة العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين ونرمز لها بالرمز $A \cap B$، ونكتب $A \cap B = \{x,\ x \in A \wedge x \in B\}$.

ب–الإتحاد: إتحاد المجموعتين A و B هو مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة بين هاتين المجموعتين ونرمز لها بالرمز $A\cup B$، ونكتب $A\cup B=\{x,\ x\in A\vee x\in B\}$.

ج–الفرق بين مجموعتين: نسمي الفرق بين المجموعتين A و B مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B ونرمز لها بالرمز $A-B$، ونكتب $A-B=\{x,\ x\in A\wedge x\notin B\}$.

د–الفرق التناظري لمجموعتين: نسمي الفرق التناظري للمجموعتين A و B مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B و التي تنتمي إلى B و لا تنتمي إلى A ونرمز لها بالرمز $A\Delta B$، ونكتب

$$A\Delta B=\{x,\ (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\}.$$

ملاحظة: من التعريف ينتج مايلي:

- $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$
- $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$.

هـ–متممة مجموعة: متممة المجموعة A بالنسبة إلى E هي مجموعة العناصر التي لا تنتمي إلى A ونرمز لها بالرمز $\overline{A}$ أو بالرمز C_EA، ونكتب $\overline{A}=\{x\in E,\ x\notin A\}$.

ملاحظة: حسب التعريف، $\overline{A}=E-A$.

مثال: لتكن $E=\{0,1,2,3,4,5\}$، $A=\{1,2,3\}$، $B=\{3,4\}$.

لدينا مايلي:

$$A\cup B=\{1,2,3,4\},\quad A\cap B=\{3\}$$

$$A-B=\{1,2\},\quad B-A=\{4\}$$

$$A\Delta B=\{1,2,4\},\quad \overline{A}=\{0,4,5\}.$$

خواص: لتكن A، B و C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E.

- $A\cap A=A$
- $A\cup A=A$
- $A\cap\varnothing=\varnothing$
- $A\cup\varnothing=A$
- $A\cap B=B\cap A$
- $A\cup B=B\cup A$
- $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
- $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
- $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$، $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$، $\overline{\overline{A}}=A$.

إثبات الخاصية، $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$، وتُترك بقية الخواص لإثباتها كتمارين للبحث.

لدينا:

$$\begin{aligned}\forall x\in E,\left(x\in\overline{A\cap B}\right)&\Leftrightarrow\left(x\notin A\cap B\right)\\&\Leftrightarrow\left(x\notin A\vee x\notin B\right)\\&\Leftrightarrow\left(x\in\overline{A}\vee x\in\overline{B}\right)\\&\Leftrightarrow\left(x\in\overline{A}\cup\overline{B}\right)\end{aligned}$$

إذن $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

أو بالكيفية التالية:

$$\begin{aligned}\overline{A\cap B}&=\left\{x,x\notin A\cap B\right\}\\&=\left\{x,x\notin A\vee x\notin B\right\}\\&=\left\{x,x\in\overline{A}\vee x\in\overline{B}\right\}\\&=\overline{A}\cup\overline{B}\end{aligned}$$

جُداء مجموعتين: جُداء المجموعتين A و B هو مجموعة الثنائيات المرتبة (a,b) حيث a تنتمي إلى A و b تنتمي إلى B ونكتب $A\times B=\left\{(a,b),\ a\in A\wedge b\in B\right\}$.

مثال: حسب معطيات المثال السابق، لدينا

$A\times B=\left\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\right\}$.

مجموعة أجزاء مجموعة: مجموعة أجزاء المجموعة E هي المجموعة التي عناصرها كل المجموعات الجزئية للمجموعة E ونرمز لها بالرمز $\mathrm{P}(E)$، ونكتب $\mathrm{P}(E)=\left\{A,\ A\subset E\right\}$.

ملاحظات:

- $A\in\mathrm{P}(E)\Leftrightarrow A\subset E$.
- $\mathrm{P}(E)$ ليست خالية لأنها تحوي على الأقل $\varnothing$ و E.
- إذا كان عدد عناصر E هو n فإن عدد عناصر $\mathrm{P}(E)$ هو 2^n، حيث n عدد طبيعي.

مثال: لتكن $E=\{0,1,2\}$، فيكون لدينا

$\mathrm{P}(E)=\left\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},E\right\}$.

تجزئة مجموعة: لتكن E مجموعة غير خالية.

نسمي تجزئة للمجموعة E كل عائلة أجزاء من E تُحقّق:

1). كل عنصر من التجزئة غير خال.

2). عناصر التجزئة منفصلة مثنى مثنى.

3). إتحاد كل عناصر التجزئة هو المجموعة E.

مثال: في المثال السابق، المجموعة $\left\{\{0\},\{1,2\}\right\}$ تشكل تجزئة للمجموعة E.

بينما المجموعة $\left\{\{0,1\},\{1,2\}\right\}$ لا تشكل تجزئة للمجموعة E لأن $\{0,1\}\cap\{1,2\}=\{1\}\neq\varnothing$.

تطبيقات:

1)– لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من مجموعة E.

أثبت أن $\left(A\subset\overline{B}\right)\Leftrightarrow\left(A\cap B=\varnothing\right)$.

الحل:

يمكن إثبات صحة هذا التكافؤ باستلزامين كما يلي:

أ. إثبات أن: $\left(A\subset\overline{B}\right)\Rightarrow\left(A\cap B=\varnothing\right)$، (نفرض أن $A\cap B=\varnothing$ ونثبت أن $A\subset\overline{B}$).

$$\forall x\in E,\ \left(x\in A\right)\Rightarrow\left(x\notin B\right)\quad\left(A\cap B=\varnothing\ ن\right)$$
$$\Rightarrow\left(x\in\overline{B}\right)$$

ومنه $A\subset\overline{B}$.

ب. إثبات أن: $\left(A\cap B=\varnothing\right)\Rightarrow\left(A\subset\overline{B}\right)$، (نفرض أن $A\subset\overline{B}$ ونثبت أن $A\cap B=\varnothing$).

نستعمل البرهان بالخُلف، نفرض أن $A\cap B\neq\varnothing$، معناه يوجد على الأقل عدد x من $A\cap B$ أي ($x\in A\wedge x\in B$)، و بما أن $A\subset\overline{B}$ فإن ($x\in\overline{B}\wedge x\in B$)، وهذا تناقض. إذن $A\cap B=\varnothing$.

2)– لتكن A، B و C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E.

أ– أثبت أن

$$A-\left(B\cap C\right)=\left(A-B\right)\cup\left(A-C\right)$$

ب– تحقق من الخاصية السّابقة إذا علمت أنّ

$E=\{1,2,3,4,5\}$، $A=\{1,2,4\}$، $B=\{2,3,4\}$، $C=\{3,4,5\}$.

الحل:

أ– لدينا:

$$\begin{aligned}\forall x\in E,\left(x\in A-\left(B\cap C\right)\right)&\Leftrightarrow\left(x\in A\wedge x\notin B\cap C\right)\\&\Leftrightarrow\left(x\in A\wedge\left(x\notin B\vee x\notin C\right)\right)\\&\Leftrightarrow\left(\left(x\in A\wedge x\notin B\right)\vee\left(x\in A\wedge x\notin C\right)\right)\\&\Leftrightarrow\left(\left(x\in A-B\right)\vee\left(x\in A-C\right)\right)\\&\Leftrightarrow\left(x\in\left(A-B\right)\cup\left(A-C\right)\right)\end{aligned}$$

إذن $A-\left(B\cap C\right)=\left(A-B\right)\cup\left(A-C\right)$.

ب– لدينا من جهة:

$$A-\left(B\cap C\right)=\{1,2,4\}-\{3,4\}=\{1,2\}\quad\cdots(1)$$

ومن جهة أخرى:

$$\left(A-B\right)\cup\left(A-C\right)=\{1\}\cup\{1,2\}=\{1,2\}\quad\cdots(2)$$

من (1) و (2) ينتج أن $A-\left(B\cap C\right)=\left(A-B\right)\cup\left(A-C\right)$.

3)− لتكن E و F مجموعتان كيفيتان.
أثبت أن

$$E \subset F \Rightarrow \mathrm{P}(E) \subset \mathrm{P}(F).$$

الحل:

لتكن المجموعة A عنصر من $\mathrm{P}(E)$، فيكون لدينا:

$$\begin{aligned}
\left(A \in \mathrm{P}(E)\right) &\Rightarrow (A \subset E) \\
&\Rightarrow (A \subset F) \qquad (\text{لأن } E \subset F) \\
&\Rightarrow \left(A \in \mathrm{P}(F)\right)
\end{aligned}$$

إذن $\mathrm{P}(E) \subset \mathrm{P}(F)$.

3.1 العلاقـــات

تمهيد: سوف نتناول في هذا الموضوع مفهوم العلاقة بين مجموعتين، والذي يُعتبر من المفاهيم الأساسية التي تُبنى عليها مفاهيم أساسية أخرى، كمفهوم التطبيق بين مجموعتين. سيكون للعلاقة في نفس المجموعة أو ما يُعرف بالعلاقة الثنائية حيّزا أكبرا في موضوعنا هذا لما تُتيحه من إمكانية تصنيف عناصر المجموعة بشكل ما (باستخدام علاقة التكافؤ) أو بموضعة عناصر المجموعة وفق قاعدة ما (باستخدام علاقة الترتيب).

العلاقة بين مجموعتين: لتكن E و F مجموعتان غير خاليتين.
نسمي علاقة بين المجموعتين E و F كل خاصية تسمح بأن تُرفق عناصر من E بعناصر من F، ونرمز لها عادة بالرمز $\Re$، فإذا كان العنصر a من E مرتبطا مع العنصر b من F وفق العلاقة $\Re$ نكتب $a\Re b$.
بيان العلاقة: لتكن $\Re$ علاقة بين المجموعتين E و F. نسمي بيان العلاقة $\Re$ المجموعة الجزئية من $E\times F$ المُعرّفة بــ:

$$G_{\Re}=\{(a,b)\in E\times F,\ a\Re b\}$$

مثال: لتكن المجموعتان $E=\{2,3\}$ و $F=\{3,4,5,6\}$. نعرّف العلاقة $\Re$ من E نحو F كالتالي:

$$\forall (x,y)\in E\times F,\ x\Re y \Leftrightarrow (y\,x\ \text{قسم})$$

لدينا: $2\Re4$، $2\Re6$، $3\Re3$، $3\Re6$.

ومنه

$$.G_{\Re}=\{(2,4),(2,6),(3,3),(3,6)\}$$

العلاقة العكسية: إذا كانت $\Re$ علاقة من E في F فإن علاقتها العكسية هي العلاقة التي نرمز لها بالرمز $\Re^{-1}$ معرفة من F في E كمايلي:

$$\forall (x,y)\in E\times F,\ x\Re y \Leftrightarrow y\Re^{-1}x$$

مثال: العلاقة العكسية للعلاقة $\Re$في المثال السابق معرّفة كمايلي:

$$\forall (x,y)\in E\times F,\ y\Re^{-1}x \Leftrightarrow (x\ y\ \text{ضاعف})$$

ويكون لدينا:

$$.G_{\Re^{-1}}=\{(3,3),(4,2),(6,2),(6,3)\}$$

العلاقة في مجموعة: إذا كانت $E=F$ فيما سبق، فنقول أن $\Re$ علاقة في المجموعة E.
خواص العلاقة في مجموعة: لتكن $\Re$ علاقة في مجموعة E.

- **الخاصية الإنعكاسية:** نقول أن $\Re$علاقة إنعكاسية في E إذا تحقق مايلي:

$$\forall x\in E,\ x\Re x$$

- **الخاصية التناظرية:** نقول أن $\Re$علاقة تناظرية في E إذا تحقق مايلي:

$$\forall (x,y)\in E^2,\ x\Re y \Rightarrow y\Re x$$

- **الخاصية ضد التناظرية:** نقول أن $\Re$ علاقة ضد تناظرية في E إذا تحقق مايلي:

$$\forall (x,y)\in E^2,\ (x\Re y \wedge y\Re x)\Rightarrow (x=y)$$

- **الخاصية المتعدية:** نقول أن $\Re$ علاقة متعدية في E إذا تحقق مايلي:

$$\forall (x,y,z)\in E^3,\ (x\Re y \wedge y\Re z)\Rightarrow (x\Re z)$$

ملاحظات:

- خاصيتي التناظر و ضد التناظر ليستا متنافيتان، حيث يمكن أن يجتمعا في نفس العلاقة، ومثال ذلك علاقة المساواة في $\mathbb{R}$، تناظرية وضد تناظرية في آن واحد.
- القول أن $\Re$ علاقة ليست إنعكاسية في E إذا تحقق مايلي: $\exists x\in E,\ \overline{x\Re x}$
- القول أن $\Re$ علاقة ليست تناظرية في E إذا تحقق مايلي: $\exists (x,y)\in E^2,\ x\Re y\wedge \overline{y\Re x}$
- القول أن $\Re$ علاقة ليست ضد تناظرية في E إذا تحقق مايلي: $\exists (x,y)\in E^2,\ x\Re y\wedge y\Re x \wedge x\neq y$
- القول أن $\Re$ علاقة ليست متعدّية في E إذا تحقق مايلي: $\exists (x,y,z)\in E^3,\ x\Re y\wedge y\Re z\wedge \overline{x\Re z}$

مع الإشارة إلى أن الكتابة $\overline{x\Re y}$ تعني أن العنصر x ليس له علاقة مع العنصر y.

مثال تطبيقي: نعرّف العلاقة $\Re$ في $\mathbb{N}^*$ كمايلي:

$$\forall (x,y)\in (\mathbb{N}^*)^2,\ x\Re y \Leftrightarrow y=kx,\ k\in\mathbb{N}^*$$

دراسة خواص العلاقة $\Re$:

- الإنعكاسية: لدينا

$$\forall x\in\mathbb{N}^*,\ x\Re x\Leftrightarrow x=1\times x \quad \text{(مُحقّقة)}$$

إذن $\forall x\in\mathbb{N}^*,\ x\Re x$

فالعلاقة $\Re$ إنعكاسية في $\mathbb{N}^*$.

- التناظرية: لو أخذنا العددين 2 و 4 من $\mathbb{N}^*$، نلاحظ أنّ $2\Re 4$ و $\overline{4\Re 2}$ بمعنى:

$$\exists (x,y)\in (\mathbb{N}^*)^2,\ x\Re y\wedge \overline{y\Re x}$$

فالعلاقة $\Re$ ليست تناظرية في $\mathbb{N}^*$.

- ضد التناظرية: لدينا

$$\forall (x,y)\in (\mathbb{N}^*)^2,\ \begin{pmatrix} x\Re y\\ \wedge \\ y\Re x\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{pmatrix} y=kx,\ k\in\mathbb{N}^*\\ \wedge\\ x=k'y,\ k'\in\mathbb{N}^*\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(xy=kk'xy,\ \left(k,k'\in\mathbb{N}^*\right)\right)$$

$$\Rightarrow (kk'=1)$$

$$\Rightarrow (k=k'=1)$$

ومنه $x=y$.

وبالتالي: $\forall (x,y)\in (\mathbb{N}^*)^2,\ (x\Re y\wedge y\Re x)\Rightarrow (x=y)$

إذن العلاقة $\Re$ ضد تناظرية في $\mathbb{N}^*$.

- المتعدية: لدينا

$$\forall (x,y,z)\in (\mathbb{N}^*)^3,\ \begin{pmatrix} x\,\Re y \\ \wedge \\ y\,\Re z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y = kx,\ k\in\mathbb{N}^* \\ \wedge \\ z = k'y,\ k'\in\mathbb{N}^* \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \left(z = kk'x,\ (kk'\in\mathbb{N}^*)\right)$$
$$\Rightarrow (x\,\Re z)$$

وبالتالي: $\forall (x,y,z)\in (\mathbb{N}^*)^3,\ (x\,\Re y \wedge y\,\Re z)\Rightarrow (x\,\Re z)$

إذن العلاقة $\Re$ متعدية في $\mathbb{N}^*$.

علاقة التكافؤ: لتكن E مجموعة غير خالية و $\Re$ علاقة في E.

تعريف: نقول أن $\Re$ علاقة تكافؤ في E إذا وفقط إذا كانت $\Re$ إنعكاسية، تناظرية ومتعدية في E.

أمثلة:

- علاقة المساواة في $\mathbb{R}$ علاقة تكافؤ.
- علاقة التوازي في مجموعة مستقيمات مستو علاقة تكافؤ.
- علاقة (مضاعف) في المثال السابق ليست علاقة تكافؤ في $\mathbb{N}^*$، لأنها ليست تناظرية.

أصناف التكافؤ:

تعريف: لتكن المجموعة E المزوّدة بعلاقة التكافؤ $\Re$، وليكن a عنصرا من E.

نُسمّي صنف تكافؤ العنصر a مجموعة العناصر التي لها علاقة مع a ونرمز لها بالرمز $\dot{a}$، ونكتب:

$$\dot{a} = \{x\in E,\ x\,\Re a\}$$

خواص أصناف التكافؤ:

- كل صنف تكافؤ غير خال.
- أصناف التكافؤ منفصلة مثنى مثنى.
- إتحاد أصناف التكافؤ يساوي المجموعة E.

مجموعة حاصل القسمة: لتكن $\Re$ علاقة تكافؤ في مجموعة E.

حسب الخواص السابقة، مجموعة أصناف التكافؤ تُشكّل تجزئة للمجموعة E، وهي تُسمى مجموعة حاصل القسمة لـ E وفق $\Re$، ونرمز لها بالرمز $E/_{\Re}$، ونكتب $E/_{\Re} = \{\dot{a},\ a\in E\}$.

تطبيق: نُعرّف على $\mathbb{Z}$ العلاقة $\Re$ كما يلي:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{Z}^2,\ (x\,\Re y)\Leftrightarrow (x-y=2k,\ k\in\mathbb{Z})$$

1)- بيّن أنّ $\Re$ علاقة تكافؤ في $\mathbb{Z}$.

2)- عيّن صنف تكافؤ كل من 0 و 1، ثمّ استنتج مجموعة حاصل القسمة $\mathbb{Z}/_{\Re}$.

الحل:

1)-إثبات أنّ $\Re$ علاقة تكافؤ في $\mathbb{Z}$:

–الإنعكاسية: لدينا

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ \left(x \Re x\right) \Leftrightarrow \left(x - x = 2(0)\right)\ \textbf{(مُحقّقة)}$$

إذن $\forall x \in \mathbb{Z},\ x \Re x$

ومنه $\Re$ علاقة إنعكاسية في $\mathbb{Z}$.

–التناظرية: لدينا

$$\begin{aligned}\forall \left(x, y\right) \in \mathbb{Z}^2,\ \left(x \Re y\right) &\Rightarrow \left(x - y = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\right)\\ &\Rightarrow \left(y - x = 2(-k),\ (-k) \in \mathbb{Z}\right)\\ &\Rightarrow \left(y \Re x\right)\end{aligned}$$

وبالتالي: $\forall \left(x, y\right) \in \mathbb{Z}^2,\ x \Re y \Rightarrow y \Re x$

ومنه $\Re$ علاقة تناظرية في $\mathbb{Z}$.

–المتعدّية: لدينا

$$\forall \left(x, y, z\right) \in \mathbb{Z}^3,\ \begin{pmatrix} x \Re y \\ \wedge \\ y \Re z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - y = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \wedge \\ y - z = 2k',\ k' \in \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

بالجمع طرفا لطرف نجد $x - z = 2\left(k + k'\right),\ (k + k') \in \mathbb{Z}$ معناه $x \Re z$.

وبالتالي: $\forall \left(x, y, z\right) \in \mathbb{Z}^3,\ \left(x \Re y \wedge y \Re z\right) \Rightarrow \left(x \Re z\right)$

ومنه $\Re$ علاقة متعدّية في $\mathbb{Z}$.

بما أنّ $\Re$ علاقة إنعكاسية، تناظرية و متعدّية في $\mathbb{Z}$ فهي علاقة تكافؤ في $\mathbb{Z}$.

2)– صنف تكافؤ 0: لدينا

$$\dot{0} = \left\{x \in \mathbb{Z},\ x \Re 0\right\}$$

و حسب تعريف العلاقة $\Re$، نجد $\left(x \Re 0\right) \Leftrightarrow \left(x - 0 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\right)$

ومنه $\dot{0} = \left\{2k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$، وهي الأعداد الزوجية في $\mathbb{Z}$.

– صنف تكافؤ 1: $\dot{1} = \left\{2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$، وهي الأعداد الفردية في $\mathbb{Z}$.

–الاستنتاج: نلاحظ أنّه من أجل كل عدد x من $\mathbb{Z}$ فإن $x = 2k + a, k \in \mathbb{Z}$ حيث $\left(a = 0 \vee a = 1\right)$ بمعنى أن $x = 2k, k \in \mathbb{Z}$ أو $x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$ أي إمّا $x \in \dot{0}$ و إمّا $x \in \dot{1}$.

وبالتالي نستنتج أنّ $\mathbb{Z}/_{\Re} = \left\{\dot{0}, \dot{1}\right\}$.

علاقة الترتيب: لتكن E مجموعة غير خالية و $\Re$ علاقة في E.

تعريف: نقول أن $\Re$ علاقة ترتيب في E إذا وفقط إذا كانت $\Re$ إنعكاسية، ضد تناظرية ومتعدية في E.

أمثلة:

– علاقة المساواة في $\mathbb{R}$ علاقة ترتيب.

– علاقة الإحتواء في مجموعة أجزاء مجموعة علاقة ترتيب.

- العلاقة $\Re$ في التطبيق السابق ليست علاقة ترتيب في $\mathbb{Z}$، لأنها ليست ضد تناظرية (حيث أنه بأخذ العددين الصحيحين 4 و 6 مثلا، نجد أنّ $6\Re 4$ و $4\Re 6$ و $4 \neq 6$).

الترتيب الكلّي و الترتيب الجزئي: لتكن $\Re$ علاقة ترتيب في مجموعة E.

- نقول أن $\Re$ علاقة ترتيب كلّي في E إذا تحقق مايلي:

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x\Re y \vee y\Re x$$

- و نقول أن $\Re$ علاقة ترتيب جزئي في E إذا لم تكن ترتيب كلّي أي إذا تحقق مايلي:

$$\exists (x, y) \in E^2,\ \overline{x\Re y} \wedge \overline{y\Re x}$$

تطبيق1: رأينا في المثال التطبيقي السابق التابع لخواص العلاقة في مجموعة، أنّ العلاقة $\Re$ المُعرّفة بالشكل التالي:

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2,\ (x\Re y) \Leftrightarrow \left(y = kx, k \in \mathbb{N}^*\right)$$

إنعكاسية، ضد تناظرية و متعدية في $\mathbb{N}^*$ فهي علاقة ترتيب في $\mathbb{N}^*$. فهل هذا الترتيب كلّي؟، علّل.

الحل:

إنّ هذا الترتيب ليس كلّي بمعنى جزئي لأنه بأخذ العددين الطبيعيين 2 و 3 مثلا، نجد أنّ $\overline{2\Re 3}$ و $\overline{3\Re 2}$، أي $\exists (x, y) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2,\ \overline{x\Re y} \wedge \overline{y\Re x}$.

تطبيق2:

- بين أنّ العلاقة أصغر أو يساوي ($\leq$) في $\mathbb{R}$ علاقة ترتيب.
- هل هذا الترتيب كلّي؟، علّل.

الحل: العلاقة ($\leq$) في $\mathbb{R}$ علاقة ترتيب:

- فهي إنعكاسية حيث أنّ ($\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$) قضية صحيجة.
- وهي ضد تناظرية حيث أنّ:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \leq y \\ \wedge \\ y \leq x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x - y \leq 0 \\ \wedge \\ x - y \geq 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x - y = 0) \Rightarrow (x = y)$$

- وهي متعدية حيث أنّ:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \leq y \\ \wedge \\ y \leq z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x - y \leq 0 \\ \wedge \\ y - z \leq 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x - z \leq 0) \Rightarrow (x \leq y)$$

إنّ هذا الترتيب كلّي لأنّ: القضية $\left(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \vee y \leq x\right)$ صحيحة.

حيث من أجل كل عددين حقيقين x و y، إمّا $x - y \leq 0$ أو $x - y \geq 0$ بمعنى $x \leq y$ أو $y \leq x$.

4.1 التطبيقـــات

سندرس في هذا الجزء نوعا خاصا من العلاقات هي التطبيقات.
إنّ الهدف من هذا الموضوع هو التعرّف على مفهوم التطبيق، كيفية تعيين مركب تطبيقين، التمييز بين التطبيق المتباين والغامر والتقابل، مع التطرقّ إلى التطبيق العكسي، ثُمّ التعرف على الصورة المباشرة والصورة العكسية لتطبيق . وفي كلّ مرّة نعالج أمثلة تطبيقية لتوضيح هذه المفاهيم وكيفية تطبيقها.

تعريف: لتكن E و F مجموعتان.
نُسمي تطبيقا من المجموعة E نحو المجموعة F كُلّ علاقة تُرفق بكل عنصر من E عنصرا وحيدا من F، ونرمز له بأحد الرموز f، g، h....

- فإذا كان f تطبيقا من E نحو F نكتب:

$$\begin{aligned} f &: E \to F \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

تُسمى E مجموعة البدء أو السوابق، و F مجموعة الوصول أو الصور، كما يُسمى العنصر x من E سابقة، و العنصر y من F صورة العنصر x بالتطبيق f.

أمثلة:

- إن العلاقة المُعرّفة بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = e^x \end{aligned}$$

تطبيق، حيث أن لكل عدد حيقي x قيمة وحيدة e^x.

- بينما العلاقة المُعرّفة بالشكل:

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = \ln(x) \end{aligned}$$

ليست تطبيق، لأن العدد الحيقي (-2) مثلا ليس له صورة.

تركيب تطبيقين: لتكن E، F و G ثلاث مجموعات، وليكن f تطبيقا من E نحو F و g تطبيقا من F نحو G، تركيب التطبيقين f و g (بهذا الترتيب) هو التطبيق من E نحو G الذي يُرمز له بالرمز $g \circ f$ و المُعرّف كمايلي:

$$\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right]$$

كما يمكن تلخيص هذا التركيب في المخطط التالي:

$$\begin{aligned} &E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \\ &x \mapsto f(x) \mapsto g\left[f(x)\right] \end{aligned}$$

مثال: لنعتبر التطبيقين f و g المُعرّفين كما يلي:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 3x + 1 \end{aligned} \quad ، \quad \begin{aligned} g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

- عيّن كل من $g \circ f$ و $f \circ g$.

لدينا

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 3x+1 \mapsto g(3x+1) = \sqrt{9x^2+6x+2}$$

وبالتالي

$$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (g \circ f)(x) = \sqrt{9x^2+6x+2}$$

وكذا لدينا

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x^2+1} \mapsto f\left(\sqrt{x^2+1}\right) = 3\sqrt{x^2+1}+1$$

وبالتالي

$$f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (f \circ g)(x) = 3\sqrt{x^2+1}+1$$

عمومًا $g \circ f \neq f \circ g$.

خواص التطبيق: ليكن f تطبيقا من مجموعة E نحو مجموعة F.

أ- التباين:

تعريف: يكون التطبيق f متباينا إذا وفقط إذا كان لكل عنصر من F سابقة على الأكثر في E بالتطبيق f.

ملاحظات:

- يمكن صياغة تعريف التباين كمايلي:

$$\forall (x_1,x_2) \in E^2,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- وعمليا نستخدم الصيغة التالية في تعريف التباين (بالانتقال إلى العكس النقيض):

$$\forall (x_1,x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- باستعمال حل المعادلة $y = f(x)$ ذات المجهول x يكون التعريف بالصيغة التالية:

يكون التطبيق f متباينا إذا وفقط إذا كان من أجل كل y من F، المعادلة $y = f(x)$ ذات المجهول x من E تقبل على الأكثر حلاّ في E.

- يكون التطبيق f ليس متباينا إذا وفقط إذا تحقق مايلي:

$$\exists (x_1,x_2) \in E^2,\ x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

أمثلة:

1)- لنعتبر التطبيق f المُعرّف كما يلي:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f(x)=2x+3$$

إن هذا التطبيق متباينا لأن:

$$\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

2)– لنعتبر التطبيق g المُعرّف كما يلي:

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto g(x)=x^2$$

إن هذا التطبيق ليس متباينا لأنه مثلا من أجل $x_1=2$ و $x_2=-2$، يكون $2\neq-2$ ولكن $g(-2)=g(2)$.

بمعنى $\exists(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ x_1\neq x_2\wedge g(x_1)=g(x_2)$.

ب– الغُمر:

تعريف: يكون التطبيق f غامرا إذا وفقط إذا كان لكل عنصر من F سابقة على الأقل في E بالتطبيق f.

ملاحظات:

- يمكن صياغة تعريف الغامر كمايلي:

$$\forall y\in F,\exists x\in E,\ y=f(x)$$

- باستعمال حل المعادلة $y=f(x)$ ذات المجهول x يكون التعريف بالصيغة التالية:

يكون التطبيق f غامرا إذا وفقط إذا كان من أجل كل y من F، المعادلة $y=f(x)$ ذات المجهول x من E تقبل على الأقل حلاً في E.

- يكون التطبيق f ليس غامرا إذا وفقط إذا تحقق مايلي:

$$\exists y\in F,\forall x\in E,\ y\neq f(x)$$

أمثلة:

1)– إن التطبيق f المُعرّف في المثال 1) السابق غامرا لأنه: من أجل كل عدد حقيقي y بحيث $y=f(x)$ يكون لدينا

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=2x+3$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{y-3}{2}$$

مع $\frac{y-3}{2}$ هو عدد حقيقي، فالعدد x موجود في $\mathbb{R}$.

وبالتالي: $\forall y\in\mathbb{R},\exists x\in\mathbb{R},\ y=f(x)$

ممّا يدلّ على أنّه غامر.

2)– لنعتبر التطبيق h المُعرّف كما يلي:

$$h:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto h(x)=\frac{x+1}{x-2}$$

ليكن $y\in\mathbb{R}$ بحيث

$$y=h(x)\Leftrightarrow y=\frac{x+1}{x-2}$$
$$\Leftrightarrow x(y-1)=2y+1$$

فنلاحظ أنه من أجل $y=1$ فإن x غير موجود، أي أن العدد 1 لا يقبل أية سابقة في $\mathbb{R}-\{2\}$، بمعنى

$$\exists y\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}-\{2\},\ y\neq h(x)$$

إذن التطبيق h ليس غامرا.

ج- التقابل:

تعريف: يكون التطبيق f تقابلا إذا وفقط إذا كان لكل عنصر من F سابقة وحيدة في E بالتطبيق f.

ملاحظات:

- باستعمال حل المعادلة $y=f(x)$ ذات المجهول x يكون التعريف بالصيغة التالية:

يكون التطبيق f تقابلا إذا وفقط إذا كان من أجل كل y من F، المعادلة $y=f(x)$ ذات المجهول x من E تقبل حلاّ وحيدا في E.

- حسب االتعريف، يكون التطبيق f تقابلا إذا وفقط إذا كان متباينا وغامرا.
- يكون التطبيق f ليس تقابلا إذا وفقط إذا كان ليس متباينا أوليس غامرا.

أمثلة:

1)- إن التطبيق f المُعرّف في المثال 1) السابق (في فقرتي التباين و الغُمر)، وجدنا أنّه متباين وغامر فهو تقابل.

2)- رأينا أن التطبيق g في المثال 2) السابق (فقرة التباين)، ليس متباينا فهو ليس تقابلا.

- كما رأينا أن التطبيق h في المثال 2) السابق (فقرة الغُمر)، ليس غامرا فهو ليس تقابلا.

التطبيق العكسي لتقابل:

تعريف: إذا كان f تطبيقا تقابليا من E نحو F فإنه يقبل تطبيقا عكسيا يُرمز له بالرمز f^{-1}، وهو مُعرّف من F نحو E كمايلي:

$$\forall x\in E,\forall y\in F,\ y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$$

نتيجة: التطبيق العكسي لتقابل هو تقابل.

مثال: باعتبار التطبيق f المُعرّف كمايلي:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f(x)=2x+3$$

تقابل (حسب ما سبق) فهو يقبل تطبيق عكسي، ولدينا (حسب فقرة الغُمر) $y=f(x)\Leftrightarrow x=\frac{y-3}{2}$، وبالتالي التطبيق العكسي للتطبيق f مُعرّف كمايلي:

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$$

تمرين تطبيقي: نعتبر التطبيق f المُعرّف من $\mathbb{R}^*$ في $\mathbb{R}-\{3\}$ كمايلي: $f(x)=\frac{3x-1}{x}$.

- أثبت أنّ التطبيق f تقابلي، ثُمّ عيّن تطبيقه العكسي.

الحل:

–إثبات أنّ التطبيق f تقابلي:

. <u>التباين</u>: لدينا

$$\forall (x_1,x_2)\in(\mathbb{R}^*)^2,\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{3x_1-1}{x_1}=\frac{3x_2-1}{x_2}$$
$$\Rightarrow 3x_1x_2-x_2=3x_1x_2-x_1$$
$$\Rightarrow x_1=x_2$$

ومنه التطبيق f متباين.

. <u>الغُمر</u>: ليكن $y\in\mathbb{R}-\{3\}$ بحيث $y=f(x)$

يكون لدينا

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{3x-1}{x}$$
$$\Leftrightarrow x(y-3)=-1$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-1}{y-3},\quad (y\neq 3)$$

ومنه x موجود في $\mathbb{R}^*$ مهما كان y من $\mathbb{R}-\{3\}$.

إذن التطبيق f غامر.

وبما أن التطبيق f متباين و غامر فهو تقابل.

طريقة ثانية لإثبات التقابل بحل المعادلة $y=f(x)$ ذات المجهول x من $\mathbb{R}^*$ مع y عدد معلوم من $\mathbb{R}-\{3\}$:

لدينا (كما في إثبات الغامر)،

$$y=f(x)\Leftrightarrow x=\frac{-1}{y-3},\quad (y\neq 3)$$

فالمعادلة $y=f(x)$ تقبل حلا وحيدا $x=\frac{-1}{y-3}$ من $\mathbb{R}^*$.

إذن التطبيق f تقابل.

–و مادام التطبيق f تقابل فهو يقبل تطبيقا عكسيا f^{-1} مُعرّف كمايلي:

$$f^{-1}:\mathbb{R}-\{3\}\to\mathbb{R}^*$$
$$x\mapsto f^{-1}(x)=\frac{-1}{x-3}$$

الصورة المباشرة: ليكن f تطبيقا من مجموعة E نحو مجموعة F، ولتكن A مجموعة جزئية من E.

نُسمّي الصورة المباشرة للمجموعة A وفق التطبيق f المجموعة الجزئية من F المُعرّفة كمايلي:

$$f(A)=\{f(x),\ x\in A\}$$

أو بالصيغة:

$$f(A)=\{y\in F,\ \exists x\in A: y=f(x)\}$$

خواص: لتكن A_1 و A_2 مجموعتان جزئيتان من مجموعة E.

أ- $(A_1 \subset A_2) \Rightarrow (f(A_1) \subset f(A_2))$

ب- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

البرهان:

أ- لنفرض $A_1 \subset A_2$ ونثبت أنّ $f(A_1) \subset f(A_2)$:

$$\begin{aligned}\forall y \in F,\ (y \in f(A_1)) &\Rightarrow (\exists x \in A_1 : y = f(x))\\ &\Rightarrow (\exists x \in A_2 : y = f(x))\\ &\Rightarrow (y \in f(A_1))\end{aligned}$$

ومنه $f(A_1) \subset f(A_2)$.

ب- لدينا

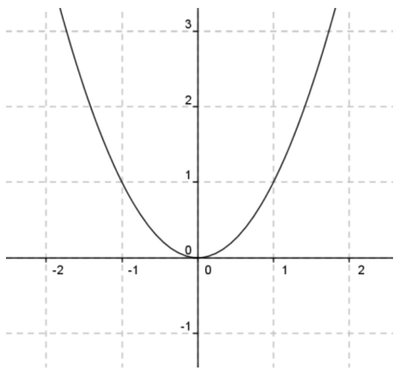
$$\begin{aligned}f(A_1) \cup f(A_2) &= \{y \in F,\ \exists x \in A_1 : y = f(x)\} \cup \{y \in F,\ \exists x \in A_1 : y = f(x)\}\\ &= \{y \in F,\ \exists x \in (A_1 \cup A_2) : y = f(x)\}\\ &= f(A_1 \cup A_2)\end{aligned}$$

ومنه $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

أمثلة تطبيقية:

1) لنعتبر التطبيق f المُعرّف كمايلي:

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x) = x^2\end{aligned}$$



بيان $f : (y = x^2)$

المطلوب: تعيين الصورة المباشرة لكل من: $[0,1]$، $[-1,0]$، $[-1,1]$، $\mathbb{R}$.

يمكن استعمال البيان المقابل لتعين الصور المباشرة لهذه المجالات.

و يمكن استعمال الحصر بالنسبة للمجالين الأول والثاني.

كما يمكن استعمال إتجاه التغير: لدينا f متزايد على $\mathbb{R}_+$ و متناقص على $\mathbb{R}_-$.

كون f متزايد على $[0,1]$ فإن

$$f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,1]$$

و كون f متناقص على $[-1,0]$ فإن

$$f([-1,0]) = [f(0), f(-1)] = [0,1]$$

و كون f غير رتيب على $[-1,1]$، فلدينا $[-1,1] = [-1,0] \cup [0,1]$ وبالتالي:

$$f([-1,1]) = f([-1,0] \cup [0,1]) = f([-1,0]) \cup f([0,1]) = [0,1]$$

وبالمثل

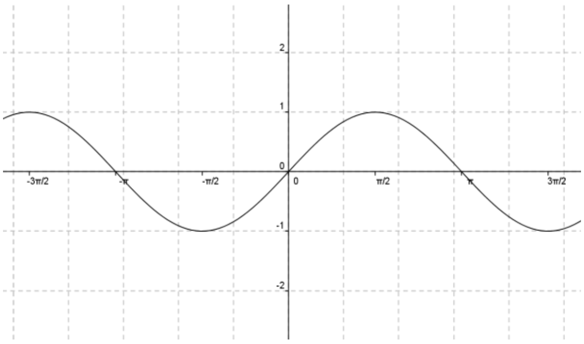
$$f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+) = f(\mathbb{R}_-) \cup f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$$

أو بالقول، بما أن $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0)$ أي $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0)$ فإن $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

2) لنعتبر التطبيق g المُعرّف كمايلي:

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto g(x)=\sin x$$

المطلوب: تعيين الصورة المباشرة لكل من: $\mathbb{R}$ ، $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ ، $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$.



بيان g : $(y=\sin x)$

يمكن الاستعانة بالبيان المقابل لتحديد الصورة المباشرة المطلوبة.

كما يمكن استعمال بعض دساتير التحويل أو استعمال إتجاه التغير.

لدينا:

$$g(\mathbb{R})=\{\sin x,\ x\in\mathbb{R}\}=[-1,1] \quad \text{لأن} \quad \forall x\in\mathbb{R},\ -1\le\sin x\le 1$$

بما أن g متزايد على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ فإن:

$$g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left[g(0),g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right[=[0,1[$$

و بما أن g متناقص على المجال $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$ فإن:

$$g\left(\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right[\right)=\left]g\left(\frac{3\pi}{2}\right),g(\pi)\right]=]-1,0]$$

الصورة العكسية: ليكن f تطبيقا من مجموعة E نحو مجموعة F، ولتكن B مجموعة جزئية من F.

نُسمّي الصورة العكسية للمجموعة B وفق التطبيق f المجموعة الجزئية من E المُعرّفة كمايلي:

$$f^{-1}(B)=\{x\in E,\ f(x)\in B\}$$

ملاحظة: الرمز f^{-1} في $f^{-1}(B)$ لا يعني بالضرورة التطبيق العكسي إلا إذا كان f تقابل.

خواص: لتكن B_1 و B_2 مجموعتان جزئيتان من F.

أ- $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$

ب- $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$

البرهان:

أ- لدينا

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)&=\{x\in E,\ f(x)\in B_1\}\cup\{x\in E,\ f(x)\in B_2\}\\ &=\{x\in E,\ (f(x)\in B_1)\vee(f(x)\in B_2)\}\\ &=\{x\in E,\ f(x)\in(B_1\cup B_2)\}\\ &=f^{-1}(B_1\cup B_2)\end{aligned}$$

ومنه $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$.

ب- لدينا

$$f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)=\{x\in E,\ f(x)\in B_1\}\cap\{x\in E,\ f(x)\in B_2\}$$
$$=\{x\in E,\ (f(x)\in B_1)\wedge(f(x)\in B_2)\}$$
$$=\{x\in E,\ f(x)\in(B_1\cap B_2)\}$$
$$=f^{-1}(B_1\cap B_2)$$

ومنه $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$.

أمثلة:

1)–لنعتبر التطبيق f في المثال الأول السابق.

المطلوب: تعيين الصورة العكسية لكل من: 1، -1.

لدينا:

$$f^{-1}(\{1\})=\{x\in\mathbb{R},\ x^2=1\}=\{-1,1\}$$
$$f^{-1}(\{-1\})=\{x\in\mathbb{R},\ x^2=-1\}=\varnothing .$$

2)– لنعتبر التطبيق g في المثال الثاني السابق.

المطلوب: تعيين الصورة العكسية لكل من: 0، 2.

لدينا:

$$g^{-1}(\{0\})=\{x\in\mathbb{R},\ \sin x=0\}=\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

بينما

$$g^{-1}(\{2\})=\{x\in\mathbb{R},\ \sin x=2\}=\varnothing .$$

تمارين للحل:

– **المجموعـات:**

التمرين الأول:

A، B، C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E. برهن صحّة مايلي:

1. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
2. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
3. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
4. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
5. $A-B=A\cap\overline{B}$
6. تحقق من صحّة الخواص السّابقة إذا علمت أن :

$E=\{1,2,3,4,5\}$، $A=\{3,4\}$، $B=\{1,2,4\}$، $C=\{2,3,4\}$.

التمرين الثاني:

A، B، C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E. برهن صحّة مايلي:

1. $A\vartriangle C=B\vartriangle C\Leftrightarrow A=B$

2. $A\cup B=A\cap B\Leftrightarrow A=B$

3. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

4. $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

5. $A\vartriangle B=A\cap B\Leftrightarrow A=B=\varnothing$

التمرين الثالث:

إذا كانت A_1 ، A_2 ، ...، A_n n مجموعة جزئية من E ، فبيّن أن:

1. $\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

2. $\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

– <u>**العلاقـــات:**</u>

التمرين الرابع:

لتكن $\Re$ العلاقة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$x\Re y\Leftrightarrow\left(x^3+8\right)\left(y^2+1\right)=\left(y^3+8\right)\left(x^2+1\right)$$

1) أ–تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $\left(x+2\right)\left(x^2-2x+4\right)=x^3+8$

ب– استنتج قيمة x حتى تكون $x\Re(-2)$ (x لها علاقة مع -2).

2) بيّن أنّ $\Re$ علاقة تكافؤ في $\mathbb{R}$، ثمّ عيّن صنف تكافؤ العدد 8.

التمرين الخامس:

$\Re$ علاقة في $\mathbb{R}^*$ معرّفة كمايلي:

$$x\Re y\Leftrightarrow x^2-\frac{1}{x^2}=y^2-\frac{1}{y^2}$$

– بيّن أنّ $\Re$ علاقة تكافؤ في $\mathbb{R}^*$، ثمّ عيّن صنف تكافؤ عنصر a من $\mathbb{R}^*$.

التمرين السادس:

نعرّف على $\mathbb{R}^2$ العلاقة $\Re$ كمايلي:

$$(a,b)\Re(c,d)\Leftrightarrow a\le c\wedge b\le d$$

– بيّن أنّ $\Re$ علاقة ترتيب في $\mathbb{R}^2$، وهل هذا الترتيب كلّي؟.

التمرين السابع:

نفس أسئلة التمرين السادس السابق إذا عُرّفت علاقة $\Re$ في $\mathbb{R}$ كمايلي: $a\Re b\Leftrightarrow a^3-b^3\ge 0$.

- **التطبيقـــات:**

التمرين الثامن: لنعتبر f التطبيق المعرّف من $\mathbb{R}-\{2\}$ في $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{x+5}{x-2}$

و ليكن التطبيق g المعرّف من $\mathbb{R}$ في نفسها بالشكل $g(x)=x^2$.

1. هل f متباين ؟ وهل هو غامر ؟، مع التبرير
2. نفس الأسئلة بالنسبة للتطبيق g .
3. عيّن (إن كان ممكنا) $g\circ f$ ، $f\circ g$.

التمرين التاسع: E، F ، G ثلاث مجموعات.

f تطبيق للمجموعة E في F و g تطبيق للمجموعة F في G. أثبت صحّة كل خاصية من الخواص التالية:

1. (f متباين) $\Rightarrow$ ($g\circ f$ متباين)
2. (g غامر) $\Rightarrow$ ($g\circ f$ غامر)
3. (g متباين) $\Rightarrow$ ($g\circ f$ متباين و f غامر)
4. (f غامر) $\Rightarrow$ ($g\circ f$ غامر و g متباين).

التمرين العاشر: ليكن f التطبيق المعرّف من $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right[$ في $[0,+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\sqrt{2x-3}$

و ليكن g التطبيق المعرّف من $\mathbb{R}-\{1\}$ في $\mathbb{R}-\{1\}$ كمايلي: $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

1. أثبت أن f تقابل وعين تطبيقه العكسي f^{-1}.
2. أثبت أن g تقابل وعين تطبيقه العكسي g^{-1} .

التمرين الحادي عشر: a، b عددان حقيقيان، $E=[a,+\infty[$ ، $F=[b,+\infty[$. f التطبيق المعرّف من E في F

حيث $f(x)=3x^2-4$

1. عيّن أصغر قيمة ممكنة لكل من العددين a و b حتى يكون التطبيق f تقابلا.
2. نفس السؤال من أجل $f(x)=\sqrt{2x-5}$.

التمرين الثاني عشر: نعتبر التطبيق f لمجموعة E في مجموعة F . A_1، A_2 مجموعتان جزئيتان من E

و B_1، B_2 مجموعتان جزئيتان من F . بيّن صحّة الخواص التالية:

1. $(A_1\subset A_2)\Rightarrow(f(A_1)\subset f(A_2))$
2. $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$
3. $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$
4. $(B_1\subset B_2)\Rightarrow(f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2))$
5. $f(A_1\cap A_2)\subset(f(A_1)\cap f(A_2))$
6. $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$.

الفصل الثاني: بنية حقل الأعداد الحقيقية على $\mathbb{R}$

مقدمة: نضرا لحاجة الرياضيات إلى تعريف مجموعة أعداد أوسع من مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$، وحتى نُدرك هذه الحاجة يكفي القول إن حل بعض المعادلات لا يُمكن أن يتم بدون هذا التوسيع. خُذ مثلا المعادلة $x^2 = 2$، إنّها لا تقبل حلا في $\mathbb{Q}$.

بالفعل: لو استعملنا البرهان بالخُلف وفرضنا أنّها تقبل حلا في $\mathbb{Q}$ لكان هذا الحل الناطق يُكتب على الشكل الوحيد $x = \dfrac{p}{q}$ حيث p و q أوليان فيما بينهما، وبالتالي يكون لدينا $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$ أي $p^2 = 2q^2$ وهذا يعني أن p^2 زوجي، فنكتبه على الشكل $p^2 = 2k,\ k \in \mathbb{N}$، لنجد $q^2 = 2k^2$ فيكون كذلك q^2 زوجي، ونعلم أنّه مادام p^2 و q^2 زوجيان فإن p و q زوجيان فيكونان غير أوّليين فيما بينهما وهذا تناقض مع ما فرضناه، وبالتالي فحل المعادلة السّابقة لا يكون عددا ناطقا.

لهذا يتطلب حل هذه المعادلة إدخال مجموعة أخرى من الأعداد تتضمن أعدادا غير ناطقة وهي التي نصفها بالأعداد الصمّاء مثل العدد $\sqrt{2}$ أو $-\sqrt{2}$ واللّذان يُمثّلان حلّي المعادلة السّابقة. فمجموعة الأعداد الحقيقية مُكوّنة من الأعداد الناطقة و الصمّاء.

سنتطرق في هذا الفصل إلى بنية مجموعة الأعداد الحقيقية المزوّدة بعمليتي الجمع والضرب المألوفتين، كما رأينا في الفصل السابق في جزء العلاقات أن مجموعة الأعداد الحقيقية مُرتبّة كُلّيا بالعلاقة ($\leq$)، وهذا يقودنا إلى دراسة العناصر الحادّة للمجموعات الجزئية في $\mathbb{R}$ ومنها التعرّف على المجموعة المحدودة.

كما نُدرج في هذا الفصل القيمة المطلقة والجزء الصحيح لعدد حقيقي وبعض خصائصهما، والتطرّق إلى تعريف المجال، مع ذكر أنواعه والعمليات على المجالات (تقاطع و اتحاد المجالات)، هذا نضرا لأهمية وتوظيف هذه المفاهيم في معارف مختلفة في الفصول اللاحقة.

1.2 عمليات و خواص:

1)- $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x+y)+z = x+(y+z)$ (الجمع تجميعي في $\mathbb{R}$).

2)- $\forall x \in \mathbb{R},\ x+0 = 0+x = x$ (العدد 0 هو العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع في $\mathbb{R}$).

3)- $\forall x \in \mathbb{R},\ x+(-x) = (-x)+x = 0$ (لكل عدد حقيقي x نظير $(-x)$ بالنسبة لعملية الجمع في $\mathbb{R}$).

4)- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y = y+x$ (الجمع تبديلي في $\mathbb{R}$).

نُلخص الخواص السابقة بالقول: البنية $(\mathbb{R},+)$ زمرة تبديلية، ونقرأ $\mathbb{R}$ مزوّدة بالجمع زمرة تبديلية.

5)- $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ (الضرب تجميعي في $\mathbb{R}$).

6)- $\forall x \in \mathbb{R},\ x \times 1 = 1 \times x = x$ (العدد 1 هو العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الضرب في $\mathbb{R}$).

7)- $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x} \times x = 1$ (لكل عدد حقيقي x نظير $\dfrac{1}{x}$ بالنسبة لعملية الضرب في $\mathbb{R}^*$).

8)- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \times y = y \times x$ (الضرب تبديلي في $\mathbb{R}$).

وفي هذه الحالة نقول أن البنية $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبديلية.

9)– $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x\times(y+z)=(x\times y)+(x\times z)$ (الضرب توزيعي على الجمع في $\mathbb{R}$).
بجمع الخواص السابقة (1) – 9)) نقول أن البنية $(\mathbb{R},+,\times)$ حقل تبديلي.

نعلم مماسبق أن العلاقة ($\le$) علاقة ترتيب كُلّي في $\mathbb{R}$، فنقول أن مجموعة الأعداد الحقيقية مُرتّبة كُلّيا بهذه العلاقة.

2.2 العناصر الحادّة: لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.

- نقول أن A محدودة من الأعلى إذا وُجد عدد حقيقي a بحيث: $\forall x\in A,\ x\le a$. يُسمّى a حاد أعلى للمجموعة A
- إذا قبلت مجموعة الحواد العليا للمجموعة A قيمة صغرى نُسميها الحد الأعلى للمجموعة A، ونرمز له بالرمز $\sup A$ ($\sup A$ أصغر الحواد العليا).
- إذا كانت المجموعة A محدودة من الأعلى وكان a حاد من الأعلى لهذه المجموعة وينتمي لها فإننا نسميه القيمة العظمى للمجموعة A ونرمز لها بالرمز $\max A$. $(\max A=a)\Leftrightarrow((a\in A)\wedge(\forall x\in A, x\le a))$.
- نقول أن A محدودة من الأدنى إذا وُجد عدد حقيقي b بحيث: $\forall x\in A,\ x\ge b$. يُسمّى b حاد أدنى للمجموعة A
- إذا قبلت مجموعة الحواد الدنيا للمجموعة A قيمة كبرى نُسميها الحد الأدنى للمجموعة A، ونرمز له بالرمز $\inf A$ ($\inf A$ أكبر الحواد الدنيا).
- إذا كانت المجموعة A محدودة من الأدنى وكان b حاد من الأدنى لهذه المجموعة وينتمي لها فإننا نسميه القيمة الصغرى للمجموعة A ونرمز لها بالرمز $\min A$. $(\min A=b)\Leftrightarrow((b\in A)\wedge(\forall x\in A, x\ge b))$.

ملاحظة: نقول عن المجموعة A أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى و من الأدنى.

أمثلة:

1)– مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ محدودة من الأدنى بالعدد 0 ولدينا $\min\mathbb{N}=\inf\mathbb{N}=0$، لكنها ليست محدودة من الأعلى.

2)– إذا اعتبرنا المجال $[1,3]$ من $\mathbb{R}$ فإننا نلاحظ أن:

- مجموعة الحواد العليا لهذا المجال هي: $[3,+\infty[$
- مجموعة الحواد الدنيا لهذا المجال هي: $]-\infty,1]$
- $\max[1,3]=\sup[1,3]=3$ ، $\min[1,3]=\inf[1,3]=1$.

3)– و إذا اعتبرنا المجال $]1,3]$ من $\mathbb{R}$ فإننا نلاحظ أن:

- مجموعة الحواد العليا لهذا المجال هي: $[3,+\infty[$
- مجموعة الحواد الدنيا لهذا المجال هي: $]-\infty,1]$
- $\max]1,3]=\sup]1,3]=3$ ، $\inf]1,3]=1$ لكن $\min]1,3]$ غير موجود.

تطبيق: عيّن إن وُجد كل من الحد الأعلى، الحد الأدنى، القيمة العظمى و القيمة الصغرى للمجموعة A التالية:

$$A=\left\{\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}/\ 0<x\le1\right\}$$

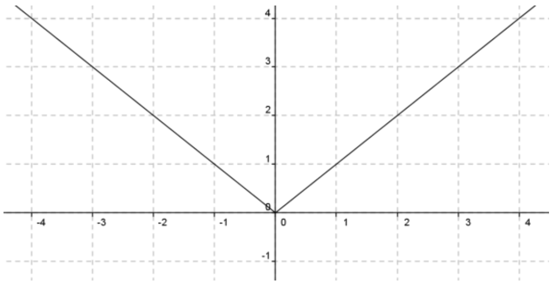
الحل: من $0 < x \leq 1$ نجد $1 < 1+x^2 \leq 2$ ومنه $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} < 1$ وبالتالي:

$\sup A = 1$ و $\max A$ غير موجود، $\min A = \inf A = \frac{1}{2}$.

3.2 القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

تعريف: نُسمي القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بالرمز $|x|$ والمعرف بـ :

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$



بيان دالة القيمة المطلقة: $(y = |x|)$

<u>بيانيا</u>: تُمثل القيمة المطلقة بيانيا (الشكل المقابل) بنصفي مستقيمين بنفس المبدأ (مبدأ المعلم).

مثال: $\left|\sqrt{3}-1\right| = \sqrt{3}-1$ ، $\left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1$.

خواص القيمة المطلقة:

1)– من أجل كل عدد حقيقي x : $|-x| = |x|$ ، $\sqrt{x^2} = |x|$ (حسب التعريف).

2)– من أجل كل عددان حقيقيان x و y :

أ– $|xy| = |x| \times |y|$

بالفعل: $|xy| = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{y^2} = |x| \times |y|$.

ب– $|x+y| \leq |x| + |y|$

بالفعل:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \\ &\leq x^2 + y^2 + 2|xy| \\ &= |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \\ &= (|x| + |y|)^2\end{aligned}$$

وبالانتقال إلى الجذر: $|x+y| \leq |x| + |y|$.

ج– $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ مع $y \neq 0$.

بالفعل: $\left|\frac{x}{y}\right| = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}$.

3)– من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a:

$$|x|=a \Leftrightarrow x=a \vee x=-a$$
$$|x|\le a \Leftrightarrow x\in[-a,a]$$
$$|x|\ge a \Leftrightarrow x\in]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$$

بالفعل: لدينا

$$|x|=a \Leftrightarrow x^2-a^2=0$$
$$|x|\le a \Leftrightarrow x^2-a^2\le 0$$
$$|x|\ge a \Leftrightarrow x^2-a^2\ge 0$$

فلإيجاد قيم x في كل حالة، ندرس إشارة الفرق x^2-a^2، ونُلخّصها في الجدول التالي:

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
x^2-a^2		$+$	0	$-$	0	$+$	

و حسب جدول الإشارة نحصل على المطلوب.

4.2 المجالات: إذاكان $a\in\mathbb{R}$ و $b\in\mathbb{R}$ حيث $a<b$ فإن المجموعات التالية:

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R},\ a\le x\le b\}$$
$$]a,b[=\{x\in\mathbb{R},\ a<x<b\}$$
$$[a,b[=\{x\in\mathbb{R},\ a\le x<b\}$$
$$]a,b]=\{x\in\mathbb{R},\ a<x\le b\}$$

تُسمى على التوالي مجالا مغلقا، مفتوحا، نصف مغلق (أو نصف مفتوح)، نصف مغلق (أو نصف مفتوح).

كما نتبنّى الرموز التالية (مجالات غير محدودة من الطرفين أو من طرف واحد):

$$]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$$
$$[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R},\ x\ge a\}$$
$$]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R},\ x>a\}$$
$$]-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R},\ x\le b\}$$
$$]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R},\ x<b\}$$

تطبيق: عين مايلي (تقاطع و إتحاد المجالات):

$$A_1=[1,3[\cap[2,5]$$
$$A_2=[1,3[\cup[2,5]$$
$$A_3=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cap\left[-\frac{1}{2},7\right[$$
$$A_4=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left[-\frac{1}{2},7\right[$$

الحل:

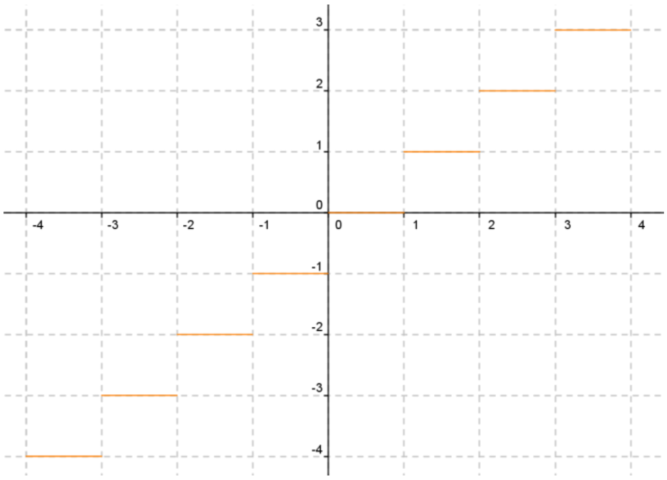
نُمثّل بيانيا هذه المجالات على محور الأعداد الحقيقية لتعيين التقاطع و الإتحاد في كلّ مرّة، لنجد:

$A_1=[2,3[$ ، $A_2=[1,5]$ ، $A_3=\varnothing$ ، $A_4=]-\infty,7[$

5.2 الجزء الصحيح لعدد حقيقي: ليكن x عدد حقيقي.

تعريف: يُسمى العدد الصحيح الوحيد n_0 الذي يُحقق $n_0 \le x < n_0+1$ بالجزء الصحيح للعدد الحقيقي x ونرمز له عادة بالرمز $E(x)$ أو $[x]$.

أمثلة:



بيان دالة الجزء الصحيح: $(y=E(x))$

يمكن الاستعانة بالبيان المقابل (بيان دالة الجزء الصحيح) لإيجاد قيمة الجزء الصحيح لكل عدد حقيقي مُعطى.

. $E\left(\frac{1}{2}\right)=0$ لأن $0\le \frac{1}{2} < 0+1$

. $E\left(\sqrt{2}\right)=1$ لأن $1\le \sqrt{2} < 1+1$

. $E(-3.14)=-4$ لأن $-4\le -3.14 < -4+1$.

خواص:

1)- $\forall n\in\mathbb{Z},\ E(n)=n$ (لأن $n\le n<n+1$)

2)- $\forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{Z},\ E(x+n)=E(x)+n$

بالفعل: لو نفرض العدد الصحيح n_0 هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x (بمعنى $E(x)=n_0$) فيتحقق $n_0\le x<n_0+1$ ومنه $n_0+n\le x+n<n_0+n+1$ وهذا يعني $E(x+n)=E(x)+n$.

3)- $\forall x\in\mathbb{R},\ x-1<E(x)\le x$

بالفعل: من التعريف، يكون لدينا $\forall x\in\mathbb{R},\ E(x)\le x<E(x)+1$ وبالتالي: $\forall x\in\mathbb{R},\ x-1<E(x)\le x$.

تمارين للحل:

التمرين الأول:

نعتبر المجموعة A الجزئية من $\mathbb{R}$ حيث:

$$A=\{x=2+\tfrac{1}{n},\quad n\in\mathbb{N}^*\}$$

1) تحقق أنّ A مجموعة محدودة.

2) عيّن إن وجدت الأعداد $\sup A$ ، $infA$ ، $maxA$ ، $minA$.

التمرين الثاني:

نفس أسئلة التمرين الأول السابق بالنسبة للمجموعات التالية:

$$A_1=\{\tfrac{1}{x}\in\mathbb{R},\quad \frac{7}{5}<x\le\sqrt{2}\}$$

$$A_2=\{x\in\mathbb{R},\quad x^2-x-6\le 0\}$$

$$A_3=\{x\in\mathbb{R},\quad x^4<81\}$$

$A_4 = \{x = -1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \}$.

التمرين الثالث:

A و B مجموعتان جزئيتان غير خاليتين ومحدودتان من $\mathbb{R}$.

برهن على صحة الاستلزامين التاليين:

أ‐ $(A \subset B) \Rightarrow (supA \le supB)$.

ب‐ $(A \subset B) \Rightarrow (infA \ge infB)$.

التمرين الرابع:

لنعتبر h التطبيق المعرّف من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ كمايلي: $h(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

1) عيّن الصورة المباشرة لكل من المجالين $]-\infty, 0]$ و $[0, +\infty[$ بالتطبيق h.

2) أثبت أنّ المجموعة A حيث $A = \left\{ \dfrac{x}{1+|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \right\}$ محدودة في $\mathbb{R}$ مُعيّنا كل من $infA$، $supA$.

التمرين الخامس:

لنعتبر h التطبيق المعرّف من $\mathbb{R} - \{-2\}$ نحو $\mathbb{R}$ كمايلي: $h(x) = |x-2| + \dfrac{4}{x+2}$

1) عيّن الصورة المباشرة لكل من المجالين $[0 , 2]$ و $[2 , 6]$ بالتطبيق h.

2) أثبت أنّ المجموعة A حيث $A = \left\{ |x-2| + \dfrac{4}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R} \right\}$ محدودة، مُعيّنا كل من $infA$، $supA$.

التمرين السادس:

لتكن f دالة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = |x+1| + |-x+3|$

1) أُكتب العبارة $f(x)$ دون استعمال رمز القيمة المطلقة.

2) ارسم (C_f) بيان الدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

3) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $f(x) < 6$، ثُمّ تحقق من النتيجة بيانيا.

الفصل الثالث: الدوال العددية لمتغيّر حقيقي

مقدمة و تمهيد: إنّ موضوع الدوال العددية له أهمية كبيرة في ميادين شتّى كالفيزياء، الكيمياء، الاقتصاد، البيولوجيا،... فهي تُعتبر آلية للتعبير على وضعيات تدرس حدوث شيء ما (x) يتعلّق بشيء آخر(y) بالعبارة ($y=f(x)$ (كالمسافة بالنسبة للزمن)، في بعض الأحيان تكون معطيات هذه الوضعيات على شكل قيم متقطعة، وفي أحيان أخرى على شكل قيم مستمرة (يكون التعبير فيها بواسطة مجالات)، في هذه الحالة نضطر إلى إدراج بعض المفاهيم التي تُعطي للنتائج المستخلصة من هذه الوضعيات أكثر دقة وواقعية، كالنهاية (على الأطراف)، الاستمرار (لتتبع طبيعة النتائج المستخرجة في مسيرتها، فاستمرار وضعية إذا تواصلت دون حدوث انقطاعات مُفاجئة في مسيرتها، كذلك الحال القول عن دالة إنّها مستمرّة إذا كان أي تغيّر طفيف يطرأعلى المتغير x يُواكبه سلوك مُماثل لـ ($y=f(x)$)، مع إدراج نظرية القيم المتوسطة والتي من شروطها الاستمرار وأهميتها تكمن في إمكانية وجود قيم لـ (x) المُرتبطة بقيمة معلومة لـ (y) (إمكانية وجود حلول للمعادلة $f(x)=k$ مع k قيمة معلومة)، كما يمكن توظيف أو ترجمة هذه المفاهيم بيانيا لتوضيح الصورة أكثر عن تلك النتائج المُستخلصة وسهولة التعبير عليها.

نُقدّم في هذا الفصل الجوانب المُحيطة بالدوال نعرض فيها: مجموعة التعريف، الدالة الدورية، الزوجية، الفردية و المحدودة، إتجاه التغير.

قبل أن نستعرض هذه الجوانب، نُقدّم أولا تعريف للدالة العددية لمتغير حقيقي.

تعريف: نسمي دالة عددية لمتغير حقيقي كل علاقة f تُرفق بكل عنصر x من $\mathbb{R}$ عنصرا واحدا على الأكثر $y=f(x)$ في $\mathbb{R}$ ونكتب

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto y=f(x)\end{aligned}$$

- إذا كانت f و g دالتان عدديتان لمتغير حقيقي فإن $f+g$، $f\times g$، $\frac{f}{g}$ مع $g\neq 0$، λf حيث λ عدد حقيقي، هي دوال عددية لمتغير حقيقي.

1.3 مجموعة التعريف: مجموعة تعريف الدالة العددية f لمتغير حقيقي هي مجموعة الأعداد من $\mathbb{R}$ التي لها صور في $\mathbb{R}$ ونرمز لها بالرمز D_f.

أمثلة: في كل مايلي f دالة عددية للمتغير الحقيقي x.

1)- إذا كانت $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x+1$، فالدالة f كثيرة حدود، وهي مُعرّفة على $\mathbb{R}$ ومنه $D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$.

2)- إذا كانت $f(x)=\frac{x+3}{x^2-2}$، فالدالة f ناطقة، وتكون مُعرّفة من أجل قيم x التي تجعل المقام لا يُساوي الصفر ($x^2-2\neq 0$) ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}=]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2},\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$.

3)- إذا كانت $f(x)=\sqrt{x^2-1}$، فالدالة f جذرية، وتكون مُعرّفة من أجل قيم x التي تجعل ما داخل الجذر أكبر أو يُساوي الصفر ($x^2-1\geq 0$) ومنه $D_f=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.

4)– إذا كانت $f(x)=\ln\left(\frac{2-x}{x-3}\right)$، فالدالة f لوغارتمية، وتكون مُعرّفة من أجل قيم x بحيث $\frac{2-x}{x-3}>0$

ومنه $D_f=]2,3[$.

ملاحظة: حسب تعريف كل من الدالة والتطبيق، إن كل تطبيق دالة، والعكس ليس دائما صحيح. فتكون الدالة تطبيقا إذا كانت مجموعة تعريفها تساوي مجموعة بدئها.

2.3 الدالة الدورية: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي مُعرّفة على المجموعة D.

نقول عن الدالة f إنّها دورية على D إذا وُجد عدد حقييق موجب تماما t يُحقق مايلي:

$$\forall x\in D,\ (x+t)\in D\wedge(x-t)\in D,\ f(x+t)=f(x)$$

- يُسمى العدد t دورا لها، وهو أصغر عدد حقيقي موجب تماما يُحقق ما سبق.

ملاحظة: في المستوي المنسوب إلى معلم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

إذا كان t دورا للدالة f و (C_f) تمثيلها البياني، فإن كل نقط المُنحنى (C_f) التي فواصلها من الشكل $(x+tk)$ حيث $(k\in\mathbb{Z})$ لها نفس الترتيب $f(x)$، ولرسم المنحنى (C_f) يكفي رسمه في مجال طوله الدور t ثُم إتمامه باستعمال إنسحابات أشعّتها $kt\vec{u}$.

أمثلة:

1)– الدالتان: الجيب (Sin) و جيب التمام(Cos)، دوريتان على $\mathbb{R}$ ودور كل منهما 2π.

بالفعل: $\forall x\in\mathbb{R},\ (x+2\pi)\in\mathbb{R}\wedge(x-2\pi)\in\mathbb{R},\ \sin(x+2\pi)=\sin(x)$

وكذا $\forall x\in\mathbb{R},\ (x+2\pi)\in\mathbb{R}\wedge(x-2\pi)\in\mathbb{R},\ \cos(x+2\pi)=\cos(x)$

2)– لنعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\sin(\pi x)$. بيّن أنّها دورية مُعينا دورها.

نفرض أنها دورية ودورها t، فهو يُحقق $f(x+t)=f(x)$ أي $\sin(\pi x+\pi t)=\sin(\pi x)$ معناه $\pi t=2\pi$

ومنه $t=2$.

بالفعل: الدالة f دورية على $\mathbb{R}$ ودورها 2، لأن:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ (x+2)\in\mathbb{R}\wedge(x-2)\in\mathbb{R},\ \sin(\pi(x+2))=\sin(\pi x+2\pi)=\sin(\pi x)$$

3)– لنعتبر الدالة العددية g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=x-E(x)$. بيّن أنّها دورية مُعينا دورها.

نفرض أنها دورية ودورها t، فهو يُحقق $g(x+t)=g(x)$ أي $x+t-E(x+t)=x-E(x)$

ومنه $E(x+t)=E(x)+t$ معناه $t\in\mathbb{Z}$، وبما أنه أصغر عدد حقيقي موجب تماما كونه دور فإن $t=1$.

بالفعل: الدالة g دورية على $\mathbb{R}$ ودورها 1، لأن:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ (x+1)\in\mathbb{R}\wedge(x-1)\in\mathbb{R},\ g(x+1)=x+1-E(x+1)=x+1-E(x)-1=x-E(x)=g(x)$$

3.3 الدالة الزوجية: لتكن f دالة عددية مُعرّفة على مجموعة D.

تكون الدالة f زوجية على D إذاتحقق مايلي:

$$\forall x\in D,\ (-x)\in D\wedge f(-x)=f(x)$$

ملاحظة: إذا كانت الدالة f زوجية وكان $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد فإن محور التراتيب هو محور تناظر للمنحنى $\left(C_f\right)$.

4.3 الدالة الفردية: لتكن f دالة عددية مُعرّفة على مجموعة D.

تكون الدالة f فردية على D إذاتحقق مايلي:

$$\forall x \in D,\ (-x) \in D \wedge f(-x) = -f(x)$$

ملاحظة: إذا كانت الدالة f فردية وكان $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ فإن المبدأ O هو مركز تناظر للمنحنى $\left(C_f\right)$.

أمثلة: في كل مايلي f دالة عددية للمتغير الحقيقي x.

1)–إذا كانت $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-1}$ فإن $D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$.

في هذه الحالة $\forall x \in D_f,\ (-x)\in D_f \wedge f(-x)=f(x)$، وبالتالي f دالة زوجية.

2)–إذا كانت $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-3x$ فإن $D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$.

في هذه الحالة $\forall x \in D_f,\ (-x)\in D_f \wedge f(-x)=-f(x)$، وبالتالي f دالة فردية.

3)–إذا كانت $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$ فإن $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$.

في هذه الحالة $\exists x \in D_f,\ (-x)\notin D_f$ (حيث أن العدد 2 من D_f لكن -2 لاينتمي إلى D_f) ، وبالتالي f دالة لا زوجية و لا فردية.

5.3 الدالة المحدودة:

تعريف1: f دالة عددية معرّفة على مجموعة D (جزء من $\mathbb{R}$).

تكون الدالة f محدودة إذا كانت المجموعة $f(D)$ (الصورة المباشرة المحتواة في $\mathbb{R}$) محدودة.

تعريف2: f دالة عددية معرّفة على مجموعة D (جزء من $\mathbb{R}$).

نقول عن الدالة f أنها محدودة إذا وُجد ثابت حقيقي موجب تماما M بحيث $\forall x \in D,\ |f(x)|\le M$.

أمثلة:

1)– الدالة العددية f حيث $f: x\mapsto \sin x$ محدودة على $\mathbb{R}$ لأن $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x|\le 1$.

2)– الدالة العددية g حيث $g: x\mapsto \ln x$ ليست محدودة على $\mathbb{R}_+^*$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

3)– الدالة العددية h حيث $h: x\mapsto x-E(x)$ محدودة على $\mathbb{R}$.

بالفعل: نعلم أن

$$\forall x \in \mathbb{R},\ E(x)\le x < E(x)+1$$

لنجد

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0\le x-E(x) < 1$$

أي $\forall x \in \mathbb{R},\ 0\le h(x)<1$ وهو المطلوب.

6.3 إتجاه تغير دالة: f دالة مُعرّفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

- تكون f متزايدة على I إذا تحقق مايلي:

$$\forall(x_1,x_2)\in I^2,\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$$

- تكون f متناقصة على I إذا تحقق مايلي:

$$\forall(x_1,x_2)\in I^2,\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$$

- تكون f ثابتة على I إذا تحقق مايلي:

$$\forall(x_1,x_2)\in I^2,\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)= f(x_2)$$

ملاحظة:

- إذا كان في التعريفين الأوّلين المتباينة الثانية تامّة فنقول أن f متزايدة تماما (متناقصة تماما على الترتيب) على I
- إذا كانت f إما متزايدة فقط أو متناقصة فقط على I فنقول أن f رتيبة على I.

دراسة مثال: لتكن الدالة العددية f المعرفة كمايلي: $f : x \mapsto \dfrac{3}{x-1}$.

المطلوب: دراسة إتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجموعة تعريفها $D_f =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

- على المجال $]1,+\infty[$: ليكن العددان x_1 و x_2 من المجال $]1,+\infty[$ حيث $x_1<x_2$

ومنه $0<x_1-1<x_2-1$ إذن $\dfrac{3}{x_1-1}>\dfrac{3}{x_2-1}$

و بالتالي f متناقصة تماما على $]1,+\infty[$.

- على المجال $]-\infty,1[$: ليكن العددان x_1 و x_2 من المجال $]-\infty,1[$ حيث $x_1<x_2$

ومنه $x_1-1<x_2-1<0$ إذن $\dfrac{3}{x_1-1}>\dfrac{3}{x_2-1}$

و بالتالي f متناقصة تماما على $]-\infty,1[$.

<u>النتيجة</u>: الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty,1[$ ، $]1,+\infty[$.

نسبة التزايد: نسبة تزايد الدالة f بين العددين الحقيقيين المختلفين x_1 و x_2 من المجال I هي النسبة

$$\theta=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

ولدينا النتائج التالية:

- تكون f متزايدة على I إذا تحقق مايلي:

$$\forall(x_1,x_2)\in I^2,\ x_1\ne x_2 : \theta\ge 0$$

- تكون f متناقصة على I إذا تحقق مايلي:

$$\forall(x_1,x_2)\in I^2,\ x_1\ne x_2 : \theta\le 0$$

- تكون f ثابتة على I إذا تحقق مايلي:

$$\forall(x_1,x_2)\in I^2,\ x_1\ne x_2 : \theta= 0$$

دراسة مثال: إنّ نسبة تزايد الدالة f في المثال السابق بين العددين المختلفين x_1 و x_2 في كل مجال من مجالي تعريفها هي:

$$\theta=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-3}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

فنلاحظ أن $\theta<0$ على كل مجال من المجالين $]-\infty,1[$ ، $]1,+\infty[$ ، ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty,1[$ ، $]1,+\infty[$.

تمارين للحل:

نعتبر في كل ممّا يلي الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x.

التمرين الأول:

عيّن مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة ممّا يلي:

1) $f(x)=\dfrac{3}{x^3+x^2-2x}$ 2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-5x+4}}$ 3) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

4) $f(x)=\dfrac{1}{E(x)-x}$ 5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-5x+4}}$ 6) $f(x)=\dfrac{x}{|x|-1}$

7) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2-1}\right)$ 8) $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$.

التمرين الثاني: (اختيار من مُتعدّد)

عيّن الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الأقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

1) مجموعة تعريف الدالة $x\mapsto\ln(|x|-1)$ هي:

أ) $]0,+\infty[$ ب) $]1,+\infty[$ ج) $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

2) تكون الدالة $x\mapsto\dfrac{x-x^3}{\sqrt{x^2(x+3)(3-x)}}$ على $]-3,0[\cup]0,3[$:

أ) فردية ب) زوجية ج) لا فردية و لا زوجية

3) الدالة $x\mapsto\dfrac{\sin^2x-x^4}{3\cos x}$ زوجية على المجال:

أ) $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ ب) $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ ج) $\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$

4) الدالة $x\mapsto\sin\dfrac{2}{3}x-3\sin x$ دورية على $\mathbb{R}$ ودورها هو:

أ) 2π ب) 3π ج) 6π

التمرين الثالث:

بيّن أن الدالة f دورية معينا دورها في كل حالة ممّا يلي:

1) $f(x)=\cos 2x-4\cos x$

2) $f(x)=\dfrac{1}{3}\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

3) $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.

التمرين الرابع:

أُدرس إن كانت الدالة f زوجية أو فردية أو غير ذلك في كل حالة ممّا يلي :

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

2) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x+\cos 3x}{x^2}$

3) $f(x)=\dfrac{x}{|x-1|-1}$

4) $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$

5) $f(x)=\sqrt{x^3-4x}$.

الفصل الرابع: نـهايـــــات الدوال

مقدمة: في هذا الفصل نتطرّق إلى النهايات للدوال، فنسرد تعريف لأنواع النهايات لتقريب مفهوم النهاية (نهاية منتهية وغير منتهية عند عدد حقيقي، نهاية منتهية وغير منتهية عند اللانهاية)، ثُمّ نُركّز على الجانب التطبيقي وهو حساب النهايات باستخدام القواعد المناسبة، مع إدراج تطبيقات متنوعة هدفها كيفية تطبيق القواعد المُدرجة واكتساب الطرق المختلفة لإزالة حالات عدم التعيين.

1.4 نهاية منتهية عند عدد حقيقي: لنعتبر الدالة العددية f مُعرّفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ يشمل العدد a.

تعريف1: نقول عن f أنها تقبل نهاية منتهية l من $\mathbb{R}$ عند a إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0: \ |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$

ونكتب $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

ملاحظة: إثبات أن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ باستخدام التعريف يتمثل في إيجاد α بدلالة ε و a.

مثال: لنثبت أن $\lim\limits_{x \to 1}(2x+1) = 3$ باستخدام التعريف، أي نثبت أن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0: \ |x-1| < \alpha \Rightarrow |(2x+1)-3| < \varepsilon$$

ليكن $\varepsilon > 0$ بحيث $|(2x+1)-3| < \varepsilon$

وبالتالي

$$|(2x+1)-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x-2| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

فيكفي أخذ $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$.

تعريف2 (النهاية من اليمين): نعتبر في هذه الحالة المجال I من الشكل $I = [a, a+\delta[$ حيث $\delta > 0$.

نقول عن f أنها تقبل نهاية منتهية l من $\mathbb{R}$ عند a من اليمين (أو عند a بقيم أكبر) إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0: \ 0 < x-a < \alpha \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$

ونكتب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = l$

تعريف3 (النهاية من اليسار): نعتبر في هذه الحالة المجال I من الشكل $I =]a-\delta, a[$ حيث $\delta > 0$.

نقول عن f أنها تقبل نهاية منتهية l من $\mathbb{R}$ عند a من اليسار (أو عند a بقيم أصغر) إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0: \ 0 < -(x-a) < \alpha \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$

ونكتب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = l$

ملاحظات:

1)- النهاية إن وُجددت فهي وحيدة.

2)- نقول عن f أنها تقبل نهاية عند a إذا كانت النهاية من اليمين تُساوي النهاية من اليسار عند a.

فلإثبات أن دالة لاتقبل نهاية عند عدد حقيقي، يُمكن أن نُبين أن النهاية من اليمين لا تُساوي النهاية من اليسار عند هذا العدد.

مثال: لنعتبر الدالة f المُعرّفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$

نُلاحظ أن:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=12$$

فالدالة f تقبل نهاية (تُساوي 12) عند 2.

مثال آخر: بما أن $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ و $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} e^{\frac{1}{x}}=0$ فإن $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ غير موجودة.

2.4 نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي: لنعتبر الدالة العددية f مُعرّفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ يشمل العدد a.

تعريف1: نقول عن f أنها تؤول إلى $+\infty$ عند a إذا تحقق مايلي:

$$\forall A>0, \exists \alpha>0:\ |x-a|<\alpha \Rightarrow f(x)>A$$

ونكتب $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$

تعريف2: نقول عن f أنها تؤول إلى $-\infty$ عند a إذا تحقق مايلي:

$$\forall A>0, \exists \alpha>0:\ |x-a|<\alpha \Rightarrow f(x)<-A$$

ونكتب $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$

3.4 نهاية منتهية عند اللانهاية:

تعريف1: لنعتبر الدالة العددية f مُعرّفة على مجال مفتوح من الشكل $]\delta,+\infty[$ حيث $\delta>0$.

نقول عن f أنها تقبل نهاية منتهية l من $\mathbb{R}$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon>0, \exists B>0:\ x>B \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

ونكتب $\lim_{x\to +\infty} f(x)=l$

تعريف2: لنعتبر الدالة العددية f مُعرّفة على مجال مفتوح من الشكل $]-\infty,\delta[$ حيث $\delta>0$.

نقول عن f أنها تقبل نهاية منتهية l من $\mathbb{R}$ عندما يؤول x إلى $-\infty$ إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon>0, \exists B>0:\ x<-B \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

ونكتب $\lim_{x\to -\infty} f(x)=l$

مثال: لنُبيّن باستعمال التعريف أن $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$

أي نثبت أن

$$\forall \varepsilon>0, \exists B>0:\ x>B \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$$

ليكن $\varepsilon>0$ بحيث $\dfrac{1}{x}<\varepsilon$

وبالتالي يكون لدينا

$$x \in]0,+\infty[\text{ مع } \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$$

فنختار $B = \frac{1}{\varepsilon}$.

4.4 نهاية غير منتهية عند اللانهاية:

تعريف1: لنعتبر الدالة العددية f مُعرّفة على مجال مفتوح من الشكل $]\delta,+\infty[$ حيث $\delta > 0$.

نقول عن f أنها تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ إذا تحقق مايلي:

$$\forall A > 0, \exists B > 0 : x > B \Rightarrow f(x) > A$$

ونكتب $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

تعريف2: لنعتبر الدالة العددية f مُعرّفة على مجال مفتوح من الشكل $]-\infty,\delta[$ حيث $\delta > 0$.

نقول عن f أنها تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$ إذا تحقق مايلي:

$$\forall A > 0, \exists B > 0 : x < -B \Rightarrow f(x) > A$$

ونكتب $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

مثال: لنُبيّن باستعمال التعريف أن $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

أي نثبت أن

$$\forall A > 0, \exists B > 0 : x < -B \Rightarrow x^2 > A$$

ليكن $A > 0$ (كبير بالقدر الكافي) بحيث $x^2 > A$

ومنه

$$x \in]-\infty,0[\text{ مع } \begin{aligned} x^2 > A &\Leftrightarrow |x| > \sqrt{A} \\ &\Leftrightarrow x < -\sqrt{A} \end{aligned}$$

فنختار $B = \sqrt{A}$.

ملاحظة: لإثبات أن نهاية f عند a (أو $+\infty$ أو $-\infty$) غير موجودة، يكفي إيجاد متتاليتين (x_n) و (y_n) لهما نفس النهاية a (أو $+\infty$ أو $-\infty$)، بينما نهايتي المتتاليتين $f(x_n)$ و $f(y_n)$ مختلفتين.

مثال تطبيقي: لنثبت أن $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ غير موجودة.

لتكن المتتاليتين (x_n) و (y_n) المُعرّفتين بـ:

$$y_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{و} \quad x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

لدينا $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = +\infty$

لكن

$$\lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \lim_{n \to +\infty} \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$$

فهما مختلفتان، ممّا يعني أن النهاية $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ غير موجودة.

5.4 العمليات الجبرية على النهايات: f و g دالتان عدديتان، l، l' عددان حقيقيان و a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$، ندلّ بـ: ح ع ت، اختصارا للكتابة حالة عدم تعيين.

- **نهاية المجموع:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)=$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

- **نهاية الجُداء:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)=$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)=$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

- **نهاية الجُداء:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)=$	$l'\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	∞	0
$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞	ح ع ت	ح ع ت

حالات عدم التعيين: هناك أربع حالات عدم التعيين وهي: $+\infty-\infty$، $0\times\infty$، $\dfrac{\infty}{\infty}$، $\dfrac{0}{0}$.

ولإزالتها نتبّع بعض الطرق منها: الضرب والقسمة في المُرافق، الاختزال، استعمال العدد المُشتق،...

قواعد إجرائية:

- النهاية عند $+\infty$ أو $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ أو $-\infty$.
- النهاية عند $+\infty$ أو $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ أو $-\infty$.

مثال: لتكن f الدالة الناطقة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x^2+5x+1}{x^2-1}$

لدينا حالة عدم تعيين بالنسبة لنهاية f عند $+\infty$ إلا أنه بتطبيق القاعدة الاجرائية الثانية السابقة نتحصل على

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

نهاية دالة مُركبة: f و g دالتان عدديتان، a، b و c تُمثل أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ و كانت $\lim\limits_{x\to b} g(x)=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a} g\left(f(x)\right)=c$.

مثال: نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\pi}{2}\right)$ ونريد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

نلاحظ أن h هي مُركب الدالتين f و g بهذا الترتيب ($h=g\circ f$) حيث $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\pi}{2}$ و $g(x)=\sin x$.

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ و كانت $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x)=1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1$.

النهايات بالمقارنة: f، g و h ثلاث دوال مُعرّفة على مجال مفتوح I يشمل a.

1)– إذا كانت $\forall x \in I,\ g(x) \leq f(x)$ وكانت $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

2)– إذا كانت $\forall x \in I,\ g(x) \geq f(x)$ وكانت $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

3)– إذا كانت $\forall x \in I,\ g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ وكانت $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$ فإن $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

ملاحظة: تبقى هذه القواعد صحيحة عند $+\infty$ أو $-\infty$.

دراسة أمثلة:

1)– نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x) = x + \sin x$.

نعلم أنه: $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \sin x \leq 1$

ومنه $\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$

بما أن $\lim_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

بما أن $\lim_{x \to -\infty} (x + 1) = -\infty$ فإن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2)– نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

نعلم أنه: $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \sin x \leq 1$

ومنه $\forall x \in]0, +\infty[,\ \dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$

بما أن $\lim_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ فإن $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

تطبيقات متنوعة:

تطبيق1: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ بـــ: $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2}$.

– أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

الحل:

مجموعة تعريف هذه الدالة هي:

$$D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]1, +\infty[$$

– النهاية عند $-\infty$، $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

– النهاية عند -2: في البداية هناك حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\dfrac{0}{0}\right)$، فنستعمل التحليل ثم الاختزال لإزالتها

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{(x + 2)(x^2 + 1)}{(x + 2)(x - 1)} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = -\frac{5}{3}$$

– النهاية عند 1: في هذه الحالة ندرس إشارة المقام و نُقسّم النهاية من اليمين ومن اليسار عند 1

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

وبالتالي:

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = -\infty$ حيث ($(x^3+2x^2+x+2) \to 6$ ، $(x^2+x-2) \to 0^-$)

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = +\infty$ حيث ($(x^3+2x^2+x+2) \to 6$ ، $(x^2+x-2) \to 0^+$).

تطبيق2: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty,0] \cup [2,+\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2x}$.

– أدرس نهايات الدالة f (عند $+\infty$ و $-\infty$).

الحل:

– النهاية عند $+\infty$: في البداية هناك حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$، فنستعمل المرافق لإزالتها (بالضرب والقسمة)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x}\right)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = 1$$

– النهاية عند $-\infty$: بنفس الطريقة نجد

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x}\right)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = -1$$

تطبيق3: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$.

– احسب النهاية التالية: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

<u>معلومة</u>: العدد المشتق للدالة f عند عدد a مُعرّف كمايلي: $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

الحل:

في البداية نلاحظ أن هناك حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$، فنستعمل تعريف العدد المشتق للدالة $x \mapsto \cos x$ عند 0 لإزالتها

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos 0}{x-0} = -\sin 0 = 0$$

حيث $\forall x \in \mathbb{R},\ (\cos x)' = -\sin x$.

- بنفس الطريقة يمكن حساب $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \cos 0 = 1$$

حيث $\forall x \in \mathbb{R},\ (\sin x)' = \cos x$.

تطبيق4: نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]-4,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$ بـ: $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

- احسب النهاية التالية: $\lim_{x\to 0} f(x)$

الحل:

في البداية نلاحظ أن هناك حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$، فنستعمل تعريف العدد المشتق للدالة $x \mapsto \sqrt{x+4}$ عند 0 لإزالتها

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{0+4}}{x-0} = \frac{1}{2\sqrt{0+4}} = \frac{1}{4}$$

حيث $\forall x \in \left]-4,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[,\ \left(\sqrt{x+4}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$.

تمارين للحل:

التمرين الأول:

أجب بصحيح أو خطأ على كل نهاية ممّايلي، مع التعليل:

1) $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{-x} = +\infty$

2) $\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2-4}{x^2+2x+4} = 3$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+6x+7}{x^2+2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0$

4) إذا كانت $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ -\frac{1}{x} \le f(x) \le \frac{1}{x}$ فإن $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

5) إذا كانت $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \ge x-1$ فإن $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

6) إذا كانت $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \le x^2$ فإن $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

التمرين الثاني:

احسب النهاية في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-3}{\sqrt{x+2}}$ 3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+2}}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+4}-2}$ 5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ 6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin x}$.

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 8) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$ 9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(e^x+2x\right)}{x}$

10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 11) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x-\sqrt{x^2+x+4}\right)$.

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f المُعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\dfrac{4+\sin x}{x^2}$

1) عيّن عددان حقيقيان a و b بحيث: $\forall x \in \mathbb{R},\ a \le 4+\sin x \le b$

2) بيّن أن: $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ u(x) \le f(x) \le v(x)$ ، حيث u و v دالتان يُطلب تعيينهما.

3) استنتج النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

4) احسب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

التمرين الرابع:

1) بيّن أنّ: $\forall x \in \mathbb{R},\ 2\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin x \ge 3\sqrt{x}$

2) استنتج النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin x\right)$.

التمرين الخامس:

1) بيّن أن: $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ u(x) < E\left(\dfrac{1}{x}\right) \le v(x)$ ، حيث u و v دالتان يُطلب تعيينهما.

2) استنتج النهاية $\lim\limits_{x \to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

الفصل الخامس: الدوال المُستمرّة

مقدمة: في هذا الفصل نُدرج الاستمرار، بتقديم مفهوم الاستمرار عند قيمة ثُمّ على مجال، تمديد دالة بالاستمرار عند قيمة والتطرّق إلى نظرية القيم المتوسطة في جانبيها الجبري و البياني، ومنها إلى نظرية الدوال المستمرة والرتيبة تماما ودورها في وجود ووحدانية حل المعادلة $f(x)=\lambda$ على مجال، كذلك من أهداف هذا الفصل كيفية تعيين صورة مجال بواسطة دالة مستمرة ورتيبة تماما.

1.5 تعريف الاستمرار عند قيمة: f دالة عددية مُعرّفة على مجال مفتوح I يشمل العدد الحقيقي a.

نقول عن f أنها مُستمرة عند a إذا وفقط إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

ملاحظات:

1)– القول أن f مُستمرة عند a (حسب تعريف النهاية) معناه:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0:\ |x-a|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

2)– إذا تحقق $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}a} f(x)=f(a)$ نقول أن f مُستمرة من اليمين عند a.

3)– إذا تحقق $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}a} f(x)=f(a)$ نقول أن f مُستمرة من اليسار عند a.

4)– تكون f مُستمرة عند a إذا وفقط إذا كانت مُستمرة من اليمين و من اليسار عند a.

5)– تكون f مُستمرة على المجال المفتوح I من $\mathbb{R}$ إذا كانت مُستمرة عند كل قيمة من هذا المجال.

6)– تكون f مُستمرة على المجال المغلق $[a,b]$ من $\mathbb{R}$ إذا كانت f مُستمرة على المجال المفتوح $]a,b[$ و مُستمرة من اليمين عند a و مُستمرة من اليسار عند b.

أمثلة:

1)– الدالة $x\mapsto|x|$ مُستمرة على $\mathbb{R}$.

2)– الدالتان $x\mapsto\sin x$ و $x\mapsto\cos x$ مُستمرتان على $\mathbb{R}$.

3)– الدالة $x\mapsto E(x)$ مُستمرة على $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

تطبيق: f دالة مُعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

أدرس استمرار f عند 0.

الحل:

لدينا $f(0)=e^0=1$.

– $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}(-x)=0\neq f(0)$ ومنه f غير مستمرة من اليسار عند 0.

– $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(e^x)=1=f(0)$ ومنه f مستمرة من اليمين عند 0.

إذن f غير مستمرة عند 0.

العمليات الجبرية على الدوال المستمرة:

f و g دالتان مستمرتان عند عدد حقيقي a، وليكن α ، β عددان حقيقيان ثابتان.

- الدالة $\alpha f+\beta g$ مستمرة عند a.
- الدالة $f\times g$ مستمرة عند a.
- إذا كانت $g(a)\neq 0$ فإن الدالة $\frac{f}{g}$ مستمرة عند a.

استمرار تركيب دالتين:

ليكن I و J جزءان من $\mathbb{R}$ ، $f:I\to J$ و $g:J\to\mathbb{R}$ دالتين وليكن a عددا من I.

إذا كانت f مستمرة عند a و g مستمرة عند $f(a)$ فإن $g\circ f:I\to\mathbb{R}$ مستمرة عند a.

نتائج:

- كل دالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$.
- كل دالة ناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

2.5 التمديد بالاستمرار:

a عدد حقيقي و I مجال من $\mathbb{R}$ يشمل a.

f دالة مُعرفة و مُستمرة عند كل قيمة من $I-\{a\}$، إذا قبلت الدالة f نهاية منتهية l عند a نقول أن f تقبل امتدادا بالاستمرار عند a، والدالة $\tilde{f}$ المعرفة على I كمايلي:

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in I-\{a\} \\ l, & x=a \end{cases}$$

تُسمى امتداد الدالة f بالاستمرار عند a.

مثال: نعتبر الدالة f المُعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$، فهي غير مُعرفة عند 0 ومُستمرة على $\mathbb{R}-\{0\}$

وبما أن $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ فإن الدالة f تقبل امتدادا بالاستمرار عند 0، والدالة $\tilde{f}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x\in\mathbb{R}-\{0\} \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

هي امتداد الدالة f بالاستمرار عند 0.

3.5 نظرية القيم المتوسطة

أ-نظرية القيم المتوسطة (الحالة الخاصة):

إذا كانت الدالة f معرفة و مستمرة على المجال $[a,b]$ و كان $f(a)\times f(b)<0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $]a,b[$ بحيث $f(c)=0$.

التفسير البياني: f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a,b]$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O,\vec{u},\vec{v})$، إذا كان $f(a)\times f(b)<0$ فإن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة على الأقل فاصلتها c محصورة بين a و b وهو مايفسّر $f(c)=0$.

ب-نظرية القيم المتوسطة (الحالة العامّة):

f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a,b]$.

من أجل كل عدد حقيقي λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a,b]$ بحيث $f(c)=\lambda$.

نتائج:

- إذا كانت الدالة f رتيبة تماما على المجال $[a,b]$ فإن العدد c في النظريتين يكون وحيدا.
- إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن صورة المجال I بواسطة هذه الدالة هو المجال $f(I)$ من $\mathbb{R}$.

مثال: الدالة fالمُعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ مستمرة و رتيبة تماما **(**متناقصة تماما**)** على كل مجال I من المجالين $]-\infty,1[$ ، $]1,+\infty[$.

- إذا كان $I=[0,1[$ فإن $f(I)=]-\infty,-1]$.
- إذا كان $I=[-1,0]$ فإن $f(I)=[-1,0]$.
- إذا كان $I=[2,+\infty[$ فإن $f(I)=]1,3]$.

4.5 الدوال المستمرة والرتيبة تماما:

نظرية: إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a,b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=\lambda$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a,b]$.

البرهان: نفرض أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a,b]$ و ليكن λ عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة (الحالة العامّة)، يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a,b]$ بحيث $f(c)=\lambda$.

لإثبات الوحدانية نستعمل البرهان بالخُلف، نفرض أنه يوجد عدد حقيقي آخر c' مختلف عن c من المجال $[a,b]$ بحيث $f(c')=\lambda$. يكون لدينا حينئذ $c\neq c'$ و $f(c)=f(c')$، وهذا تناقض كون f رتيبة تماما على المجال $[a,b]$.

وبالتالي يوجد عدد حقيق وحيد c من المجال $[a,b]$ بحيث $f(c)=\lambda$ أي أن c هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=\lambda$.

ملاحظة: تبقى النظرية السابقة قائمة على مجال مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود.

أمثلة:

1)-لنبين أن المعادلة $x^3-3x+1=0$ تقبل حلا وحيدا بين 0 و 1.

فنعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-3x+1$، لدينا الشروط التالية:

- الدالة f مستمرة على $[0,1]$.
- $f(0)\times f(1)=1\times(-1)=-1<0$

- f رتيبة تماما (متناقصة تماما) على $[0,1]$.

فحسب النظرية السابقة المعادلة $f(x)=0$ (أي $x^3-3x+1=0$) تقبل حلا وحيدا بين 0 و 1.

2)– لتكن الدالة f المعرفة على $]-1,+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{-2}{x+1}$.

الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما) على $]-1,+\infty[$ و لدينا

$\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي λ من المجال $]-\infty,0[$، المعادلة $f(x)=\lambda$ تقبل حلا وحيدا c في المجال $]-1,+\infty[$.

تمارين للحل:

التمرين الأول:

1) f دالة مُعرّفة كمايلي:

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{|x-1|}{x-1}, & x\neq 1 \\ 2, & x=1 \end{cases}$$

أ– عين مجموعة تعريفها.

ب– أدرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها.

2) نفس الأسئلة السابقة، إذا عُرّفت الدالة f كالتالي:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{\sin x}-1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}.$$

التمرين الثاني:

f دالة مُعرّفة كمايلي:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+\alpha}{x^2+4}, & x>0 \\ \sqrt{2x^2+1}, & x\leq 0 \end{cases}$$

- عين العدد الحقيقي α بحيث تكون الدالة f مستمرة عند 0.

التمرين الثالث:

f دالة مُعرّفة على المجال $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ كمايلي:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}, & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$$

1) أدرس استمرارية الدالة f عند 0.

2) أدرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها.

التمرين الرابع:

أدرس إمكانية قبول الدالة f إمتدادا بالاستمرار عند القيمة a في كل حالة ممايلي:

1) $f(x)=xE\left(\frac{1}{x}\right)$، $a=0$ 2) $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$، $a=2$

3) $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$، $a=0$ 4) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$، $a=0$.

التمرين الخامس:

f دالة معرفة بجدول تغيراتها كمايلي:

x	$-\infty$	-3	-2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1 ↘	-3 ↗	4 ↘	3

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$؟، مع التبرير.

التمرين السادس:

أثبت أن للمعادلة $e^{-x}=x$ حل وحيد محصور بين العددين 0 و 1.

التمرين السابع:

باستعمال نظرية القيم المتوسطة، بين أن المعادلة $xe^{\sin x}=\cos x$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

التمرين الثامن:

نعتبر الدالتين $f:x\mapsto\sqrt{x+1}$ و $g:x\mapsto -x^3$.

- بيّن أن المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f و g على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-\frac{7}{8}<\alpha<-\frac{3}{4}$.

التمرين التاسع:

f دالة معرفة على المجال $[0,1]$ وتأخذ قيمها في المجال $[0,1]$.

1) برهن على وُجود عدد حقيقي α من المجال $[0,1]$ بحيث يكون $f(\alpha)=\alpha$.
(نُسمي النقطة ذات الفاصلة α بالنقطة الصامدة).

2) فسّر هندسيا هذه النتيجة.

3) هل تبقى النتائج السّابقة صحيحة على مجال $[a,b]$ حيث $a<b$؟.

التمرين العاشر:

برهن أن كل كثير حدود درجته فردية ينعدم مرّة على الأقل في $\mathbb{R}$.

الفصل السادس: الدوال العكسية

مقدمة: بالاعتماد على دراسة سابقة في الفصل الأول في جزء التطبيقات، أن التطبيق إذا كان تقابل (متباين وغامر) فهو يقبل تطبيق عكسي، كما رأينا كيفية تعيينه. بالمُقابل فإن الدالة العددية التي مجموعة بدئها هي مجموعة تعريفها أو جزء منها هي تطبيق، فبإمكاننا التحدث على الدالة العكسية في هذه الحالة إذا توفّر التباين والغامر، وحسب خصائص الدالة سنرى في هذا الفصل أنّه إذاكانت مستمرّة فهي غامرة وإذا كانت رتيبة تماما فهي متباينة، فبهذين الشرطين (مستمرة ورتيبة تماما) تقبل دالة عكسية.

في الجزء الثاني، سندرس كيفية تعيين الدوال العكسية للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام و الظل) وهي على التوالي (قوس الجيب، قوس جيب التمام وقوس الظل) ثم نعرض كيفية استنتاج بعض خصائصها (مجموعة التعريف، إتجاه التغير، تعيين صور لأعداد...) إنطلاقا من خصائص الدوال المثلثية المرافقة لها.

في الجزء الثالث، نعرض الدوال الزائدية (الجيب الزائدي، جيب التماما الزائدي والظل الزائدي) وبعض من دساتير تحويلها، كما نعرض نهاياتها واشتقاقها بالاعتماد على مشتقة الدالة الأسية. ثُمّ ندرس كيفية الحصول على دوالها العكسية وهي على التوالي (عمدة الجيب الزائدي، عمدة جيب التمام الزائدي وعمدة الظل الزائدي).

1.6 الدالة العكسية لدالة مستمرة ورتيبة تماما

حسب ما سبق (الفصل الخامس، فقرة الدوال المستمرة والرتيبة تماما) لدينا النتيجتين التاليتين:

1)– إذا كانت الدالة f رتيبة تماما على مجال I من $\mathbb{R}$، عندئذ تكون f متباينة على I.

بالفعل: لو فرضنا عددين مختلفين x_1 و x_2 من I بحيث $x_1 < x_2$، وبما أن f رتيبة تماما على I فإن $f(x_1) < f(x_2)$ (f متزايدة تماما) أو $f(x_1) > f(x_2)$ (f متناقصة تماما) فينتج مايلي:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ممّا يعني أن f متباينة على I.

2)– إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$، عندئذ تكون f غامرة من I نحو المجال $f(I)$.

بالفعل: فحسب تعريف المجال $f(I)$ الذي يُمثل صورة المجال I بواسطة الدالة المستمرة f

$$\forall y \in f(I), \exists x \in \mathrm{I}: \ y = f(x)$$

ممّا يعني أن f غامرة من I نحو $f(I)$.

3) من النتيجتين 1) و 2) السسابقتين يكون لدينا مايلي:

إذا كانت الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال I من $\mathbb{R}$، عندئذ تكون الدالة f تقابلية من I نحو المجال $f(I)$.

ينتج من ذلك، وبالاعتماد على التطبيق العكسي لتقابل، النظرية التالية.

نظرية: إذا كانت الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال I من $\mathbb{R}$، فإنها تقبل دالة عكسية f^{-1} لها الخاصيتين التاليتين:

– الدالة f^{-1} مُعرّفة على المجال $f(I)$ وتأخذ قيمها في المجال I.

- الدالة f^{-1} مُستمرة ورتيبة تماما على المجال $f(I)$ ولها نفس إتجاه تغير الدالة f.

البرهان: حسب النتيجة 3) السابقة، الدالة f تقابلية من I نحو المجال $f(I)$ فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $f(I)$ نحو I، والدالة f^{-1} تقابلية فهي إذن مُستمرة ورتيبة تماما على المجال $f(I)$.

ومن جهة أخرى، من أجل كل عددين y_1 و y_2 من $f(I)$ بحيث $y_1 \neq y_2$، يوجد عددين x_1 و x_2 من I بحيث $y_1 = f(x_1)$، $y_2 = f(x_2)$ وهذا يكافيء أيضا $x_1 = f^{-1}(y_1)$، $x_2 = f^{-1}(y_2)$، فيكون لدينا، مع ملاحظة $f(x_1) \neq f(x_2)$، $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$، $x_1 \neq x_2$:

$$\frac{f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)}{y_1-y_2}=\frac{x_1-x_2}{f(x_1)-f(x_2)}=\frac{1}{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}}$$

و هذا يعني أن نسبة تزايد الدالة f^{-1} بين العددين الحقيقيين المختلفين y_1 و y_2 من المجال $f(I)$ هي مقلوب نسبة تزايد الدالة f بين العددين الحقيقيين المختلفين x_1 و x_2 من المجال I، فلهما نفس الإشارة وهذا مايُفسّر أن الدالة f^{-1} لها نفس إتجاه تغير الدالة f.

نتيجة: في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس، المنحنى المُمثّل لدالة و المنحنى المُمثّل لدالتها العكسية متناظران بالنسبة للمنصف الأول (المستقيم ذو المعادلة $y = x$).

تطبيق: f دالة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

- بيّن أن الدالة f تقبل دالة عكسية على المجال $[0,+\infty[$ يُطلب تعيينها.

الحل:

- f دالة ناطقة فهي مُستمرّة على المجال $[0,+\infty[$.
- f متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$ $\left(\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{2(x_1+x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}>0\right)$.

بما أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $[0,+\infty[$ فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} مُعرّفة على المجال $[-1,1[$ (حيث $f([0,+\infty[)=[-1,1[$).

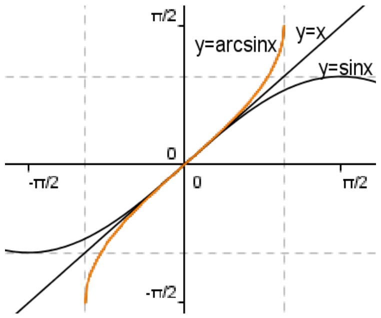
فالدالة العكسية f^{-1} مُعرّفة من $[-1,1[$ نحو $[0,+\infty[$ حيث من أجل كل x من $[0,+\infty[$ و y من $[-1,1[$ فإن

$$y=f(x) \Leftrightarrow y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$
$$\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{y+1}{1-y}} \ \vee \ x=-\sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$$

و بما ان x من $[0,+\infty[$ فإن $x=\sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$، فالدالة العكسية f^{-1} مُعرّفة كمايلي:

$$f^{-1}:[-1,1[\to [0,+\infty[$$
$$x \mapsto f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

2.6 الدوال المثلثية و دوالها العكسية



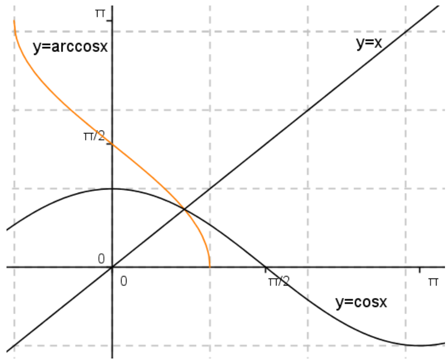
أ- الجيب و قوس الجيب (Sin و $Arc\sin$):

لنعتبر الدالة f المعرّفة كما يلي:

$$f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$$
$$x\mapsto f(x)=\sin x$$

بما أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} نرمز لها بالرمز $Arc\sin$ وهي مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[-1,1]$ و تأخذ قيمها في المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ حيث

$$\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\forall y\in[-1,1]:\ y=\sin x\Leftrightarrow x=arc\sin y$$



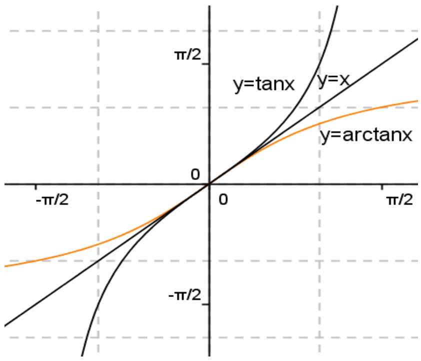
ب- جيب التمام و قوس جيب التمام (Cos و $Arc\cos$):

لنعتبر الدالة f المعرّفة كما يلي:

$$f:[0,\pi]\to[-1,1]$$
$$x\mapsto f(x)=\cos x$$

بما أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متناقصة تماما) على المجال $[0,\pi]$ فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} نرمز لها بالرمز $Arc\cos$ وهي مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[-1,1]$ و تأخذ قيمها في المجال $[0,\pi]$ حيث

$$\forall x\in[0,\pi],\forall y\in[-1,1]:\ y=\cos x\Leftrightarrow x=\arccos y$$



ج- الظل و قوس الظل (Tan و $Arc\tan$):

لنعتبر الدالة f المعرّفة كما يلي:

$$f:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\left]-\infty,+\infty\right[$$
$$x\mapsto f(x)=tanx$$

بما أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} نرمز لها بالرمز $Arctan$ وهي مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty,+\infty\right[$ و تأخذ قيمها في المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ حيث

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\forall y\in\left]-\infty,+\infty\right[:\ y=\tan x\Leftrightarrow x=\arctan y$$

نتائج:

1)- $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin(\sin x)=x$

بالفعل: حسب تعريف قوس الجيب، $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \forall y \in [-1,1]:\ y=\sin x \Leftrightarrow x = arc\sin y$

يكون لدينا $\arcsin(\sin x)=\arcsin y = x$.

– وبالمثل $\forall y \in [-1,1],\ \sin(arc\sin y)=y$

2)– $\forall x \in [0,\pi],\ \arccos(\cos x)=x$

بالفعل: حسب تعريف قوس جيب التمام، $\forall x \in [0,\pi], \forall y \in [-1,1]:\ y=\cos x \Leftrightarrow x=\arccos y$

يكون لدينا $\arccos(\cos x)=\arccos y = x$.

– وبالمثل $\forall y \in [-1,1],\ \cos(\arccos y)=y$

3)– $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan x)=x$

بالفعل: حسب تعريف قوس الظل، $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in]-\infty,+\infty[:\ y=\tan x \Leftrightarrow x=\arctan y$

يكون لدينا $\arctan(\tan x)=\arctan y = x$.

– وبالمثل $\forall y \in]-\infty,+\infty[, \tan(\arctan y)=y$

تطبيق1: أُحسب قوس الجيب $(\arcsin)$ وقوس جيب التمام $(\arccos)$ لكل من 0، 1، $\frac{1}{2}$، $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

الحل:

– حسب تعريف قوس الجيب، $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \forall y \in [-1,1]:\ y=\sin x \Leftrightarrow x = arc\sin y$

يكون لدينا $x=\arcsin 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $x=0$ إذن $\arcsin 0 = 0$.

و أيضا $x=\arcsin\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $x=\frac{\pi}{6}$ إذن $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.

و كذلك $x=\arcsin 1 \Leftrightarrow \sin x = 1$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $x=\frac{\pi}{2}$ إذن $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$.

و لدينا كذلك $x=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $x=\frac{\pi}{4}$ إذن $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

–بنفس الكيفية، يكون لدينا:

$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$، $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$، $\arccos 1 = 0$، $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

تطبيق2: أُحسب قوس الظل $(\arctan x)$ لكل من 0، 1.

الحل:

- حسب تعريف قوس الظل، $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in \left]-\infty,+\infty\right[: y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y$

يكون لدينا $x = \arctan 0 \Leftrightarrow \tan x = 0$ و $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

ومنه $x = 0$ إذن $\arctan 0 = 0$.

وأيضا $x = \arctan 1 \Leftrightarrow \tan x = 1$ و $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

ومنه $x = \frac{\pi}{4}$ إذن $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

3.6 الدوال الزائدية و دوالها العكسية

أ- الدوال الزائدية: لنُعرّف الدوال التالية:

- **الجيب الزائدي:** $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R}$
- **جيب التمام الزائدي:** $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R}$
- **الظل الزائدي:** $thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\ x \in \mathbb{R}$

نتائج:

- $\forall x \in \mathbb{R},\ ch^2x - sh^2x = 1$

بالفعل:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ch^2x - sh^2x = \frac{\left(e^{2x} + e^{-2x} + 2\right) - \left(e^{2x} + e^{-2x} - 2\right)}{4} = 1$$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$

بالفعل: من النتيجة السابقة $\left(\forall x \in \mathbb{R},\ ch^2x - sh^2x = 1\right)$، وبقسمة الطرفين على ch^2x، نحصل على المطلوب.

- بما أن $\forall x \in \mathbb{R},\ sh(-x) = -shx$ ، فالجيب الزائدي (sh) دالة فردية.
- بما أن $\forall x \in \mathbb{R}, ch(-x) = chx$ ، فجيب التمام الزائدي (ch) دالة زوجيية.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ (shx)' = chx$ ، $\forall x \in \mathbb{R},\ (chx)' = shx$ ، $\forall x \in \mathbb{R},\ (thx)' = 1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$

بالفعل: يُمكن التأكد من ذلك بالاعتمادعلى: $\left(e^x\right)' = e^x$ ، $\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$ ، $(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)'$.

- من تعريف الدوال الزائدية يُمكن التأكد من النهايات التالية:

$\lim_{x \to +\infty} shx = +\infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} shx = -\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} chx = +\infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} chx = +\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} thx = 1$ ، $\lim_{x \to -\infty} shx = -1$.

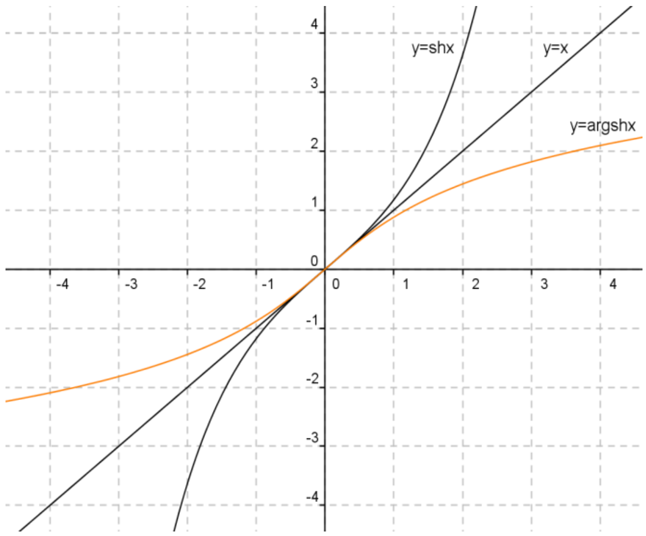
ب– الدوال العكسية للدوال الزائدية:

– عمدة الجيب الزائدي $(Argsh)$:

لدينا

$\forall x \in \mathbb{R},\ (shx)' = chx$ وبالتالي

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (shx)' > 0$$



ممّا ينتج أن الدالة

$$\begin{aligned} sh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto shx \end{aligned}$$

مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما) على $\mathbb{R}$ فهي تقبل

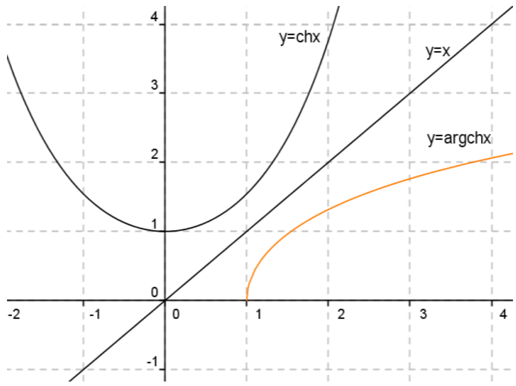
دالة عكسية، نرمز لها بالرمز $Argsh$ حيث

$$\begin{aligned} Argsh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \arg shx \end{aligned}$$

وهي مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ وتُحقق

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} :\ y = shx \Leftrightarrow x = \arg shy$$

– عمدة جيب التمام الزائدي $(Argch)$:



لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (chx)' = shx = \frac{e^{-x}\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)}{2}$$

وبالتالي $\forall x \in \left]0,+\infty\right[,\ (chx)' > 0$

ممّا ينتج أن الدالة

$$\begin{aligned} ch : \left[0,+\infty\right[&\to \left[1,+\infty\right[\\ x &\mapsto chx \end{aligned}$$

مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما) على $\left[0,+\infty\right[$ فهي تقبل دالة عكسية، نرمز لها بالرمز $Argch$ حيث

$$\begin{aligned} Argch : \left[1,+\infty\right[&\to \left[0,+\infty\right[\\ x &\mapsto \arg chx \end{aligned}$$

وهي مستمرة و متزايدة تماما على $\left[1,+\infty\right[$ و تأخذ قيمها في $\left[0,+\infty\right[$ وتُحقق

$$\forall x \in \left[0,+\infty\right[, \forall y \in \left[1,+\infty\right[:\ y = chx \Leftrightarrow x = \arg chy$$

– عمدة الظل الزائدي $(Argth)$:

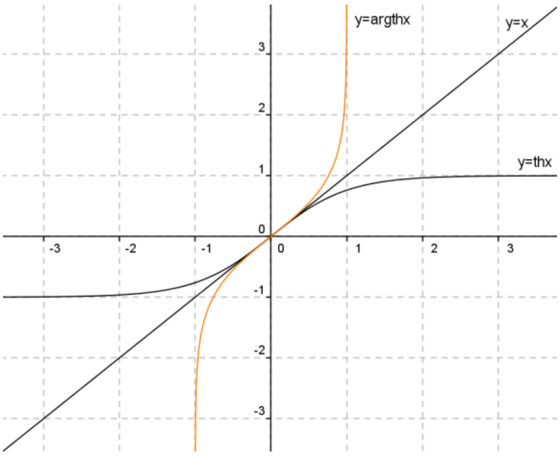
لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (thx)' = \frac{1}{ch^2x}$$

وبالتالي $\forall x \in \mathbb{R},\ (thx)' > 0$

ممّا ينتج أن الدالة

$$\begin{aligned} th : \left]-\infty,+\infty\right[&\to \left]-1,1\right[\\ x &\mapsto thx \end{aligned}$$



مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما) على $\mathbb{R}$

فهي تقبل دالة عكسية، نرمز لها بالرمز $Argth$ حيث

$$Argth :]-1,1[\to]-\infty,+\infty[$$
$$x \mapsto rgthx$$

وهي مستمرة و متزايدة تماما على $]-1,1[$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$

وتُحقق

$$\forall x \in]-\infty,+\infty[, \forall y \in]-1,1[: y = thx \Leftrightarrow x = \arg thy$$

نتائج:

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \arg shx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

بالفعل: لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y = \arg shx \Leftrightarrow x = shy = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$
$$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow e^y = x+\sqrt{x^2+1} \vee e^y = x-\sqrt{x^2+1}$$

وبما أن

$$x-\sqrt{x^2+1} < 0 \text{ و } x+\sqrt{x^2+1} > 0$$

فإن $e^y = x+\sqrt{x^2+1}$

ومنه $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

وهذا يعني أن $\forall x \in \mathbb{R},\ \arg shx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

- $\forall x \in [1,+\infty[,\ \arg chx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

بالفعل: لدينا

$$\forall x \in [1,+\infty[, \forall y \in [0,+\infty[: y = \arg chx \Leftrightarrow x = chy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$
$$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow e^y = x+\sqrt{x^2-1} \vee e^y = x-\sqrt{x^2-1}$$

في هذه الحالة، نلاحظ أن

$$x-\sqrt{x^2-1} > 0 \text{ و } x+\sqrt{x^2-1} > 0$$

وبالتالي:

$$y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \vee y = \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$$

بما أن $x+\sqrt{x^2-1} \geq 1$ (حيث $x \geq 1$) فإن $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \geq 0$

و بما أن $x-\sqrt{x^2-1} = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \leq 1$ فإن $\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) \leq 0$

ومن كون $y \geq 0$ يكون لدينا $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

وهذا يعني أن $\forall x\in[1,+\infty[,\ \arg chx=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

– $\forall x\in]-1,1[,\ \arg thx=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

بالفعل: لدينا

$$\forall x\in]-1,1[,\forall y\in\mathbb{R}:y=\arg thx\Leftrightarrow x=thy=\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$$
$$\Leftrightarrow e^y-e^{-y}=x\left(e^y+e^{-y}\right)$$
$$\Leftrightarrow(1-x)e^{2y}=1+x$$

وبما أن $\frac{1+x}{1-x}>0$ (حيث $x\in]-1,1[$) فإن $e^{2y}=\frac{1+x}{1-x}$ ومنه $y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

وهذا يعني أن $\forall x\in]-1,1[,\ \arg thx=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

تطبيق1:

– عين مجموعة تعريف الدالة f المُعرفة في كل حالة من الحالتين التاليتين:

أ– $f(x)=\arcsin\left(\frac{1-x}{4}\right)$ ب– $f(x)=\arg ch\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$

الحل:

أ– تكون الدالة f مُعرّفة إذا وفقط إذا كانت $-1\le\frac{1-x}{4}\le1$ أي $-3\le x\le5$

فمجموعة تعريف هذه الدالة هي $D_f=[-3,5]$.

ب– تكون الدالة f مُعرّفة إذا وفقط إذا كانت $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\ge1\wedge x\ne0$

أي $\frac{x^2-2x+1}{x}\ge0\wedge x\ne0$ معناه $x>0$

فمجموعة تعريف هذه الدالة هي $D_f=]0,+\infty[$.

تطبيق2: إذا علمت أنّ $\forall x\in\mathbb{R}:\ (arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$، فبيّن أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*:\ arctgx+arctg\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

الحل:

لنعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $f(x)=arctgx+arctg\frac{1}{x}$

لدينا

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*:\ f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=0$$

فينتج أن الدالة f ثابتة، لذا يُمكن كتابتها على الشكل التالي:

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=c$ حيث c ثابت حقيقي،

فبوضع $x=1$ يكون $f(1)=c$ وبالتالي $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=f(1)$

بمعنى $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=2arctg1$ أي $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$ وهو المطلوب.

تمارين للحل:

التمرين الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0,1]$ كمايلي: $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

- بيّن أنّ الدالة f تقابل من $[0,1]$ في مجال يُطلب تعيينه، ثم عين عندئذ دالتها العكسية.

التمرين الثاني:

f دالة معرّفة على المجال $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ كمايلي : $f(x)=\frac{1}{\sin x}$.

- بيّن أنّ الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} يُطلب تعيين مجموعة تعريفها $\left(D_{f^{-1}}\right)$.

التمرين الثالث: (بعض دساتير التحويل للدوال الزائدية)

1) أ- بيّن أنّه من أجل كل عددين حقيقين x ، y لدينا:

- $sh(x+y)=sh(x)ch(y)+ch(x)sh(y)$
- $ch(x+y)=ch(x)ch(y)+sh(x)sh(y)$

ب- استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

- $sh(2x)=2sh(x)ch(y)$
- $ch(2x)=ch^2(x)+sh^2(x)$

2) إذا علمت أنّ: $\forall x\in\mathbb{R},\ ch^2(x)-sh^2(x)=1$ (تمّ برهانها حسب ما سبق)، فاستنتج أنّ:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ ch(2x)=2ch^2(x)-1$$
$$\forall x\in\mathbb{R},\ ch(2x)=2sh^2(x)+1$$

التمرين الرابع:

عيّن مجموعة تعريف الدالة f المعرفة في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\arccos\left(\frac{1+x}{x}\right)$ 2) $f(x)=arctg\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$

3) $f(x)=\arcsin\left(\frac{1-x}{4}\right)$ 4) $f(x)=\arg ch\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$.

التمرين الخامس:

- إذا علمت أنّ

$$\forall x\in[-1,1],\ \cos^2(\arcsin x)+\sin^2(\arcsin x)=1$$

فبيّن أنّ

$$\forall x \in [-1,1],\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

- نعتبر الآن المعادلة

$\arcsin x = \arccos 2x$ ذات المجهول الحقيقي x.

عيّن D مجموعة تعريفها ثمّ قُم بحلّها.

التمرين السادس:

نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة كمايلي :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

1) بيّن أن $D_f = \mathbb{R}$ (مجموعة تعريف الدالة f).

2) برهن أن الدالة f فردية.

3) أثبت أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} يُطلب تعيين مجموعة تعريفها.

4) أ- بيّن أنّ: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \arg shx$

ب- استنتج عبارة الدالة العكسية f^{-1}.

التمرين السابع:

أثبت صحة مايلي:

1) $\forall x \in [-1,1],\ \sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

2) $\forall x \in [-1,1],\ \cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$

3) $\forall x \in [-1,1],\ \sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) = \frac{1-x}{2}$

4) - $\forall x \in]0,+\infty[,\ argsh\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = \ln x$

- $\forall x \in]-\infty,0[,\ argsh\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = -\ln(-x)$

(مع العلم أنّ: $\forall x \in \mathbb{R},\ \arg shx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$).

التمرين الثامن:

1) بنفس طريقة إثبات العبارة $\forall x \in [-1,1],\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ (التمرين الخامس السابق)

بيّن أنّ $\forall x \in [-1,1],\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين:

أ- $chx = 2$

ب- $\arcsin(2x) = \arcsin x + \arcsin\left(x\sqrt{2}\right)$.

قسم الجبر1

- ✓ البُنى الجبرية
- ✓ الفضاءات الشعاعية
- ✓ التطبيقات الخطية

الفصل السابع: البُنى الجبرية

مقدّمة: درسنا في علم الحساب العمليات العددية الأساسية وأبرزها عمليتا الجمع والضرب، في كل عملية من هاتين العمليتين يُقابل كل ثنائية من الأعداد عددا آخرا (حاصل جمعهما أو ضربهما). سندرس في هذا الفصل نمط أعم من العمليات على مجموعات العناصر بحيث تُشكل العمليات المألوفة (الجمع والضرب) حالة خاصة من هذه العمليات الرياضية التي يُطلق عليها اسم العمليات الجبرية أو قوانين التركيب. والعمليات الجبرية نوعان، العملية الداخلية (قانون التركيب الداخلي) والعملية الخارجية (قانون التركيب الخارجي).

إن علم الجبر يدرس أنظمة رياضية يتألف كل منها من مجموعة عناصر (ليست بالضرورة أعداد فقد تكون أشعّة، دوال، مصفوفات وغيرها) ومن عمليات مُعرّفة على هذه المجموعة تشترك مع العمليات الحسابية المألوفة ببعض الخواص (كالتبديل، التجميع،...)، وقد أُطلق على هذه الأنظمة الرياضية اسم البُنى الجبرية. فالبنية الجبرية تعني تزويد مجموعة E غير خالية من العناصر بعدد من العمليات واحدة أو أكثر داخلية أو خارجية مع مجموعة من الخواص التي تُحقّقها هذه العمليات على عناصر المجموعة E. من أهم البُنى الجبرية والتي سنعالجها في هذا الفصل الزمرة وهي مجموعة مُزوّدة بعملية داخلية واحدة لها خواص مُحدّدة، والحلقة والحقل كل منهما عبارة عن مجموعة مُزوّدة بعمليتين داخليتين بخواص مُعيّنة، والفضاء الشعاعي (في الفصل الثاني) وهو مجموعة مُزوّدة بعمليتين إحداهما داخلية والأخرى خارجية.

1.7 العملية الداخلية (قانون التركيب الداخلي):

تعريف: E مجموعة غير خالية. نُسمي عملية داخلية في مجموعة E كل تطبيق للمجموعة $E\times E$ نحو E، ونرمز لها بأحد الرموز التالية: $*$، Δ، $\circ$، $+$، $\times$،...

- فإذا كانت $*$ عملية داخلية في مجموعة E نكتب:

$$\begin{aligned} *: E\times E &\to E \\ (x,y) &\mapsto x*y \end{aligned}$$

مثلا: عملية الجمع في $\mathbb{R}$ هي عملية داخلية في $\mathbb{R}$، ولدينا:

$$\begin{aligned} +: \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned}$$

خواص: لتكن $*$ و Δ عمليتان داخليتان في مجموعة E.

أ-التبديلية: تكون العملية $*$ تبديلية في E إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall (x,y)\in E^2, x*y=y*x$$

ب-التجميعية: تكون العملية $*$ تجميعية في E إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall (x,y,z)\in E^3, (x*y)*z=x*(y*z)$$

ج-التوزيعية: تكون العملية Δ توزيعية على $*$ في E إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall (x,y,z)\in E^3, x\Delta(y*z)=(x\Delta y)*(x\Delta z)\wedge(y*z)\Delta x=(y\Delta x)*(z\Delta x)$$

د–**العنصر الحيادي:** يكون العنصر e من E حيادي بالنسبة للعملية $*$ في E إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall x \in E, x * e = e * x = x$$

هـ–**العنصر النظير:** ليكن e العنصر الحيادي بالنسبة للعملية $*$ في E، وليكن x من E.

يكون العنصر x' من E نظير x بالنسبة للعملية $*$ في E إذا وفقط إذا تحقق:

$$x * x' = x' * x = e$$

ملاحظة: إذاكانت العملية $*$ تبديلية في E، ففي الخاصية ج نكتفي بإحدى العلاقتين في تعريف التوزيعية، و في الخاصيتين د و هـ نكتفي بأحد الطرفين الأوّلين في تعريف كل من العنصر الحيادي و العنصر النظير.

خاصية1: العنصر الحيادي إن وُجد فهو وحيد.

البرهان: إذا فرضنا e و e' عنصران حياديان بالنسبة للعملية $*$ في E، فيكون لدينا من جهة $e * e' = e$ (حيث e' عنص حيادي) و من جهة أخرى $e * e' = e'$ (حيث e عنص حيادي)، فينتج أن $e = e'$.

خاصية2: إذا كانت العملية تجميعية، فإن العنصر النظير إن وُجد فهو وحيد.

البرهان: إذا فرضنا x' و x'' عنصران نظيران للعنصر x من E بالنسبة للعملية التجميعية $*$ في E، و ليكن e العنصر الحيادي لهذه العملية في E فيكون لدينا:

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''.$$

أمثلة:

1)– الجمع $(+)$ و الضرب $(\times)$ عمليتان تبديليتان و تجميعيتان في $\mathbb{R}$.

الضرب توزيعي على الجمع في $\mathbb{R}$. العدد 0 هو العنصر الحيادي بالنسبة للجمع في $\mathbb{R}$. العدد 1 هو العنصر الحيادي بالنسبة للضرب في $\mathbb{R}$. العدد $(-x)$ هو نظير العدد x من $\mathbb{R}$ بالنسبة للجمع في $\mathbb{R}$. العدد $\frac{1}{x}$ هو نظير العدد x من $\mathbb{R}^*$ بالنسبة للجمع في $\mathbb{R}^*$.

2)–الطرح $(-)$ عملية ليست تبديلية و ليست تجميعية في $\mathbb{R}$.

بالفعل: يوجد مثلا الأعداد 1، 2، 3 من $\mathbb{R}$ بحيث: $1-2 \neq 2-1$ وكذا $(1-(2-3) \neq (3-2)-1$.

3)– الطرح $(-)$ عملية ليست داخلية في $\mathbb{N}$.

بالفعل: يوجد مثلا العددين 1، 2 من $\mathbb{N}$ بحيث: $(1-2) \notin \mathbb{N}$.

4)– لتكن E مجموعة غير خالية. الإتحاد $(\cup)$ و التقاطع $(\cap)$ عمليتان تبديليتان و تجميعيتان وكلاهما توزيعي على الآخر في $\mathrm{P}(E)$ (مجموعة أجزاء المجموعة E). المجموعة الخالية $(\varnothing)$ هي العنصر الحيادي بالنسبة للإتحاد في $\mathrm{P}(E)$و المجموعة E هي العنصر الحيادي بالنسبة للتقاطع في $\mathrm{P}(E)$.

2.7 الزمرة:

تعريف: E مجموعة غير خالية مزوّدة بالعملية الداخلية $*$. نقول أن $(E,*)$ زمرة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

أ– العملية $*$ تجميعية.

ب– يوجد في E عنصر حيادي بالنسبة للعملية $*$.

ج– كل عنصر من E يقبل نظيرا في E بالنسبة للعملية $*$.

ملاحظة: بالإضافة إلى الشروط السابقة، إذاكانت $*$ تبديلية نقول أن $(E,*)$ زمرة تبديلية.

أمثلة:

1)− $(\mathbb{R},+)$، $(\mathbb{Q},+)$، $(\mathbb{Z},+)$ زمر تبديلية، بينما $(\mathbb{N},+)$ ليست زمرة لعدم وجود العنصر النظير **(**الشرط **(**ج**)** غير مُحقق**)**.

2)− $(\mathbb{R},\times)$ ليست زمرة، لأن العدد 0 من $\mathbb{R}$ لايقبل نظير بالنسبة لعملية الضرب في $\mathbb{R}$.

3)− $(\mathbb{Q}^*,\times)$ زمرة تبديلية.

الزمرة الجزئية:

تعريف: لتكن $(E,*)$ زمرة و H مجموعة جزئية من E.

نقول عن $(H,*)$ أنها زمرة جزئية من $(E,*)$ إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

أ− $\forall(x,y)\in H^2, (x*y)\in H$ **(** H مُستقرة بالنسبة إلى $*$**)**.

ب− $e\in H$، حيث e هو العنصر الحيادي بالنسبة للعملية $*$ في E.

ج− $\forall x\in H, x'\in H$، حيث x' نظير x بالنسبة للعملية $*$ في E.

أمثلة:

1)− $(\mathbb{Z},+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{R},+)$.

2)− $(2\mathbb{Z},+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{Z},+)$.

3)− $(\mathbb{N},+)$ ليست زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{Z},+)$، لاختلال الشرط **(**ج**)** لأنه يوجد مثلا العدد 3 من $\mathbb{N}$ نظيره (-3) بالنسبة للجمع في $\mathbb{Z}$ لاينتمي إلى $\mathbb{N}$.

3.7 الحلقة:

تعريف: E مجموعة غير خالية مزوّدة بالعمليتين الداخليتين $*$ و Δ. نقول أن $(E,*,\Delta)$ حلقة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

أ− $(E,*)$ زمرة تبديلية.

ب− Δ تجميعية في E.

ج− Δ توزيعية على $*$ في E.

ملاحظة:

− بالإضافة إلى الشروط السابقة، إذاكانت Δ تبديلية نقول أن $(E,*,\Delta)$ حلقة تبديلية.

− بالإضافة إلى الشروط السابقة، إذاكانت للعملية Δ عنصرا حياديا في E نقول أنّ $(E,*,\Delta)$ حلقة واحدية.

أمثلة:

1)− $(\mathbb{R},+,\times)$ حلقة تبديلية واحدية.

2)− $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة تبديلية واحدية.

3)− $(\mathbb{N},+,\times)$ ليست حلقة لأن $(\mathbb{N},+)$ ليست زمرة **(**الشرط **(**أ**)** غير مُحقق**)**.

الحلقة الجزئية:

تعريف: لتكن $(E,*,\Delta)$ حلقة و B مجموعة جزئية من E.

نقول عن $(B,*,\Delta)$ أنها حلقة جزئية من $(E,*,\Delta)$ إذا وفقط إذا تحقق مايلي:

أ- $(B,*)$ زمرة جزئية من $(E,*)$.

ب- $\forall(x,y)\in B^2,\ (x\Delta y)\in B$ (B مُستقرة بالنسبة إلى Δ).

أمثلة:

1)- $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{R},+,\times)$.

2)- $(\mathbb{N},+,\times)$ ليست حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{Z},+,\times)$ لأن $(\mathbb{N},+)$ ليست زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{Z},+)$.

4.7 الحقل:

تعريف: E مجموعة غير خالية مزوّدة بالعمليتين الداخليتين $*$ و Δ. نقول أن $(E,*,\Delta)$ حقل إذا وفقط إذا تحقق مايلي:

أ- $(E,*,\Delta)$ حلقة واحدية.

ب- المجموعة $E-\{e\}$ غير خالية وكل عنصر منها يقبل نظيرا بالنسبة إلى Δ (e هو العنصر الحيادي للعملية $*$).

ملاحظة: بالإضافة إلى الشرطين السابقين، إذاكانت Δ تبديلية نقول أن $(E,*,\Delta)$ حقل تبديلي.

أمثلة:

1)- $(\mathbb{R},+,\times)$ حقل تبديلي.

2)- $(\mathbb{Q},+,\times)$ حقل تبديلي.

3)- $(\mathbb{Z},+,\times)$ ليست حقل لأن عناصر المجموعة $\mathbb{Z}-\{0\}$ لا تقبل نظائر بالنسبة إلى $\times$ (ماعدا العدد 1).

تطبيق: لتكن $*$ عملية داخلية في مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ مُعرّفة كمايلي:

$$x*y=x+y+2xy.$$

- أثبت أن الثنائية $\left(\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\},*\right)$ زمرة تبديلية.

الحل: – في البداية نتأكّد من أن العملية $*$ داخلية في المجموعة $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

بالفعل: من أجل كل عددين x و y من $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$، لنُبين أن $(x+y+2xy)\in\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ أي نُبين أن $x+y+2xy\neq-\frac{1}{2}$، لنُثبت ذلك بالخُلف، نفرض أن $x+y+2xy=-\frac{1}{2}$ وبالتالي يكون لدينا:

$$x(1+2y)=-\frac{1}{2}(1+2y) \text{ أي } \left(x+\frac{1}{2}\right)(1+2y)=0$$

فينتج أن $x=-\frac{1}{2}\vee y=-\frac{1}{2}$ وهذا تناقض كون x و y من $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

إذن $(x+y+2xy)\in\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$، فالعملية $*$ داخلية في $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

– العملية $*$ تبديلية في المجموعة $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$: لنُبين أن

$$\forall(x,y)\in\left(\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)^2,\ x*y=y*x$$

ليكن x و y من $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$، لدينا:

$$\begin{aligned} x*y &= x+y+2xy \\ &= y+x+2yx \\ &= y*x \end{aligned}$$

ومنه $*$ تبديلية في $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

– العملية $*$ تجميعية في المجموعة $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$: لنُبين أن

$$\forall(x,y,z)\in\left(\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)^3,\ (x*y)*z=x*(y*z)$$

ليكن x، y و z من $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$، لدينا من جهة

$$\begin{aligned} (x*y)*z &= (x+y+2xy)*z \\ &= (x+y+2xy)+z+2(x+y+2xy)z \\ &= x+y+2xy+z+2xz+2yz+4xyz \ \ldots(1) \end{aligned}$$

ومن جهة أخرى

$$\begin{aligned} x*(y*z) &= x*(y+z+2yz) \\ &= x+(y+z+2yz)+2x(y+z+2yz) \\ &= x+y+z+2yz+2xy+2xz+4xyz \ \ldots(2) \end{aligned}$$

من (1) و (2) ينتج أن $(x*y)*z=x*(y*z)$

ومنه $*$ تجميعية في $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

– العنصر الحيادي للعملية $*$ في المجموعة $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$: ليكن e العنصر الحيادي للعملية $*$ في $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$، فيتحقق مايلي: $\forall x\in\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\},\ x*e=x$

أي $\forall x\in\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\},\ x+e+2xe=x$ بمعنى $\forall x\in\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\},\ (1+2x)e=0$ إذن $e=0$ (حيث $1+2x\neq 0$).

ومنه 0 هو العنصر الحيادي للعملية $*$ في $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

– لكل عنصر من $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ نظير بالنسبة للعملية * في $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$: ليكن x' نظير العنصر x من $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ بالنسبة للعملية *، فيتحقق ما يلي:

$x*x'=0$ أي $x+x'+2xx'=0$ بمعنى $x'=\frac{-x}{1+2x}$ و هو عنصر من $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ (حيث $1+2x\neq 0$، مع ملاحظة أن $\frac{-x}{1+2x}\neq -\frac{1}{2}$ لأنه لو كان $\frac{-x}{1+2x}=-\frac{1}{2}$ لكان $2x=1+2x$ وهذا غير ممكن).

فلكل عنصر من $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ نظير بالنسبة للعملية * في $\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

وبالتالي: $\left(\mathbb{Q}-\left\{-\frac{1}{2}\right\},*\right)$ زمرة تبديلية.

تمارين للحل:

التمرين الأول:

$\vartriangle$ عملية داخلية في $\mathbb{N}$ معرّفة كمايلي :

$$a\vartriangle b=a^2+b^2$$

1) احسب مايلي: $2\vartriangle 1$، $5\vartriangle 3$، $(3\vartriangle 1)\vartriangle 5$، $3\vartriangle(1\vartriangle 5)$.

2) هل $\vartriangle$ تبديلية؟ وهل هي تجميعية؟ مع التبرير.

3) هل هناك عنصر حيادي بالنسبة للعملية $\vartriangle$؟.

التمرين الثاني:

* و $\vartriangle$ عمليتان داخليتان في $\mathbb{N}$ معرّفتان كمايلي :

$$a*b=a+2b \quad \text{و} \quad a\vartriangle b=2ab$$

1) أُدرس خاصيتي التبديل والتجميع لكل من * و $\vartriangle$.

2) بيّن أنّ $\vartriangle$ توزيعية على *، و أنّ * ليست توزيعية على $\vartriangle$.

التمرين الثالث:

Δ عملية داخلية في المجموعة $\mathbb{R}-\{2\}$ معرّفة كمايلي:

$$x\ \Delta\ y=(x-2)(y-2)+2$$

– أثبت أنّ $(\mathbb{R}-\{2\}\ ,\ \Delta)$ زمرة تبديلية.

التمرين الرابع:

x، y عددان حقيقيان من المجال $I=]-1,1[$.

1) تحقّق من أنّ: $\forall(x,y)\in I^2,\ \ 1+xy>0$ (تأكّد أوّلا من أنّ $|xy|<1$)

ثمّ اثبت أنّ:

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad -1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$$

2) لتكن $*$ عملية داخلية في I معرفة كمايلي: $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

- أثبت أنّ $(I, *)$ زمرة تبديلية.

التمرين الخامس:

لتكن $*$ و Δ عمليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ كمايلي:

$$a * b = a + b - 1$$
$$a \Delta b = a + b - ab$$

1) أثبت أنّ $(\mathbb{Z}, *, \Delta)$ حلقة.

2) هل هذه الحلقة حقل؟، برّر جوابك.

التمرين السادس:

لتكن المجموعة K المعرفة كمايلي:

$$K = \left\{ a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$$

ونعرّف عمليتي الجمع والضرب على K كمايلي:

من أجل كل عددين x و y من K حيث $x = a + b\sqrt{2}$، $y = c + d\sqrt{2}$ لدينا:

$$x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$
$$xy = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}$$

- أثبت أنّ $(K, +, \times)$ حقل تبديلي.

التمرين السابع:

نعتبر $(E, *)$ زمرة غير تبديلية، ولتكن a، b و c عناصر معلومة من E. نرمز بـ a^{-1} لنظير a من E بالنسبة للعملية $*$.

- أوجد العناصر x من E في كل حالة من الحالات التالية:

أ- $a * x = b$

ب- $a * x * b = c * b$

ج- $a * x * b = b * c$.

الفصل الثامن: الفضاءات الشعاعية

مقدّمة وتمهيد: نُعالج في هذا الفصل نوعا آخرا من البُنى الجبرية ميزته أنّه مُزوّد بعمليتين داخلية وخارجية نُسمّيه الفضاء الشعاعي. ولهذا الموضوع أهمية كبيرة نظرا لتطبيقاته المُتنوعة في الفيزياء والميكانيك على سبيل المثال.

ونودّ قبل كل شيء أن نُؤكّد على أنّ ما نُسميه شعاعا فيما سيأتي ليس فقط ذاك الشعاع المعروف بقطعة مستقيمة مُوجّهة والمُتميّزة بالمنحى والاتجاه والطويلة أو المعيار، بل هو كائن جبري مُجرّد يُمكن أن لا يحمل أي معنى فيزيائي (استعمال الشعاع لتمثيل كمية فيزيائية كالقوة مثلا)، لكنّه تعميما للشعاع في الفيزياء والميكانيك، فهو عموما عبارة عن قائمة عناصر (مُكوّنات) مُرتّبة تسمّى مركّبات هذا الشعاع.

ومن هذا المُنطلق سنُعالج في هذه المقدمة بُنية الفضاء الشعاعي الذي يتمثل في مجموعة الأشعّة في المستوي (أو الفضاء) ثُمّ نُعمّم هذه البُنية الجبرية بشكل مُجرّد، نزوّد هذه المجموعة (كما هو معلوم في دراستنا في المرحلة الثانوية) بعملية جمع الأشعة وهي عملية داخلية في هذه المجموعة (مجموع شعاعين هو شعاع) ويمكن التأكد باستعمال مركبات الشعاع أن هذه العملية تبديلية، تجميعية، ولها عنصر حيادي (الشعاع المعدوم $\vec{0}$) ولكل شعاع نظير بالنسبة للجمع (نظير الشعاع $\vec{u}$ هو الشعاع $-\vec{u}$) وهذا يعني أنّ مجموعة الأشعّة المُزوّدة بعملية الجمع زمرة تبديلية. كما نعلم أن حاصل ضرب الشعاع $\vec{u}$ بعدد حقيقي λ هو الشعاع $\lambda\cdot\vec{u}$، إنّ هذه العملية هي عملية خارجية في مجموعة الأشعّة تتمتّع بالخواص التالية: من أجل كل شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وكل عددين حقيقيين λ و μ لدينا:

$$\lambda\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\lambda\cdot\vec{u}+\lambda\cdot\vec{v}$$
$$\left(\lambda+\mu\right)\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{u}$$
$$\lambda\cdot\left(\mu\cdot\vec{u}\right)=\left(\lambda\cdot\mu\right)\cdot\vec{u}$$
$$1\cdot\vec{u}=\vec{u}$$

فبتحقّق هذه الخواص بالنسبة للعمليتين الواردتين سابقا، نقول أن مجموعة الأشعّة في المستوي (أو الفضاء) لها بُنية فضاء شعاعي، فهو أول مثال عن هذه البُنية.

في بداية هذا الفصل سنقوم بإعطاء تعريفا عاما للفضاء الشعاعي، يليه التعرّف على بعض المفاهيم على الأشعّة: الارتباط والاستقلال الخطّيان، التوليد، ثم التطرّق إلى الأُسس والأبعاد للفضاءات الشعاعية.

1.8 تعريف الفضاء الشعاعي: لنعتبر $(\mathrm{K},+,\cdot)$ حقل تبديلي (K يُمثل عادة $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية أو $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة). و لتكن E مجموعة غير خالية، مُزوّدة بقانون تركيب داخلي (عملية داخلية) نرمز لها بالرمز $(+)$ و قانون تركيب خارجي (عملية خارجية) نرمز لها بالرمز $(\cdot)$ حيث:

$$\cdot:\mathrm{K}\times E\to E$$
$$\left(\lambda,x\right)\mapsto\lambda\cdot x$$

نقول أن المجموعة E (المزودة بالعمليتين الداخلية $+$ والخارجية $\cdot$) فضاء شعاعي على الحقل K إذا تحقق ما يلي:

أ- $(E,+)$ زمرة تبديلية.

ب- من أجل كل x و y من E و كل λ و μ من K، لدينا:

- $\left(\lambda+\mu\right)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$

- $\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$
- $\lambda\cdot(\mu\cdot x)=(\lambda\cdot\mu)\cdot x$
- $1_{\mathrm{K}}\cdot x=x$ (حيث 1_{K} العنصر الحيادي للعملية $\cdot$ في K).

ملاحظات:

- عناصر E تُسمى أشعّة و عناصر K سلّميات.
- تُسمى الكتابة $\lambda\cdot x$ بضرب الشعاع x بالسلّمي λ و نكتب λx.
- $\forall\lambda\in\mathrm{K},\lambda 0=0$ (0 الشعاع المعدوم في E)، وذلك لأن من $\lambda x=\lambda(x+0)=\lambda x+\lambda 0$ نجد $\lambda 0=0$
- $\forall x\in E,0x=0$ ، وذلك لأن من $0x=(0+0)x=0x+0x$ نجد $0x=0$
- $\lambda x=0\Leftrightarrow\lambda=0\vee x=0$

أمثلة:

1)– كل حقل تبديلي K هو فضاء شعاعي على K.

2)– V مجموعة الأشعة في المستوي (أو الفضاء) المألوف هي فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$، حيث:

جمع الأشعة هي عملية داخلية في V ($\forall(\vec{u},\vec{v})\in V^2,\vec{u}+\vec{v}\in V$)

و ضرب شعاع بعدد حقيقي هي عملية خارجية في V ($\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall\vec{u}\in V:\lambda\vec{u}\in V$)

فبواسطة هاتين العمليتين يمكن التحقق من تعريف الفضاء الشعاعي.

3)– $\mathbb{R}^2$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$، حيث:

$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$، $\lambda(x_1,x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2)$.

يمكن تمثيل الأشعة هندسيا باختيار معلما $(O,\vec{i},\vec{j})$ في المستوي، و نُرفق بكل عنصر $x=(x_1,x_2)$ من $\mathbb{R}^2$ النقطة

A

حيث $\overrightarrow{OA}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}$. وإذا كانت النقطة B تمثل الشعاع $y=(y_1,y_2)$ فإن المجموع $z=x+y$ يُمثّل بالنقطة C حيث $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

–تعميم: $\mathbb{R}^n$، $(n\in\mathbb{N}^*)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$.

4)– لتكن $E=\Im(I,\mathbb{R})$ مجموعة الدوال العددية المُعرّفة على المجال I من $\mathbb{R}$.

نُعرّف مجموع دالتين f و g كما يلي:

$$\forall x\in I,\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

كما نُعرّف ضرب دالة بعدد حقيقي λ كما يلي:

$$\forall x\in I,\ (\lambda f)(x)=\lambda f(x)$$

إنّ المجموعة E المُزوّدة بهاتين العمليتين (الأولى داخلية والثانية خارجية) لها بُنية فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$.

الفضاء الشعاعي الجزئي:

تعريف: لتكن E فضاء شعاعي على الحقل K و F مجموعة جزئية من E.

نقول أن F فضاء شعاعي جزئي من E إذا تحقق ما يلي:

أ– $F\neq\varnothing$ (يجب أن تحتوي على الأقل على 0_E، العنصر الحيادي للعملية الداخلية في E).

ب- $\forall(x,y)\in F^2,\ x+y\in F$ (F مستقرّة بالنسبة للعملية الداخلية $+$).

ج- $\forall x\in F, \forall\lambda\in\mathrm{K},\ \lambda x\in F$ (F مستقرّة بالنسبة للعملية الخارجية $\cdot$).

ملاحظات:

- عمليا للتأكّد من أن $F\neq\varnothing$، نتحقق من أن 0_E ينتمي إلى F.

بالفعل: إذا كان F فضاء شعاعي جزئي فإن $0_E\in F$، وباستعمال العكس النقيض، إذا كان $0_E\notin F$ فإن F ليس فضاء شعاعي جزئي.

- يمكن كتابة الشرطين (ب) و (ج) كما يلي:

$$\forall(x,y)\in F^2, \forall(\lambda,\mu)\in\mathrm{K}^2,\ \lambda x+\mu y\in F$$

أمثلة:

1)- $\{0_E\}$، E فضاءان شعاعيان جزئيان من E.

2)- $\mathbb{R}\times\{0\}$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^2$، حيث $\mathbb{R}\times\{0\}=\{(x,0),\ x\in\mathbb{R}\}$.

بالفعل: من الواضح أن $(0,0)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}\times\{0\}$ و بالتالي $\mathbb{R}\times\{0\}\neq\varnothing$، ثمّ من أجل $(x,0)$، $(y,0)$ من $\mathbb{R}\times\{0\}$ و من أجل λ، μ من $\mathbb{R}$ لدينا: $\lambda(x,0)+\mu(y,0)=(\lambda x+\mu y,0)\in\mathbb{R}\times\{0\}$.

3)- إذا كانت $E=\Im(I,\mathbb{R})$ مجموعة الدوال العددية المُعرّفة على المجال I من $\mathbb{R}$، وهي فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ حسب المثال السابق، و إذا فرضنا $F=C(I,\mathbb{R})$ مجموعة الدوال المُستمرّة على I فإن F فضاء شعاعي جزئي من E.

2.8 الأُسس و الأبعاد: لنفرض في كل ما يأتي أن E فضاء شعاعي على الحقل K ($\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$).

أ- المزج الخطي:

تعريف: نُسمي مزجا خطيا للأشعّة $x_1,x_2,\dots,x_n$ من الفضاء الشعاعي E كل شعاع من الشكل:

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n$$

حيث $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ سلّميات من K.

مثال: ليكن $E=\mathbb{R}^2$ و ليكن الشعاع $(1,2)$ من E.

لدينا الكتابة التالية: $(1,2)=1\cdot(1,0)+2\cdot(0,1)$

فنقول أن الشعاع $(1,2)$ هو مزج خطي للشعاعين $(1,0)$ و $(0,1)$.

ب- العائلة المولّدة:

تعريف: نقول أنّ العائلة $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ مولّدة للفضاء الشعاعي E إذا كُتب كل شعاع من E كمزج خطي لهذه العائلة، بمعنى:

$$\forall x\in E, \exists(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathrm{K}^n:\ x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n$$

ونكتب $E=\langle x_1,x_2,\dots,x_n\rangle$.

أمثلة:

1)- ليكن $E=\mathbb{R}^2$. الشعاعان $v=(1,0)$ و $w=(1,1)$ يولّدان الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$.

بالفعل: ليكن $u=(x,y)$ شعاع من $\mathbb{R}^2$، ولنبين وجود α، β من $\mathbb{R}$ بحيث $u=\alpha v+\beta w$، وهذا يُؤدي إلى حل الجملة:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ \quad \beta=y\end{cases}$$

وهي تقبل حل وحيد $\alpha=x-y$ و $\beta=y$ وهذا مهما يكن x و y من $\mathbb{R}$، ومنه $\mathbb{R}^2=\langle v,w\rangle$.

2)– ليكن $E=\mathbb{R}^3$. وليكن $e_1=(1,0,0)$، $e_2=(0,1,0)$، $e_3=(0,0,1)$ ثلاث أشعّة من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$.

فمن أجل كل شعاع $u=(x,y,z)$ من $\mathbb{R}^3$ لدينا:

$$\begin{aligned}u=(x,y,z)&=(x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)\\&=x\,(1,0,0)+y\,(0,1,0)+z\,(0,0,1)\\&=xe_1+ye_2+ze_3\end{aligned}$$

وبالتالي: $\mathbb{R}^3=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$.

ج– الإرتباط والإستقلال الخطيان:

تعريف:

1)– نقول أنّ الأشعة $x_1,x_2,\ldots,x_n$ من الفضاء الشعاعي E مرتبطة خطيا إذا وُجدت $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ سلّميات من K ليست كلّها معدومة بحيث يكون: $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=0$

2)– نقول أنّ الأشعة $x_1,x_2,\ldots,x_n$ من الفضاء الشعاعي E مستقلة خطيا (حرّة) إذا لم تكن مرتبطة خطيا، بمعنى:

$$\forall(\lambda_1,\lambda_2\ldots,\lambda_n)\in \mathrm{K}^n,\ (\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0)$$

أمثلة:

1)– في $\mathbb{R}^4$، لتكن الأشعة $u=(1,0,0,0)$، $v=(1,1,1,0)$، $w=(0,1,1,0)$.

نلاحظ أن: $v=u+w$، كما يمكن كتابتها على الشكل: $u-v+w=0$

وبالتالي الأشعة u، v، w مرتبطة خطيا.

2)– في $\mathbb{R}^3$ الأشعة $u=(1,3,1)$، $v=(0,1,-1)$، $w=(2,5,3)$ مرتبطة خطيا، لأن: $-2u+v+w=0$.

بالفعل: لتكن α، β، γ أعداد حقيقية تُحقق مايلي: $\alpha u+\beta v+\gamma w=0$

وهذه الأخيرة تُكافيء الجملة التالية:

$$\begin{cases}\alpha+2\gamma=0\\3\alpha+\beta+5\gamma=0\\\alpha-\beta+3\gamma=0\end{cases}$$

إن حلول هذه الجملة من الشكل $\{(-2\gamma,\gamma,\gamma),\ \gamma\in\mathbb{R}\}$، ويكون لدينا

$$\gamma(-2u+v+w)=0$$

فبفرض $\gamma\neq 0$ نجد $-2u+v+w=0$، وهو ما يُفسّر أن الأشعّة u، v، w مرتبطة خطيا.

3)– في $\mathbb{R}^3$ الأشعة $e_1=(1,0,0)$، $e_2=(0,1,0)$، $e_3=(0,0,1)$ مستقلة خطيا، لأنه إذا كان

$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3=0$ (مع العلم أن 0 في $\mathbb{R}^3$ يمثل الشعاع المعدوم $(0,0,0)$)

فإنه ينتج:

$$(\lambda_1,0,0)+(0,\lambda_2,0)+(0,0,\lambda_3)=(0,0,0)$$

أي
$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$$

ومنه
$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

د– أساس الفضاء الشعاعي:

تعريف: نقول أنّ العائلة $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ تُشكّل أساسا للفضاء الشعاعي E إذا كانت مولّدة لــ E ومستقلّة خطيا في E.

مثال1: ليكن $E=\mathrm{K}$ (وهو فضاء شعاعي على K)، وليكن $a\in\mathrm{K}-\{0\}$.

لدينا من أجل كل عنصر x من K، $x=\left(\frac{x}{a}\right)a$. وبالتالي $\mathrm{K}=\langle a\rangle$ و بما أن $\{a\}$ مستقلة خطيا (حيث $\lambda a=0\Rightarrow\lambda=0$)

فإن $\{a\}$ أساس لــ K.

ملاحظة: هذا المثال يُوضّح أنّه يمكن لفضاء شعاعي أن يتمتع بعدد غير منته من الأسس (لأن aعنصر كيفي غير معدوم من K)

مثال2: في $\mathbb{R}^2$ العائلة $\mathrm{B}=\{e_1,e_2\}$ حيث $e_1=(1,0)$، $e_2=(0,1)$ تُشكّل أساسا لــ $\mathbb{R}^2$، ويُسمّى بالأساس القانوني لــ $\mathbb{R}^2$.

بالفعل:

- B مولّدة لــ $\mathbb{R}^2$ حيث $\forall x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, x=(x_1,0)+(0,x_2)=x_1e_1+x_2e_2$
- B مستقلة خطيا حيث $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \alpha e_1+\beta e_2=0=(0,0)\Rightarrow\alpha=\beta=0$

مثال3: في $\mathbb{R}^3$ العائلة $\mathrm{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ حيث $e_1=(1,0,0)$، $e_2=(0,1,0)$، $e_3=(0,0,1)$ تُشكّل أساسا لــ$\mathbb{R}^3$، (حيث B مولّدة و مستقلة خطيا حسب الأمثلة السابقة) ويُسمّى هذا الأساس بالأساس القانوني لــ$\mathbb{R}^3$.

مثال4: ليكن $E=\mathbb{C}$ (مجموعة الأعداد المركبة) هي فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$. الشعاعان 1 و i حيث $i^2=-1$ يُشكّلان أساسا لــ $\mathbb{C}$.

بالفعل:

- بما أن $\forall x\in\mathbb{C}, x=\alpha+\beta i=\alpha.1+\beta.i$ فإن $\mathbb{C}=\langle 1,i\rangle$
- 1 و i مستقلان خطيا حيث $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \alpha.1+\beta.i=0\Rightarrow\alpha=\beta=0$

تطبيق1: بيّن أن الشعاعان $u=(1,2)$، $v=(3,1)$ يُشكّلان أساسا للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$.

الحل:

1)– الشعاعان u و v يُولّدان $\mathbb{R}^2$: لنبيّن أنّه من أجل كل شعاع $x=(x_1,x_2)$ من $\mathbb{R}^2$ يوجد عددان α و β من $\mathbb{R}$ بحيث يكون $x=\alpha u+\beta v$.

ليكن $x=(x_1,x_2)$ من $\mathbb{R}^2$ بحيث $x=\alpha u+\beta v$، والتي تُكافيء الجملة التالية:

$$\begin{cases}\alpha+3\beta=x_1\\ 2\alpha+\beta=x_2\end{cases}$$

و ينتج من هذه الأخيرة أنّ: $\alpha=\dfrac{-x_1+3x_2}{5}$ ، $\beta=\dfrac{2x_1-x_2}{5}$

ومنه $\mathbb{R}^2=\langle u,v\rangle$.

2)– الشعاعان u و v مستقلان خطيا: فمن أجل كل عددان α و β من $\mathbb{R}$ بحيث $\alpha u+\beta v=0$ ، والتي تُكافيء الجملة التالية:

$$\begin{cases}\alpha+3\beta=0\\ 2\alpha+\beta=0\end{cases}$$

و ينتج من هذه الأخيرة أنّ: $\alpha=\beta=0$

ومنه الشعاعان u و v مستقلان خطيا.

إذن $\{u,v\}$ تُشكّل أساسا لـ $\mathbb{R}^2$ ، وهو المطلوب.

تطبيق2: بيّن أنّ العائلة $\mathrm{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$ حيث $v_1=(1,1,0)$ ، $v_2=(1,0,1)$ ، $v_3=(0,1,1)$ ، تُشكّل أساسا للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على $\mathbb{R}$.

الحل:

– إنّ العائلة B مستقلة خطيا، وهذا مُحقق لأن

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\ \alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=0$$

– العائلة B مولّدة لـ $\mathbb{R}^3$ ، وهذا مُحقق لأن

$$\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ x=\frac{x_1+x_2-x_3}{2}v_1+\frac{x_1-x_2+x_3}{2}v_2+\frac{-x_1+x_2+x_3}{2}v_3$$

فالعائلة B تُشكّل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

نظرية (تمييز الأساس):

تُشكّل العائلة $\mathrm{B}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ أساسا للفضاء الشعاعي E إذا وفقط إذا كان أي شعاع من E يُكتب بصورة وحيدة كمزج خطي لهذه العائلة.

البرهان:

• لنفرض أن العائلة $\mathrm{B}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ تُشكّل أساسا لـ E ، وليكن x شعاعا من E فيكون

$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n\quad\cdots(1)$$

لنثبت أن هذه العبارة وحيدة:

إذا فرضنا عبارة أخرى للشعاع x على الشكل التالي

$$x=\lambda_1'x_1+\lambda_2'x_2+\cdots+\lambda_n'x_n\quad\cdots(2)$$

فمن (1) و (2) ينتج

$$(\lambda_1-\lambda_1')x_1+(\lambda_2-\lambda_2')x_2+\cdots+(\lambda_n-\lambda_n')x_n=0$$

و بما أن الأشعة $x_1,x_2,\ldots,x_n$ مستقلة خطيا نجد

$$\lambda_1-\lambda_1'=\lambda_2-\lambda_2'=\cdots=\lambda_n-\lambda_n'=0$$

أي

$$\lambda_1=\lambda_1',\ \lambda_2=\lambda_2',\cdots,\ \lambda_n=\lambda_n'$$

• لنفرض أن أي شعاع من E يُكتب بصورة وحيدة كمزج خطي للعائلة B ولنبيّن أن هذه العائلة تُشكّل أساسا لـ E.
من الفرض لدينا $E=\langle x_1,x_2,\ldots,x_n\rangle$، فيكفي إثبات الإستقلال الخطي للعائلة B.
ليكن

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=0$$

و التي يمكن أن نكتبها على الشكل التالي:

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=0x_1+0x_2+\cdots+0x_n$$

ولكون العبارة $(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)$ وحيدة نجد

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$$

فالعائلة B مستقلة خطيا، إذن هذه العائلة تُشكّل أساسا لـ E.

ملاحظات:

- إذا كانت الأشعة $x_n,\ldots,x_2,x_1$ تُشكّل أساسا للفضاء الشعاعي E وكان x شعاعا من E فإن

$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$$

و تُسمّى السلّميات $\lambda_n,\ldots\lambda_2,\lambda_1$ بمركبات x بالنسبة للأساس $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$.

- في $\mathbb{R}^2$، إذا مثّلنا هندسيا $x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$ باختيار معلما $(O,\vec{i},\vec{j})$ للمستوي فإن الشعاعين $e_1=(1,0)$، $e_2=(0,1)$ يمثّلان بشعاعي أساس المعلم $\vec{i}$، $\vec{j}$.

وأنه إذا كان الشعاع $x=(x_1,x_2)$ من $\mathbb{R}^2$ و المُرفق بالنقطة A من المستوي فإن

$$x=x_1e_1+x_2e_2$$

ويكون

$$\overrightarrow{OA}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}$$

هـ- بُعد الفضاء الشعاعي:

تعريف1: القول أن E فضاء شعاعي ببعد منته على K إذا كان هذا الفضاء الشعاعي يتولّد عن عدد منته من أشعّته.

مثلا: رأينا أن $\mathbb{R}^2$ يتولّد عن الشعاعين $e_1=(1,0)$ و $e_2=(0,1)$، فالفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ ببعد منته.

تعريف2: إذا كان E فضاء شعاعي ببُعد منته على K، فجميع أُسس E لها نفس عدد الأشعة، يُسمى هذا العدد ببُعد الفضاء الشعاعي E ونرمز له بالرمز $\dim E$.

أمثلة: من الأمثلة السابقة نجد

- كون $E=\mathrm{K}$ فضاء شعاعي على K فإن $\dim\mathrm{K}=1$.
- $\dim\mathbb{R}^2=2$، $\dim\mathbb{R}^3=3$، $\dim\mathbb{R}^n=n$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

ملاحظات:

- نصطلح على أن $\dim\{0_E\}=0$.
- يُسمى كل فضاء شعاعي ذا البعد 1 بمستقيم شعاعي.
- يُسمى كل فضاء شعاعي ذا البعد 2 بمستو شعاعي.

نظرية (بُعد جُداء فضائين شعاعيين): إذاكان E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل K ببُعدين منتهيين فإن

$$\dim(E\times F)=\dim E+\dim F$$

البرهان: بداية يمكن التأكد من أن الجداء $E\times F$ هو فضاء شعاعي على الحقل K، بالنسبة للعمليتين التاليتين:

$$\forall\left((x,y),(x',y')\right)\in(E\times F)^2,\ (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

$$\forall(x,y)\in E\times F,\forall\lambda\in\mathrm{K},\ \lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$$

لنفرض الآن أن $\dim E=n$ و $\dim F=m$ حيث n و m عددان طبيعيان غير معدومين.

لإثبات النتيجة المطلوبة يكفي أن نبين أن $E\times F$ يقبل أساسا عدد عناصره $n+m$.

لتكن العائلة $\mathrm{B}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ أساسا لـ E و العائلة $\mathrm{B}'=\{y_1,y_2,\ldots,y_m\}$ أساسا لـ F.

ليكن (x,y) من $E\times F$، فبالتالي كل من x و y يُكتب بصورة وحيدة على شكل مزج خطي للأشعة $x_1,x_2,\ldots,x_n$ و الأشعة $y_1,y_2,\ldots,y_m$ على الترتيب، و يُمكن أن نكتب

$$(x,y)=(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n,\mu_1y_1+\mu_2y_2+\cdots+\mu_my_m)$$

حيث

$$(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m)\in\mathrm{K}^{n+m}$$

كما يُمكن كتابة العبارة الأخيرة على الشكل:

$$(x,y)=\lambda_1(x_1,0)+\lambda_2(x_2,0)+\cdots+\lambda_n(x_n,0)+\mu_1(0,y_1)+\mu_2(0,y_2)+\cdots+\mu_m(0,y_m)$$

معنى ذلك أن العائلة $\{(x_1,0),(x_2,0),\ldots,(x_n,0),(0,y_1),(0,y_2),\ldots,(0,y_m)\}$ مولّدة لـ $E\times F$.

بقي أن نُثبت أنها مستقلة خطيا، لذلك نفرض أن

$$\lambda_1(x_1,0)+\lambda_2(x_2,0)+\cdots+\lambda_n(x_n,0)+\lambda_{n+1}(0,y_1)+\lambda_{n+2}(0,y_2)+\cdots+\lambda_{n+m}(0,y_m)=0_{E\times F}=(0_E,0_F)$$

وبالتالي:

$$(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n,\lambda_{n+1}y_1+\lambda_{n+2}y_2+\cdots+\lambda_{n+m}y_m)=(0_E,0_F)$$

فينتج أن

$$\begin{cases}\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=0_E\\ \lambda_{n+1}y_1+\lambda_{n+2}y_2+\cdots+\lambda_{n+m}y_m=0_F\end{cases}$$

ومنه

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda_{n+1}=\lambda_{n+2}=\cdots=\lambda_{n+m}=0$$

فالعائلة $\{(x_1,0),(x_2,0),\ldots,(x_n,0),(0,y_1),(0,y_2),\ldots,(0,y_m)\}$ أساسا لـ $E\times F$، عدد عناضرها $n+m$

معناه $\dim(E\times F)=n+m=\dim E+\dim F$.

تطبيق: نعتبر في $\mathbb{R}^3$ الأشعة التالية $v_1=(1,1,2)$، $v_2=(1,-1,0)$، $v_3=(0,0,-1)$، و الشعاع $u=(1,1,1)$.

1)– ما هي مركبات الشعاع u بالنسبة للأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$؟

2)– بيّن أن الأشعة v_1، v_2 و v_3 تُشكّل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

3)– أوجد مركبات الشعاع u بالنسبة لهذا الأساس الجديد.

الحل:

1)– الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$: $\{e_1,e_2,e_3\}$ حيث $e_1=(1,0,0)$، $e_2=(0,1,0)$، $e_3=(0,0,1)$.

و لدينا: $u=(1,1,1)=(1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,1)=1e_1+1e_2+1e_3$

فمركبات الشعاع u بالنسبة للأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ هي 1، 1، 1 على الترتيب.

2)– إثبات أن الأشعة v_1، v_2 و v_3 تُشكّل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$:

– الأشعة v_1، v_2 و v_3 تُولّد $\mathbb{R}^3$: لنبيّن أنّه من أجل كل شعاع $x=(x_1,x_2,x_3)$ من $\mathbb{R}^3$ توجد α، β، γ من $\mathbb{R}$ بحيث يكون $x=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3$.

ليكن $x=(x_1,x_2,x_3)$ من $\mathbb{R}^3$ بحيث يكون $x=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3$، وهي تُكافيء الجملة التالية:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=x_1\\ \alpha-\beta=x_2\\ 2\alpha-\gamma=x_3\end{cases}$$

و ينتج من هذه الأخيرة أنّ: $\alpha=\dfrac{x_1+x_2}{2}$، $\beta=\dfrac{x_1-x_2}{2}$، $\gamma=x_1+x_2-x_3$.

ومنه $\mathbb{R}^3=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$.

– الأشعة v_1، v_2 و v_3 مستقلة خطيا: فمن أجل كل α، β، γ من $\mathbb{R}$ بحيث يكون $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0$، والتي تُكافيء الجملة التالية:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=0\\ 2\alpha-\gamma=0\end{cases}$$

و ينتج من هذه الأخيرة أنّ: $\alpha=\beta=\gamma=0$

ومنه الأشعة v_1، v_2 و v_3 مستقلة خطيا.

إذن الأشعة v_1، v_2 و v_3 تُشكّل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

3)– إيجاد مركبات الشعاع u بالنسبة للأساس $\{v_1,v_2,v_3\}$: هناك طريقتين

–الطريقة الأولى: حسب الإجابة عن السؤال2 ، لدينا:

$$\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ x=\frac{x_1+x_2}{2}v_1+\frac{x_1-x_2}{2}v_2+(x_1+x_2-x_3)v_3$$

وبالتالي:

$$u=(1,1,1)=\frac{1+1}{2}v_1+\frac{1-1}{2}v_2+(1+1-1)v_3=1v_1+0v_2+1v_3$$

–الطريقة الثانية: لدينا من جهة $u=(1,1,1)=1e_1+1e_2+1e_3$

ومن جهة أخرى، نكتب أشعة الأساس القانوني بدلالة الأشعة v_1، v_2 و v_3.

لدينا:

$$\begin{aligned}v_1&=(1,1,2)=1e_1+1e_2+2e_3\\ v_2&=(1,-1,0)=1e_1-1e_2+0e_3\\ v_3&=(0,0,-1)=0e_1+0e_2-1e_3\end{aligned}$$

فنحصل على الجملة التالية:

$$\begin{cases}e_1+e_2+2e_3=v_1\\ e_1-e_2=v_2\\ -e_3=v_3\end{cases}$$

والتي تُكافيء:

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{v_1 + v_2 + 2v_3}{2} \\ e_2 = \dfrac{v_1 - v_2 + 2v_3}{2} \\ e_3 = -v_3 \end{cases}$$

ومنه $u = e_1 + e_2 + e_3 = 1v_1 + 0v_2 + 1v_3$

فمركبات الشعاع u بالنسبة للأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ هي 1، 0، 1 على الترتيب.

النتيجة: مركبات الشعاع u في $\mathbb{R}^3$ هي كالتالي:

- $u = (1,1,1)$ بالنسبة للأساس $\{e_1, e_2, e_3\}$
- $u = (1,0,1)$ بالنسبة للأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$.

تمارين للحل:

التمرين الأول:

بيّن أنّ مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ هي فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ بالنسبة لعملية الجمع في $\mathbb{C}$ ولعملية ضرب عددمركب بعدد حقيقي والمعرّفتين كمايلي:

$$(\alpha + \beta i) + (\alpha' + \beta' i) = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta')i$$
$$\lambda(\alpha + \beta i) = \lambda\alpha + \lambda\beta i$$

حيث α، β، α'، β'، λ أعداد حقيقية و $i^2 = -1$.

التمرين الثاني:

بيّن إن كانت كل مجموعة من المجموعات التالية فضاءا شعاعيا جزئيا من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$

يُطلب تعيين أساسا له وبُعده في حالة الإيجاب:

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad x + y + z = 0\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad x + y + z = 2020\}$$
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}.$$

التمرين الثالث:

في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$، أُكتب الشعاع $u = (1,2,4)$ على شكل مزج خطي للأشعة $v_1 = (1,2,0)$، $v_2 = (-1,1,3)$، $v_3 = (0,2,4)$.

التمرين الرابع:

في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^4$، ميّز في مجموعتي الأشعة التاليتين المرتبطة منها خطيا عن المستقلة خطيا:

$$E_1 = \{(1,2,1,2), (0,1,1,0), (1,4,3,2)\}$$
$$E_2 = \{(1,2,-1,1), (0,1,-1,2), (2,1,0,3), (1,1,0,0)\}$$

التمرين الخامس:

برهن أنّه إذاكانت الأشعة u، v، w من فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ مستقلة خطيا فإن الأشعة $u+v$، $u-v$، $u-2v+w$ مستقلة خطيا.

التمرين السادس:

من أجل كل عدد حقيقي x، نعتبر العددان المركبان التاليان:

$$u=(1-i)x+3i \quad \text{و} \quad v=ix-\frac{3}{2}(1+i) \quad \text{حيث} \quad i^2=-1$$

- بين أن u و v مستقلان خطيا على حقل الأعداد الحقيقية، ومرتبطان خطيا على حقل الأعداد المركبة.

التمرين السابع:

لتكن P_3 مجموعة كثيرات الحدود ذات الدرجة 3 على الحقل $\mathbb{R}$.

1) برهن أن P_3 فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$.

2) بين ما إذا كانت الأشعة الثلاثة التالية مستقلة خطيا:

$$t^3-3t^2+5t+1 \text{، } t^3-t^2+4t+2 \text{، } 2t^3-4t^2+9t+5$$

التمرين الثامن:

أثبت أن الأشعة $u=(1;1;1)$ ، $v=(1;2;3)$ و $w=(2;-1;1)$ تُشكّل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

التمرين التاسع:

ليكن F الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^4$ والمولّد بواسطة الأشعّة:

$$u=(2;1;3;1) \text{، } v=(1;2;0;1) \text{، } w=(-1;1;-3;0)$$

(أو بالكتابة $F=\langle u,v,w\rangle$)

1) – تحقق من أنّ $v=u+w$، وهل العائلة $B=\{u,v,w\}$ مستقلّة خطيا؟.

2) – عيّن أساسا لـ F وكذا بُعد F.

التمرين العاشر:

أوجد بُعد F الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^4$ والمعرف كمايلي:

$$F=\langle(1,2,1,0),(-1,1,-4,3),(2,3,3,-1),(0,1,-1,1)\rangle$$

التمرين الحادي عشر:

بيّن أنّ العائلة $B'=\{e_1',e_2',e_3'\}$ تُشكّل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$ علما أن $e_1'=e_1$، $e_2'=e_1+2e_2$، $e_3'=e_3$ مع كون العائلة $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ هي الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.

الفصل التاسع: التطبيقات الخطية

مقدّمة:بعد أن رأينا في الفصل السّابق مفهوم الفضاء الشعاعي لدراسة بُنية مجموعة ما مُزوّدة بعمليتين داخلية وخارجية يتم تعريفهما على عناصر هذه المجموعة كما تطرّقنا إلى بعض الخصائص للفضاءات الشعاعية كتشكيل الأساس ومن ثم معرفة بُعد الفضاء الشعاعي، سنهتم في هذا الفصل بالتطبيقات الخطية المُعرّفة على الفضاءات الشعاعية المُنتهية البُعد. فالتطبيق الخطي هو علاقة بين فضائين شعاعيين، في البداية نتعرّف على مفهومه ثُمّ التطرّق إلى نواة وصورة التطبيق الخطي مع إدراج بعض النظريات التي تُميّز هذين المفهومين، كما سنرى العمليات الجبرية على التطبيقات الخطية، ثُمّ التطرق إلى ميزة التطبيق الخطي إن كان متباينا، غامرا أو تقابلا وكيفية نقل أساس من فضاء شعاعي إلى آخر وفق هذه الميزة، مع معالجة في كلّ مرّة أمثلة وتطبيقات مُتنوعة لتوضيح هذه المعارف والمفاهيم.

فيما يلي نفرض أن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل K.

1.9 تعريف التطبيق الخطي: نقول عن التطبيق f من E نحو F أنّه خطي إذا تحقق مايلي:

أ- $\forall(x,y)\in E^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y)$

ب- $\forall\lambda\in\mathrm{K}, \forall x\in E,\ f(\lambda x)=\lambda f(x)$

ملاحظات:

- إنّ العبارتين في (أ) و (ب) تُكافئان العبارة التالية:

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathrm{K}^2, \forall(x,y)\in E^2,\ f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

بالفعل: من جهة، إذا تحققت العبارتين في (أ) و (ب) (حسب التعريف) فينتج:

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathrm{K}^2, \forall(x,y)\in E^2,\ f(\alpha x+\beta y)=f(\alpha x)+f(\beta y)$$
$$=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

ومن جهة أخرى (عكسيا)، ليكن f تطبيق من E نحو F يُحقق:

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathrm{K}^2, \forall(x,y)\in E^2,\ f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

بأخذ $\alpha=\beta=1$ نجد $f(x+y)=f(x)+f(y)$

و بأخذ $\beta=0$ نجد $f(\alpha x)=\alpha f(x)$ ، وبالتالي f تطبيق خطي.

- نرمز لمجموعة التطبيقات الخطية من E نحو F بالرمز $L(E,F)$.
- إذا كان f تطبيق خطي و تقابلي من E نحو F قُلنا أنّه تشاكل.

نتيجة: ليكن f تطبيق خطي من E نحو F، لدينا:

1)- $f(0_E)=0_F$

2)- $\forall x\in E,\ f(-x)=-f(x)$

البرهان:

1)- بوضع $\lambda=0_{\mathrm{K}}$ في العبارة (ب) من التعريف نجد

$$f\left(0_E\right)=f\left(0_{\mathrm{K}}x\right)=0_{\mathrm{K}}f\left(x\right)=0_F$$

2)− بوضع $\lambda=-1$ في العبارة (ب) من التعريف نجد

$$f\left(-x\right)=f\left(\left(-1\right)x\right)=\left(-1\right)f\left(x\right)=-f\left(x\right)$$

ملاحظة: إذا كان $f\left(0_E\right)\neq 0_F$ فإن f ليس تطبيق خطي.

أمثلة:

1)− ليكن a ثابت حقيقي، إن التطبيق f المُعرّف كما يلي:

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ & x\mapsto f\left(x\right)=ax \end{aligned}$$

هو تطبيق خطي.

بالفعل:

$$\begin{aligned} \forall\left(\alpha,\beta\right)\in\mathbb{R}^2,\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,\ f\left(\alpha x+\beta y\right) &= a\left(\alpha x+\beta y\right) \\ &= \alpha\left(ax\right)+\beta\left(ay\right) \\ &= \alpha f\left(x\right)+\beta f\left(y\right) \end{aligned}$$

2)− التطبيق f المُعرّف كما يلي:

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ & \left(x,y\right)\mapsto f\left(\left(x,y\right)\right)=x-y \end{aligned}$$

هو تطبيق خطي.

بالفعل:

$$\begin{aligned} \forall\left(\alpha,\beta\right)\in\mathbb{R}^2,\forall\left(\left(x,y\right),\left(x',y'\right)\right)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,\ f\left(\alpha\left(x,y\right)+\beta\left(x',y'\right)\right) &= f\left(\left(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y'\right)\right) \\ &= \alpha x+\beta x'-\alpha y-\beta y' \\ &= \alpha\left(x-y\right)+\beta\left(x'-y'\right) \\ &= \alpha f\left(\left(x,y\right)\right)+\beta f\left(\left(x',y'\right)\right) \end{aligned}$$

العمليات على التطبيقات الخطية:

E ، F و G فضاءات شعاعية على الحقل K.

1)− إذا كان f و g تطبيقان خطيان من E في F وكان λ عدد من K فإن $f+g$ و λf تطبيقان خطيان من E في F مُعرّفين كما يلي:

$$\forall x\in E,\ \left(f+g\right)\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)$$

$$\forall x\in E,\ \left(\lambda f\right)\left(x\right)=\lambda f\left(x\right)$$

2)− إذا كان f تطبيقا خطيا من E في F و g تطبيقا خطيا من F في G فإن $g\circ f$ تطبيقا خطيا من E في G.

3)− $\left(L\left(E,F\right),+,\cdot\right)$ فضاء شعاعي على الحقل K.

4)− إذا كان f تشاكل من E في F فإن f^{-1} تشاكل من F في E.

2.9 نواة و صورة تطبيق خطي:

ليكن f تطبيق خطي من E نحو F.

تعريف1: نُسمّي مجموعة الأشعة x من E حيث $f(x)=0$ بنواة التطبيق الخطي f و نرمز لها بالرمز $Kerf$، ونكتب:

$$Kerf=\{x\in E,\ f(x)=0_F\}=f^{-1}(\{0_F\})$$

تعريف2: نُسمّي مجموعة الأشعة $f(x)$ حيث $x\in E$ **(**وهي مجموعة جزئية من F**)** بصورة التطبيق الخطي f و نرمز لها بالرمز $\mathrm{Im}f$، ونكتب:

$$\mathrm{Im}f=\{y\in F,\exists x\in E:\ y=f(x)\}=f(E)$$

أمثلة تطبيقية:

1)− في المثال1 السابق، التطبيق الخطي f المعرف بـ:

$$\begin{aligned}f:\ &\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto f(x)=ax\end{aligned}$$

− إذا كان $a=0$ **(** f هو التطبيق المعدوم**)**، في هذه الحالة: $Kerf=\mathbb{R}$ و $\mathrm{Im}f=\{0\}$.

− إذا كان $a\neq 0$، في هذه الحالة: $Kerf=\{0\}$ و $\mathrm{Im}f=\mathbb{R}$.

2)− في المثال2 السابق، التطبيق الخطي f المعرف بـ:

$$\begin{aligned}f:\ &\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ &(x,y)\mapsto f((x,y))=x-y\end{aligned}$$

المطلوب: تعيين $Kerf$ و $\mathrm{Im}f$.

− تعيين $Kerf$:

$$\begin{aligned}Kerf&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x-y=0\}\\ &=\{(x,x)/\ x=y\}\\ &=\{x(1,1),\ x\in\mathbb{R}\}\\ &=\langle(1,1)\rangle\end{aligned}$$

(المُولّدة بالشعاع $(1,1)$**)**.

− تعيين $\mathrm{Im}f$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}f&=\{f((x,y))/\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\ &=\{(x-y)1/\ x-y\in\mathbb{R}\}\\ &=\langle 1\rangle\\ &=\mathbb{R}\end{aligned}$$

نظرية:

1)− $Kerf$ فضاء شعاعي جزئي من E.

2)− $\mathrm{Im}f$ فضاء شعاعي جزئي من F.

البرهان:

1)– نعلم أن $f\left(0_E\right)=0_F$، معناه $0_E \in Kerf$ ومنه $Kerf \neq \varnothing$.

– ومن أجل كل x و x' من $Kerf$ فإن $f\left(x+x'\right)=f\left(x\right)+f\left(x'\right)=0_F$ بمعنى $\left(x+x'\right)\in Kerf$.

– وكذلك من أجل كل x من $Kerf$ فإن $\forall \lambda \in \mathrm{K},\ f\left(\lambda x\right)=\lambda f\left(x\right)=0_F$ بمعنى $\lambda x \in Kerf$.

2)– نعلم أن $f\left(0_E\right)=0_F$، معناه $0_F \in \operatorname{Im} f$ ومنه $\operatorname{Im} f \neq \varnothing$.

– ومن أجل كل y و y' من F يوجد x و x' من E بحيث كل $y=f\left(x\right)$ و $y'=f\left(x'\right)$

ومنه $y+y'=f\left(x\right)+f\left(x'\right)=f\left(x+x'\right),\ x+x'\in E$ معناه $y+y'\in \operatorname{Im} f$

– وكذلك $\forall \lambda \in \mathrm{K},\ \lambda y=\lambda f\left(x\right)=f\left(\lambda x\right),\ \lambda x \in E$ معناه $\lambda y \in \operatorname{Im} f$.

تطبيق: ليكن f التطبيق المُعرّف كمايلي:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \left(x,y\right) &\mapsto f\left(\left(x,y\right)\right)=\left(2x-4y,x-2y\right) \end{aligned}$$

1)– بيّن أنّ f تطبيق خطي.

2)– عيّن $Kerf$ و $\operatorname{Im} f$.

الحل:

1)– لدينا من جهة

$$\begin{aligned} &\forall\left(\alpha,\beta\right)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\left(\left(x,y\right),\left(x',y'\right)\right)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2, \\ &f\left(\alpha\left(x,y\right)+\beta\left(x',y'\right)\right)=f\left(\left(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y'\right)\right) \\ &=\left(2\left(\alpha x+\beta x'\right)-4\left(\alpha y+\beta y'\right),\left(\alpha x+\beta x'\right)-2\left(\alpha y+\beta y'\right)\right) \\ &=\left(2\alpha x-4\alpha y+2\beta x'-4\beta y',\alpha x-2\alpha y+\beta x'-2\beta y'\right) \qquad \ldots(1) \end{aligned}$$

و من جهة أخرى:

$$\begin{aligned} \alpha f\left(\left(x,y\right)\right)+\beta f\left(\left(x',y'\right)\right)&=\alpha\left(2x-4y,x-2y\right)+\beta\left(2x'-4y',x'-2y'\right) \\ &=\left(2\alpha x-4\alpha y+2\beta x'-4\beta y',\alpha x-2\alpha y+\beta x'-2\beta y'\right) \qquad \ldots(2) \end{aligned}$$

من (1) و (2) ينتج أنّ f تطبيق خطي.

2)– تعيين $Kerf$:

$$Kerf=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,\ f\left(\left(x,y\right)\right)=\left(0,0\right)\right\}$$

ولدينا:

$$f\left(\left(x,y\right)\right)=\left(0,0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4y=0\\ x-2y=0\end{cases}$$

ومنه

$$f\left(\left(x,y\right)\right)=\left(0,0\right)\Leftrightarrow x-2y=0$$

بيانيا: هي إحداثيات نقط المستقيم ذو المعادلة $x-2y=0$.

ويكون لدينا

$$\begin{aligned} Kerf &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x-2y=0\right\} \\ &= \left\{(2y,y),\ y\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{y\,(2,1),\ y\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \left\langle(2,1)\right\rangle \end{aligned}$$

(المُولّدة بالشعاع $(2,1)$).

– تعيين $\mathrm{Im}f$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}f &= \left\{f\left((x,y)\right)/\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{(2x-4y,x-2y)/\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{(2x,x)+(-4y,-2y)/\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x\,(2,1)-2y\,(2,1)/\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{(x-2y)(2,1)/\ x-2y\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \left\langle(2,1)\right\rangle \end{aligned}$$

(المُولّدة بالشعاع $(2,1)$).

نظرية: ليكن f تطبيق خطي من E في F .

1)– $\left(\mathrm{Im}f=F\right)\Leftrightarrow\left(F\quad\right)$ مر

2)– $\left(Kerf=\{0_E\}\right)\Leftrightarrow\left(f\quad\right)$ تباين .

البرهان:

1)– إذا كان f تطبيق غامر فإن $F=(E)f$ أي $\mathrm{Im}f=F$ ، والعكس صحيح.

2)– ليكن f تطبيق متباين، وليكن $x\in Kerf$ أي $f(x)=0_F$.

بما أن f تطبيق خطي فإن $f(0_E)=0_F$ ، وبالتالي $f(x)=f(0_E)$ فينتج أن $x=0_E$ ، إذن $Kerf=\{0_E\}$.

–عكسيا: ليكن $Kerf=\{0_E\}$. فمن أجل كل x_1 و x_2 من E بحيث $f(x_1)=f(x_2)$ أي $f(x_1)-f(x_2)=0$ معناه $f(x_1-x_2)=0$ (لأن f تطبيق خطي)، فينتج أن $x_1-x_2=0_E$ أي $x_1=x_2$ فالتطبيق f متباين.

تطبيق: ليكن f التطبيق المُعرّف كمايلي:

$$\begin{aligned} &f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \\ &(x,y)\mapsto f\left((x,y)\right)=(x,x,y) \end{aligned}$$

1)– بيّن أنّ f تطبيق خطي.

2)– هل f متباين؟، وهل هو غامر؟ – برّر جوابك.

الحل:

1)− لدينا

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \forall((x,y),(x',y'))\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2, f(\alpha(x,y)+\beta(x',y'))=f(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y')$$
$$=(\alpha x+\beta x',\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y')$$
$$=(\alpha x,\alpha x,\alpha y)+(\beta x',\beta x',\beta y')$$
$$=\alpha f((x,y))+\beta f((x',y'))$$

ومنه f تطبيق خطي.

2)−حتى يكون f متباين يكفي أن نُبيّن أنّ $Kerf=\{0_{\mathbb{R}^2}\}=\{(0,0)\}$.

لدينا

$$Kerf=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / f((x,y))=0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x,x,y)=(0,0,0)\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x=0\wedge y=0\}$$
$$=\{(0,0)\}$$

إذن f تطبيق متباين.

− حتى يكون f غامر يجب أن يكون $\mathrm{Im}f=F$.

لكنّنا نلاحظ مثلا أنّ الشعاع $(1,2,3)$ من $\mathbb{R}^3$ و $(1,2,3)\notin\mathrm{Im}f$ (حيث أن كل شعاع من $\mathrm{Im}f$ هو من الشكل (x,x,y)) ومنه $\mathrm{Im}f\neq\mathbb{R}^3$، إذن f ليس غامر.

3.9 التطبيقات الخطية والفضاءات الشعاعية ذات البُعد المُنته:

فيما يلي نفرض أن E و F فضائين شعاعيين على الحقل $\mathbb{K}$ حيث $\dim E=n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

نظرية1: إذا كانت العائلة $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ أساسا لـ E و كانت $v_1,v_2,\dots,v_n$ أشعّة من E فإنّه يوجد تطبيق خطي وحيد f من E في F بحيث يكون $f(u_i)=v_i$ مع $1\le i\le n$.

البرهان: ليكن x و y شعاعان من E فيكون لدينا:

$x=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\dots+\lambda_nu_n$ و $y=\mu_1u_1+\mu_2u_2+\dots+\mu_nu_n$ حيث $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ ، $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n$ سلّميات من $\mathbb{K}$.

وليكن f تطبيق من E في F بحيث $f(x)=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_nv_n$.

−إنّ f تطبيق خطي، لأنّ

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2, \forall(x,y)\in E^2, f(\alpha x+\beta y)=f(\alpha\lambda_1u_1+\alpha\lambda_2u_2+\dots+\alpha\lambda_nu_n+\beta\mu_1u_1+\beta\mu_2u_2+\dots+\beta\mu_nu_n)$$
$$=f((\alpha\lambda_1+\beta\mu_1)u_1+(\alpha\lambda_2+\beta\mu_2)u_2+\dots+(\alpha\lambda_n+\beta\mu_n)u_n)$$
$$=(\alpha\lambda_1+\beta\mu_1)v_1+(\alpha\lambda_2+\beta\mu_2)v_2+\dots+(\alpha\lambda_n+\beta\mu_n)v_n$$
$$=\alpha\lambda_1v_1+\alpha\lambda_2v_2+\dots+\alpha\lambda_nv_n+\beta\mu_1v_1+\beta\mu_2v_2+\dots+\beta\mu_nv_n$$
$$=\alpha(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_nv_n)+\beta(\mu_1v_1+\mu_2v_2+\dots+\mu_nv_n)$$
$$=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

−لإثبات الوحدانية: نفرض g تطبيق خطي من E في F بحيث يكون $g(u_i)=v_i$ مع $1\le i\le n$.

من أجل x من E فيكون لدينا: $x=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_nu_n$ حيث $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ سلّميات من $\mathbb{K}$.

وبما أن g تطبيق خطي فإن:

$$\begin{aligned} g(x) &= \lambda_1 g(u_1)+\lambda_2 g(u_2)+\cdots+\lambda_n g(u_n) \\ &= \lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\cdots+\lambda_n v_n \\ &= f(x) \end{aligned}$$

فمن أجل كل x من E يكون $g(x)=f(x)$.

نظرية2: إذا كانت العائلة $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ أساسا لـ E و كانت $v_1,v_2,\ldots,v_n$ أشعّة من F وكان f تطبيق خطي من E في F بحيث يكون $f(u_i)=v_i$ مع $1\le i\le n$ فإن:

(1) يكون التطبيق f متباينا إذا وفقط إذا كانت الأشعة $v_1,v_2,\ldots,v_n$ مستقلّة خطيا.

(2) يكون التطبيق f غامرا إذا وفقط إذا كانت الأشعة $v_1,v_2,\ldots,v_n$ مولّدة لـ F.

(3) يكون التطبيق f تقابلا إذا وفقط إذا كانت العائلة $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ أساسا لـ F.

البرهان:

نعلم أن (3) هو نتيجة لـ (1) و (2)، فيكفي أن نُبرهن (1) و (2).

(1) من أجل كل شعاع x من E يكون $x=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_nu_n$ مع $f(x)=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_nv_n$.

–إذا كانت الأشعة $v_1,v_2,\ldots,v_n$ مستقلّة خطيا فإن:

$$\begin{aligned} x\in Kerf &\Rightarrow f(x)=0_F \\ &\Rightarrow \lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_nv_n=0_F \\ &\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0 \\ &\Rightarrow x=0_E \end{aligned}$$

ومنه $Kerf=\{0_E\}$ إذن التطبيق f متباين.

–لنفرض الآن التطبيق f متباين و ليكن $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_nv_n=0_F$

فينتج $f(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_nu_n)=0_F$.

وبما أن f متباين فإن $Kerf=\{0_E\}$، فبالتالي $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_nu_n=0_E$

ولمّا كانت العائلة $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ أساسا لـ E فإن $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ أي أن الأشعة $v_1,v_2,\ldots,v_n$ مستقلّة خطيا.

(2)– إذا كانت الأشعة $v_1,v_2,\ldots,v_n$ مولّدة لـ F، فكل شعاع y من F يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$y=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_nv_n$$

ومنه

$$y=f(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_nu_n)$$

معناه $y\in \mathrm{Im}f$ أي f غامر.

–إذا كان f غامر، فبفرض y من F يوجد x من E بحيث يكون $y=f(x)$.

ولمّا كان

$$x=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_nu_n$$

فيكون

$$y=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\cdots+\lambda_n v_n$$

معناه الأشعة $v_1,v_2,\ldots,v_n$ مولّدة لـ F.

يمكن صياغة الشطر (3) من النظرية السّابقة على الشكل التالي:

f تشاكل من E في F إذا وفقط إذا كانت صورة أساس في E بالتطبيق f أساس في F .

تطبيق: ليكن $\{e_1,e_2\}$ و $\{e_1',e_2',e_3'\}$ الأساسين القانونيين للفضائين الشعاعيين $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$ على الترتيب.

- عيّن التطبيق الخطي f من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}^3$ الذي يُحقّق $f(e_1)=2e_2'+e_3'$ و $f(e_2)=e_2'-e_1'$.

الحل:

نعلم أن: $e_1=(1,0)$، $e_2=(0,1)$، $e_1'=(1,0,0)$، $e_2'=(0,1,0)$، $e_3'=(0,0,1)$.

- من $f(e_1)=2e_2'+e_3'$ فإن $f(e_1)=(0,2,1)$.
- ومن $f(e_2)=e_2'-e_1'$ فإن $f(e_2)=(-1,1,0)$.

فمن أجل (x,y) من $\mathbb{R}^2$ وكون f تطبيق خطي، يكون لدينا:

$$\begin{aligned} f((x,y)) &= f(xe_1+ye_2)\\ &= xf(e_1)+yf(e_2)\\ &= x(0,2,1)+y(-1,1,0)\\ &= (-y,2x+y,x) \end{aligned}$$

وبالتالي التطبيق الخطي f مُعرّف كما يلي:

$$\begin{aligned} &f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\\ &(x,y)\mapsto f((x,y))=(-y,2x+y,x) \end{aligned}$$

رتبة تطبيق خطي:

فيما يلي نفرض أن E و F فضائين شعاعيين ببُعدين منتهيين على الحقل K، و f تطبيق خطي من E في F.

تعريف: نُسمّي بُعد $f(E)$ برتبة التطبيق الخطي f وندلّ عليها بالرمز $rg(f)$ و نكتب $rg(f)=\dim(\mathrm{Im}f)$.

نظرية: إذاكان f تطبيق خطي من E في F فإن:

$$\dim E=\dim Kerf+rg(f)$$

البرهان:

-إذا كان $Kerf=\{0_E\}$ فإن f متباين (حسب ما سبق)، وبالتالي التطبيق f يُصبح تقابلا من E في $f(E)$ ومنه: $\dim E=\dim f(E)=rg(f)$.

-إذا كان $Kerf\neq\{0_E\}$، لنفرض العائلة $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ أساسا لـ $Kerf$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$ و العائلة $\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$ أساسا لـ $f(E)$ حيث $p\in\mathbb{N}^*$، كما نفرض أنّ $u_{n+1},u_{n+2},\ldots,u_{n+p}$ أشعّة من E تُحقق $f(u_{n+i})=v_i$ من أجل $1\leq i\leq p$.

ثُمّ لنُبيّن أنّ العائلة $\{u_1,u_2,\ldots,u_n,u_{n+1},\ldots,u_{n+p}\}$ أساسا لـ E:

لأجل ذلك، نفرض أنّ $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_n u_n+\lambda_{n+1}u_{n+1}+\cdots+\lambda_{n+p}u_{n+p}=0 \quad \ldots(1)$

وبما أن f تطبيق خطي فإن $f\left(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_n u_n+\lambda_{n+1}u_{n+1}+\cdots+\lambda_{n+p}u_{n+p}\right)=0 \quad \ldots(2)$

وبما أن $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_n u_n$ شعاع من $Kerf$ فإن $f\left(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_n u_n\right)=0 \quad \ldots(3)$

من العلاقتين (2)، (3) و كون f تطبيق خطي فإن $\lambda_{n+1}v_1+\lambda_{n+2}v_2+\cdots+\lambda_{n+p}v_p=0$

و بما أن $\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$ أساسا لـ$f(E)$ فإن $\lambda_{n+1}=\lambda_{n+2}=\cdots=\lambda_{n+p}=0$

فتُصبح العلاقة (1) كما يلي: $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_n u_n=0$

وبما أن $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ أساسا لـ $Kerf$ فإن $\lambda_1=\lambda_2=\cdots+\lambda_n=0$

وبالتالي: إذا تحققت العلاقة (1) ينتج أنّ $\lambda_1=\lambda_2=\cdots+\lambda_n=\lambda_{n+1}=\lambda_{n+2}=\cdots=\lambda_{n+p}=0$

و هذا يعني أن الأشعّة $u_{n+p},\ldots,u_{n+1},u_n,\ldots,u_2,u_1$ مُستقلّة خطيا.

لنأخذ الآن شعاع كيفي x من E و لنفرض $y=f(x)$، و بما أن $\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$ أساسا لـ$f(E)$ فيمكن أن نكتب $y=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots+\alpha_p v_p$، وبفرض $x'=\alpha_1 u_{n+1}+\alpha_2 u_{n+2}+\cdots+\alpha_p u_{n+p}$ نجد $y=f(x')$، وبالتالي $f(x-x')=0$

وهذا يعني أن $x-x'\in Kerf$، فيُكتب الشعاع $x-x'$ على الشكل التالي: $x-x'=\beta_1 u_1+\beta_2 u_2+\cdots+\beta_n u_n$،

وهذا يُؤدّي إلى $x=\beta_1 u_1+\beta_2 u_2+\cdots+\beta_n u_n+\alpha_1 u_{n+1}+\alpha_2 u_{n+2}+\cdots+\alpha_p u_{n+p}$

و هذا يعني أن الأشعّة $u_{n+p},\ldots,u_{n+1},u_n,\ldots,u_2,u_1$ مُولّدة لـ E، فهي تُشكّل أساسا لـ E

ممّا يعني أنّ: $\dim E=\dim Kerf+\dim f(E)$

أي $\dim E=\dim Kerf+rg(f)$.

نتيجة: إذاكان f تطبيق خطي من E في F فإن:

- $(\dim E=rg(f))\Leftrightarrow($ f متباين$)$
- $(\dim F=rg(f))\Leftrightarrow($ f غامر$)$

بالفعل:

- ليكن f متباين، فهذا يُكافيء أن $Kerf=\{0_E\}$ أي $\dim Kerf=0$ ومنه $\dim E=rg(f)$.
- ليكن f غامر، فهذا يُكافيء أن $f(E)=F$ ومنه $\dim F=rg(f)$.

تطبيق1: نعتبر التطبيق f المُعرّف كما يلي:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
$$(x,y)\mapsto(3x-4y,x-y)$$

1)- بيّن أنّ f تطبيق خطي.

2)- عيّن $Kerf$ و $\mathrm{Im}f$، ثُمّ $rg(f)$.

الحل:

1)- إثبات أنّ f تطبيق خطي:

لدينا

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall((x,y),(x',y'))\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,$$

$$\begin{aligned}f(\alpha(x,y)+\beta(x',y'))&=f((\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y'))\\&=(3(\alpha x+\beta x')-4(\alpha y+\beta y'),(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y'))\\&=(\alpha(3x-4y)+\beta(3x'-4y'),\alpha(x-y)+\beta(x'-y'))\\&=\alpha(3x-4y,x-y)+\beta(3x'-4y',x'-y')\\&=\alpha f((x,y))+\beta f((x',y'))\end{aligned}$$

ومنه f تطبيق خطي.

2)- تعيين $Kerf$:

$$\begin{aligned}Kerf&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,f((x,y))=(0,0)\}\\&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x=y=0\}\\&=\{(0,0)\}\end{aligned}$$

- تعيين $\operatorname{Im}f$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}f&=\{f((x,y))\in\mathbb{R}^2\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\{(3x-4y,x-y)\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\{(3x,x)+(-4y,-y)\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\{x(3,1)-y(4,1)\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\langle(3,1),(4,1)\rangle\end{aligned}$$

-لدينا: $rg(f)=\dim\operatorname{Im}f=2$.

ملاحظة: لاحظ صحّة العلاقة $\dim\mathbb{R}^2=\dim Kerf+rg(f)$ حيث $\dim Kerf=0$.

تطبيق2: رأينا في تطبيق سابق، كيفية إنشاء التطبيق الخطي f المُعرّف كما يلي:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$
$$(x,y)\mapsto f((x,y))=(-y,2x+y,x)$$

و المطلوب الآن الإجابة عن السؤالين التاليين:

1)- بيّن أنّ $\operatorname{Im}f$ مستوي شعاعي يُطلب تعيين معادلة ديكارتية له.

2)- هل f متباين؟، علّل.

الحل:

1)- نُعيّن $\operatorname{Im}f$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \{f((x,y)) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(-y, 2x+y, x) / (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(0,2x,x)+(-y,y,0) / (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(0,2,1) - y(-1,1,0) / (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \langle (0,2,1), (-1,1,0) \rangle\end{aligned}$$

و بالتالي يكون لدينا: $\dim \operatorname{Im} f = 2$

إذن $\operatorname{Im} f$ مستوي شعاعي.

–تعيين المعادلة الديكارتية للمستوي الشعاعي $\operatorname{Im} f$:

نضع (X, Y, Z) $f((x,y)) = (X, Y, Z)$، فيُصبح $(X, Y, Z) = (-y, 2x+y, x)$

معناه

$$\begin{cases} X = -y \\ Y = 2x + y \\ Z = x \end{cases}$$

و التي يُمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$\begin{cases} X = -y \\ Y = 2x + y \\ -2Z = -2x \end{cases}$$

و بجمع هذه المعادلات طرفا لطرف نجد:

$$X + Y - 2Z = 0$$

وهي تُمثّل المعادلة الديكارتية للمستوي الشعاعي $\operatorname{Im} f$.

2)– لمعرفة إن كان التطبيق f متباينا أم لا، هناك طريقتين على الأقل.

الطريقة الأولى: نستعمل نظرية البُعد ($\dim E = \dim Kerf + rg(f)$).

لدينا في هذه الحالة: $\dim \mathbb{R}^2 = \dim Kerf + rg(f)$ ومنه $\dim Kerf = \dim \mathbb{R}^2 - rg(f)$

أي $\dim Kerf = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{Im} f$ و بالتالي $\dim Kerf = 0$، فالتطبيق f متباين.

الطريقة الثانية: بتعيين $Kerf$.

يُمكن التأكد في هذه الحالة أن: $Kerf = \{(0,0)\}$، فالتطبيق f متباين.

تمارين للحل:

التمرين الأول:

نعتبر التطبيقين f و g المعرفين كما يلي:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad\qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto (2x+y, x+y) \quad ، \quad (x,y) \mapsto (x-y, 0)$$

1) بيّن أنّ التطبيقين f و g خطيّين.

2) عيّن كل من التطبيقين $2f$، $(f \circ g) + f^3 + 3g$ حيث $f^3 = f \circ f \circ f$.

3) جد نواة وصورة كل تطبيق من التطبيقين الخطيين f و g، معيّنا بُعد كل منها.
4) أي من التطبيقين f و g تشاكل من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}^2$؟، علّل.

التمرين الثاني:

نعتبر التطبيق f من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ المعرّف كمايلي:

$$f((x,y,z))=(-x+y+z\ ,x-y+z)$$

و التطبيق g من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}^3$ المعرّف كمايلي:

$$g((x,y))=(y\ ,x\ ,x+y)$$

1) بيّن أنّ التطبيقين f و g خطيّين.
2) عيّن $Kerf$ ، $\operatorname{Im} f$ ، $Kerg$ و $\operatorname{Im} g$ مع تعيين أبعادها.
3) عيّن $g \circ f$ و $f \circ g$.

التمرين الثالث:

نعتبر التطبيق f من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{C}$ (مجموعة الأعداد المركبة) المعرّف كمايلي:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f((x,y))=x+iy$$

1) بيّن أنّ f تطبيق خطي.
2) – عيّن $Kerf$ ، $\operatorname{Im} f$ ، وهل أنّ f تقابل؟.
 – تحقق من أن: $\dim\mathbb{R}^2=\dim Kerf+rg(f)$
3) إذا كان $\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ الأساس القانوني في $\mathbb{R}^2$، فأوجد أساسا في $\mathbb{C}$.

التمرين الرابع:

ليكن f تطبيقا خطيا كيفيا من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$، ولنعتبر التطبيق g المعرّف من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}^2$ كمايلي:

$$g((x,y))=(x\ ,\ y-f(x))$$

1) أثبت أنّ التطبيق g خطي، ثمّ عين $Kerg$ و $\operatorname{Im} g$.
2) هل g تقابلي ؟ – إذا كان الجواب بنعم عيّن g^{-1}.

التمرين الخامس:

لتكن العائلة $\{e_1,e_2,e_3\}$ أساسا لـ $\mathbb{R}^3$ ولنعتبر الأشعّة e_1'، e_2'، e_3' من $\mathbb{R}^3$ حيث:

$$e_1'=e_1\ ،\ e_2'=e_1+2e_2\ \text{و}\ e_3'=2e_2+3e_3$$

1) أثبت أنّ العائلة $\{e_1',e_2',e_3'\}$ أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.
2) ليكن f التطبيق الخطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ والمعرّف بــ:

$$f(e_1)=e_1'\ ،\ f(e_2)=e_2'\ \text{و}\ f(e_3)=e_3'$$

أ– هل أنّ التطبيق f تقابلي ؟ علّل.
ب– إذا كان الأساس $\{e_1,e_2,e_3\}$ هو الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$، فعيّن عبارة التطبيق الخطي f.

التمرين السادس:

لتكن العائلة $\{e_1, e_2, e_3\}$ هي الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$، وليكن f التطبيق الخطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ حيث

$f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3$ ، $f(e_2) = -e_1 + 2e_2 + e_3$ و $f(e_3) = 2e_1 - e_2 + e_3$

1) عيّن عبارة التطبيق الخطي f، وماهي رتبته؟.

2) استنتج بُعد $Kerf$، ثُمّ أوجد $Kerf$.

التمرين السابع:

ليكن f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ والمعرّف كما يلي:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f((x, y, z)) = (x + y, x + z, x - z)$$

1) احسب $f(e_1)$ ، $f(e_2)$ و $f(e_3)$ حيث $\{e_1, e_2, e_3\}$ هي الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.

2) أ- أثبت أن الأشعة $f(e_1)$ ، $f(e_2)$ ، $f(e_3)$ مستقلة خطيا.

ب- عيّن $\mathrm{Im}f$.

ج- هل f تقابل؟، علّل.

3) عيّن التطبيق $f^2 = f \circ f$، وتحقق أنه خطي.

التمرين الثامن:

1) أثبت أن الأشعة التالية تُشكل أساسا لــ $\mathbb{R}^3$:

$u_1 = (1, -2, 0)$ ، $u_2 = (1, -3, 0)$ ، $u_3 = (0, 0, 1)$

2) ليكن f التطبيق الخطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ المعرّف كما يلي:

$f(e_1) = (1, -2, 0)$ ، $f(e_2) = (0, -1, -1)$ ، $f(e_3) = (2, 1, 3)$

أ- احسب كل من $f(u_1)$ ، $f(u_2)$ ، $f(u_3)$.

ب- عيّن عبارة التطبيق الخطي f، واستنتج أساسا لــ$f(\mathbb{R}^3)$ و رتبة التطبيق f.

ج- عيّن $Kerf$.

التمرين التاسع:

ليكن f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}^3$.

باستعمال الأساسين القانونين في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$، أوجد عبارة التطبيق الخطي f بحيث يكون:

$f((1, -1)) = (-1, -2, 5)$ ، $f((2, -3)) = (0, 5, 4)$

التمرين العاشر:

ليكن E فضاءا شعاعيا على حقل K، وليكن f و g تطبيان خطيان من E في E.

أثبت أنّ $f(Ker(g \circ f)) = Kerg \cap \mathrm{Im}f$.

المراجع

(Livres et polycopiés, sites internet, etc...)

1)- K. ALLAB, éléments d'analyse (Fonction d'une variable réelle). OPU Alger, (1986).

2)- C. ASLANGUL, Des mathématiques pour les sciences2. Corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes, De Boeck, Bruxelles (2013).

3)- C. BABA HAMED, Algèbre I : rappels de cours et exercices avec solutions, OPU (1992).

4)- C. BABA HAMED, K. BENHABIB, Analyse I : rappels de cours et exercices avec solutions, OPU (1985).

5)- Elie BELORIZKY, Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et des ingénieurs, EDP Sciences, Paris, (2007).

6)- G. CHRISTOL, Algèbre I : ensembles fondamentaux arithmétique polynômes, Ellipses Paris, (1995).

7)- F. COTTET-EMARD, Analyse: tome I cours et exercices corrigés, De Boeck, Bruxelles (2005).

8)- J.M. Monier, Algèbre I : cours et 600 exercices corrigés, 2ème Ed., Dunod Paris (2000).

9)- P. PHILIBOSSIAN, Analyse: rappels de cours, exercises et problèmes résolus, Dunod Paris (1998).

10)- http://www. les-mathématiques.net.