الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الإخوة منتوري قسنطينة

تمارين

رياضيات 1

- مصطلحات
- تعاريف رياضية
- تمارين محلولة
- تمارين مقترحة

ركاب صورية

بوشقوف مسعودة

عرعار نورية

السنة الجامعية : 2016-2017

الفهـــــــــــــــــــــرس

rekkabsoraya@yahoo.fr

مدخـــــــــــــل

لماذا نحل التمارين؟

إذا وجهنا هذا السؤال إلى أحد الطلبة، سوف تكون الإجابة الأكثر توقعا هي: حتى أتمكن من النجاح في الامتحان ! وبالرغم من مشروعية هذه الإجابة إلا أنه يمكن سرد ثلاثة أجوبة جوهرية تبرر سبب احتلال عملية "حل التمارين" مكانة هامة في تدريس العلوم.

- بداية يمكننا التفكير في ميدان العمل: لدى الباحث أو المهندس أو التقني عموما مسائل للحل، لكنها في أغلب الأحيان تكون بعيدة كل البعد عن التمارين المقترحة خلال الدرس والتي تتضمن عموما كل المعلومات الضرورية لحلها، فهي بسيطة ونظرية بحتة.
- كما يؤدي حل التمارين إلى تفعيل المعلومات التي تسهل وتيرة الاستيعاب، فالغوص في التمرين هو طريقة فعالة لتعميق المفاهيم المدروسة والاستيعاب الجيد للدرس.
- أخيرا نؤكد بأن قيمة التكوين مرفقة بحل التمارين تتعدى هدف استيعاب المادة المدروسة إلى اكتساب فطانة الذهن ومنهجية التفكير السليم أي اتقان التعامل مع مختلف المسائل الميدانية، كذلك التحليل السلس للمعطيات والتفكير الدقيق والموجه وتحديد الهدف بطريقة مضبوطة وفعالة ثم تقييم النتائج المتحصل عليها، وهي مكتسبات هامة وضرورية للعديد من المجالات المتنوعة من الحياة العملية وكذا الحياة اليومية، تكسبك المهارة اللازمة لمواجهة مختلف التحديات.

كيف نحل التمارين ؟

للأسف لا توجد إجابة فورية بسيطة ومباشرة لهذا السؤال. ورغم ذلك يمكننا تعريف بعض الطرق وإتباع بعض النصائح التي تمكننا من التعامل مع المسألة المطروحة:

عند قراءة نص التمرين يتبادر إلى الذهن سؤال: عن ماذا أبحث ؟ أو ما هو المطلوب؟

- اقرأ نص التمرين كليا بروية وتمعن.
- توقف عند كل مصطلح وعرفه بعبارته الرياضية.
- استحضر كل الخواص ومختلف العلاقات الرياضية الخاصة به.
- حدد المعطيات أو الفرضيات بأسلوب مختصر.

rekkabsoraya@yahoo.fr

- حدد المطلوب بدقة واجعله عالقا بذهنك طوال مدة البحث عنه.
- ضع هيكلا مبسطا للتمرين.
- ابحث عن العامل أو العوامل المشتركة بين ما لديك من الفرضيات وما تبحث عنه من مطلوب والتي يمكنك من خلالها بناء الحل المرجو.

أنت الآن جاهز للتعامل مع هذه المطبوعة الخاصة بالتمارين المكملة لدراسة مبادئ الرياضيات والتي على المهندس معرفتها ليتمكن من خوض مختلف مجالات العلوم.
فصول المطبوعة مدونة بنفس ترتيبها في مطبوعة "دروس رياضيات1"، وهما مطابقان للمنهاج المقرر من طرف وزارة التعليم العالي والبحث العلمي. كما ابتدأنا كل فصل بمختلف المصطلحات الواردة فيه باللغات: العربية و الفرنسية والانجليزية وكذا الرمز أو التعريف الرياضي حتى يتسنى لك العودة لها كلما احتجت لذلك.
معظم التمارين الموجودة بين يديك منتقاة من مختلف الامتحانات التي قدمت لطلبة السنة الأولى من قسمي علوم وتكنولوجيا وهندسة النقل لجامعة الإخوة منتوري بقسنطينة خلال الفترة الممتدة من بداية تطبيق نظام ل.م.د سنة 2006- 2007 إلى غاية سنة 2015- 2016 من طرف الأساتذة بوشقوف مسعودة، عرعار نورية وركاب صورية.
وقد اعتمدت المطبوعة من طرف اللجنة العلمية لقسم الرياضيات وكذا المجلس العلمي لكلية العلوم الدقيقة لجامعة الإخوة منتوري بقسنطينة، بعد اخضاعها للمراجعة من طرف الخبيرين: الأستاذ علي حميدة والأستاذ عبد الوهاب راس العين، حيث لا يسعنا إلا اسداء الشكر الجزيل لهما نظير النصائح القيمة والتصحيحات المقترحة.

وأخيرا، وإذ نقدم هذه المطبوعة فإننا نقبل النقد والملاحظات والإرشادات الصادقة، ولذلك نكون شاكرين لو أرسلت هذه الارشادات إلينا حتى يمكننا مستقبلا تلافي أي خطأ نكون قد وقعنا فيه.

الأستاذة: ص. ركاب

rekkabsoraya@yahoo.fr

الفصل الأول:

مبادئ المنطق وطرق البرهان الرياضي

مصطلحات رياضية

رمزه	المصطلح		
	انجليزي	فرنسي	عربي
	Logic	Logique	منطق
$p, q, \ldots$	Statement	Proposition ou assertion	قضية
$\bar{p}, \bar{q}, \ldots$	Negation of statement	Négation d'une assertion	نفي قضية
	Logical connector	Connecteurs logique	أدوات الربط المنطقية
$\wedge$	Conjunction	Conjonction	وصل
$p \wedge q$	p and q	p et q	p و q
$\vee$	Disjunction	Disjonction	فصل
$p \wedge q$	p or q	p ou q	p أو q
$\Rightarrow$	Implication	Implication	استلزام
$p \Rightarrow q$	p imlic q if p then q	p implique q si p alors q	p يستلزم q إذا p فإن q
$\Leftrightarrow$	Equivalence	Equivalence	تكافؤ
$p \Leftrightarrow q$	p imlic q p if q	p equivaut à q p si et seulement si q	p تكافؤ q p إذا q
	Quantifiers	Quantificateurs	مكممات
$\forall$	For every	Quelque soit	مهما يكن
$\exists$	There exixts	Il existe au moins	يوجد على الأقل
$\exists!$	There exixts a unique	Il existe un seul	يوجد وهو وحيد

rekkabsoraya@yahoo.fr

	Methods of proofs	Methodes de raisonnements	طرق البرهان
	Direct proof	Raisonnement directe	برهان المباشر
	Proof by contradiction	Raisonnement par l'absurde	برهان بالتناقض
	Proof by contraposition	Raisonnemnt par contraposition	برهان بعكس النقيض
	Proof by induction	Raisonnement par récurence	برهان بالتراجع
	Proof by counterexample	Raisonnement par contre exemple	برهان بمثال مضاد

$$\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \left(\overline{P} \vee \overline{Q}\right)$$

$$\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \left(\overline{P} \wedge \overline{Q}\right)$$

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{P} \vee Q\right)$$

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$$

$$\overline{(\exists x \in A, P(x))} \Leftrightarrow \left(\forall x \in A, \overline{P}(x)\right)$$

$$\overline{(\forall x \in A, P(x))} \Leftrightarrow \left(\exists x \in A, \overline{P}(x)\right)$$

$$\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow \left(P \wedge \overline{Q}\right)$$

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

تمارين محلولة

التمرين الأول

برهن باستعمال البرهان المباشر على صحة القضايا التالية :

أ) من أجل كل n ينتمي إلى ZI فان $16n^2-48n+33$ ينتمي إلى IN .

ب) من أجل كل x ينتمي إلى Q_+^* فانه يوجد n ينتمي إلى IN حيث $n>x$.

ت) $r+2r+\cdots+nr=\dfrac{n(n+1)r}{2}$

التمرين الثاني

برهن باستعمال البرهان بالتناقض على صحة القضليا التالية:

أ) $\forall\varepsilon>0,\quad |a-b|<\varepsilon\Rightarrow a=b$

ب) من أجل كل عددين حقيقيين a و b إذا كان $\dfrac{b}{1+a}=\dfrac{a}{1+b}$ فان $a=b$.

ت) $\dfrac{1}{n^2}\leq\dfrac{3}{n(n+1)}$, $\forall n\in IN^*$.

التمرين الثالث

برهن باستعمال البرهان بعكس النقيض على صحة القضيتين التاليتين:

أ) من أجل كل عددين حقيقيين a و b إذا كان $a\neq b$ فان $\sqrt{a}\neq\sqrt{b}$.

ب) ليكن $n\in IN$. برهن أنه إذا كان n^2 عدد زوجي فان n عدد زوجي.

التمرين الرابع

برهن باستعمال البرهان بالتراجع على صحة القضيتين التاليتين:

أ) من أجل كل $n\in IN$ فان $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان $2^n>n$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

التمرين الخامس

برهن بمثال مضاد على خطأ القضايا التالية:

أ) $\forall x, y \in IN: \quad x + y - xy \in IN$.

ب) $\forall x \in IR; \quad \sqrt{x^2} = x$.

ت) برهن أن ($\forall x \in IR, \ x^2 - 1 \neq 0$) قضية خاطئة.

rekkabsoraya@yahoo.fr

حلول التمارين

التمرين الأول

أ) ليكن $n \in ZI$ بما أن جداء ومجموع وفرق أعداد نسبية صحيحة (أي تنتمي إلى ZI) هي أعداد نسبية صحيحة نستنتج أن $16n^2 - 48n + 33$ هو عدد نسبي.

من جهة أخرى لدينا:

$$16n^2 - 48n + 33 = 4(2n-3)^2 - 3$$

ونلاحظ أن $2n-3 \in ZI^*$ إذن $2n-3 \geq 1$ أو $2n-3 \leq -1$ أي $|2n-3| \geq 1$ إذن $(2n-3)^2 \geq 1$ ومنه لدينا

$$4(2n-3)^2 - 3 \geq 4 - 3 = 1$$

أي $16n^2 - 48n + 33 \in IN$.

ب) ليكن $x \in Q_+^*$ فانه يوجد $p \in IN^*$ و $q \in IN^*$ بحيث $x = \frac{p}{q}$ بما أن q عدد صحيح موجب تماما $q \geq 1$ إذن $p = xq \geq x$ ومن جهة أخرى لدينا $2p > p \geq x$ يكفي اختيار $n = 2p$ حتى يتحقق المطلوب.

ت) نضع $S = r + 2r + \cdots + (n-2)r + (n-1)r + nr$

وبما أن الجمع عملية تبديلية وتجميعية يمكننا تغيير ترتيب الحدود كالتالي

$$S = nr + (n-1)r + (n-2)r + \cdots + 2r + r$$

ومنه بجمع العبارتين حدا حدا، نحصل على الصيغة $2S = n(n+1)r$ أي $S = \frac{n(n+1)r}{2}$.

التمرين الثاني

أ) نفرض بالتناقض أن $(\forall \varepsilon > 0, \quad |a-b| < \varepsilon \wedge a \neq b)$ صحيحة. إذن و بما أن $a \neq b$ فإن $\frac{|a-b|}{2} > 0$ ومنه باختيار $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$ نجد $|a-b| < \frac{|a-b|}{2}$ وبقسمة طرفي المتراجحة على

rekkabsoraya@yahoo.fr

$|a-b|$ نجد $1<\frac{1}{2}$ و هذا تناقض. أي $(\forall \varepsilon>0, \quad |a-b|<\varepsilon \Rightarrow a=b)$

ب) نفرض بالتناقض أنه يوجد عددان حقيقيان a و b حيث $\frac{b}{1+a}=\frac{a}{1+b}$ و $a\neq b$.

بما أن $\frac{b}{1+a}=\frac{a}{1+b}$ فان $a(1+a)=b(1+b)$ إذن $a+a^2=b+b^2$ ومنه

$a^2-b^2=b-a$ و هذا يؤدي إلى $(a-b)(a+b)=-(a-b)$.

وبما أن $a\neq b$ فان $a-b\neq 0$ وبالقسمة على $a-b$ نجد $a+b=-1$ ولكن مجموع عددين موجبين ليس سالبا لقد تحصلنا إذن على تناقض.

ومنه نستنتج أنه من أجل كل عددين حقيقيين a و b اذا كان $\frac{b}{1+a}=\frac{a}{1+b}$ فان $a=b$.

ت) نفرضها خاطئة أي أنه يوجد n_0 ينتمي الى IN^* حيث $\frac{3}{n_0(n_0+1)}>\frac{1}{{n_0}^2}$ ومنه

ث) ${n_0}^2+n_0>3{n_0}^2 \Leftrightarrow 2{n_0}^2<n_0 \Leftrightarrow 2n_0<1 \Leftrightarrow n_0<\frac{1}{2}$

و هذا يتناقض مع الفرض n_0 ينتمي الى IN^*.

إذن القضية المعطاة صحيحة.

التمرين الثالث

أ) ليكن a و b عددان حقيقيان موجبان نفرض أن $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ و بتربيع الطرفين نجد $(\sqrt{a})^2=(\sqrt{b})^2$ أي $a=b$. ومنه اذا كان $a\neq b$ فان $\sqrt{a}\neq\sqrt{b}$.

ب) نفرض أن n عدد فردي ونبرهن أن n^2 عدد فردي.

n عدد فردي يعني أنه يوجد عدد $k\in IN$ حيث $n=2k+1$ ومنه

$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2l+1$

مع $l=2k^2+2k\in IN$ أي n^2 عدد فردي.

التمرين الرابع

أ) لنبرهن أنه من أجل كل $n\in IN^*$ فان $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

- المرحلة الأولى:

من أجل $n=1$ فان الطرف الأيسر للمساواة $1^3=1$ و أما الطرف الأيمن للمساواة $1=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$

ومنه المساواة محققة.

- المرحلة الثانية:

ليكن $k \in IN^*$. نفرض أن المساواة محققة من أجل k أي

$$1^3+2^3+\ldots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

ونبرهن صحتها من أجل $k+1$ أي

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

من الفرض

$$\begin{aligned}1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3&=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3\\&=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3\\&=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}\\&=\frac{(k+1)^2\left(k^2+4k+4\right)}{4}\\&=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\\&=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

و هو المطلوب.

ومن المرحلتين نستنتج أنه من أجل كل $n \in IN$ فان $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

ب) لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان $2^n>n$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

- المرحلة الأولى:

من أجل $n_0 = 0$ لدينا $2^0 = 1 > 0$.

- المرحلة الثانية:

نثبت $n \geq 0$ ثم نفرض أن $2^n > n$ و نبرهن أن $2^{n+1} > n+1$. لدينا

$$2^{n+1} = 2^n.2 = 2^n + 2^n > n + 2^n \geq n+1$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فان $2^n > n$.

التمرين الخامس

أ) يكفي اختيار $x = 3$ و $x = 4$ فنجد $x + y - xy = 3 + 4 - 12 = -5 \notin IN$

ومنه $\forall x, y \in IN : \quad x + y - xy \in IN$ خاطئة.

ب) يكفي اختيار $x = -2$ ومنه $x^2 = 4$ فو نجد $\sqrt{x^2} = \sqrt{4} = 2 \neq x = -2$

ومنه $\forall x \in IR ; \quad \sqrt{x^2} = x$ خاطئة.

rekkabsoraya@yahoo.fr

تمارين مقترحة

التمرين الأول

برهن باستعمال البرهان المباشر على صحة القضيتين التاليتين:

أ) من أجل كل عدد حقيقي $r \neq 1$ فان $1+r+r^2+\cdots+r^n=\frac{\left(1-r^{n+1}\right)}{1-r}$.

ب) من أجل كل عددين حقيقيين a و b اذا كان $a>b>0$ فان $a>\frac{a+b}{2}>b$ و $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.

التمرين الثاني

برهن باستعمال البرهان بالتناقض على صحة القضايا التالية:

أ) $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي.

ب) من أجل كل عددين حقيقيين a و b فان $a^2+b^2 \geq 2ab$.

ت) من أجل كل $n \in IN^*$ فان $\sqrt{n^2+1}$ ليس عددا طبيعيا.

التمرين الثالث

برهن باستعمال البرهان بعكس النقيض على صحة القضية التالية:

$$\forall x, y \in IR; \quad x \neq y \Rightarrow \frac{x}{1+x} \neq \frac{y}{1+y}$$

التمرين الرابع

برهن باستعمال البرهان بالتراجع على صحة القضيتين التاليتين:

أ) من أجل كل $n \in IN^*$ فان $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

ب) من أجل كل $n \in IN^*$ فان $(1+a)^n = 1+na$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما.

rekkabsoraya@yahoo.fr

التمرين الخامس

برهن باستعمال البرهان بمثال مضاد على خطأ القضيتين التاليتين:

أ) $\forall x \in IR; \quad x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$.

ب) $\forall x \in IR; \quad \frac{x}{x} = 1$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

الفصل الثاني:

المجموعات

العلاقات والتطبيقات

مصطلحات رموز وتعاريف رياضية

عربي	فرنسي	انجليزي	رمزه أو تعريفه
المصطلح			
مجموعة	Ensemble	Set	$A, B, \ldots$
عنصر	Elément	Element	$x, y, \ldots$
إنتماء	Appartenance	Belonging	$\in$
x ينتمي إلى A	x appartient à A	x belongs in A	$x \in A$
مجموعة خالية	Ensemble vide	Empty set	ϕ
إحتواء	Inclusion	Inclusion	$\subset$
B جزء من A	B est une partie de A	B is a part of A	$B \subset A$ $(B \subset A) \Leftrightarrow (\forall x : x \in B \Rightarrow x \in A)$
مجموعة أجزاء مجموعة	Ensemble des parties	Power set	$P(A)$ $P(A) = \{X / X \subset A\}$
مساواة	Egalité	Equality	$=$
A تساوي B	A est égale à B	A equal B	$A = B$ $(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$
تقاطع	Intersection	Intersection	$\bigcap$
A تقاطع B	A inter B	Intersection	$A \bigcap B$ $A \bigcap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$
إتحاد	Union	Union	$A \bigcup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$
فرق	Différence	Difference	$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

rekkabsoraya@yahoo.fr

$C_{\mathrm{E}}^{\mathrm{A}} = \{x / x \in \mathrm{E} \wedge x \notin \mathrm{A}\}$	Complement	Complément	متممة
$\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = \{x / (x \in \mathrm{A} \wedge x \notin \mathrm{B}) \vee (x \in \mathrm{B} \wedge x \notin \mathrm{A})\}$	Symmetric difference	Différence symétrique	فرق التناظري
$\mathrm{A}\times\mathrm{B} = \{(x, y) / x \in \mathrm{A} \wedge y \in \mathrm{B}\}$	Cartesian product	Produit cartesien	الجداء الديكارتي
$\Re, S, \ldots$	Binary relation	Relation binaire	العلاقة الثنائية
$(\forall x \in \mathrm{A} : x \Re x)$	reflexivity	réflexive	انعكاسية
$(\forall x, y \in \mathrm{A} : x \Re y \Rightarrow y \Re x)$	Symmetric	Symétrique	تناظرية
$(\forall x, y \in A : x \Re y \wedge y \Re x \Rightarrow x = y)$	antisymmetry	Antisymétrique	ضد تناظرية
$(\forall x, y, z \in \mathrm{A} : x \Re y \wedge y \Re z \Rightarrow x \Re z)$	Transitivity	Transitive	متعدية
	Equivalence relation	Relation d'equivalence	علاقة تكافؤ
	Order relation	Relation d'ordre	علاقة ترتيب
$f : E \to F$, $x \mapsto y = f(x)$, $\forall x \in E, \exists! y \in F / f(x) = y$	Map	Application	تطبيق
y	Image or range	Image	صورة
x	Preimage	Antécédent	سابقة
$G = \{(x, y) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B} / y = f(x)\}$	Graph	Graphe	بيان
$f(A) = \{f(x) / \ x \in A\}$	Image of a subset	Image directe	صورة مباشرة

rekkabsoraya@yahoo.fr

$f^{-1}(B)=\{x\in E \ / \ f(x)\in B\}$	Inverse image	Image réciproque	صورة عكسية
$f+g:\ E\to F$ $x\mapsto (f+g)(x)=f(x)+g(x)$	Addition	Addition	جمع
$f.g: E\to F$ $x\mapsto (f.g)(x)=f(x).\,g(x)$	Product	Produit	ضرب
$g\,o\,f: E\to G$ $x\mapsto (g\,o\,f)(x)=g(f(x))$	Composite	Composition	تركيب
$(\forall y\in B, \exists x\in A: y=f(x))$	Surjective	Surjective	غامر
$\forall\, x_1, x_2\in A: f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$ $x_1=x_2$	Injective	Injective	متباين
	bijective	bijective	تقابلي
$f^{-1}: F\to E$ $y\mapsto f^{-1}(y)=x$	Inverse map	Application inverse	تطبيق عكسي

rekkabsoraya@yahoo.fr

تمارين محلولة

التمرين الأول

هل القضايا التالية صحيحة ؟ علل كل إجابة.

1) $\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

2) $\{1,2,3\} \cup \{\Phi\} = \{1,2,3\}$.

3) التطبيق f المعرف بالشكل $f : IN \to IR$ ، حيث $f(x) = x+2$ هو تطبيق غامر.

التمرين الثاني

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل.

1) $\{1\} \cup \{1\} = \{(1,1)\}$

2) $\{1\} - \{1\} = \{0\}$

3) $\{2\} \times \{5\} = \{10\}$

4) $\{\ \} \in \{\{\ \}\}$

5) $\phi \subset \{\phi\}$

التمرين الثالث

نعرف على IR العلاقة S بالشكل: $(\forall x, y \in IR : x\,S\,y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 0)$

هل S انعكاسية ؟ تناظرية ؟ ضد تناظرية ؟ متعدية ؟ تكافؤ ؟ ترتيب ؟

التمرين الرابع

هل العلاقة S المعرفة على $[-1,1]$ بالشكل:

$$\forall x, y \in [-1,1] : x\,S\,y \Leftrightarrow (\arcsin x - \arcsin y) \in IN$$

انعكاسية؟ ضد تناظرية؟ علل كل إجابة.

التمرين الخامس

هل توجد علاقة بين المجموعة $A = IN - ZI$ و المجموعة $B = IN \times ZI$ ؟ علل.

rekkabsoraya@yahoo.fr

التمرين السادس

هل التابع f المعرف من $IR_+ - \{1\}$ نحو $IR - \{1\}$ بالشكل $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ غامر؟

التمرين السابع

أحسب $\sin\theta$ حيث: $\theta=\arctan\left(t^2\right)$ و $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

التمرين الثامن

لتكن A و B مجموعتان حيث $A=\{\{a\},\ \{a\,,b\}\}$ و $B=\{\{a\},\ \{b\}\}$.

ضع أحد الرموز $\in$ ، $\not\subseteq$ ، $\subset$ مكان النقط.

1) $\{a\}\ldots A\cap B$ **2)** ، $\{(a,b)\}\ldots A\times B$ **3)** ، $\{\{a\}\}\ldots A\cup B$ **4)** ، $\{\{b\}\}\ldots B-A$

التمرين التاسع

ليكن $f: IR_+ \to IR_+$ حيث $f(x)=x^2-5x+1$.

هل f تطبيق تقابلي؟

التمرين العاشر

ليكن:

$$f: IR^* \to IR-\{1\}, \quad x\mapsto f(x)=\frac{1}{x}+1$$

و

$$g: IR-\{1\}\to IR, \quad x\mapsto g(x)=\frac{x}{x-1}$$

عين (اذا أمكن) التطبيق $g\,o\,f$.

التمرين الحادي عشر

ليكن التطبيق $f: IN^* \to IR_+^*$ حيث $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$. هل f تطبيق متباين ؟ غامر ؟ لماذا؟

التمرين الثاني عشر

لتكن العلاقة المعرفة على IR كما يلي: $x\Re y \Leftrightarrow x^2-y^2=x-y$. بين أن $\Re$ انعكاسية و تناظرية.

rekkabsoraya@yahoo.fr

التمرين الثالث عشر

نعرف على IR^2 العلاقة $\Re$ كما يلي: $(x,y)\Re(x',y') \Leftrightarrow |x-x'| \le y'-y$.

بين أن $\Re$ علاقة ترتيب.

التمرين الرابع عشر

ليكن التطبيقين f و g المعرفين بالشكل : $g: IR-\{2\} \to IR-\{1\}$ حيث $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$

و $f: IR-\{1/2\} \to IR-\{2\}$ حيث $f(x) = 2x+1$

1- عين $g o f$.

2- بين أن $g o f$ تقابلي.

3- عين $(g o f)^{-1}$.

التمرين الخامس عشر

أدرس الخاصية ضد التناظرية للعلاقة T المعرفة على IR بالشكل التالي :

$$\forall x, y \in IR : xT\, y \Leftrightarrow x^3 - y^3 \ge 0$$

التمرين السادس عشر

هل العلاقة S المعرفة على IN^* بالشكل:

$$n\,S\,m \Leftrightarrow \exists k \in IN^* / n = km$$

هي علاقة ترتيب. فعلا

rekkabsoraya@yahoo.fr

حلول التمارين

التمرين الأول

1) صحيح لأن $\{1\}$ مجموعة و هي عنصر من مجموعة المجموعات $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.

2) خطأ لأن $\{1,2,3\}\cup\{\Phi\}=\{1,2,3,\Phi\}$.

3) خطأ لأن $y=1$ ليست له سابقة في IN .

التمرين الثاني

1) خطأ لأن $A\bigcup B=\{x/x\in A\vee x\in B\}$ ومنه $\{1\}\bigcup\{1\}=\{1\}$.

2) خطأ لأن $A-B=\{x/x\in A\wedge x\notin B\}$ ومنه $\{1\}-\{1\}=\phi$.

3) خطأ لأن $A\times B=\{(x,y)/x\in A\wedge y\in B\}$ ومنه $\{2\}\times\{5\}=\{(2,5)\}$

4) صحيح لأن.$\{\{\ \}\}$ مجموعة مجموعات تحتوي على عنصر واحد هو المجموعة $\{\ \}$.

5) صحيح لأن المجموعة الخالية محتواة في أية مجموعة.

التمرين الثالث

1) S انعكاسية $\Leftrightarrow(\forall x\in IR: x\,S\,x)$

من أجل مثلا $x=1$ فإن $x^2+x^2=2>0$ أي $x\not S x$

ومنه العلاقة S ليست انعكاسية.

2) S تناظرية $\Leftrightarrow(\forall x,y\in IR: x\,S\,y\Rightarrow y\,S\,x)$

ليكن $x,y\in IR$ نفرض أن $x\,S\,y$ أي $x^2+y^2\le 0$.

وبما أن الجمع تبديلي فان $y^2+x^2\le 0$ أي $y\,S\,x$ اذن S .تناظرية.

3) S ضد تناظرية $\Leftrightarrow(\forall x,y\in IR: x\,S\,y\wedge y\,S\,x\Rightarrow x=y)$

ليكن $x,y\in IR$ نفرض أن $x\,S\,y$ و $y\,S\,x$ أي $x^2+y^2\le 0$ و $y^2+x^2\le 0$

ومنه $x^2+y^2=0$ إذن $x=y=0$ و بالتالي S ضد تناظرية.

rekkabsoraya@yahoo.fr

4) S متعدية $\Leftrightarrow (\forall x, y, z \in IR : x\,S\,y \wedge y\,S\,z \Rightarrow xSz)$

ليكن $x, y, z \in IR$ نفرض أن $x\,S\,y$ و $y\,S\,z$ أي $x^2 + y^2 \leq 0$ و $y^2 + z^2 \leq 0$

ومنه $x^2 + y^2 = 0$ و $y^2 + z^2 = 0$ أي $x = y = z = 0$ إذن $x^2 + z^2 \leq 0$.

و بالتالي S متعدية.

5) S تكافؤ $\Leftrightarrow$ انعكاسية و تناظرية و متعدية.

S ليست انعكاسية ومنه فهي ليست تكافؤ .

6) S ترتيب $\Leftrightarrow$ انعكاسية و ضد تناظرية و متعدية

S ليست انعكاسية ومنه فهي ليست ترتيب.

التمرين الرابع

- العلاقة S انعكاسية $\Leftrightarrow (\forall x \in [-1,1] : x\,S\,x)$

ليكن x عنصر من $[-1,1]$ لدينا $(\arcsin x - \arcsin x = 0 \in IN)$ فان $x\,S\,x$ ومنه S انعكاسية.

- العلاقة S ضد تناظرية $\Leftrightarrow (\forall x, y \in [-1,1] : x\,S\,y \wedge y\,S\,x \Rightarrow x = y)$

ليكن العنصران x, y من $[-1,1]$ حيث $x\,S\,y \wedge y\,S\,x$ فان

$$\left.\begin{array}{l} x\,S\,y \Leftrightarrow (\arcsin x - \arcsin y) \in IN \Rightarrow (\arcsin x - \arcsin y) \geq 0 \\ y\,S\,x \Leftrightarrow (\arcsin y - \arcsin x) \in IN \Rightarrow (\arcsin y - \arcsin x) \geq 0 \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow (\arcsin x - \arcsin y) = 0$$

وبما أن التطبيق arcsin متباين فان $x = y$ ومنه العلاقة S ضد تناظرية.

التمرين الخامس

لدينا المجموعة $IN \subset ZI$ اذن $A = \phi$ و بما أن المجموعة الخالية محتواة في كل المجموعات فان $A \subset B$.

التمرين السادس

f ليس غامرا $\Leftrightarrow (\exists\, y \in IR - \{1\};\ \forall\, x \in IR_+ - \{1\} :\ f(x) \neq y)$

rekkabsoraya@yahoo.fr

لدينا من أجل $y=\frac{1}{2}$ فان $\frac{x^2}{x^2-1}\neq\frac{1}{2}$ مهما كانت قيمة x في $IR_+-\{1\}$ ، فعلا

$\left(x^2=-1\right)\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{1}{2}\right)$ ، و منه f ليس غامرا.

التمرين السابع

$$\theta=\arctan\left(t^2\right)\Leftrightarrow \tan\theta=t^2 \Leftrightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=t^2 \Leftrightarrow \sin\theta=t^2\cos\theta$$

باستعمال العلاقة $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ نجد $\left(\sin^2\theta\right)\left(1+t^4\right)=t^4$ إذن $\sin\theta=\frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}}$ لأن $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

التمرين الثامن

1) $\{a\}\in A\cap B$ ، 2) $\{(a,b)\}\not\in A\times B$ ، 3) $\{\{a\}\}\subset A\cup B$ ،

4) $\{\{b\}\}\subset B-A$

التمرين التاسع

نلاحظ أن $f(1)=-3\not\in IR_+$ ومنه f ليس تطبيق

التمرين العاشر

$$g\circ f: IR^*\to IR$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=1+x$$

التمرين الحادي عشر

-1 f متباين $\Leftrightarrow\left(\forall x_1, x_2\in IN^*:\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\ x_1=x_2\right)$

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\frac{1}{x_1\sqrt{x_1}}=\frac{1}{x_2\sqrt{x_2}}\Leftrightarrow x_1^3=x_2^3\quad\Leftrightarrow x_1=x_2$$

ومنه f متباين.

rekkabsoraya@yahoo.fr

-2 f غامر $\Leftrightarrow$ $\forall\, y \in IR_{+}^{*}, \exists\, x \in IN^{*} \;/\; y = f(x)$

$y = \frac{1}{x\sqrt{x}} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{x^3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{y^2}}$. نأخذ $y = 2$ ومنه $x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \notin IN$

إذن f ليس غامرا.

التمرين الثاني عشر

$\Re$ انعكاسية $\Leftrightarrow$ $(\forall\, x \in IR,\quad x \Re x \Leftrightarrow x^2 - x^2 = x - x)$. و هي محققة دوما.

و منه $\Re$ انعكاسية.

$\Re$ تناظرية $\Leftrightarrow$ $(\forall\, x, y \in IR,\quad x \Re y \Rightarrow\; y \Re x)$

$x \Re y \;\Leftrightarrow\; x^2 - y^2 = x - y \;\Leftrightarrow\; y^2 - x^2 = y - x \Leftrightarrow y \Re x$.

و منه $\Re$ تناظرية.

التمرين الثالث عشر

$\Re$ انعكاسية $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in IR^2\, (x,y) \Re (x,y)$

$$(x,y)\Re(x,y) \;\Leftrightarrow\; |x - x| \le y - y \Leftrightarrow 0 \le 0$$

متراجحة محققة دوما ومنه $\Re$ انعكاسية.

$\Re$ ضد تناظرية $\Leftrightarrow$

$$\forall (x,y),(x',y') \in IR^2, (x,y)\Re(x',y') \wedge (x',y')\Re(x,y) \Rightarrow (x,y) = (x',y')$$

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)\Re(x',y') \Leftrightarrow |x - x'| \le y' - y \Rightarrow y' - y \ge 0 \Rightarrow y' \ge y \\ (x',y')\Re(x,y) \Leftrightarrow |x' - x| \le y - y' \Rightarrow y - y' \ge 0 \Rightarrow y \ge y'\end{array}\right\} \Rightarrow y = y'$$

$$0 \le |x - x'| \le y' - y = y - y = 0 \qquad \Rightarrow |x - x'| = 0 \;\Rightarrow x = x'$$

و منه $\Re$ ضد تناظرية.

rekkabsoraya@yahoo.fr

$\Re$متعدية $\Leftrightarrow$ $$\left(\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'')\in IR^2;\ \left.\begin{array}{r}(x,y)\Re(x',y')\\ \wedge\\ (x',y')\Re(x'',y'')\end{array}\right\}\Rightarrow (x,y)\Re(x'',y'')\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)\Re(x',y')\Leftrightarrow |x-x'|\le y'-y\\ (x',y')\Re(x'',y'')\Leftrightarrow |x-x''|\le y''-y'\end{array}\right\}\Rightarrow |x-x'|+|x'-x''|\le y''-y$$

وبما أن

$$|x-x''|=|x-x'+x'-x''|\le |x-x'|+|x'-x''|$$

إذن $|x-x''|\le |x-x'|+|x'-x''|\le y''-y$

و منه $\Re$ متعدية. وبالتالي $\Re$ تكافؤ.

التمرين الرابع عشر

-1 $$go\,f : IR-\{1/2\}\to IR-\{1\}$$

$$x\to (go\,f)(x)=g[f(x)]=g(2x+1)=\frac{2x+1}{2x-1}$$

-2. $go\,f$ تقابلي $\Leftrightarrow$ $\forall y\in IR-\{1\},\quad \exists! x\in IR-\{1/2\}\ :\ y=(go\,f)(x)$

$$y=\frac{2x+1}{2x-1}\Rightarrow x=\frac{y+1}{2(y-1)}$$

هناك حل وحيد و منه $go\,f$ تقابلي.

-3 $$(go\,f)^{-1} : IR-\{1\}\to IR-\{1/2\}$$

$$x\mapsto (go\,f)^{-1}(x)=\frac{x+1}{2(x-1)}$$

التمرين الخامس عشر

T ضد التناظرية $\Leftrightarrow$ $(\forall x,y\in IR : xTy\wedge yTx\Rightarrow x=y)$

ليكن x و y عنصران كيفيان من IR ونفرض $xTy\wedge yTx$ أي

$$yTx \Leftrightarrow y^3 - x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \leq y^3 \quad \text{و} \quad xTy \Leftrightarrow x^3 - y^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq y^3$$

ومنه

$$y^3 = x^3 \Leftrightarrow x = y$$

إذن الخاصية T ضد التناظرية.

التمرين السادس عشر

1) S انعكاسية $\Leftrightarrow \left(\forall n \in IN^* : nSn\right)$

ليكن n عنصرا كيفيا من IN^*. فانه يوجد k من IN^* بحيث $n = kn$ يكفي أخذ $k = 1$ ومنه nSn.

2) S ضد تناظرية $\Leftrightarrow \left(\forall n, m \in IN^* : \quad (nSm \wedge mSn) \Rightarrow n = m\right)$

ليكن n و m عنصرين كيفيين من IN^*. نفرض أن nSm و mSn أي يوجد k و k' من IN^* بحيث $n = km$ و $m = k'n$ ومنه $n = kk'n$ بقسمة الطرفين على n $(n \neq 0)$ نجد $kk' = 1$ والحل الوحيد هو $k = k' = 1$ ومنه $n = m$.

3) S متعدية $\Leftrightarrow \left(\forall n, m, l \in IN^* : \quad (nSm \wedge mSl) \Rightarrow nSl\right)$

ليكن n و m و l ثلاث عناصر كيفية من IN^*. نفرض أن nSm و mSl أي يوجد k و k' من IN^* بحيث $n = km$ و $m = k'l$ ومنه $n = kk'l$ بما أن kk' تنتمي الى IN^* فان nSl.

من 1) و 2) و 3) فهي علاقة ترتيب.

rekkabsoraya@yahoo.fr

تمارين مقترحة

التمرين الأول

لتكن المجموعة $A=\{1,2,3\}$. هل الاقتراحات التالية صحيحة؟

1) $\{\Phi\}\subseteq A$, 2) $\{1\}\subseteq A$, 3) $\Phi\in A$, 4) $A\subseteq\{A\}$, 5) $2\in A$, 6) $3\subseteq A$

9) $A\bigcup\Phi=A$, 10) $A\bigcup\{\Phi\}=A$ 7) $\{1,2\}\subseteq A$, 8) $\{\{1,2\},3\}=A$,

التمرين الثاني

لتكن المجموعات التالية: $E=\{1,3\},\quad F=\{1,2\},\quad G=\{0,3\}$.

أوجد $E\times F,\quad E\times\Phi,\quad E\times\{\Phi\},\quad F\times(E\bigcap G),\quad (F\times E)\bigcap G$.

$$P(E)\ ,\ P(E\bigcap G)\ ,\ P(E\bigcup G)\ ,\ P(F\times(E\bigcap G))$$

التمرين الثالث

لتكن T علاقة معرفة على IR بالشكل التالي: $\forall x,y\in IR: xT\,y\Leftrightarrow x^3-y^3=3(x-y)$

هل T علاقة تكافؤ؟

التمرين الرابع

لتكن T علاقة معرفة على IR بالشكل التالي: $\forall x,y\in IR: xT\,y\Leftrightarrow x^3-y^3=3x-y$

هل T علاقة تكافؤ؟

التمرين الخامس

أدرس الخاصية ضد التناظرية للعلاقة T المعرفة على IR بالشكل:

$$\forall x,y\in IR: xT\,y\Leftrightarrow x^2-y^2\in IN$$

التمرين السادس

لتكن التوابع التالية:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$g : IR^* \to IR_+ \qquad f : IN \to IN \qquad h : IR/\{1\} \to IR/\{1\}$$
$$x \to \frac{2}{x^2} \qquad x \to 4x+1 \qquad x \to \frac{x^2}{x^2-1}$$

هل g ، f و h تطبيقات متباينة ؟ غامرة ؟ تقابلية ؟

التمرين السابع

نعرف التطبيق f بالشكل

$$f : IN \times IN \to ZI$$
$$(x, y) \mapsto x - y$$

أوجد $f(\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\})$ و $f^{-1}(\{0\})$ ، ماذا تستنتج؟

التمرين الثامن

أعطي كل الاحتواءات و المساواة الممكنة بين المجموعات التالية:

$D=\{z\in IR / z^2=-4\}$ ، $A=\{x\in Q \; ; \; x\leq 0\}$ ، $B=\left\{\frac{a}{2k} / a,k\in Z,\, k\neq 0\right\}$

$.E=Q$ ، $F=\Phi$ ، $C=\{z\in IC / z^2=-4\}$

التمرين التاسع

ليكن $E=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ و لتكن الأجزاء التالية من E:

$$A=\{1,2,3,4\} \quad , \quad B=\{4,5,6,7\} \;,\; C=\{1,3,5,7\} \quad , D=\{2,3,4,5,6\}$$

أحسب: $(A\cup C)\cap(B\cup D)$, $(A\cap B)\cup(C\cap D)$

التمرين العاشر

لتكن المجموعة A المعرفة كالتالي $A=\{\{a\},\ \{a\, ,b\}\}$. ضع أحد الرمزين $\in$ ، $\not\subset$ مكان النقط:

$a \ldots. A$ $\quad ,(a,b) \ldots. A$ $\quad ,\{b\} \ldots. A$ $\quad \{b,a\} \ldots. A$

1- أكتب المجموعة B الناتجة عن تعويض a بـ b و b بـ a في المجموعة A.

2- هل المجموعتان A و B متساويتان ؟ لماذا ؟

rekkabsoraya@yahoo.fr

التمرين الحادي عشر

لتكن العلاقة S المعرفة على IN^2 بالشكل التالي:

$$\forall (x,y),(x',y') \in IN^2 : (x,y) S (x',y') \Leftrightarrow x+y' = x'+y$$

بين أن S علاقة تكافؤ على IN^2.

التمرين الثاني عشر

لتكن التطبيقات من $IR-\{0,1\}$ نحو IR ، المعرفة بـ:

$$f(x)=1-x \ \text{،}\ g(x)=\frac{1}{x} \ \text{،}\ h(x)=\frac{x}{x-1} \ \text{،}\ i(x)=x \ \text{،}\ k(x)=\frac{x-1}{x} \ \text{،}\ l(x)=\frac{1}{1-x}.$$

هل كل هذه التطبيقات تقابلية ؟

التمرين الثالث عشر

ليكن التطبيق f المعرف بالشكل

$$f : IR \to IR$$
$$x \to f(x) = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

1- بين أن f تطبيق غير متباين و غير غامر.

2- أوجد مجموعتين A و B جزئيتين من IR بحيث يوجد تقابل g من A نحو B بحيث:

$$\forall\, x \in A :\ \ g(x) = f(x)$$

3- عين g^{-1} ؟

التمرين الرابع عشر

من أجل كل $x \in IR$ نعرف الجزء الصحيح لـ x ونرمز له بـ $E(x)$ لأكبر عدد صحيح أقل أو يساوي x.

نعرف إذن علاقة $E: IR \to IR$.

- أرسم البيان E من أجل $x \in [-2,2]$.
- هل العلاقة E تطبيق ؟ متباين ؟ غامر ؟ متقابل ؟

rekkabsoraya@yahoo.fr

- عين $E(]0,2[)$, $E^{-1}(]0,2[)$, $E\left(E^{-1}(]0,2[)\right)$.

- أعط $E\circ E$.

التمرين الخامس عشر

ليكن التطبيق f المعرف بالشكل التالي : $f: IR-\{1\}\to IR$ حيث $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-1}$

- هل f غامر؟ متباين ؟

- بين أنه توجد مجموعة F من IR و يوجد تقابل g من $IR-\{1\}$ نحو F بحيث:

$$\forall x\in IR-\{1\}\ :\ f(x)=g(x)$$

- أوجد g^{-1} .

rekkabsoraya@yahoo.fr

الفصل الثالث:

الدوال الحقيقية لمتغير حقيقي والنشر المحدود

مصطلحات وتعاريف رياضية

رمزه أو تعريفه	المصطلح: انجليزي	المصطلح: فرنسي	المصطلح: عربي
$f, g, \dots$	Function	Fonction	دالة أو تابع
$D_f = \{x \in IR / f(x) \in IR\}$	Domain of function	Domaine de définition	مجموعة التعريف
$f: x \mapsto \cos x,\ f: x \mapsto \sin x$ $f: x \mapsto \cot x,\ f: x \mapsto \tan x$	Trigonometric function	Fonction trigonométrique	دالة مثلثية
$f: x \mapsto e^x$	Exponential function	Fonction exponentielle	دالة أسية
$f: x \mapsto \ln x$	Logarithmic function	Fonction logarithmique	دالة لوغارتمية
$f: x \mapsto \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	Hyperbolic sine	Sinus hyperbolique	جب زائدي
$f: x \mapsto \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	Hyperbolic cosine	Cosinus hyperbolique	جب تمام زائدي
$f: x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$	Power function	Fonction puissance	دالة القوة
$f: x \mapsto \frac{1}{x}$	Inverse	Fonction inverse	دالة المقلوب
$\exists M, m \in IR,\ \forall x \in D_f : m \le f(x) \le M$	Bounded function	Fonction bornée	دالة محدودة
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow$ $(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f :$ $\lvert x - x_0 \rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon)$	Limits	Limite	نهاية
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$	Continuity	Continuité	إستمرار

rekkabsoraya@yahoo.fr

$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & , x\in D_f \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & x=x_0 \end{cases}$	Cartesian product	Prolongement par continuité	تمديد بالإستمرار
$\left(\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in IR\right)$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=l$	Derivative	Dérivation	إشتقاق
$f':D\to IR$ $x\mapsto f'(x)$	Derivative function	Fonction dérivée	تابع المشتق
$df_{x_0}IR\to IR$ $h\mapsto df_{x_0}(h)=f'(x_0)h$	Differentiation	Différentiabilité	تفاضل
$f(x)=$ $f(x_0)+\ldots+(x-x_0)^n\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+$ $R\left((x-x_0)^n\right)$	The taylor's formula	Formules de Taylor	صيغ تايلور
$f(x)=$ $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+o\left(x^n\right)$	Finite expansion at zero	Déveleppement limité au voisinage de zero	نشر محدود جوار الصفر
$f(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots\ldots+\frac{a_n}{x_n}+0\left(\frac{1}{x^n}\right)$	Finite expansion at infinity	Développement limité au voisinage de l'infini	نشر محدود جوار مالانهاية

rekkabsoraya@yahoo.fr

تمارين محلولة

التمرين الأول

ليكن التابع الحقيقي f المعرف كما يلي $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$.

1- عين D_f مجموعة تعريف التابع f .

2- أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$.

3- أحسب $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

4- عين التابع المشتق f' للتابع f .

5- أحسب $f(2)$ و $f'(2)$.

6- أعط نشر تايلور للتابع f من الرتبة الأولى جوار النقطة $x_0=2$.

التمرين الثاني

باستعمال لوبيتال احسب النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(1-\cos x)}{x^2+x^3}$.

التمرين الثالث

عين a و b حتى تكون الدالة f المعرفة بــ

$$f(x)=\begin{cases} 5 & x<-2 \\ ax+b & -2\le x\le 1 \\ \ln x & x>1 \end{cases}$$

مستمرة على IR .

التمرين الرابع

1- ليكن التابع f المعرف بـ $f(x)=x^2\ln x$.

أ- عين D_f مجموعة تعريف f .

ب- أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ باستعمال قاعدة لوبيتال (بوضع $f(x)=\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$)

rekkabsoraya@yahoo.fr

2- نعرف التابع g بالشكل

$$g(x)=\begin{cases} x^2 \ln x & , \quad x\in D_f \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

أ- أدرس استمرار التابع g على يمين $x_0=0$.

ب- أدرس قابلية اشتقاق التابع g على يمين $x_0=0$.

ج- أحسب $f'(1)$ ، $f''(1)$.

د- أعطي النشر المنتهي للتابع f جوار 1 حتى الرتبة 2.

التمرين الخامس

1 - ليكن التابع الحقيقي f المعرف كما يلي $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+3x}$

أ - عين D_f مجموعة تعريف التابع f.

ب - أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2 - نعرف التابع g بالشكل:

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^2+3x} & , \quad x\in D_f \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

أ- أدرس استمرار التابع g عند $x_0=0$.

ب- أدرس قابلية اشتقاق التابع g عند $x_0=0$.

التمرين السادس

ليكن التابع f المعرف بالشكل التالي $f: x\to f(x)=\dfrac{x+1}{x^2\ln(x+2)}$

1) عين D_f مجموعة تعريف التابع f.

2) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\longrightarrow -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow} -2} f(x)$.

أ) نعرف التابع g بالشكل التالي:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$g : x \to g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in D_f \\ -1 & , x = -1 \\ 0 & , x = -2 \end{cases}$$

1) عين D_g مجموعة تعريف التابع g.

2) أدرس استمرار التابع g عند النقطتين $x_0 = -1$ و $x_1 = -2$.

3) أدرس اشتقاق التابع g عند النقطة $x_1 = -2$.

4) أعطي نشر ماك لوران (إن وجد) للتابع g حتى الدرجة الثالثة.

التمرين السابع

1- ليكن التابع الحقيقي f المعرف كما يلي $f(x) = \dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}$

أ) عين D_f مجموعة تعريف التابع f.

ب) باستعمال علاقة لوبتال أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ج) أعطي صيغة ماك لوران لـ $\sin x$ و $\ln(1+x)$ من الرتبة الثانية.

د) أوجد النشر المحدود للتابع f جوار الصفر من الرتبة الأولى ، ثم أحسب $f(0{,}02)$.

1- نعرف التابع الحقيقي g بالشكل:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in D_f \\ a & , x = 0 \end{cases}$$

عين قيمة العدد الحقيقي a حتى يكون التابع g مستمرا عند النقطة $x_0 = 0$.

التمرين الثامن

ليكن التابع المعرف بـ

$$f(x) = x^2 \left|1 + \frac{1}{x}\right|$$

1- أحسب مجموعة التعريف للتابع f.

2- أكتب f دون رمز القيمة المطلقة.

3- بين أن f مستمرة على IR^*.

rekkabsoraya@yahoo.fr

4- بين أن f تقبل تمديدا بالاستمرار على IR . و أوجد الدالة $\tilde{f}$ تمديد f على IR .

5- ليكن $I=]0,+\infty[$. بين أن التطبيق f يقبل تطبيق عكسي f^{-1} على I يطلب تعيينه.

التمرين التاسع

ليكن التابع الحقيقي f المعرف كما يلي : $f(x)=\dfrac{x\sin x}{\ln(x+1)}$

1- عين D_f مجموعة تعريف التابع f .

2- بين أن التابع f يقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0=0$ ثم عين التابع الممدد له h .

3- أدرس قابلية اشتقاق التابع h عند $x_0=0$.

4- هل التابع f مستمر و قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0=-1$ ؟

التمرين العاشر

لتكن f الدالة المعرفة بـ $f(x)=x^2\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$

1- عين مجموعة التعريف D_f .

2- أوجد نهاية الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

3- عين الدالة g تمديد f بالاستمرار على IR .

4- بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على IR .

5- أحسب g' .

التمرين الحادي عشر

ليكن التابع الحقيقي المعرف بـ $f(x)=\sqrt{2-|x-3|}$

1- أكتب $f(x)$ دون القيمة المطلقة.

2- أوجد مجموعة تعريف التابع f .

3- أدرس استمرار التابع f عند النقطة $x_0=3$.

4- أدرس اشتقاق التابع f عند النقطة $x_0=3$.

5- أعط (إذا أمكن) نشر ماك لوران للتابع f حتى الدرجة 4.

rekkabsoraya@yahoo.fr

التمرين الثاني عشر

1 - ليكن التابع الحقيقي f المعرف كما يلي $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-x}$

أ - عين D_f مجموعة تعريف التابع f.

ب - باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2 - نعرف التابع g بالشكل التالي:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x^2-x} & , \ x\in D_f\\ 0 & , \ x=0\end{cases}$$

أ- أدرس استمرار التابع g عند $x_0=0$.

ب- أدرس قابلية اشتقاق التابع g عند $x_0=0$.

ت- أعطي (إن وجد) نشر ماك لوران للتابع g حتى الدرجة 3.

التمرين الثالث عشر

ليكن التابع الحقيقي f المعرف بالشكل $f(x)=\dfrac{1-e^x}{\ln x}$

1- أعطي نشر تايلور لـ e^x جوار $x_0=1$ حتى الرتبة $n=3$.

2- عين D_f مجموعة تعريف التابع f.

3- أوجد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفها D_f.

4- هل التابع f يقبل نشرا محدودا جوار $x_0=1$ ؟ علل.

التمرين الرابع عشر

لتكن التوابع التالية:

$$3)\ g(x)=|x|\cos\frac{1}{x} \qquad 2)\ h(x)=\begin{cases}(e^x-1)\sin\dfrac{1}{x} & , \ x\neq 0\\ 1 & , \ x=0\end{cases}$$

$$1)\ f(x)=\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

1- أوجد مجموعة التعريف لكل من f ، g و h .

2- هل هذه التوابع مستمرة عند النقطة $x_0=0$.

3- هل يمكن تمديدها (جميع الدوال) بالاستمرار عند $x_0=0$.

4- اذا كان ممكنا اوجد الدوال $\tilde{f}$ ، $\tilde{g}$ و $\tilde{h}$ تمديد f ، g و h عند النقطة $x_0=0$.

التمرين الخامس عشر

1- عين a حتى تكون الدالة f مستمرة على IR حيث

$$f(x)=\begin{cases} 2ax+ax^2 & x\geq 1 \\ 3\cos\pi x & x<1 \end{cases}$$

2- أدرس قابلية الاشتقاق للتابع f على IR من أجل $a=-1$ و أحسب المشتقة f' .

التمرين السادس عشر

أوجد العددين الحقيقيين a,b بحيث تكون الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<e \\ a\ln x+b & x\geq e \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق عند $x_0=e$.

التمرين السابع عشر

1/ أعط النشر المنتهي من الرتبة 2 في جوار الصفر للتابعين

$f(x)=e^x$ و $g(x)=\ln(1+x)$.

2/ باستعمال السؤال السابق أوجد العددين a و b بحيث يكون لدينا في جوار $+\infty$

$$h(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=a+\frac{b}{x}+0\left(\frac{1}{x}\right)$$

3/ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

التمرين الثامن عشر

I. أوجد النشر المنتهي من الدرجة 3 في جوار $(+\infty)$ للتابع: $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2}\sqrt{x^2-1}$

rekkabsoraya@yahoo.fr

II. باستعمال علاقة لوبيتال أحسب $\lim_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{1/x}$.

حلول التمارين

التمرين الأول

-1 $D_f=\{x\in IR/\ln x\neq 0\wedge x>0\}$

$$=\{x\in IR/x\neq 1\wedge x>0\}=]0,1[\cup]1,+\infty[$$

-2 علما أن $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$ فان

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x-1}{\ln x}=0$$

$\lim_{x\to 1}f(x)$ هي حالة عدم التعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$ ولدينا البسط والمقام تابعين قابلين للاشتقاق جوار الصفر و مشتقة المقام لا تنعدم جوار الصفر. أيضا

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1\Rightarrow\lim_{x\to 1}f(x)=1$$

-3 $f'(x)=\dfrac{x\ln x-x+1}{x(\ln x)^2}$.

-4 $f(2)=\dfrac{1}{\ln 2}$ و $f'(2)=\dfrac{2\ln 2-1}{2(\ln 2)^2}$.

-5 $f(x)=f(2)+(x-2)f'(2)+o(x-2)$

$$=\frac{1}{\ln 2}+(x-2)\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{2(\ln 2)^2}\right)+o(x-2)$$

التمرين الثاني

rekkabsoraya@yahoo.fr

$f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ هي حالة عدم التعيين من الشكل $\left(\dfrac{0}{0}\right)$، ولدينا البسط والمقام تابعين قابلين للاشتقاق جوار الصفر و مشتقة المقام لا تنعدم جوار الصفر. أيضا

$$h'(x)=2x+3x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} h'(x)=0$$

$$g'(x)=e^x(1-\cos x+\sin x)\Rightarrow \lim_{x\to 0} g'(x)=0,$$

بالتالي نحصل على حالة عدم التعيين من نفس الشكل $\left(\dfrac{0}{0}\right)$، ولدينا البسط والمقام تابعين قابلين للاشتقاق جوار الصفر و مشتقة المقام لا تنعدم جوار الصفر.

نستعمل مرة ثانية قاعدة لوبيتال

$$h''(x)=2+6x \Rightarrow \lim_{x\to 0} h''(x)=2$$

$$g''(x)=e^x(1+2\sin x)\Rightarrow \lim_{x\to 0} g''(x)=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{1}{2}$$

التمرين الثالث

نلاحظ أن $D_f = IR$. لكي تكون الدالة f مستمرة على IR يجب أن تكون مستمرة عند كل نقطة من IR . لدينا من أجل

* $x<-2$ الدالة f ثابتة إذن مستمرة.

** $-2\le x\le 1$ الدالة f كثير حدود إذن مستمرة.

*** $x>1$ الدالة f لوغاريتمية مستمر على مجموعة تعريفها. إذن على $]1,+\infty[$

f مستمرة عند $x_0=1$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}(x) = f(1)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=a+b= f(1)\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\ln 1=0\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=0$$

f مستمرة عند $x_1=-2$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} f(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)= f(-2)$

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=5\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=a(-2)+b=-2a+b=f(-2)\end{array}\right\}\Rightarrow -2a+b=5$$

$$(s)\begin{cases}a+b=0\\ -2a+b=5\end{cases}\Rightarrow a=\frac{-5}{3}\ \wedge\ b=\frac{5}{3}$$

التمرين الرابع

/1 (أ) $D_f=]0,+\infty[$

(ب) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)$ هي حالة عدم التعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$، ولدينا البسط والمقام تابعين قابلين للاشتقاق جوار الصفر و مشتقة المقام لا تنعدم جوار الصفر. أيضا

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2x}{x^4}}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{-x^2}{2}\right)=0\Rightarrow \lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=0$$

/2 (أ) f مستمرة على يمين $x_0=0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=g(0)=0$

حسب السؤال السابق

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0} x^2\ln x=0$$

و منه g مستمر عن يمين $x_0=0$.

(ب) g قابلة للاشتقاق عن يمين $x_0=0$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=l$ حيث l عدد منتهي.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x^2\ln x}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

هي حالة عدم التعيين من الشكل $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$، ولدينا البسط والمقام تابعين قابلين للاشتقاق جوار الصفر و مشتقة المقام لا تنعدم جوار الصفر. أيضا

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} (-x) = 0$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$.

ج) $f'(x) = 2x\ln x + x \Rightarrow f'(1) = 1$

$$f''(x) = 2\ln x + 2 + 1 \Rightarrow f''(1) = 3$$

د) $f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)}{2!} f''(x) + 0\left((x-1)^2\right)$

$$= (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + 0\left((x-1)^2\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - 2x + \frac{3}{2}x^2 + 0\left((x-1)^2\right)$$

التمرين الخامس

-1 (أ) $D_f = IR - \{0, -3\}$

(ب) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2 + 3x}$ هي حالة عدم التعيين من الشكل $(\frac{0}{0})$ لإزالتها نستعمل قاعدة لوبتال لأنه لدينا البسط والمقام تابعين قابلين للاشتقاق جوار الصفر و مشتقة المقام لا تنعدم جوار الصفر. أيضا

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(x^2 + 3x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2x + 3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{3}$$

/2 (أ) g مستمر عند $x_0 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2 + 3x} = \frac{1}{3}$$ (حسب السؤال السابق ب)

$$\neq g(0) = 0$$

و منه g غير مستمر عند $x_0 = 0$.

(ب) g غير مستمر عند $x_0 = 0$ إذن فهو غير قابل للاشتقاق عند $x_0 = 0$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

التمرين السادس

أ) $D_f = \{x \in IR / x+2>0 \wedge x+2 \neq 1 \wedge x \neq 0\}$

$=]-2,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+\infty[$

- النهاية $\lim\limits_{x \longrightarrow -1} f(x)$ هي حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ ، لإزالتها نستخدم قاعدة لوبيتال.

لدينا البسط والمقام تابعين قابلين للاشتقاق جوار الصفر و مشتقة المقام لا تنعدم جوار الصفر. أيضا

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{(x+1)'}{\left(x^2 \ln(x+2)\right)'} = \lim_{x \longrightarrow -1} \frac{1}{2x\ln(x+2) + x^2 \frac{1}{x+2}} = 1$$

ومنه $\lim\limits_{x \longrightarrow -1} f(x) = 1$

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -2} \frac{x+1}{x^2 \ln(x+2)} = \frac{-1}{-\infty} = 0$

1) $D_g = D_f \cup \{-2,-1\} \quad = [-2,0[\cup]0,+\infty[$

2)

- g مستمر عند $x_0 = -1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow -1} g(x) = g(-1)$.

لدينا $g(-1) = -1$ و حسب السؤال السابق (أ) $\lim\limits_{x \longrightarrow -1} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1} f(x) = 1$ إذن

$$\lim_{x \longrightarrow -1} g(x) \neq g(-1)$$

ومنه g غير مستمر عند $x_0 = -1$.

- g مستمر عند $x_1 = -2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -2} g(x) = g(-2)$.

لدينا $g(-2) = 0$ و حسب السؤال السابق (أ) $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -2} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -2} f(x) = 0$

ومنه g مستمر عند $x_1 = -2$.

3) بما أن التابع g غير معرف على يسار النقطة $x_1 = -2$ ندرس الاشتقاق فقط على اليمين.

rekkabsoraya@yahoo.fr

g قابل للاشتقاق على يمين $x_1=-2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} \dfrac{g(x)-g(-2)}{x+2} = l \,/\, (l \in IR)$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -2} \frac{g(x)-g(-2)}{x+2} = \lim_{x \xrightarrow{>} -2} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{x \xrightarrow{>} -2} \frac{(x+1)(x+2)}{x^2 \ln(x+2)} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

إذن $g'(-2)=0$ ومنه g قابل للاشتقاق على يمين $x_1=-2$.

4) لا يمكن إعطاء نشر ماك لوران للتابع g لأنه غير معرف جوار الصفر و بالتالي غير قابل للاشتقاق.

التمرين السابع

1 - أ) $D_f = \{x \in IR / 1+x>0 \wedge 1+x \neq 1\} =]-1,0[\cup]0,+\infty[$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ هي حلة عدم التعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$. ولدينا البسط والمقام تابعين قابلين للاشتقاق جوار الصفر و مشتقة المقام لا تنعدم جوار الصفر. أيضا

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{\ln(1+x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{1}{1+x}} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

ح) $\sin x = x + o(x^2)$ و $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

د) النشر المحدود للتابع f جوار $x_0=0$ تتحصل عليه بالقسمة حسب القوى المتزايدة.

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + o(x) \;\Rightarrow\; f(0{,}02) \approx 1{,}01$$

-2 g مستمر عند $x_0=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$

(حسب السؤال السابق ب) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\ln(1+x)} = 1$. ومنه $g(0)=a=1$

التمرين الثامن

1/ $D_f = IR^*$

2/
$$f(x) = \begin{cases} x(1+x), & x \in]-\infty,-1] \cup]0,+\infty[\\ x(-1-x) & x \in [-1,0[\end{cases}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

3/ f غير معرف عند $x_0=0$ و منه f غير مستمر عندها تبقى دراسة الاستمرار عند $x_0=-1$ لأن

لما $x_0\neq -1$ f عبارة عن كثير حدود إذن فهو مستمر.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\left(-x-x^2\right)=0=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\left(x+x^2\right)=0$$

و منه f مستمرة على IR^*.

4/ $D_f=IR^*$ إذن نمدد عند $x_0=0$. $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=0$ و منه f تقبل تمديد

بالاستمرار عند $x_0=0$.
$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

5/ f تقابلي $\Leftrightarrow$ المعادلة $f(x)=y$ تقبل حل وحيد

$$f(x)=y\Leftrightarrow x^2+x-y=0\quad \Delta=1+4y>0$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}>0\wedge\ x_2=\frac{-1-\sqrt{1+4y}}{2}<0 \text{ (مرفوض)}$$

ومنه f تقبل دالة عكسية f^{-1} .

$$f^{-1}:\ ]0,+\infty[\ \to\ ]0,+\infty[$$

$$x\ \to f^{-1}(x)=\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$$

التمرين التاسع

-1 $D_f=\{x\in IR/\ln(x+1)\neq 0\ \wedge x+1>0\}]-1,0[\cup]0,+\infty[$

-2 $\lim_{x\to 0} f(x)$ هي حالة عدم التعيين من الشكل $(\frac{0}{0})$ لإزالتها نستعمل قاعدة لوبيتال لإزالتها

لأنه لدينا البسط والمقام تابعين قابلين للاشتقاق جوار الصفر و مشتقة المقام لا تنعدم جوار الصفر. أيضا

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x\sin x)'}{[\ln(x+1)]'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\frac{1}{x+1}}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

بما أن التابع f يقبل نهاية منتهية جوار الصفر فهو يقبل التمديد بالاستمرار عند الصفر.

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & ,x\in D_f \\ 0 & ,\ x=0 \end{cases}$$

3- h قابل للاشتقاق عند $x_0=0 \Leftrightarrow$ ($\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x}$ موجودة ومنتهية)

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+x)}$$

هي حالة عدم التعيين من الشكل $(\frac{0}{0})$ لإزالتها نستعمل قاعدة لوبيتال لأنه لدينا البسط والمقام تابعين قابلين للاشتقاق جوار الصفر و مشتقة المقام لا تنعدم جوار الصفر. أيضا

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{[\ln(x+1)]'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{1}{x+1}}=\lim_{x\to 0}\cos x(x+1)=1\Rightarrow h'(0)=1$$

ومنه التابع h قابل للاشتقاق عند $x_0=0$.

4- f غير معرف عند $x_0=-1$ و منه فهو غير قابل للاشتقاق عند $x_0=-1$.

التمرين العاشر

1- $D_f=\{x\in IR\ /\ x\neq 0\}=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

2- (لأن $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$ و $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$) $\qquad \lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to +\infty}x\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=+\infty$$

لأن $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2 \sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty} x\,\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=-\infty$$

-3
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & , \ x\in D_f \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}=\begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right) & , \ x\in IR^* \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$$

-4 g قابلة للاشتقاق على IR معناه g قابلة للاشتقاق عند $x_0\in IR$.

من أجل $x_0\neq 0$:

g عبارة عن تركيب و جداء دوال قابلة للاشتقاق و منه فهي قابلة للاشتقاق.

من أجل $x_0=0$:

$$\lim_{x\to 0} g(x)-g(0)/x-0=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$$

(لأن $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$ و $\lim_{x\to 0} x=0$) و منه g قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$ و $g'(0)=0$

-5
$$g'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & , \ x\neq 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}.$$

التمرين الحادي عشر

-1
$$|x-3|=\begin{cases} x-3 & , \ x\geq 3 \\ -(x-3), & x\leq 3 \end{cases}$$

و منه
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{5-x} & , \ x\geq 3 \\ \sqrt{x-1} & , \ x\leq 3 \end{cases}$$

-2
$$a)\ x\geq 3:\quad 5-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 5\wedge x\geq 3 \Rightarrow 3\leq x\leq 5$$

$$b)\ x\leq 3:\quad x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1\wedge x\leq 3 \Rightarrow 1\leq x\leq 3$$

الخلاصة $D_f=[1,5]$

rekkabsoraya@yahoo.fr

3- f مستمر عند $x_0 = 3$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x) = f(3)$

$f(3) = \sqrt{2}$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \sqrt{5-x} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \sqrt{x-1} = \sqrt{2}$$

و منه f مستمر عند $x_0 = 3$

4- f قابل للاشتقاق عند $x_0 = 3$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = l$

حيث l عدد منته.

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{2}}{x-3} = \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{x-3} = \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

و منه f قابل للاشتقاق عند $x_0 = 3$

5- f غير معرف عند $x_0 = 0$ و منه غير قابل للاشتقاق عند $x_0 = 0$ و بالتالي f لا يقبل نشر ماك لوران.

التمرين الثاني عشر

1/ (أ) $D_f = IR - \{0,1\}$

(ب) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2 - x}$

هي حالة عدم التعيين من الشكل $(\frac{0}{0})$ لإزالتها نستعمل قاعدة لوبيتال لأنه لدينا البسط والمقام تابعين قابلين للاشتقاق جوار الصفر و مشتقة المقام لا تنعدم جوار الصفر. أيضا

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x^2 - x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2x-1} = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -1$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

2/ (أ) g مستمرة عند $x_0=0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2-x}=-1$ (حسب السؤال السابق (ب))

و منه g غير مستمر عند $x_0=0$.

(ب) بما أن g غير مستمر عند $x_0=0$ إذن فهو غير قابل للاشتقاق عند $x_0=0$. .

(ت) وبما أن g غير قابل للاشتقاق عند $x_0=0$ فهو لا يقبل نشر ماك لوران.

التمرين الثالث عشر

-1 $D_f=\{x\in IR/x>0\wedge x\neq 1\}=]0,1[\cup]1,+\infty[$

-3 أ) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{1-e^x}{\ln x}=\frac{0}{-\infty}=0$

ب) $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x)=\frac{1-e}{0^-}=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)=\frac{1-e}{0^+}=-\infty$.

ومنه التابع f لا يقبل نهاية جوار $x_0=1$.

ج) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ هي حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$. ولدينا البسط والمقام تابعين قابلين للاشتقاق جوار الصفر و مشتقة المقام لا تنعدم جوار الصفر و أيضا

$$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\left(1-e^x\right)'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-e^x}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

بتطبيق قاعدة لوبيتال نجد

$$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$$

التمرين الرابع عشر

-1 $D_f=]-1,+1[\ \{0\}$ ، $D_g=IR^*$ ، $D_h=IR$.

-2 أ- التابعان f و g غير معرفان عند $x_0=0$ و منه فهما غير مستمران عند $x_0=0$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

ب- التابع h معرف عند $x_0=0$ لكن غير مستمر عند $x_0=0$ لأن $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=0\neq h(0)=1$

3- أ- h ليس له تمديد لأنه معرف عند $x_0=0$

ب- $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$$

هي حالة عدم التعيين من الشكل $(\frac{0}{0})$ لإزالتها نستعمل قاعدة لوبيتال لأنه لدينا البسط والمقام تابعين قابلين للاشتقاق جوار الصفر و مشتقة المقام لا تنعدم جوار الصفر. أيضا

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x)-\ln(1-x))'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}}{1}=2\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=2$$

و منه f يقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0=0$. التابع الممدد هو

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & ,x\in D_f\\ 2 & ,x=0\end{cases}$$

ج- $$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}(x\cos\frac{1}{x})=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\left(-x\cos\frac{1}{x}\right)=0 \qquad \left(\begin{array}{l}\pm x\xrightarrow[x\xrightarrow{>}0]{x\xrightarrow{<}0}0\\ \left|\cos\frac{1}{x}\right|\leq 1\end{array}\right)$$

و منه g يقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0=0$. التابع الممدد هو

$$\tilde{g}(x)=\begin{cases} g(x) & ,\ x\in D_g\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$$

التمرين الخامس عشر

1- $D_f=IR$ f مستمرة على IR إذا و فقط إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من IR.

لما $x>1$ f عبارة عن كثير حدود مستمرة على IR ومنه فهي مستمرة على $]1,+\infty[$

لما $x<1$ f دالة مثلثية معرفة و مستمرة على IR ومنه f مستمرة على $]-\infty,1[$

تبقى دراسة الاستمرار عند $x_0=1$

f مستمرة عند $x_0=1$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=f(1)$

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)=\lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\left(2ax+ax^2\right)=3a$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x)=\lim_{\substack{< \\ x\to 1}}(3\cos\pi x)=-3$$

و منه $-3=3a \Rightarrow a=-1$

-2 لما $a=-1$

$$f(x)=\begin{cases}-2x-x^2 & x\geq 1\\ 3\cos\pi x & x<1\end{cases}$$

لما $x>1$ f قابلة للاشتقاق لأنها عبارة عن كثير حدود.

لما $x<1$ f دالة مثلثية قابلة للاشتقاق على IR ومنه على $]-\infty,1[$.

و منه ندرس الاشتقاق عند $x_0=1$

f قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{< \\ x\to 1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=l$ حيث l منتهي.

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\frac{-x^2-2x+3}{x-1}=\lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\frac{(x-1)(-x-3)}{x-1}=-4$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{< \\ x\to 1}}\frac{3\cos\pi x+3}{x-1}=\lim_{\substack{< \\ x\to 1}}\frac{-3\pi\sin\pi x}{x-1}=0 \quad \text{(باستعمال لوبيتال)}$$

و منه f غير قابل للاشتقاق عند $x_0=1$.

ب)
$$f'(x)=\begin{cases}-2x-2 & x>1\\ -3\pi\sin\pi x & x<1\end{cases}$$

التمرين السادس عشر

لكي يكون f قابلة للاشتقاق عند $x_0=e$ يجب أن يكون أولا مستمرا عند $x_0=e$

أي
$$\lim_{\substack{< \\ x\to e}} f(x)=\lim_{\substack{> \\ x\to e}} f(x)=f(e)=a+b$$

و منه $a+b=e-1$ $\quad$ (لأن $\lim_{\substack{< \\ x\to e}} f(x)=e-1$)

f قابل للاشتقاق عند $x_0=e$ $\Leftrightarrow$ $\left(\lim_{\substack{< \\ x\to e}}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=\lim_{\substack{> \\ x\to e}}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=l\in IR\right)$

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\lim_{\substack{> \\ x \to e}} \frac{f(x)-f(e)}{x-e} = \lim_{\substack{> \\ x \to e}} \frac{(a\ln x + b)-(a+b)}{x-e}$$

هي حالة عدم التعيين من الشكل $(\frac{0}{0})$ لإزالتها نستعمل قاعدة لوبيتال لأنه لدينا البسط والمقام تابعين قابلين للاشتقاق جوار الصفر و مشتقة المقام لا تنعدم جوار الصفر. أيضا

باستعمال لوبيتال نجد

$$\lim_{\substack{> \\ x \to e}} \frac{f(x)-f(e)}{x-e} = \frac{a}{e}$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \to e}} \frac{f(x)-f(e)}{x-e} = \lim_{\substack{< \\ x \to e}} \frac{(x-1)-(a+b)}{x-e}$$

هي حالة عدم التعيين من الشكل $(\frac{0}{0})$ لإزالتها نستعمل قاعدة لوبيتال لأنه لدينا البسط والمقام تابعين قابلين للاشتقاق جوار الصفر و مشتقة المقام لا تنعدم جوار الصفر. أيضا لأن $a+b=e-1$

باستعمال لوبيتال نجد

$$\lim_{\substack{< \\ x \to e}} \frac{f(x)-f(e)}{x-e} = 1$$

و منه

$$\frac{a}{e} = 1 \Rightarrow a = e$$

$$a+b=e-1 \Rightarrow b=-1$$

التمرين السابع عشر

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + 0(x^2) \text{ ، } g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + 0(x^2) \text{ ، }$$

$$h(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$$

نضع $X = \frac{1}{x}$ ومنه

$$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad X \to 0^+$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$h(\frac{1}{X})=e^{\frac{\ln(1+X)}{X}}=e^{\frac{X-\frac{X^2}{2}+0(X^2)}{X}}=e\,e^{-\frac{X}{2}+0(X)}$$

$$\Rightarrow h(x)=e-\frac{e}{2x}+0(\frac{1}{x})=a+\frac{b}{x}+0(\frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=e\\ b=-\frac{e}{2}\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}h(x)=a=e$$

التمرين الثامن عشر

I- نضع $X=\frac{1}{x}$ ومنه لما $x\to+\infty$, $X\to 0^+$.

لكتابة النشر المحدود لـ $f(x)$ جوار $(+\infty)$ يكفي كتابة النشر المحدود لـ $f\left(\frac{1}{X}\right)$ جوار الصفر.

$$f\left(\frac{1}{X}\right)=\frac{\frac{1}{X}+2}{\frac{1}{X^2}}\sqrt{\frac{1}{X^2}-1}=\frac{1+2X}{X}.\frac{X^2}{1}.\sqrt{\frac{1-X^2}{X^2}}=(1+2X)\sqrt{1-X^2}$$

لدينا $\sqrt{1-X^2}$ هو من الشكل $(1+u)^{\alpha}$ من أجل $u=X^2$ و $\alpha=\frac{1}{2}$

$$(1+u)^{\alpha}=1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}u^3+o(u^3)$$

$$=1-\frac{1}{2}X^2+o(X^3)$$

$$f(x)=1+\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

II- $$\lim_{x\to0}(e^x+x)^{1/x}=\lim_{x\to0}e^{\ln(e^x+x)^{1/x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{e^x+1}{e^x+x}}=e^2=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln(e^x+x)}{x}}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

تمارين مقترحة

التمرين الأول

أحسب النهايات:

$\lim\limits_{x\to 0}\left((\ln x)^2-\ln x\right)$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x}{4|x|-1}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-1\right)\cos\left(2/x+1\right)$ ،

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) / \; f(x)=\begin{cases}1-x & ,x\le 1\\ 2x & ,x>1\end{cases}$ ، $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+x}\right)$ ،

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-2/3}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+2x-1}{x^2-4}$ ، $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

التمرين الثاني

1) أدرس استمرار التابع f عند $x_0=1$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}x^{-1} & ,x\ge 1\\ \dfrac{3-x^2}{2} & ,x<1\end{cases}$$

و التابع h عند $x_0=0$ حيث

$$h(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & ,x\ne 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

2) عين قيمة m حتى تكون الدالة g مستمرة على IR حيث:

$$g(x)=\begin{cases}3x+m & ,x\in\left]-\infty,1\right]\\ x^2+1 & ,x\in\left]1,+\infty\right[\end{cases}$$

التمرين الثالث

أدرس قابلية الاشتقاق عند $x_0=2$ للتابع

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$f(x)=\begin{cases}\frac{9}{8}x+\frac{7}{4} & ,x\le 2\\ \sqrt{x^2+5x+2} & ,\ x\ge 2\end{cases}$$

و للتابع $g(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$ عند $x_0=0$ و للتابع $f(x)=x^2+|x|$ عند $x_0=1$.

التمرين الرابع

أوجد مشتقات التوابع التالية:

1) $f(x)=\sin\left(\frac{3x+2}{2x-1}\right)$ ، 2) $g(x)=\sqrt{x^2+1}+e^{\frac{1}{x}}$ ، 3) $h(x)=x\ln(3x+1)$ ،

4) $f_1(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ ، 5) $f_2(x)=(5x^2+3)(2x+3)$ ، 6) $f_3(x)=1/(5x-4)^2$

التمرين الخامس

أحسب باستعمال قاعدة لوبيتال النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{1-\cos x}$ ، 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^3+5x^2}$ ، 5) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$

التمرين السادس

1) أنشر باستعمال دستور تايلور حتى الرتبة 2 الدوال

1) $g(x)=e^x$, $x_0=2$

2) $h(x)=\ln x$, $x_0=1$

3) $f(x)=\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$

2) باستعمال نشر ماك لوران من الرتبة الأولى، أحسب $\ln(1{,}001)$ و $\sqrt{1{,}002}$.

التمرين السابع

أوجد (اذا أمكن) النشر المحدود جوار الصفر من الرتبة n للتوابع التالية:

1) $f(x)=e^x-\sqrt{1+x}$ $,n=3$

2) $f(x)=x-\arctan x$ $,n=4$

rekkabsoraya@yahoo.fr

3) $f(x)=e^{x}\sin x \quad ,n=4$

4) $f(x)=\sin x\ \cos x \quad , \ n=4$

5) $f(x)=\dfrac{chx}{\sin x} \quad ,n=3$

6) $f(x)=\dfrac{1}{1+\cos x} \quad ,n=2$

7) $f(x)=\dfrac{x^{2}+5x}{(1+x)^{3}} \quad ,n=3$

8) $f(x)=\ln(2-\sin x) \quad , \ n=4$

9) $f(x)=e^{ch2x} \quad ,n=3$

التمرين الثامن

أوجد بواسطة النشر المنتهى النهايات التالية

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-x}{x-\sin x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{2\sin x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{4x}-\dfrac{1}{2x\left(e^{\pi x}+1\right)}\right]$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2}{1-x^{2}}-\dfrac{3}{1-x^{3}}\right]$

التمرين التاسع

1- ليكن التابع f المعرف بـ $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^{2}}$.

أ- عين D_f مجموعة تعريف f.

ب- باستعمال قاعدة لوبيتال , أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2- نعرف التابع g بالشكل:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sin x}{x^{2}} & , \quad x\in D_f\\ 1 & , \quad x=0\end{cases}$$

أ- أدرس استمرار التابع g عند $x_0=0$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

ب- استنتج قابلية اشتقاق التابع g عند $x_0 = 0$.

ت- أعطي النشر المنتهي للتابع f في جوار 0 حتى الرتبة 4 .

rekkabsoraya@yahoo.fr

الفصل الرابع:

قوانين التشكيل الداخلي والبنى الجبرية

مصطلحات وتعاريف رياضية

عربي	فرنسي	انجليزي	الرمز أوالتعريف الرياضي
المصطلح			
عملية داخلية	Opération interne	Internal binary operation	$\forall x,\ y \in A : x * y \in A$
تجميعية	Associative	Associative	$\forall x, y, z \in A : (x * y) * z = x * (y * z)$
عنصر حيادي	Elément neutre	neutral element	$\exists e \in A, \forall x \in A : x * e = e * x = x$
عنصر نظير	Elément inverse	Inverse element	$\forall x \in A, \exists x' \in A : x * x' = x' * x = e$
تبديلية	Commutative	Commutative	$\forall x, y \in A : x * y = y * x$
توزيعية	Distributive	Distributive	$\forall x, y, z \in A :$ $x * (y\, o\, z) = (x * y) o (x * z)$ $(x o\, y) * z = (x * z) o (y * z)$
زمرة	Groupe	Group	$(G, *)$
زمرة تبديلية	Groupe abelien	Abelian group	$(G, *)$
حلقة	Anneau	Ring	$(A, *, o)$
حقل	Corps	Field	$(C, *, o)$
أعداد مركبة	nombres complexes	Complex numbers	$IC = \{z = (x, y) / x, y \in IR\} = IR^2$
شكل جبري	Forme algébrique	Algebrai form	$z = x + i\, y = \mathrm{Re}(z) + i\, \mathrm{Im}(z)$ $/ i^2 = -1$
مرافق عدد مركب	Complexe conjugué	Complex conjugate	$\bar{z} = x - i\, y$

rekkabsoraya@yahoo.fr

$r=\|z\|=\sqrt{a^2+b^2}$	Absolute value	Valeur absolue	قيمة مطلقة
$\theta=\arg z$ $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ;\ 0\le\theta\le 2\pi$ $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	Argument	Argument	عمدة
$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$	Trigonometric form	Forme trigonométrique	شكل مثلثي
$z=r\,e^{i\theta}$	Exponential form	Forme exponentielle	شكل أسي

rekkabsoraya@yahoo.fr

تمارين محلولة

التمرين الأول

هل القضايا التالية صحيحة؟ علل كل إجابة.

1) عملية الطرح المعرفة على ZI هي عملية داخلية.

2) $(Q,\cdot,+)$ تشكل بنية حقل تبديلي.

3) $1+e^{4i\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

التمرين الثاني

بين أن العملية الداخلية * تبديليه وتقبل عنصرا حياديا في IR ، حيث

$$\forall x,\ y\in IR: x*y=x(1-y)+y(1-x)$$

التمرين الثالث

I- هل (IN,T) زمرة تبديليه حيث $(\forall x,y\in IN;\ xT\,y=x-y)$ ؟

II- نعرف العلاقة $\Re$ على IC بالشكل

$$(\forall z_1,z_2\in IC;\ z_1\Re z_2)\Leftrightarrow\left(z_1=i^{1992}\,\overline{z_2}\right)$$

أ) أكتب العدد i^{1992} على الشكل الجبري.

ب) باستعمال (أ) بسط عبارة العلاقة $\Re$.

التمرين الرابع

لتكن العملية الداخلية * المعرفة على IR بالشكل التالي

$$\forall(x,y)\in IR^2: x*y=x^2+y$$

هل العملية * تبديليه؟ تقبل عنصرا حياديا في IR ؟ وضح ذلك.

rekkabsoraya@yahoo.fr

التمرين الخامس

نعرف على IR القانون * كما يلي $x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$

- تأكد أن القانون * تبديلي.
- أوجد العنصر الحيادي.
- حل المعادلة : $2 * x = 5$

التمرين السادس

لتكن العملية الداخلية * المعرفة على ZI كما يلي

$$\forall x, y \in ZI, \;\; x * y = xy^2 + x + y$$

1- هل * تبديليه؟ تجميعية ؟ تقبل عنصرا حياديا؟

2- حل المعادلتين التاليتين $x * 5 = 3,$ و $x * x = 3x$.

التمرين السابع

ليكن $z = e^{\frac{2\pi}{5}i}$ احسب $z^4 + z$ و $z^2 + z^3$

التمرين الثامن

نزود المجموعة $E = \{1, 2, 3, 4\}$ بقانون التركيب * المعرف بـ:

من أجل كل عددين x, y في E، $(x * y)$ هو باقي القسمة الإقليدية لـ x^y على 5.

1. تأكد أن * هي قانون داخلي في E.
2. هل $(E, *)$ زمرة ؟
3. حل في E المعادلة $(3 * x) * 2 = 1$.

التمرين التاسع

نعرف على IR القانون * كما يلي $\forall x, y \in IR, \;\; x * y = \frac{x}{y}$.

هل $(IR, *)$ زمرة ؟

rekkabsoraya@yahoo.fr

التمرين العاشر

أدرس الخاصية التجميعية للعملية $\otimes$ المعرفة على مجموعة الأعداد المركبة IC بالشكل التالي:

$$\forall (z_1, z_2) \in IC^2 : z_1 \otimes z_2 = z_1 + i|z_2|$$

التمرين الحادي عشر

بين أن العملية * الداخلية على IR ليست تبديليه، حيث:

$$\forall x, y \in IR : x * y = x - x y^2 + y$$

التمرين الثاني عشر

نعرف على IR العملية الداخلية * كما يلي :

$$\forall x, y \in IR ; x * y = \left(x^3 + y^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

1- بين أن $(IR,*)$ زمرة تبديليه.

2- حل المعادلة $(x*3)*3 = 3$.

التمرين الثالث عشر

نعرف على IR^2 قانون التركيب الداخلي * كالتالي :

$$\forall (x,y),(x',y') \in IR^2, \quad (x,y)*(x',y') = (x x', x y' + y)$$

1- هل القانون * تبديلي؟

2- برهن أن القانون * تجميعي و أنه يقبل عنصرا حياديا في IR^2.

3- عين المجموعة G من IR^2 التي تقبل نظيرا بالنسبة للقانون *.

4- ما هي بنية $(G,*)$ الجبرية؟

التمرين الرابع عشر

نعرف على $E =]-1,1[$ العملية الداخلية * كما يلي:

$$x * y = \frac{x + y}{1 + x y}$$

1- بين أن $(E,*)$ زمرة تبديلية.

rekkabsoraya@yahoo.fr

2- حل في E المعادلتين التاليتين $(a)\quad x*x=\frac{1}{2}$ $\qquad (b)\quad x*2x=-\frac{1}{2}$

التمرين الخامس عشر

1- ضع على الشكل الجبري العدد المركب $z=\frac{x+i\sqrt{3}\,y}{1-i\sqrt{3}}$ حيث x و y أعداد حقيقية كيفية.

2- لتكن العلاقة $\Re$ المعرفة على IR بالشكل التالي:

$$\forall x,y\in IR;\ (x\Re y)\Leftrightarrow\left(\frac{x+i\sqrt{3}\,y}{1-i\sqrt{3}}=-y\right)$$

باستعمال السؤال (1) بسط العلاقة $\Re$.

التمرين السادس عشر

لتكن المجموعة A المعطاة بالشكل: $\qquad A=IR\cup(Q-IC)$

1- عين المجموعة A.

2- بين أن العملية * المعرفة بالشكل:

$$\forall x,y\in A:\ x*y=x+i\,y$$

ليست داخلية على المجموعة A لكنها داخلية على مجموعة الأعداد المركبة IC.

هل $(IC,*)$ زمرة ؟

عين حسب قيم $x\in IR$ طويلة و عمدة العدد المركب z المعرف بـ

$$z=(x^2+x-2)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

التمرين السابع عشر

أحسب z^2+z^3 و $z+z^4$ من أجل $z=e^{\frac{\pi i}{5}}$.

التمرين الثامن عشر

لتكن المجموعة $E=\left\{(x,y)\in IR^2;\ x^2-y^2=1\right\}$.

نزود E بالعملية $(*)$ المعرفة بـ

$$\forall (x,y),(x',y')\in E\qquad (x,y)*(x',y')=(xx'+yy',xy'+yx')$$

برهن أن $(E,*)$ زمرة تبديليه.

rekkabsoraya@yahoo.fr

حلول التمارين

التمرين الأول

1) صحيح لأن $\forall x, y \in ZI,\ x-y \in ZI$.

2) خطأ لأن الجمع ليس توزيعي على الضرب $2+(1.3)=5 \wedge 2.1+2.3=8$

أو لأن العنصر $x=0$ ليس له نظير(مقلوب) بالنسبة لعملية الضرب في Q.

3) صحيحة لأن $1+e^{\frac{4i\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

التمرين الثاني

العملية $*$ تبديليه $\Leftrightarrow (\forall x,\ y \in IR : x*y = x*y)$

ليكن العنصران x, y من IR فان

$$y*x = y(1-x)+x(1-y) \quad \text{و} \quad x*y = x(1-y)+y(1-x)$$

بما أن الجمع تبديلي في IR فان العملية $*$ تبديليه.

e عنصر حيادي في $IR \Leftrightarrow (\forall x \in IR : x*e = e*x = x)$

بما أن $*$ تبديليه يكفي البحث عن العنصر الحيادي من جهة واحدة.

ليكن x عنصر من IR نبحث عن حل لـ $x*e=x$.

$$x(1-e)+e(1-x)=x \Rightarrow (e(1-2x)=0) \Rightarrow \left(e=0 \vee x=\tfrac{1}{2}\right)$$

من تعريف العنصر الحيادي فان $e=0$.

التمرين الثالث

I - T داخلية على IN $\Leftrightarrow (\forall x, y \in IN;\ xT\,y \in IN)$

من أجل $x=0$ و $y=1$ فان $xT\,y=-1 \notin IN$

ومنه العملية T ليست داخلية على IN. إذن (IN,T) ليست زمرة.

II - أ) $i^{1992}=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{1992}$ باستعمال علاقة موافر نجد

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$i^{1992}=\cos\left(1992\,\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(1992\,\frac{\pi}{2}\right)$$

و منه

$$i^{1992}=\cos(996\pi)+i\sin(996\pi)=1$$

ب)باستعمال (أ) العلاقة $\Re$ تصبح على الشكل:

$$(\forall z_1,z_2\in IC;\ z_1\Re z_2)\Leftrightarrow(z_1=\overline{z_2})$$

التمرين الرابع

-1 *تبديليه $\Leftrightarrow$ $\forall x,y\in IR\quad x*y=y*x$

$x*y=x^2+y$ و $y*x\overset{(a)}{=}y^2+x$.

نأخذ $x=1$ و $y=-1$ نجد $x*y=0\neq 2=y*x$.

ومنه * غير تبديليه.

-2 تقبل عنصرا حياديا $\Leftrightarrow$ $\exists\, e\in IR\ ,\forall x\in IR/\ \ x*e=e*x=x$

نلاحظ أن * ليست تبديليه ومنه نبحث عن العنصر الحيادي عن اليمين و عن اليسار.

$e*x=x\Leftrightarrow e^{é}+x=x\Rightarrow e=0$ و $x*e=x\Leftrightarrow x^{é}+e=x\Rightarrow e=x-x^{é}$

e بدلالة x ومنه العنصر الحيادي غير موجود. (مثلا $\begin{cases}x=1\Rightarrow e=0\\x=2\Rightarrow e=-2\end{cases}$)

التمرين الخامس

(1) * تبديليه $\Leftrightarrow$ $(\forall x,y\in IR, x*y=y*x)$

بما أن الضرب العادي تبديلي في IR فان

$$x*y=x\,y+(x^2-1)(y^2-1)=x\,y+(y^2-1)(x^2-1)=y*x$$

(2) العنصر الحيادي $\Leftrightarrow$ $\exists\, e\in IR,\forall\, x\in IR\ ,\ x*e=e*x=x$

(* تبديليه) ومنه

$$x\,e+(x^2-1)(e^2-1)=x\ \Rightarrow\ (e-1)\left[x+(x^2-1)(e+1)\right]=0\Rightarrow e=1$$

(3) ($2*x=5\Leftrightarrow 3x^2+2x-8=0$) ومنه تقبل حلين $x_1=-2$ و $x_2=\dfrac{4}{3}$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

التمرين السادس

1- * تبديليه $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in IZ : x * y = y * x$

نأخذ $x = 1 \wedge y = 2$ إذن $x * y = 7 \neq 5 = y * x$

ومنه * ليست تبديليه.

- *تجميعية $\Leftrightarrow$ $\forall x, y, z \in IZ \ x*(y*z) = (x*y)*z$

نأخذ $x = 2 \wedge y = 1 \wedge z = -1$ نجد $(x*y)*z = 9 \neq 5 = x*(y*z)$.

ومنه * ليست تجميعية.

-* تقبل عنصرا حياديا $\Leftrightarrow$ $\exists e \in IZ, \forall x \in IZ \ / \ x*e = e*x = x$

$$(x*e = x \Leftrightarrow e(ex+1) = 0 \Rightarrow e = 0) \wedge (e*x = x \Leftrightarrow e(x^2-1) = 0 \Rightarrow e = 0)$$

ومنه * تقبل عنصرا حياديا $e = 0$.

-2 $$x*5 = 3 \Leftrightarrow 26x + 5 = 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{13} \notin IZ$$

$$x*x = x \Leftrightarrow x^3 + 2x = 3x \Rightarrow x(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$$

التمرين السابع

$$1) \quad z^4 + z = e^{\frac{8\pi}{5}i} + e^{\frac{2\pi}{5}i} = e^{\frac{(10-2)\pi}{5}i} + e^{\frac{2\pi}{5}i} = e^{2\pi i} e^{\frac{-2\pi}{5}i} + e^{\frac{2\pi}{5}i} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$2) \quad z^2 + z^3 = e^{\frac{4\pi}{5}i} + e^{\frac{6\pi}{5}i} = e^{\frac{(10-4)\pi}{5}i} + e^{\frac{4\pi}{5}i} = e^{2\pi i} e^{\frac{-4\pi}{5}i} + e^{\frac{4\pi}{5}i} = 2\cos\frac{4\pi}{5}$$

التمرين الثامن

1- $E = \{1, 2, 3, 4\}$ بما أن باقي القسمة على 5 أقل أو يساوي 4 يكفي أن

<u>*نلاحظ فقط من الجدول أن الباقي يختلف عن 0*</u> و منه

$x * y \in E \qquad \forall x, y \in E$ و منه العملية داخلية

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	4	3	1
3	3	4	2	1
4	4	1	4	1

2- نبين أن * ليست تجميعية

يكفي أخذ مثلا $x = 2 \ , \ y = 2 \ , \ z = 3$

rekkabsoraya@yahoo.fr

لدينا $4=4*3=(2*2)*3=(x*y)*z$ و $x*(y*z)=2*(2*3)=2*3=3$

نلاحظ أن $(x*y)*z\neq x*(y*z)$

و منه $(E,*)$ ليست زمرة.

3- البحث عن x في E حيث: $(3*x)*2=1$ من أجل $x=1$

لدينا $x=1 \Leftarrow (3*1)*2=3*2=4\neq 1$ ليس حل

من أجل $x=2$ لدينا $x=2 \Leftarrow (3*2)*2=4*2=1$ هو حل

من أجل $x=3$ لدينا $x=3 \Leftarrow (3*3)*2=2*2=4\neq 1$ ليس حل

من أجل $x=4$ لدينا $x=4 \Leftarrow (3*4)*2=1*2=1$ هو حل و منه: $S=\{2\ ,\ 4\ \}$

التمرين التاسع

" * " تجميعية $\Leftrightarrow \forall x,y,z\in ZI,(x*y)*z=x*(y*z)$

$$\exists\begin{cases}x=0\\y=1\\z=2\end{cases}\quad/\begin{cases}(x*y)*z=-3\\x*(y*z)=1\end{cases}$$

ومنه " * " ليست عملية تجميعية.

التمرين العاشر

$\otimes$ تجميعية $\Leftrightarrow (\forall z_1,z_2,z_3\in IC: z_1\otimes(z_2\otimes z_3)=(z_1\otimes z_2)\otimes z_3)$.

من أجل $z_1=1$ و $z_2=1$ و $z_3=i$ نجد

$$z_1\otimes(z_2\otimes z_3)=1\otimes(1+i|1|)=1+i|1+i|=1+i\sqrt{2}$$

$$(z_1\otimes z_2)\otimes z_3=(1+i|1|)\otimes i=1+i+i|i|=1+2i$$

$$z_1\otimes(z_2\otimes z_3)\neq(z_1\otimes z_2)\otimes z_3$$

و منه العملية $\otimes$ ليست تجميعية.

rekkabsoraya@yahoo.fr

التمرين الحادي عشر

العملية * الداخلية على IR ليست تبديليه $\Leftrightarrow (\exists x, y \in IR : x * y \neq y * x)$

فعلا، يكفي أخذ $x=1$ و $y=2$ نجد $1*2=-1$ و $2*1=+1$

التمرين الثاني عشر

1/ أ/ * تبديليه $\Leftrightarrow \quad \forall \ x, y \in IR, \quad x * y = y * x$

لدينا $x * y = \left(x^3 + y^3\right)^{\frac{1}{3}}$ و $y * x = \left(y^3 + x^3\right)^{\frac{1}{3}}$

بما أن الجمع العادي تبديلي في IR إذن * تبديليه .

ب/ * تجميعية $\Leftrightarrow \ \forall \ x, y, z \ \in IR, (x * y) * z = x * (y * z)$

لدينا $(x * y) * z = \left[\left(x^3 + y^3\right) + z^3\right]^{\frac{1}{3}}$ و $x * (y * z) = \left[x^3 + \left(y^3 + z^3\right)\right]^{\frac{1}{3}}$

الجمع العادي تجميعي في IR إذن * تجميعية.

ج/ العنصر الحيادي $\Leftrightarrow \exists \ e \in IR, \ \forall x \in IR \quad : x * e = e * x = x$

العملية " * " تبديليه إذن $x * e = x \quad \overset{(\&)}{\Leftrightarrow} \left(x^3 + e^3\right)^{\frac{1}{3}} = x$

$\Rightarrow e = 0$

د/ النظير $\Leftrightarrow \forall \ x \in IR, \ \exists x' \in IR / x * x' = x' * x = 0$

العملية * تبديليه إذن $x * x' = 0 \ \overset{(\&)}{\Leftrightarrow} \left(x^3 + x'^3\right)^{\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow x' = -x$

2/ $(x * 3) * 3 = 3 \ \overset{(\&)}{\Leftrightarrow} \left(x^3 + 3^3 + 3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow x = -3$

التمرين الثالث عشر

-1 * تبديلي $\Leftrightarrow \forall (x, y), (x', y') \in IR^2 : \ (x, y) * (x', y') = (x', y') * (x, y)$

باختيار $(x, y) = (-2, 1) \wedge (x', y') = (-1, 2)$ نجد

$$(x, y) * (x', y') = (2, -3) \neq (x', y') * (x, y) = (2, 1)$$

ومنه * غير تبديلي.

rekkabsoraya@yahoo.fr

2- أ-* تجميعي $\Leftrightarrow$ $\forall(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in IR^2;$
$(x,y)*[(x',y')*(x'',y'')]=[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'')$

$$(x,y)*[(x',y')*(x'',y'')]=(x,y)*(x'x'',x'y''+y')=(xx'x'',xx'y''+xy'+y)$$

$$[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'')=(xx',xy'+y)*(x'',y'')=(xx'x'',xx'y''+xy'+y)$$

الطرف الأول يساوي الطرف الثاني ومنه * تجميعي.

ب- العنصر الحيادي $\Leftrightarrow$

$$\exists(e,e')\in IR^2,\forall(x,y)\in IR^2,(e,e')*(x,y)=(x,y)*(e,e')=(x,y)$$

* غير تبديلي ومنه نبحث عن العنصر الحيادي من اليمين و من اليسار.

$$(e,e')*(x,y)=(x,y)\Leftrightarrow(ex,ey+e')=(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}ex=x\\ ey+e'=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e=1\\ e'=0\end{cases}$$

$$(x,y)*(e,e')=(x,y)\Leftrightarrow(xe,xe'+y)=(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}xe=x\\ xe'+y=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e=1\\ e'=0\end{cases}$$

و منه العنصر الحيادي هو $(e,e')=(1,0)$

3- النظير $\Leftrightarrow$ $\forall(x,y)\in IR^2,\exists(x',y')\in IR^2,(x,y)*(x',y')=(x',y')*(x,y)=(e,e')$

*غير تبديلي ومنه نبحث عن النظير من اليمين ومن اليسار.

$$(x,y)*(x',y')=(1,0)\Leftrightarrow\begin{cases}xx'=1\\ xy'+y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{1}{x}\\ y'=\dfrac{-y}{x}\end{cases}\quad x\neq 0$$

ومنه إذا كان $x\neq 0$ فإن $(x',y')=\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{-y}{x}\right)$ وبالتالي $G=IR^*\times IR$

4- $(G,*)$ زمرة غير تبديليه.

التمرين الرابع عشر

1- * تبديلية $\Leftrightarrow$ $\forall x,y\in E: x*y=y*x$

(لأن الجمع و الضرب العاديين تبديلين في IR) $\dfrac{x+y}{1+xy}=\dfrac{y+x}{1+yx}$

rekkabsoraya@yahoo.fr

و منه * تبديلية .

2 - * تجميعية $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in E : x*(y*z)=(x*y)*z$

$$x*(y*z)=x*\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)=\frac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz}$$

$$(x*y)*z=\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)*z=\frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

نلاحظ أن

$$x*(y*z)=(x*y)*z$$

و منه * تجميعية.

* تقبل عنصرا حياديا $\Leftrightarrow \exists e\in E / \ \forall x\in E : x*e=e*x=x$

بما أن * عملية تبديلية إذن نكتفي بجهة واحدة

$$x*e=x \Leftrightarrow x+e=x+ex^2 \Leftrightarrow e\left(1-x^2\right)=0 \ \Rightarrow e=0 \ (\forall x\in E)$$

* النظير $\Leftrightarrow \forall x\in E, \exists x'\in E : x*x'=x'*x=e$

بما أن * عملية تبديلية إذن نبحث عن جهة واحدة

$$x*x'=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+x'}{1+xx'}=0 \ \Rightarrow \ x'=-x$$

و بالتالي $(E,*)$ زمرة تبديلية

-2 $$(a) \quad x*x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1+x^2-4x=0$$

$$\Delta=12>0 \ x_1=2+\sqrt{3}\notin E \ \wedge \ x_2=2-\sqrt{3}\in E$$

$$(b) \quad x*2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3x}{1+2x^2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2+6x+1=0$$

$$\Delta=28>0 \ x_1=-\frac{3+\sqrt{7}}{2}\notin E \ \wedge \ x_2=\frac{-3+\sqrt{7}}{2}\in E$$

التمرين الخامس عشر

rekkabsoraya@yahoo.fr

-1 $z=\frac{\left(x+i\sqrt{3}\,y\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{4}(x-3y)+i\frac{\sqrt{3}}{4}(x-y)$

-2 أ- $\forall x,y\in IR;\ (x\Re y)\Leftrightarrow\left(\frac{x+i\sqrt{3}\,y}{1-i\sqrt{3}}=-y\right)$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}(x-3y)+i\frac{\sqrt{3}}{4}(x+y)=-y\ \Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{4}(x-3y)=-y\\ x+y=0\end{cases}\ \Rightarrow x=-y$$

التمرين السادس عشر

-1 لدينا المجموعة $Q\subset IC$ ومنه $Q-IC=\phi$. إذن $A=IR$.

-2 ا) العملية * ليست داخلية على المجموعة A $\Leftrightarrow\left(\exists x,y\in IR: x*y\notin IR\right)$

من أجل $x=0$ و $y=1$ لدينا $x*y=i\notin IR$

ومنه العملية * ليست داخلية على المجموعة A.

ب) العملية * داخلية على المجموعة IC $\Leftrightarrow\forall z_1\wedge z_2\in IC: z_1*z_2\in IC$

$\left.\begin{array}{l}z_1\in IC\\ z_2\in IC\end{array}\right\}\Rightarrow z_1+iz_2\in IC$ (لأن الجمع و الضرب عمليتان داخليتان في IC)

$(IC,*)$ زمرة $\Leftrightarrow$ (* داخلية ، تجميعية، تقبل عنصرا حياديا ولكل عنصر نظير)

العملية * تجميعية $\Leftrightarrow\left(\forall z_1,z_2,z_3\in IC: z_1*(z_2*z_3)=(z_1*z_2)*z_3\right)$

من أجل $z_1=0$ ، $z_2=1$ و $z_3=1$ عناصر من IC فان

$$z_1*(z_2*z_3)=i-1\neq\ (z_1*z_2)*z_3=2i$$

ومنه العملية * ليست تجميعية.

إذن $(IC,*)$ ليست زمرة.

rekkabsoraya@yahoo.fr

التمرين السابع عشر

$$z^2+z^3=e^{\frac{2\pi i}{5}}+e^{\frac{3\pi i}{5}}=e^{\frac{2\pi i}{5}}+e^{\frac{(5-2)\pi i}{5}}=e^{\frac{2\pi i}{5}}+e^{\pi .i}e^{\frac{-2\pi i}{5}}=2i\sin\frac{2\pi}{5}$$

$$z+z^4=e^{\frac{\pi i}{5}}+e^{\frac{4\pi i}{5}}=e^{\frac{\pi i}{5}}+e^{\frac{(5-1)\pi i}{5}}=e^{\frac{\pi i}{5}}+e^{\frac{-\pi i}{5}}e^{\pi i}=2i\sin\frac{2\pi}{5}$$

التمرين الثامن عشر

$(E,*)$ زمرة تبديليه $\Leftrightarrow$

1- $E\neq\Phi$

2- $(*)$داخلية في E

3- $(*)$ تبديلية و تجميعية

4- $(*)$ تقبل عنصرا حياديا في E

5- لكل عنصر من E نظير في E

1- $E\neq\Phi$ لأن $(1,0)$ يحقق $1^2-0^2=1$

2- $(*)$داخلية في E $\Leftrightarrow$ $\forall(x,y),(x',y')\in E:\ (x,y)*(x',y')\in E$

$(x,y)\in E\Rightarrow x^2-y^2=1$ و $(x',y')\in E\Rightarrow x'^2-y'^2=1$

$$(x,y)*(x',y')=(xx'+yy',xy'+yx')\in E\Leftrightarrow (xx'+yy')^2-(xy'+yx')^2=1$$

$$(xx'+yy')^2-(xy'+yx')^2=x^2(x'^2-y'^2)-y^2(x'^2-y'^2)$$

$$=(x'^2-y'^2)(x^2-y^2)=1\times1=1$$

و منه $(*)$داخلية.

3- أ- $(*)$ تبديليه $\Leftrightarrow \forall(x,y),(x',y')\in E:\ (x,y)*(x',y')=(x',y')*(x,y)$.

$$(x,y)*(x',y')=(xx'+yy',xy'+yx')=(x'x+y'y,y'x+x'y)$$

$$=(x'x+y'y,x'y+y'x)\ )\ =(x',y')*(x,y)$$

(لأن الضرب و الجمع العاديين تبديليين في IR)

و منه (*) تبديليه.

ب- (*)تجميعية $\Leftrightarrow$

$$\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'')\in E:$$
$$(I)=(x,y)*[(x',y')*(x'',y'')]=[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'')=(II)$$
$$(I)=(x,y)*(x'x''+y'y'',x'y''+x''y')$$
$$=(xx'x''+xy'y''+yx'y''+yx''y',xx'y''+xx''y'+yx'x''+yy'y'')$$
$$=((xx'+yy')x''+(xy'+yx')y'',x''(xy'+yx')+y''(xx'+yy'))$$
$$=(xx'+yy',xy'+yx)*(x'',y'')=[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'')=(II)$$

و منه (*)تجميعية.

4 – (*)تقبل عنصرا حياديا

$$\exists (e,e')\in E,\forall (x,y)\in E:\ (x,y)*(e,e')=(e,e')*(x,y)=(x,y)\Leftrightarrow$$

و بما أن (*) تبديليه إذن نبحث عن العنصر الحيادي و النظير من جهة واحدة.

$$(x,y)*(e,e')=(x,y)\Leftrightarrow \begin{cases} xe+ye'=x......(1)\\ xe'+ye=y.......(2)\end{cases}$$

$$(1)\times(-y)+(2)\times(x)\Leftrightarrow -y^2e'+x^2e'=0\Rightarrow e'(x^2-y^2)=0\Rightarrow e'=0$$

(لأن $x^2-y^2=1$)

$$(1)\times(-x)+(2)\times(y)\Leftrightarrow -x^2e+y^2e=-x^2+y^2\Rightarrow e=1$$

و منه العنصر الحيادي هو $(e,e')=(1,0)$ و هو ينتمي إلى E

5- نبحث عن العنصر النظير

$$\forall (x,y)\in E,\exists (x',y')\in E,:\ (x,y)*(x',y')=(x',y')*(x,y)=(1,0)\Leftrightarrow$$

$$(x,y)*(x',y')=(1,0)\Leftrightarrow \begin{cases} xx'+yy'=1......(1)\\ xy'+yx'=0.......(2)\end{cases}$$

$$(1)\times(-y)+(2)\times(x)\Leftrightarrow -y^2y'+x^2y'=-y\Rightarrow y'(x^2-y^2)=-y\Rightarrow y'=-y$$

$$(1)\times(-x)+(2)\times(y)\Leftrightarrow -x^2x'+y^2x'=-x\Rightarrow =-x'(x^2-y^2)=-x\Rightarrow x'=x$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

(لأن $x^2 - y^2 = 1$) و منه نظير (x,y) هو (x',y') يحقق $x'^2 - y'^2 = 1$ و ينتمي إلى E.

تمارين مقترحة

التمرين الأول

لتكن المجموعة $G = \{(x,y) \in IR \times IR:\ x^2 - y^2 = 1\}$. نزود G بالعملية $\perp$ المعرفة كما يلي:

$$\forall (x,y),(z,w) \in G : (x,y) \perp (z,w) = (xz + yw, xw + yz)$$

تأكد أن العملية $\perp$ داخلية في G .

التمرين الثاني

لتكن العمليتان $*$ و $\circ$ المعرفتان على IR مجموعة الأعداد الحقيقية بالشكل التالي:

$$\forall (a,b) \in IR^2 : a \circ b = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{و} \quad \forall (a,b) \in IR^2 : a * b = \sqrt{a^2 + b^2}$$

أدرس الخاصية التجميعية ووجود العنصر الحيادي؟ هل $(IR,*)$ زمرة؟ هل $(IR,\circ)$ زمرة؟

التمرين الثالث

نعرف على IR مجموعة الأعداد الحقيقية قانون تركيب داخلي نرمز له Δ بالشكل التالي

$$\forall (a,b) \in IR \times IR : a\ \Delta\ b = \begin{cases} \dfrac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} & , si(a,b) \neq (0,0) \\ 0 & , si(a,b) = (0,0) \end{cases}$$

أحسب $((-1)\Delta 1)\Delta 1$ و $(-1)\Delta(1\Delta 1)$. هل Δ تجميعية؟ هل (IR,Δ) تشكل زمرة؟

التمرين الرابع

نزود ZI^2 بالعمليتين الداخليتين $+$ و $\bullet$ التاليتين:

$$(a,b).(a',b') = (aa',0) \ ، (a,b) + (a',b') = (a + a', b + b')$$

برهن أن $(ZI^2, +, \bullet)$ حلقة تبديليه.

التمرين الخامس

لتكن العمليتين الداخليتين التاليتين $*$, $\circ$ بحيث:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$a \circ b = a + b - ab \quad , \quad a * b = a + b - 1$$

هل $(IR, *, \circ)$ حقل تبديلي؟

التمرين السادس

ليكن $z = 3 - 5i$ ، $w = -2 + i$

أحسب: أ) $z + \overline{w}$ ، ب) $|z|$ ، ج) $\overline{z}\, w$ ، د) $\dfrac{z}{w}$

التمرين السابع

لتكن $(A, +, .)$ و $(A', +, .)$ حلقتين تبديليتين، نعرف على $A \times A'$ قانوني تركيب داخليين كالتالي

$$\forall (x, x'), (y, y') \in A \times A' : (x, x') \oplus (y, y') = (x + y, x' + y')$$
$$(x, x') \otimes (y, y') = (xy, x'y')$$

هل $(A \times A', \oplus, \otimes)$ تشكل حلقة تبديليه؟

التمرين الثامن

ضع على شكل جبري $(a, b \in IR, \quad a + ib)$ الأعداد المركبة التالية

1) $(1+i)^7$, 2) $z = (1+2i)^3$, 3) i^{11}, 4) i^3 , 5) $(1-i)^{11}$, 6) i^{2007} ,

7) $\left(\sqrt{3} + i\right)^{10}$, 8) $(1-i)^4$, 9) $\dfrac{1}{3i}$, 10) $4\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) + \cos\pi + i\sin\pi$

, 11) $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{11}$, 12) $(1+i)^{25}$.

التمرين التاسع

أكتب على الشكل الجبري $(a, b \in IR, \quad a + ib)$ الأعداد:

$3\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right) + \cos\pi + i\sin\pi$ ، $\dfrac{3-i}{1+2i}$ و $\dfrac{3-i}{1+2i} + \dfrac{i}{1+i}$.

التمرين العاشر

أكتب على الشكل الأسي $r\, e^{i\theta}$ الأعداد:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$(1-i)^5$ ، $\left(i-\sqrt{3}\right)^4$ ، $(1+i)^3$ ، $1+i$ ، $\left(\frac{1+\sqrt{3}\ i}{1-i}\right)^7$ و $\frac{(1-i)^5\left(i-\sqrt{3}\right)^4}{(1+i)^3}$.

التمرين الحادي عشر

نعرف التطبيق f من $IC \setminus \{i\}$ في IC بـ: $f(z)=\frac{z+i}{z-i}$

2. أحسب طويلة $f(z)$ حيث z حقيقي.
3. عين مجموعة النقاط ذات السابقة z حيث $f(z)$ حقيقي.
4. عين مجموعة النقاط ذات السابقة z حيث $f(z)$ تخيلي صرف.

rekkabsoraya@yahoo.fr

الفصل الخامس:

الفضاء الشعاعي والتطبيقات الخطية

مصطلحات وتعاريف رياضية

الرمز أوالتعريف الرياضي	المصطلح: انجليزي	المصطلح: فرنسي	المصطلح: عربي
$(V,\oplus,\otimes)$	Space vector	Espace vectoriel	فضاء شعاعي
$\forall \alpha \in K, \forall x \in V : \alpha \otimes x \in V$	External bynary operation	Opération externe	عملية خارجية
$\forall \alpha_1,\dots,\alpha_n \in K :$ $\alpha_1.x_1+\dots+\alpha_n.x_n = 0_V$ $\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0_K$	Linearly independent vectors	Vecteurs linéairement indépendants	أشعة مستقلة خطيا
$\exists \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \in K /$ $\alpha_i \neq 0 \ , i\in\{1,\dots,n\} \quad \wedge$ $\alpha_1.x_1+\alpha_2.x_2+\dots+\alpha_n.x_n=0_V$	Linearly dependent vectors	Vecteurs linéairement dépendants	أشعة مرتبطة خطيا
$\forall x\in V : \exists \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \in K :$ $x=\alpha_1 x_1+\dots+\alpha_n x_n$	Linear combination	Combinaison linéaire	مزج خطي
	Basis	Base	أساس
$\dim V$	Dimension	Dimension	بعد
$\forall \alpha,\beta \in K, \forall x,y\in E :$ $f(\alpha x+\beta y)=\alpha\ f(x)+\beta\ f(y)$	Linear map	Application linéaire	تطبيق خطي
$\ker f=\{x\in E / f(x)=0_F\}$	Kernel	Noyau	نواة
$\operatorname{Im} f=\{f(x)/x\in E\}=f(E)$	Image	Image	صورة
$rank f=\dim(\operatorname{Im} f)$	Rank	Rang	رتبة

rekkabsoraya@yahoo.fr

تمارين محلولة

التمرين الأول

هل القضايا التالية صحيحة؟ علل كل إجابة.

1) المجموعة $\{(2,0,3),(0,1,5),(0,1,0),(1,1,-1)\}$ مرتبطة خطيا.

2) التطبيق $f:(x,y)\mapsto f(x,y)=(x,y+1)$ خطي.

3) المجموعة $\{(1,1,2,3),(1,-1,3,2),(0,0,2,2),(0,0,-2,2)\}$ تشكل أساسا للفضاء IR^4 على الحقل IR ؟

4) المجموعة $\{(1,i),(0,1),(i,i),(1,1)\}$ تشكل أساسا لـ IC^2 على الحقل IR ؟

التمرين الثاني

ليكن f تطبيق من IR نحو IR^3 معرف بالشكل: $f(x)=(x,0,2x)$.

1- برهن أن التطبيق f خطي.

2- عين $\ker f$.

3- استنتج أن التطبيق f ليس غامرا.

التمرين الثالث

أجب بنعم أو لا مع التعليل .

1) ليكن $\Im(IR,IR)$ الفضاء الشعاعي للتطبيقات من IR نحو IR و لتكن المجموعة B المعرفة بـ $B=\{f\in\Im / f(0)=1\}$

B فضاء شعاعي جزئي من $\Im$.

2) إتحاد فضاءين شعاعيين جزئيين F_1 و F_2 من V على IK هو فضاء شعاعي جزئي من V على IK .

3) كل مجموعة جزئية من مجموعة أشعة مرتبطة خطيا تكون مرتبطة خطيا .

4) إذا كان $V=[A]$ حيث $A=\{X_1,X_2,...,X_N\}$ فإن $\dim V=n$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

التمرين الرابع

أجب بنعم أو لا ثم علل.

1) المجموعة $A=\{(x,y)\in IR^2 \ / \ x.y=0\}$ ف.ش.ج.من IR^2 على IR .

2) كل مجموعة جزئية من مجموعة أشعة مرتبطة خطيا تكون مرتبطة خطيا .

3) إذا كانت $A=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ مجموعة مولدة للفضاء الشعاعي V على الحقل K فإن $\dim V=n$.

التمرين الخامس

ليكن التطبيق الخطي f حيث

$$\begin{aligned} f &: IR^3 \to IR^2 \\ (x,y,z) &\mapsto f(x,y,z)=(x+y,x+y+z) \end{aligned}$$

1- أوجد $\ker f$ ثم عين $\dim \ker f$.

2- استنتج $\dim \operatorname{Im} f$ ، هل f غامر؟

التمرين السادس

ليكن f تطبيق خطي معرف من IR^3 نحو IR^3 بالشكل

$$f(x,y,z)=(x-y,y-z,z-x)$$

1 - أوجد أساس و بعد $\operatorname{Im} f$.

2 - استنتج بعد $\ker f$.

3 - هل التطبيق f متباين؟ غامر؟

التمرين السابع

ليكن التطبيق الخطي f المعرف من IR^2 نحو IC بـ $f(x,y)=x-2y+3iy$

1) عين $\ker f$ ثم $\dim \ker f$.

2) استنتج $\dim \operatorname{Im} f$.

3) هل التطبيق الخطي f غامر؟

rekkabsoraya@yahoo.fr

التمرين الثامن

ليكن f تطبيقا خطيا معرفا من IR^3 نحو IR^2 بـ $f(x,y,z)=(x-y-z,0)$

1) عين أساسا لـ $\ker f$ ثم استنتج $\dim \ker f$.

2) هل التطبيق الخطي f تقابلي؟

التمرين التاسع

ليكن $E=\left\{(x,y,z)\in IR^3;\ 2x+z-y=0\right\}$

1- برهن أن E ف. ش.ج من IR^3.

2- عين أساسا لـ E.

3- ليكن f التطبيق الخطي المعرف كما يلي

$$f: IR^3 \to IR^3$$
$$(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=(y+z,x+z,x+y)$$

أ- أحسب $f(E)$.

التمرين العاشر

لتكن

$$f: IR^3 \to IR^3$$
$$f(x,y,z)=(x-y+z,-x+y-z,\ x-y+z)$$

1- عين $\ker f$ ثم استنتج $\dim \ker f$.

2- عين أساس لـ $\operatorname{Im} f$.

3- هل f تقابلي؟

4- ليكن $V=\left\{(x,y,z)\in IR^3 /\ x+y-z=0\right\}$

أ- بين أن V ف.ش.ج من IR^3.

ب- عين أساسا لـ $f(V)$ ثم استنتج $\dim f(V)$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

التمرين الحادي عشر

ليكن التطبيق الخطي التالي

$$g : IR^3 \to IR^3$$
$$(x,\ y,\ z) \to f(x,\ y,\ z) = (2x,\ 4x - y,\ 2x + 3y - z)$$

هل g متباين؟ غامر؟ تقابلي؟

التمرين الثاني عشر

ليكن التطبيق الخطي f حيث

$$f : IR^3 \to IR^3$$
$$(x, y, z) \to f(x, y, z) = (x - 2y, y + z, 0)$$

1- أوجد $\ker f$ ثم عين $\dim \ker f$.

2- استنتج $\dim \mathrm{Im} f$، هل f غامر؟

التمرين الثالث عشر

ليكن f تطبيق خطي معرف من IR^2 نحو IR^2 بالشكل: $f(x, y) = (x - 3y,\ 2x)$

1- عين $\ker f$ ثم $\dim \ker f$.

2- هل التطبيق f تقابلي؟

التمرين الرابع عشر

ليكن f التطبيق الخطي

$$f \quad : IR^4 \to IR^3$$
$$(x, y, z, t) \to f(x, y, z, t) = (z + t, x - y, x + y)$$

1- عين أساسا لـ $\ker f$ مستنتجا $\dim \ker f$.

2- هل f متباين؟ غامر؟ تقابلي؟

3- عين أساسا لـ $\mathrm{Im}\, f$.

ليكن $V = \{\ (x, y, z, t) \in IR^4 \ /\ x + y + z + t = 0 \}$

أ- بين أن V ف.ش.ج من IR^4 .

ب- أحسب $f(V)$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

التمرين الخامس عشر

ليكن f التطبيق المعرف بـ

$$f : IR^3 \to IR^3$$
$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (2x - y, y, 3x - 4z)$$

1) بين أن f خطي.

2) عين $\ker f$ و استنتج $\dim \ker f$.

3) عين أساس لـ $\operatorname{Im} f$ و استنتج $\dim \operatorname{Im} f$.

4) استنتج أن f تقابلي.

5) عين f^{-1}.

6) عين $\ker f^{-1}$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

حلول التمارين

التمرين الأول

1) صحيح لأن عدد الأشعة 4 أكبر من بعد الفضاء الشعاعي IR^3 وهو 3 .

2) خطأ لأن $f(0,0)=(0,1)\neq(0,0)$.

3) صحيح لأن :

$\{(1,1,2,3),(1,-1,3,2),(0,0,2,2),(0,0,-2,2)\}$ مستقلة خطيا $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix}\forall\alpha,\beta,\gamma,\mu\in IR:\alpha(1,1,2,3)+\beta(1,-1,3,2)+\gamma(0,0,2,2),(0,0,-2,2)\\ =0_{IR^4}\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=\mu=0\end{pmatrix}$$

ليكن α,β,γ,μ مقادير سلمية من IR حيث

$$\alpha(1,1,2,3)+\beta(1,-1,3,2)+\gamma(0,0,2,2),(0,0,-2,2)=0_{IR^4}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=0\\ 2\alpha+3\beta+2\gamma-2\mu=0\\ 3\alpha+2\beta+2\gamma+2\mu=0\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=\mu=0$$

ومنه المجموعة المعطاة مستقلة خطيا و بالتالي تشكل أساسا للفضاء IR^4 على الحقل IR لأن عدد عناصرها 4 و $\dim IR^4/_{IR}=4$.

4) صحيح لأن :

حتى تشكل مجموعة الأشعة $\{(1,i),(0,1),(i,i),(1,1)\}$ أساسا لـ IC^2 على الحقل IR يكفي أن ندرس الاستقلال الخطي، لأن عدد عناصرها مساوي لبعد الفضاء IC^2 على الحقل IR.

لدينا $\{(1,i),(0,1),(i,i),(1,1)\}$ مستقلة خطيا

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}\forall\alpha,\beta,\gamma,\mu\in IR:\alpha(1,i)+\beta(0,1)+\gamma(i,i)+\mu(1,1)=0\\ \Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=\mu=0\end{pmatrix}$$

ليكن α و β و γ و μ عناصر من IR

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\alpha(1,i)+\beta(0,1)+\gamma(i,i)+\mu(1,1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\mu=0 \wedge \gamma=0 \\ \alpha+\gamma=0 \wedge \beta+\mu=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=\mu=0$$

ومنه $\{(1,i),(0,1),(i,i),(1,1)\}$ مستقلة خطيا.

إذن $\{(1,i),(0,1),(i,i),(1,1)\}$ تشكل أساسا لـ IC^2 على الحقل IR.

التمرين الثاني

-1 f خطي $\Leftrightarrow (\forall \alpha,\beta \in IR; \forall x,y \in IR: f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y))$

ليكن α، β، x و y عناصر حقيقية كيفية

$$\begin{aligned} f(\alpha x+\beta y) &= (\alpha x+\beta y, 0, 2(\alpha x+\beta y)) \\ &= (\alpha x, 0, 2\alpha x)+(\beta y, 0, 2\beta y) \\ &= \alpha(x,0,2x)+\beta(y,0,2y) \\ &= \alpha f(x)+\beta f(y) \end{aligned}$$

-2 $\ker f=\{x\in IR / f(x)=0_{IR^3}\}=\{x\in IR/(x,0,2x)=(0,0,0)\}$

$$=\{0\} \quad \Rightarrow \dim\ker f=0$$

-3 لدينا $\dim \operatorname{Im} f=\dim IR-\dim\ker f=1$

$\dim \operatorname{Im} f=1\neq \dim IR^3 \Rightarrow$ f ليس غامرا

التمرين الثالث

1) لا، لأن B لا يحتوي على العنصر الحيادي في $\Im$ و هو التطبيق المعدوم.

أو (مثلا $\beta=2$، $\alpha=1$) $\forall \alpha,\beta\in IR \quad \alpha+\beta\neq 1$

2) لا، لأن من أجل $V=IR^2$ لدينا $F_2=\{(0,y)/y\in IR\}$، $F_1=\{(x,0)/x\in IR\}$.

F_1 و F_2 ف.ش.ج من IR^2 على IR

لكن $F_1\cup F_2=\{(x,0),(0,y)/x,y\in IR\}$ ليس فضاءا شعاعيا جزئيا لأن الجمع ليس داخلي

$(1,0)\in F_1\cup F_2$ و $(0,1)\in F_2\cup F_1$ لكن $(1,0)+(1,0)=(1,1)\notin F_1\cup F_2$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

3) لا. مثلا في IR^2 المجموعة $A=\{(0,1),(1,0),(1,1)\}$ مرتبطة خطيا لكن $B=\{(0,1),(1,0)\}$ مستقلة خطيا.

4) لا، لأن حسب التعريف بعد الفضاء الشعاعي يساوي عدد أشعة الأساس و كي تكون الجملة A أساسا لابد أن تكون مستقلة خطيا (شرط الاستقلال الخطي غير محقق) .

التمرين الرابع

1) $A=\{(x,y)\in IR^2 \ \ xy=0\}$

لا، ليس فضاء شعاعي جزئي لأن مثلا $(0,1)\in A \ \wedge \ (1,0)\in A$

لكن $(1.1=1\neq 0)$ $(1,0)+(0,1)=(1,1)\notin A$

2) لا، لأنه مثلا $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ مرتبطة خطيا لكن $\{(1,0),(0,1)\}$ مستقلة خطيا

3) لا، لأن مثلا $E=\{(x-2y,-x+2y)/x,y\in IR\}$ فإن $E=[\{(1,-1),(-2,2)\}]$

لكن $\dim E=1$.

التمرين الخامس

/1 $$\ker f=\{X=(x,y,z)\in IR^3 / f(X)=0_{IR^2}\}$$

$$f(X)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\ x+y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x\\ z=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \ker f=\{(x,-x,0)/x\in IR\}\Rightarrow \ker f=[\{(1,-1,0)\}]$$

$(1,-1,0)$ شعاع غير معدوم و منه $\{(1,-1,0)\}$ تشكل أساسا لـ $\ker f$ و بالتالي $\dim\ker f=1$.

/2 $\dim \mathrm{Im} f=\dim IR^3-\dim\ker f=3-1=2=\dim IR^2$. و منه f غامر.

التمرين السادس

1) $$\mathrm{Im} f=\{f(X)/X\in IR^3\}=\{(x-y,y-z,z-x)/x,y,z\in IR\}$$
$$=\{x(1,0,-1)+y(-1,1,0)+z(0,-1,1)/x,y,z\in IR\}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

نضع $A=\{V_1=(1,0,-1),V_2=(-1,1,0),V_3=(0,-1,1)\}$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\, f=[A]$$

A مستقلة خطيا $\Leftrightarrow$ $\forall(\alpha_i)_{i=\overline{1,4}}\in IR,\sum_{i=1}^{4}\alpha_i V_i=0_{IR^3}\Rightarrow \alpha_i=0\,\forall i=\overline{1,4}$

$$\sum_{i=1}^{4}\alpha_i V_i=0_{IR^3}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1-\alpha_2=0\\ \alpha_2-\alpha_3=0\\ -\alpha_1+\alpha_3=0\end{cases}\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$$

$$\sum_{i=1}^{4}\alpha_i V_i=0_{IR^3}\Leftrightarrow \alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\alpha_3V_3=0\Rightarrow \alpha_1(V_1+V_2+V_3)=0$$

$$\overset{\forall\alpha_1}{\Rightarrow} V_1+V_2+V_3=0$$

ومنه $\{V_1,V_2,V_3\}$ مرتبطة خطيا.

$\{V_1,V_2\}$ مستقلة خطيا $\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2\in IR,\alpha_1V_1+\alpha_2V_2=0\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=0)$

$$\alpha_1V_1+\alpha_2V_2=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1-\alpha_2=0\\ \alpha_2=0\\ -\alpha_1=0\end{cases}\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=0$$

و منه $\{V_1,V_2\}$ مستقلة خطيا

و $\mathrm{Im}\, f=[\{V_1,V_2\}]$ $\Leftarrow$ أساس لـ $\mathrm{Im}\, f$. و منه $\dim\mathrm{Im}\, f=2$

2) $\dim\ker f=\dim IR^3-\dim\mathrm{Im}\, f=$ 3-2=1

3) $\dim\ker f=1\neq 0\Rightarrow$ f ليس متباينا

$\dim\mathrm{Im}\, f=2\neq 3=\dim IR^3\Rightarrow$ f ليس غامرا

(أو بما أن f ليس متباينا و $E=F=IR^3$ إذن f ليس غامرا)

التمرين السابع

1) $\ker f=\{(x,y)\in IR^2/f(x,y)=0\}$

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\left(f(x,y)=x-2y+3iy=0\right)\Rightarrow\left(x-2y=0\wedge 3y=0\right)\Rightarrow\left(x=y=0\right)$$
$$\Rightarrow \dim\ker f=0$$

2) لدينا $\dim \mathrm{Im} f=\dim IR^2-\dim\ker f=2$

3) التطبيق الخطي f غامر لأن $\dim \mathrm{Im} f=\dim IR^2=2$ و $\mathrm{Im} f$ فضاء شعاعي جزئي من IR^2

التمرين الثامن

1) $$\ker f=\left\{X\in IR^3 / f(X)=0_{IR^2}\right\}$$

$$X\in\ker f\Leftrightarrow(x-y-z,0)=(0,0)\qquad\Leftrightarrow x=y+z$$
$$\ker f=\{(y+z,y,z)/ y,z\in IR\}=\{y(1,1,0)+z(1,0,1)/ y,z\in IR\}$$

أي أن المجموعة $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ تولد $\ker f$ ....*

$\{(1,1,0),(1,0,1)\}$مستقلة خطيا $\Leftrightarrow$

$$\left(\forall\alpha_1,\alpha_2\in IR,\alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(1,0,1)=0\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=0\right)$$

ليكن α_1,α_2 عنصرين من IR بحيث $\alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(1,0,1)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_1=0\\ \alpha_2=0\end{cases}\qquad\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=0$$

و منه $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ مستقلة خطيا ....**

من * و ** فان $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ تشكل أساسا لـ $\ker f$.

و منه $\dim\ker f=2$

2) f ليس متباينا $\Leftarrow \dim\ker f=2\neq0$. ومنه f تطبيق ليس تقابلي.

التمرين التاسع

1/ أ- $E\neq\phi\ (0\in E)$

ب- $\forall X=(x,y,z),Y=(x',y',z')\in E;\ \forall\alpha,\ \beta\in IR$

$\alpha X+\beta Y\in E$

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\alpha X+\beta Y=(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+z'\beta)=(x'',y'',z'')\in E$$

$$2x''-y''+z''=\alpha(2x-y+z)+\beta(2x'-y'+z')=\alpha.0+\beta.0=0\ (X,Y\in E)$$

ومنه E فضاء شعاعي جزئي من IR^3.

/2 $\quad 2x-y+z=0\Rightarrow y=2x+z$

$$E=\{(x,2x+z,z)/x,z\in IR\}\Rightarrow E=[\{(1,2,0),(0,1,1)\}]=[\{V_1,V_2\}]$$

ندرس الاستقلال الخطي لـ $\{V_1,V_2\}$ و منه $\{V_1,V_2\}$ أساس لـ E.

/3 أ/ $\quad f(E)=\{f(X)/X=(x,y,z)\in E\}$

$$X\in E\Leftrightarrow X=(x,2x+z,z)$$

$$f(E)=\{(2(x+z),x+z,3x+z)/x,y,z\in IR\}$$

$$\Rightarrow f(E)=[\{(2,1,0),(0,0,1)\}] \quad \text{أو} \quad f(E)=[\{(2,1,3),(2,1,1)\}]$$

التمرين العاشر

-1 $\quad \ker f=\{X=(x,y,z)\in IR^3\ /\ f(X)=0_{IR^3}\}$

$$f(X)=0_{IR^3}\Rightarrow\begin{cases}x-y+z=0\\-x+y-z=0\\x-y+z=0\end{cases}\Rightarrow y=x+z$$

$$\ker f=\{X=(x,x+z,z)\ /\ x,z\in IR\}$$
$$\Rightarrow \ker f=[\{V_1=(1,1,0),V_2=(0,1,1)\}]$$

$\{V_1,V_2\}$ مستقلة خطيا لأن $(\alpha_1=0\wedge\alpha_1+\alpha_2=0\wedge\alpha_2=0)$

و منه $\{V_1,V_2\}$ أساس لـ $\ker f$ وبالتالي $\dim\ker f=2$

-2

$$\mathrm{Im}\, f=\{f(x,y,z)/(x,y,z)\in IR^3\}$$
$$=\{(x-y+z,-x+y-z,\ x-y+z)/x,y,z\in IR\}$$
$$=\{(x-y)(1,-1,1)+z(1,-1,1)\ /\ (x-y),z\in IR\}$$
$$\Rightarrow \mathrm{Im}\, f=[\{V_1\}]/V_1=(1,-1,1)$$

$V_1\neq 0$ و منه مستقلة خطيا و بالتالي $\{V_1\}$ أساس لـ $\mathrm{Im}\, f$

rekkabsoraya@yahoo.fr

3- f ليس تقابلي $\Rightarrow$ $(\dim \operatorname{Im} f = 1 \neq \dim IR^3 = 3)$

4- $V = \{(x,y,z) \in IR^3 / x + y - z = 0\} = \{(x,y,x+y) / x,y \in IR\}$

أ- V فضاء شعاعي جزئي من IR^3

$$\left.\begin{array}{c} V \neq \phi \,(1) \\ \forall \alpha, \beta \in IR, \forall X = (x,y,z), Y = (x',y',z') \in V \;(2) \\ \alpha X + \beta Y \in V \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$(0,0,0) \in V \;(0 = 0 + 0) \Rightarrow V \neq \phi$$

$X \in V \Rightarrow X = (x,y,x+y)$

$Y \in V \Rightarrow Y = (x',y',x'+y')$

$$\alpha X + \beta Y = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha x + \alpha y + \beta x' + \beta y')$$
$$= (x'', y'', x'' + y'')$$

و منه $\alpha X + \beta Y \in V$ و بالتالي V فضاء شعاعي جزئي من IR^3

ب-

$$f(V) = \{f(X) / X \in V\} = \{f(x,y,x+y) / x,y \in IR\}$$
$$= \{(2x, -2x, 2x) / x \in IR\}$$
$$\Rightarrow \quad f(V) = [\{V_1\}] / \; V_1 = (2,-2,2)$$

$V_1 \neq 0$ و منه أساس لـ $f(V)$ و بالتالي $\dim f(V) = 1$

التمرين الحادي عشر

f متباين $\Leftrightarrow \ker f = \{0_{IR^3}\}$

$$\ker f = \{X = (x,y,z) \in IR^3 / f(X) = 0_{IR^3}\}$$
$$= \{(x,y,z) \in IR^3 / (2x, 4x - y, 2x + 3y - z) = (0,0,0)\}$$
$$= (0,0,0)$$

و منه f متباين.

rekkabsoraya@yahoo.fr

لدينا f متباين و $E=F=IR$ و منه f غامر و بالتالي تقابلي.

التمرين الثاني عشر

-1 $\ker f=\{(x,y,z)\in IR^3 / f(x,y,z)=(0,0,0)\}$

ليكن (x,y,z) عنصر كيفي من $\ker f$ فان

$$f(x,y,z)=(x-2y,y+z,0)=(0,0,0)\Rightarrow\begin{cases}x=2y\\ y=-z\end{cases}$$

إذن

$$(x,y,z)=(2y,y,-y)=y(2,1,-1)\quad\Rightarrow\ker f=[(2,1,-1)]$$

أي أن الشعاع $V=(2,1,-1)$ هو مولد للفضاء $\ker f$. وبما أن $V\neq(0,0,0)$ فهو يشكل جملة مستقلة خطيا. إذن $\{V\}$ يشكل أساسا $\ker f$. ومنه $\dim\ker f=1$

-2 لدينا $\dim \mathrm{Im} f=\dim IR^3-\dim\ker f$

إذن $\dim \mathrm{Im}\, f=2$ ومنه f ليس غامرا.

التمرين الثالث عشر

-1 $\ker f=\{X\in IR^2 / f(X)=0_{IR^2}\}$

$$\ker f=\{X=(x,y)\in IR^2 /(x-3y,2x)=(0,0)\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-3y=0\\ 2x=0\end{cases}\Rightarrow X=(x,y)=(0,0)\Rightarrow\dim\ker f=0$$

ومنه f تطبيق متباين.

-2 لدينا f تطبيق متباين و $E=F=IR^2$ ومنه f تقابلي.

التمرين الرابع عشر

-1 $\ker f=\{X\in IR^4 / f(X)=0_{IR^3}\}$

$$=\{(x,y,z,t)\in IR^4 /(x+y,y+z,z+t)=(0,0,0)\}$$

و منه

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=-y \\ t=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=x \\ t=-x \end{cases}$$

$$\ker f=\{(x,-x,x,-x)\ /\ x\in IR\}=\{x(1,-1,1,-1)/x\in IR\}=[\{(1,-1,1,-1)\}]$$

و منه $0_{IR^4}\neq(1,-1,1,-1)$ $\{(1,-1,1,-1)\}$ أساس لـ $\ker f$ إذن $\dim\ker f=1$.

2- ا- f ليس متباينا $\Rightarrow \quad \dim\ker f=1\neq 0$

ب- $\dim IR^4=\dim\ker f+\dim\mathrm{Im}\, f \Rightarrow \dim\mathrm{Im}\, f=4-1=3=\dim IR^3$

ومنه f غامر و بالتالي f ليس تقابليا.

3- $$\begin{aligned}\mathrm{Im}\, f&=\{f(X)/X\in IR^4\}\\ &=\{(x+y,y+z,z+t)/x,y,z,t\in IR\}\\ &=\{xV_1+yV_2+zV_3+tV_4/x,y,z;t\in IR\}\end{aligned}$$

حيث $A=\{V_1=(1,0,0)\ ,\ V_2=(1,1,0)\ ,V_3=(0,1,1)\ ,\ V_4=(0,0,1)\}$ و منه $\mathrm{Im}\, f=[A]$

A مرتبطة خطيا لأن $V_4=V_1-V_2+V_3$.

و منه $\{V_1,V_2,V_3\}$ مستقلة خطيا و تولد $\mathrm{Im}\, f$ إذن فهي تشكل أساسا لـ $\mathrm{Im}\, f$.

أ- V فضاء شعاعي جزئي من IR^4 $\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} V\neq\phi\quad(1)\\ \forall\alpha,\beta\in IR,\forall X,Y\in V,\alpha X+\beta Y\in IR\quad(2)\end{array}\right\}$

$$0_{IR^4}\in V \Rightarrow V\neq\Phi$$

$$\begin{aligned}\alpha X+\beta Y&=\alpha(x,y,z,t)+\beta(x',y',z',t')\\ &=(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z',\alpha t+\beta t')\\ &=(x'',y'',z'',t'')\in V\Leftrightarrow x''+y''+z''+t''=0\end{aligned}$$

$$x''+y''+z''+t''=\alpha(x+y+z+t)+\beta(x'+y'+z'+t')=0$$

لأن $X,Y\in V \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x'+y'+z'+t'=0\end{cases}$

و منه V فضاء شعاعي جزئي من IR^4.

rekkabsoraya@yahoo.fr

ب- $V=\{(x,y,z,-(x+y+z))\ /\ x,y,z\in IR\}=\{xV_1+yV_2+zV_3\ /\ x,y,z\in IR\}$

نضع $B=\{V_1=(1,0,0,-1)\ ,V_2=(0,1,0,-1),V_3=(0,0,1,-1)\}$ ومنه $V=[B]$.

B مستقلة خطيا $(\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0)$ و منه B أساس لـ V .

و بالتالي $\dim V=3$

ج- $f(V)=\{f(X)\ /\ X\in V\}$

$$=\{(x+y,y+z,z-x-y-z)/x,y,z\in IR\}$$
$$=\{x(1,0,-1)+y(1,1,-1)+z(0,1,0)/x,y,z\in IR\}$$

و منه $f(V)=[\{V_1,V_2,V_3\}]$ حيث $V_1=(1,0,-1)\ ,V_2=(1,1,-1)\ ,V_3=(0,1,0)$.

التمرين الخامس عشر

1) f خطي $\Leftrightarrow \forall X=(x,y,z),Y=(x',y',z')\in IR^3,\forall\alpha,\beta\in IR$

$$f(\alpha X+\beta Y)=\alpha f(X)+\beta f(Y)$$

$$\alpha X+\beta Y=(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z')=(x'',y'',z'')$$

$$f(\alpha X+\beta Y)=f(x'',y'',z'')=(2x''-y'',y'',3x''-4z'')$$
$$=(2\alpha x-\alpha y,\alpha y,3\alpha x-4\alpha z)+(2\beta x'-\beta y',\beta y',3\beta x'-4\beta z')$$
$$=\alpha(2x-y,y,3x-4z)+\beta(2x'-y',y',3x'-4z')$$
$$=\alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z')=\alpha f(X)+\beta f(Y)$$

2) $\ker f=\{X=(x,y,z)\in IR^3\ /\ f(X)=0_{IR^3}\}$

$$f(X)=0_{IR^3}\Rightarrow\begin{cases}2x-y=0\\ y=0\\ 3x-4z=0\end{cases}\Rightarrow\quad x=y=z=0$$

إذن $\ker f=\{0_{IR^3}\}$ و منه $\dim\ker f=0$.

3) $\operatorname{Im} f=\{(2x-y,y,3x-4z)/x,y,z\in IR\}$

$$=\{(2x-y,y,3x-4z)/x,y,z\in IR\}$$
$$=\{x(2,0,3)+y(-1,1,0)+z(0,0,-4)/x,y,z\in IR\}$$

و منه $\operatorname{Im} f=[\{V_1,V_2,V_3\}]/\ V_1=(2,0,3),V_2=(-1,1,0),V_3=(0,0,-4)$

rekkabsoraya@yahoo.fr

$\{V_1, V_2, V_3\}$ مستقلة خطيا $\Leftrightarrow$

$$\left(\begin{cases}2\alpha_1-\alpha_2=0\\ \alpha_2=0\\ 3\alpha_1-4\alpha_3=0\end{cases} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0\right)$$

وبالتالي $\{V_1, V_2, V_3\}$ أساس لـ $\operatorname{Im} f$ و منه $\dim \operatorname{Im} f=3$

4) مما سبق f تقابلي لأن

$\dim \ker f=0$ و منه f متباين

$\dim \operatorname{Im} f=3=\dim\left(IR^3\right)$ و منه f غامر.

5) بما أن f تقابلي إذن يقبل تطبيق عكسي f^{-1} أي

$$\forall Y=(x',y',z')\in IR^3, \exists!(x,y,z)\in IR^3 \;/\; Y=f(x,y,z)$$

$$Y=(x',y',z')=f(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases}x'=2x-y\\ y'=y\\ z'=3x-4z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{x'+y'}{2}\\ y=y'\\ z=\dfrac{3(x'+y')-2z'}{8}\end{cases}$$

و منه

$$f^{-1}: IR^3 \to IR^3$$
$$(x,y,z)\mapsto\left(\frac{x+y}{2}, y, \frac{3(x+y)-2z}{8}\right)$$

6) $\ker f^{-1}=\left\{X=(x,y,z)\in IR^3 \;/\; f^{-1}(X)=0_{IR^3}\right\}$.

$$f^{-1}(X)=0_{IR^3} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=0\\ y=0\\ \dfrac{3(x+y)-2z}{8}=0\end{cases} \Rightarrow x=y=z=0$$

ومنه $\ker f^{-1}=\left\{0_{IR^3}\right\}$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

تمارين مقترحة

التمرين الأول

أدرس الاستقلال و الارتباط الخطيين في كل حالة:

1) $\{(1,1,1),(2,-1,2),(1,-2,-1)\}$، 2) $\{(1,0,-1),(-1,1,0),(0,-1,1)\}$

3) $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1),(-1,1,1)\}$.

التمرين الثاني

ليكن F_3, F_2, F_1 فضاءات شعاعية جزئية من IR^3 على الحقل IR بحيث

$$F_2=\{(x,y,z)\in IR^3; x-y=0 \wedge 3z=x\}, F_1=\{(x,y,z)\in IR^3; 3x-y=z\}$$

$$F_3=\{(x,y,z,t)\in IR^4; x-y=0\}$$

أوجد أساس و بعد F_2, F_1 و F_3.

التمرين الثالث

هل التطبيقات التالية المعرفة من IR^2 نحو IR^2 خطية؟

$$h(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2+1}\ ,\ \frac{y}{x^2+y^2+1}\right) \quad ، \quad g(x,y)=(x-3y\ ,0\ )$$

$$g(x,y)=(y,\ x+y+1) \quad ، \quad f(x,y)=(2x+3y\ ,\ x\ )$$

$$.h(x,y)=\left(\frac{x+y}{2}\ ,2x+xy\right) \quad ، \quad f(x,y)=(x^2,y^2\ )$$

التمرين الرابع

ليكن التطبيق الخطي f حيث

$$f: IR^3 \to IR^3$$

$$(x,y,z)\to f(x,y,z)=(x-2y, y+z, 0)$$

1- بين أن التطبيق f خطي.

2- أوجد $\ker f$ ثم $\dim \ker f$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

3- أوجد $\operatorname{Im} f$ ثم $\dim \operatorname{Im} f$. هل f تقابلي؟

التمرين الخامس

ليكن f تطبيق من IR^4 نحو IR^3 معرف بالشكل

$$f(x,y,z,t)=(x-y+t,y-z,z-t-x)$$

- برهن أن f خطي.
- أوجد أساس و بعد $\ker f$.
- أوجد أساس و بعد $\operatorname{Im} f$.

التمرين السادس

ليكن

$$\begin{array}{rcl} f: IR^2 & \to & IR^2 \\ (x,y) & \to & (x+y,\ 2x) \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{rcl} g: IR^2 & \to & IR^2 \\ (x,y) & \to & (y,x) \end{array}$$

1) بين أن f خطي.
2) عين نواة و صورة f.
3) استنتج أن f تقابلي.

نفس الأسئلة بالنسبة للتابع g.

التمرين السابع

ليكن g تطبيق خطي معرف كالتالي

$$\begin{array}{l} g: IR^3 \to IR^3 \\ (x,y,z) \to f(x,y,z)=(2x,4x-y,2x+3y-z) \end{array}$$

هل g متباين؟ غامر؟ تقابلي؟

التمرين الثامن

ليكن $\{e_1,e_2\}$، $\{e'_1,e'_2,e'_3\}$ الأساسين القانونين لـ IR^2 و IR^3 على الترتيب.

1- أوجد التطبيق الخطي f المعرف من IR^2 نحو IR^3 كما يلي

$$f(e_1)=2e'_1+e'_3 \quad ، \quad f(e_2)=e'_2+e'_1$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

2- عين $\ker f$ و $\operatorname{Im} f$ و استنتج بعديهما .

3- ما هي خواص التطبيق f .

التمرين التاسع

ليكن f تطبيق خطي معرف من IR^3 نحو IR^3 كالتالي

$$f(x,y,z)=(x+y+z,x+z,y+z)$$

برهن أن f تقابلي.

التمرين العاشر

ليكن التطبيق الخطي f حيث

$$f : IR^3 \to IR^3$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)=\left(\frac{x-y}{2}, x+y-z, 0\right)$$

1- أوجد $\ker f$ ثم عين $\dim \ker f$.

2- استنتج $\dim \operatorname{Im} f$، هل f غامر؟

rekkabsoraya@yahoo.fr

ملحق 1

جدول لنهايات بعض الدوال الأولية

الدالة	النهايات
$f : IR \to IR$ $x \mapsto \lambda \quad (\lambda \in IR)$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$
$f : IR \to IR$ $x \mapsto x^n \quad (n \in IN^*)$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ ○ $n \in 2IN :\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ ○ $n \in 2IN + 1 :$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
$f : IR_+ \to IR$ $x \mapsto x^\alpha \quad (\alpha > 0)$	• $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$
$f : IR_+^* \to IR$ $x \mapsto x^\alpha \quad (\alpha < 0)$	• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^\alpha = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$
$f : IR^* \to IR$ $x \mapsto \frac{1}{x^n} \quad (n \in IN^*)$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ ○ $n \in 2IN :\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ ○ $n \in 2IN + 1 :$ ▪ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = -\infty \ (x < 0)$ ▪ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty \ (x > 0)$
$f : IR \to IR$ $x \mapsto e^x$	• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

rekkabsoraya@yahoo.fr

$f : IR \to IR$ $x \mapsto a^x = e^{x\ln a} \quad (a > 0)$	• $a > 1$: ○ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ ○ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ • $a < 1$: ○ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ ○ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$
$f : IR / \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in IZ \right\} \to IR$ $x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	• $k \in IZ$: ○ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} \frac{\pi}{2} + k\pi} \tan x = -\infty$ ○ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2} + k\pi} \tan x = +\infty$
$f : IR / \{ k\pi, k \in IZ \} \to IR$ $x \mapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	• $k \in IZ$: ○ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} k\pi} \cot x = -\infty$ ○ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} k\pi} \cot x = +\infty$
$f : IR \to IR$ $x \mapsto \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	• $\lim\limits_{x \to -\infty} \cosh x = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty$
$f : IR \to IR$ $x \mapsto \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	• $\lim\limits_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty$
$f : IR \to IR$ $x \mapsto \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$	• $\lim\limits_{x \to -\infty} \tanh x = -1$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} \tanh x = 1$

rekkabsoraya@yahoo.fr

ملحق 2

جدول لبعض مشتقات الدوال الأولية

$f(x)$	$f'(x)$
a^x	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$
$\cot x$	$\dfrac{-1}{\sin^2 x} = -1-\cot^2 x$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x

rekkabsoraya@yahoo.fr

ملحق 3

جدول لبعض مشتقات الدوال المركبة

الشروط	القواعد
من أجل كل $\alpha \in IR$ و من أجل كل تابع قابل للاشتقاق f موجب تماما.	$\left(f^{\alpha}\right)' = \alpha f^{\alpha-1} f'$
من أجل كل تابع قابل للاشتقاق f موجب تماما.	$\left(\sqrt{f}\right)' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$
من أجل كل تابع قابل للاشتقاق f	$\left(e^{f}\right)' = f' e^{f}$
من أجل كل تابع قابل للاشتقاق f موجب تماما.	$(\ln f)' = \dfrac{f'}{f}$
من أجل كل تابع قابل للاشتقاق f	$(\sin f)' = f'\cos f$
من أجل كل تابع قابل للاشتقاق f	$(\cos f)' = -f'\sin f$
من أجل كل تابع قابل للاشتقاق f	$(\tan f)' = \dfrac{f'}{\cos^2 f}$

rekkabsoraya@yahoo.fr

ملحق 4

جدول لنشور بعض الدوال الأولية

التابع	النشر المحدود جوار الصفر
$\frac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+....+x^n+o(x^n)$
$(1+x)^\alpha$	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+....+\frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)$
$\sqrt{1+x}$	$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2.4}x^2+....+\frac{(-1)^{n-1}1.3....(2n-3)}{2.4.....(2n)}x^n+x^n\varepsilon(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+....+\frac{(-1)^n 1.3....(2n-1)}{2.4.....(2n)}x^n+x^n\varepsilon(x)$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+....+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)$
e^x	$1+x+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+....+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n}\varepsilon(x)$
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+....+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)$
$\tan x$	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+x^6\varepsilon(x)$
$arc\cos x$	$\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{2.3}-....-\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4...2n(2n+1)}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$
$arc\sin x$	$x+\frac{x^3}{2.3}+....+\frac{1.3.5...(2n-1)}{1.2.4....2n(2n+1)}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$
$arc\tan x$	$x-\frac{x^3}{3}+....+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+o(x^{2n+1})$

rekkabsoraya@yahoo.fr