المحاضرة السادسة: الثنائية (النموذج المقابل)

إن المشاكل التي تم صياغتها بأسلوب البرمجة الخطية أطلق عليها اصطلاح النماذج الأولية **Primal Models**، ومن الممكن إعادة صياغة النموذج الأولي بأسلوب آخر يطلق عليه اصطلاح النموذج المقابل (الثنائي) **Dual Model**، أي أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل له ومشتق منه.

مميزات النموذج المقابل(الثنائي)

– يساعد النموذج المقابل على التوصل إلى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان وذلك بتقليص خطوات الحل عندما يصعب حل النموذج الأولي.

– يمكن إيجاد الحل الأمثل في النموذج المقابل عند وجود متغير أساسي في النموذج ذو قيمة سالبة، في حين لا يمكن حل النموذج الأولي إذا كان لأحد متغيرات النموذج الأولي قيمة سالبة.

– يساعد النموذج المقابل إلى إجراء تحليل ما بعد الامثلية والتوصل إلى الحل بصورة مختصرة في حالة إضافة قيود جديدة للمشكلة أو إجراء تغييرات في معاملات المتغيرات الأساسية.

خطوات تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل

1- نعكس صيغة دالة الهدف، فإذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي بصيغة تعظيم **Max** فإننا نعكسها ونجعلها للنموذج المقابل بصيغة تصغير **Min** والعكس بالعكس.

2- عدد القيود في النموذج الأولي يكون مساوياً لعدد المتغيرات في النموذج المقابل، وعدد المتغيرات في النموذج الأولي يكون مساوياً لعدد القيود في النموذج المقابل.

3- استبدال المتغيرات المشار إليها بالرمز **X** في النموذج الأولي إلى متغيرات مشار إليها بالرمز **U** في النموذج المقابل، وتحويل رمز دالة الهدف من Z_p في النموذج الأولي إلى Z_d في النموذج المقابل.

4- جعل قيم الجانب الأيمن للقيود في النموذج الأولي معاملات للمتغيرات الجديدة في دالة هدف النموذج المقابل.

5- جعل معاملات متغيرات دالة هدف النموذج الأولي قيم الإطراف اليمنى لقيود النموذج المقابل.

6- تحويل مصفوفة المعاملات للمتغيرات في قيود النموذج الأولي بحيث تصبح الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف (إيجاد منقول مصفوفة معاملات المتغيرات).

7- تغيير إشارة القيود من ≥ إلى ≤ أو العكس.

ملاحظة

1- إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي بصيغة تعظيم **Max** فان إشارة جميع القيود يجب أن تكون اقل من أو يساوي (≤)، وأما إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي بصيغة تصغير **Min** فان إشارة جميع القيود يجب أن تكون اكبر من أو يساوي (≥).

2- إذا كانت إشارة قيد مساواة (**=**) في النموذج الأولي فان المتغير المقابل له في النموذج المقابل يكون متغير حر (غير محدد الإشارة)، وإذا كان متغير من متغيرات النموذج الأولي حر فان إشارة القيد الذي يقابله في النموذج المقابل مساواة (=).

مثال: اكتب النموذج المقابل لكل نموذج من النماذج الأولية التالية:

$$\textbf{Max } Z_p = 14x_1 + 20x_2 + 18x_3$$
$$\textbf{S/T}$$
$$5x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 220$$
$$3x_1 + 10x_2 + 7x_3 \leq 360$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\textbf{Min } Z_p = 200x_1 + 150x_2$$
$$\textbf{S/T}$$
$$5x_1 + 12x_2 \geq 100$$
$$6x_1 + 10x_2 \geq 180$$
$$4x_1 + 15x_2 \geq 280$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\textbf{Min } Z_p = 3x_1 + 7x_2 - 5x_3$$
$$\textbf{S/T}$$
$$x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 14$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 22$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\textbf{Min } Z_p = 10x_1 + 20x_2$$
$$\textbf{S/T}$$
$$5x_1 + 4x_2 = 40$$
$$2x_1 + x_2 \geq 36$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:1- النموذج الأول صيغة دالة الهدف **Max** وجميع إشارات القيود (≤) إذن النموذج المقابل هو:

$$\textbf{Min } Z_d = 220U_1 + 360U_2$$
$$\textbf{S/T}$$
$$5U_1 + 3U_2 \leq 14$$
$$4U_1 + 10U_2 \leq 20$$
$$8U_1 + 7U_2 \leq 18$$
$$U_1, U_2 \geq 0$$

2- النموذج الثاني صيغة دالة الهدف **Min** وجميع إشارات القيود (≥) إذن النموذج المقابل هو:

$$\textbf{Max } Z_d = 100U_1 + 180U_2 + 280U_3$$
$$\textbf{S/T}$$
$$5U_1 + 6U_2 + 4U_3 \leq 200$$
$$12U_1 + 10U_2 + 15U_3 \leq 150$$

$U_1, U_2, U_3 \geq 0$

3- النموذج الثالث بما أن صيغة دالة الهدف **Min** فيجب تحويل إشارة القيد الثاني من (≤) إلى (≥) وذلك بضرب طرفيه في (1-) ليصبح النموذج كما يلي:

$$\text{Min } Z_p = 3x_1 + 7x_2 - 5x_3$$

S/T

$$x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 14$$

$$-2x_1 - 3x_2 \geq -22$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ويكون بذلك النموذج المقابل له كما يلي:

$$\text{Max } Z_d = 14U_1 - 22U_2$$

S/T

$$1U_1 - 2U_2 \leq 3$$

$$5U_1 + 3U_2 \leq 7$$

$$1U_1 + 0U_2 \leq -5$$

$$U_1, U_2 \geq 0$$

4- النموذج الرابع صيغة دالة الهدف **Min** إشارة القيد الأول مساواة فبذلك يكون المتغير الأول في النموذج المقابل حر، وإشارة القيد الثاني (≥) إذن النموذج المقابل هو:

$$\text{Max } Z_d = 40U_1 + 36U_2$$

S/T

$$5U_1 + 2U_2 \leq 10$$

$$4U_1 + 1U_2 \leq 20$$

$U_1, U_2 \geq 0$ غير محدد الإشارة

العلاقة بين الأصلية والثنائية:

1- إذا وجد حل أمثل للأصلية فإنه بالضرورة يوجد حل أمثل للثنائية.

2- من خلال الحل الأمثل للأصلية والثنائية تكون قيمة الحل الأمثل متساوية لكليهما.

3- مسائل التعظيم Max للأصلية تبدأ قيمة الهدف لها في تزايد من جدول إلى أخر وصولاً إلى الحل الأمثل، بينما الثنائية لها قيمة الهدف تبدأ في تناقص من جدول إلى أخر وصولاً إلى الحل الأمثل والعكس في حالة التقليل Min.

4- يمكن استنتاج الحل الأمثل للنموذج المقابل من الحل الأمثل للنموذج الأولي والعكس بالعكس، وهذا عن طريق العلاقة التالية:

الفرق بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية	يساوي	عناصر السطر Z المقابلة للمتغيرات الأساسية للأصلية

ملاحظة: تكون هده العلاقة صالحة بتغيير مصطلحات الثنائية والأصلية لكل حالة.

قيم الحل الأمثل للنموذج المقابل (.... U_1, U_2, U_3) هي قيم السطر (Z) المقابلة للمتغيرات الأساس ية في جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي.

قيم الحل الأمثل للنموذج الأولي (..... X_1, X_2, X_3) هي قيم السطر (Z) المقابلة للمتغيرات الأساس ية في جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل.

مثال: ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min } Z_p = 500\, x_1 + 100\, x_2 + 150\, x_3$$

S/T

$$x_1 + x_2 + 2\, x_3 \geq 40$$

$$x_1 + 2\, x_2 + 2\, x_3 \geq 10$$

$$x_1 + x_2 \geq 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1- اكتب النموذج المقابل وأوجد حله الأمثل.

2- من جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل استنتج الحل الأمثل للنموذج الأولي.

الحل:

1- كتابة النموذج المقابل وإيجاد حله الأمثل.

$$\textbf{Max } Z_d = 40\,U_1 + 10\,U_2 + 30\,U_3$$

S/T

$$U_1 + U_2 + U_3 \leq 500$$

$$U_1 + 2\,U_2 + U_3 \leq 100$$

$$2\,U_1 + 2\,U_2 \leq 150$$

$$U_1, U_2, U_3 \geq 0$$

جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل بالطريقة المبسطة:

		40	10	30	0	0	0	RHS
T_2		U_1	U_2	U_3	t_1	t_2	t_3	
0	t_1	0	-1	0	1	-1	0	400
30	U_3	0	1	1	0	1	-1/2	25
40	U_1	1	1	0	0	0	1/2	75
Z		40	70	30	0	30	5	3750
C - Z		0	-60	0	0	-30	-5	

الحل الأمثل للنموذج المقابل هو:

$$U_1 = 75, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 25, \quad Z_d = 3750.$$

2- استنتاج الحل الأمثل للنموذج الأولي من جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 30, \quad x_3 = 5, \quad Z_P = Z_d = 3750.$$

$$Z_p = 500(0) + 100\,(30) + 150\,(5) = 3750$$