المحاضرة الرابعة: طريقة السمبلكس بإستعمال تقنية M الكبرى

في المحتوى السابق لحل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة المبسطة، تعرضنا لحل المسائل ذات هدف التعظيم (Max) ومكتوبة على شكلها النظامي أين تظهر كل قيودها على الشكل أقل أو يساوي (≤)، في هذه الحالة كانت الكتابة المعيارية لها بإدخال المتغيرات الرّاكدة ($+S_i$) على طرفها الأيسر، في حين لم نتعرض لتلك المسائل التي تقتضي الكتابة المعيارية لها إدخال المتغيرات الفائضة ($-S_i$) والاصطناعية (A_i)، وتظهر هذه المتغيرات عند الكتابة المعيارية لمسائل البرمجة الخطية التي تهدف إلى التدنية (Min)، أو مسائل التعظيم التي لم ترد على شكلها النظامي، أين يظهر من بين قيودها قيد أو أكثر على الشكل أكبر أو يساوي (≥) أو القيود على الشكل يساوي.

ويعتبر المتغير الاصطناعي (A_i) متغيرا وهميا ليس له معنى اقتصادي، وإنما تتطلّبه الضرورة الشّكلية للبرنامج الخطي (تحقق شرط العملية)، فلو أخذنا كمثال للتوضيح القيد التالي:

$6\ x_1 + 3\ x_2 \geq 900$ في هذه الحالة ستكون كتابته في شكل مساواة كما يلي:

$6\ x_1 + 3\ x_2 - S_1 = 900$، وكما لاحظنا في الحل بالطريقة المبسطة أن قيم متغيرات القرار x_i تكون معدومة عند الجدول الأول، في هذه الحالة ستكون قيم حل القيد أعلاه $x_1 = 0$، $x_2 = 0$، $S_1 = -900$، وبما أن أحد قيم الحل أقل من الصفر، يعني أن الحل غير عملي، ولحل هذه المشكلة تقتضي الكتابة المعيارية للقيد إدخال المتغير الاصطناعي كما يلي:

$6\ x_1 + 3\ x_2 - S_1 + A_1 = 900$، وفي هذه الحالة ستكون قيم الحل أول عملي كما يلي:

$x_1 = 0$، $x_2 = 0$، $S_1 = 0$، $A_1 = 900$، وهي قيم تحقق شرط العملية بما أنها كلها موجبة أو معدومة.

وإذا كان القيد في شكل مساواة : $10\ x_1 + 5\ x_2 = 200$ في هذه الحالة سيتم إضافة المتغير الاصطناعي للطرف الأيسر للقيد ليكون متغيرا أساسيا في جدول الحل الأولي $10\ x_1 + 5\ x_2 + A_1 = 200$

ويظهر المتغير الاصطناعي في الجدول الأول في الطريقة المبسطة كمتغير أساسي، وبما أنه ليس له معنى اقتصادي سنعمل على تسريع إخراجه من عمود الأساس، وهذا عن طريق ربطه بمعامل في دالة الهدف يؤثر عكسيا على هدف المسألة ككل (يعمل معامل المتغير الاصطناعي على تعظيم دوال التدنئة و تدنئة دوال التعظيم)، وقد عرف هذا المعامل بـ M الكبيرة وهو عدد كبير جدا موجب، وقد سمي هذا الإجراء بالجزاء، حيث تعاقب المتغيرات الاصطناعية بمعامل له اتجاه عكس هدف المسألة.

ولشرح الطريقة المبسّطة باستعمال تقنية M الكبرى Big- M Technique سيتم الاستعانة بالحالات التالية:

الحالة الأولى: حل البرنامج الخطي التالي بالطريقة المبسطة:

$\text{Min } Z = 5x_1 + 6x_2$

Subject to:

$X_1 + X_2 = 1000$

$X_1 \le 300$

$X_2 \ge 150$

$X_1, X_2 \ge 0$

1 – كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$\text{Min } Z = 5x_1 + 6x_2 + MA_1 + MA_3$

Subject to:

$x_1 + x_2 + A_1 = 1000$

$x_1 + S_2 = 300$

$x_2 - S_3 + A_3 = 150$

$X_1, X_2, S_2, S_3, A_1, A_3 \ge 0$

2 – إعداد جدول السمبلكس الأول:

Cof		5	6	0	0	M	M	R H S
Var		x_1	x_2	S_2	S_3	A_1	A_3	
M	A_1	1	1	0	0	1	0	1000
0	S_2	1	0	1	0	0	0	300
M	A_3	0	1	0	-1	0	1	150
Z		M	2M	0	-M	M	M	1150M
C – Z		5-M	6-2M	0	M	0	0	

نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق، وبالتالي ننتقل لجدول السمبلكس الثاني.

Cof		5	6	0	0	M	M	R H S
Var		x_1	x_2	S_2	S_3	A_1	A_3	
M	A_1	1	0	0	1	1	-1	850
0	S_2	1	0	1	0	0	0	300
6	x_2	0	1	0	-1	0	1	150
Z		M	6	0	M-6	M	-M+6	850M+900
C – Z		5-M	0	0	6-M	0	2M-6	

نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق، وبالتالي ننتقل لجدول السمبلكس الثالث

Cof		5	6	0	0	M	M	R H S
Var		x_1	x_2	S_2	S_3	A_1	A_3	
M	A_1	0	0	-1	1	1	-1	550
5	x_1	1	0	1	0	0	0	300
6	x_2	0	1	0	-1	0	1	150
Z		5	6	-M	M-6	M	-M+6	550M+2400
C – Z		0	0	M	-M+6	0	2M-6	

نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق، وبالتالي ننتقل لجدول السمبلكس الرابع

Cof		5	6	0	0	M	M	R H S
Var		x_1	x_2	S_2	S_3	A_1	A_3	
0	S_3	0	0	-1	1	1	-1	550
5	x_1	1	0	1	0	0	0	300
6	x_2	0	1	-1	0	1	0	700
Z		5	6	-6	0	0	0	5700
C – Z		0	0	6	0	M	M	

نلاحظ أن شرط الأمثلية محقق، وبالتالي نعتبر الجدول الرابع جدول الحل الأمثل حيث:

$x_1 = 300$	$x_2 = 700$	$S_3 = 550$	$S_2 = 0$	$Z = 5700$

الحالة الثانية: حل البرنامج الخطي التالي بالطريقة المبسطة:

Max $Z = 2x_1 + 4x_2$

Subject to:

$x_1 + x_2 = 6$

$2x_1 + x_2 \leq 10$

$2x_1 + 3x_2 \leq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$

الحل:

1 – كتابة النموذج على الشكل المعياري:

Max Z_P: $2x_1 + 4x_2 - M A_1$

Subject to:

$x_1 + x_2 + A_1 = 6$

$2x_1 + x_2 + S_2 = 10$

$2x_1 + 3x_2 + S_3 = 18$

$x_1, x_2, S_2, S_3, A_1, \geq 0$

2 – إعداد جدول السمبلكس الأول:

Cof		2	4	0	0	-M	R H S
Var		x_1	x_2	S_2	S_3	A_1	
-M	A_1	1	1	0	0	1	6
0	S_2	2	1	1	0	0	10
0	S_3	2	3	0	1	0	18
Z		-M	-M	0	0	-M	-6M
C - Z		2+M	4+M	0	0	0	

نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق، وبالتالي ننتقل لجدول السمبلكس الثاني

Cof		2	4	0	0	-M	R H S
Var		x_1	x_2	S_2	S_3	A_1	
4	x_2	1	1	0	0	1	6
0	S_2	1	0	1	0	-1	4
0	S_3	-1	0	0	1	-3	0
Z		4	4	0	0	4	24
C - Z		-2	0	0	0	-M-4	

نلاحظ أن شرط الأمثلية محقق، وبالتالي الجدول الثاني هو جدول الحل الأمثل حيث:

$x_1 = 0$	$x_2 = 6$	$S_2 = 4$	$S_3 = 0$	$Z = 24$