المحاضرة الثانية: طرق حل نماذج البرمجة الخطية – الطريقة البيانية

بعد أن تتم صياغة نماذج البرمجة الخطية سواء كانت مشكلة تعظيم أرباح أو تقليل تكاليف، سيتم التعرف على كيفية حل هذه النماذج وما هي قيم التغيرات التي تحدد أعلى ربح أو أقل تكلفة.

وتعتبر طريقة الرسم البياني وسيلة أولية لحل مشاكل البرمجة الخطية وتستخدم هذه الطريقة إذا كان النموذج يحتوي على متغيرين فقط، إذا يتعذر رسم النموذج في حالة إحتوائه على أكثر من متغيرين وتقوم هذه الطريقة على فكرة تمثيل القيود بمعادلة خط مستقيم ومن ثمة تحديد منطقة الحلول الممكنة ولحل نموذج البرمجة الخطية نتبع الأتي:

- ✍ نرسم محورين أحدهما أفقي وليكن X_1 والثاني عمودي وليكن X_2.
- ✍ نرسم القيود بعد تحويل المتباينات إلى معادلات وذلك بتحويل إشارات ≤ و≥ إلى إشارة مساواة =، إن عملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة يمكن تمثيلها بخط مستقيم ولمعرفة نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحور X_2 نعوض قيمة $x_1=0$ ولمعرفة نقطة تقاطع الخط المستقيم مع المحور X_1 نعوض قيمة $x_2=0$.
- ✍ نحدد منطقة حل كل قيد من القيود.
- ✍ تحديد منطقة الحل الممكن وهي منطقة تقاطع مناطق الحل للقيود والتي تقع ضمنها جميع النقاط التي تحقق جميع القيود في آن واحد.
- ✍ شرط عدم السلبية يحدد منطقة الحل لتكون في الربع الأول.
- ✍ نجد قيمة Z عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول العملية الممكنة, ويكون الحل أكبر قيمة إذا كانت دالة الهدف تعظيم وأصغر قيمة إذا كانت دالة الهدف تدنئة.

المثال الأول: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي:

Max. $Z = 1000\, x_1 + 800\, x_2$

Subject to:

$8\, x_1 + 6\, x_2 \leq 2400$

$4\, x_1 + 9\, x_2 \leq 1800$

$2x_1 \leq 500$

$x_1 ,\; x_2 \geq 0$

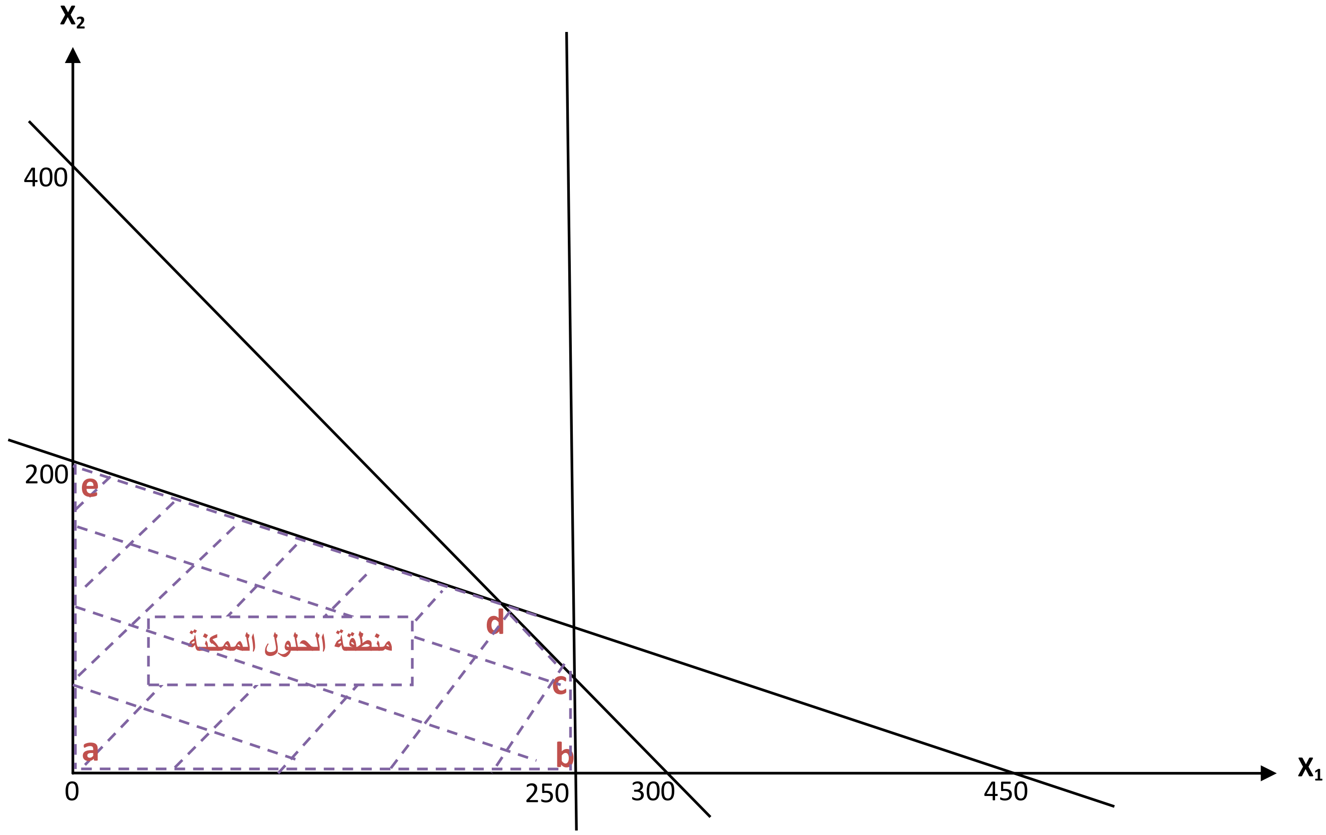
الحل: 1- تحويل القيود إلى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور:

$8x_1 + 6x_2 = 2400$ $(x_1 = 0 , x_2 = 400)$ $(x_1 = 300 , x_2 = 0)$

$4x_1 + 9x_2 = 1800$ $(x_1 = 0 , x_2 = 200)$ $(x_1 = 450 , x_2 = 0)$

$2x_1 = 500$ $(x_1 = 250)$

2- التمثيل البياني:



3- حساب قيمة دالة الهدف عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة

أ- عند النقطة a: $a(0.0) \Rightarrow Z_a = 1000 \times 0 + 800 \times 0 = 0$

ب- عند النقطة b: $b(250.0) \Rightarrow Z_b = 1000 \times 250 + 800 \times 0 = 250000$

ج- عند النقطة c: لإيجاد إحداثيات النقطة c نقوم بحل جملة معادلتي القيدين المتقاطعين عندها, أي الأول والثالث:

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 = 2400 \ldots\ldots (1) \\ 2x_1 = 500 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) نجد: $x_1 = \frac{500}{2} = 250$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد: $8 \times 250 + 6x_2 = 2400 \Longrightarrow x_2 = 200/3$

$$c(250.200/3) \Rightarrow Z_c = 1000 \times 250 + 800 \times 200/3 = 410000/3$$

د- عند النقطة d: لإيجاد إحداثيات النقطة d نقوم بحل جملة معادلتي القيدين المتقاطعين عندها, أي الأول والثاني:

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 = 2400 \ldots\ldots(1) \\ 4x_1 + 9x_2 = 1800 \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة (1) على 2 - وجمعها مع المعادلة (2) نجد:

$$6x_2 = 600 \Longrightarrow x_2 = \frac{600}{6} = 100$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$x_1 = \frac{2400 - 100 \times 6}{8} = 225$$

$$d(225.100) \Rightarrow Z_d = 1000 \times 225 + 800 \times 100 = 305000$$

ه- عند النقطة e: $e(0.200) \Rightarrow Z_e = 1000 \times 0 + 800 \times 200 = 160000$

4 – الحل الأمثل

225 وحدة من x_1 و 100 وحدة من x_2 لتحقيق أكبر ربح والمقدر بـــــــ 305000 وحدة نقدية.

المثال الثاني: اوجد حل البرنامج الخطي التالي:

Min. $Z = 40\ x_1 + 35\ x_2$

S.T.

$2\ x_1 + 3\ x_2 \geq 600$

$x_1 + 2\ x_2 \leq 600$

$6\ x_1 + 3\ x_2 \geq 900$

$0.6\ x_1 + 0.25\ x_2 \geq 60$

$x_1, x_2 \geq 0$

الحل:

1- تحويل القيود إلى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور:

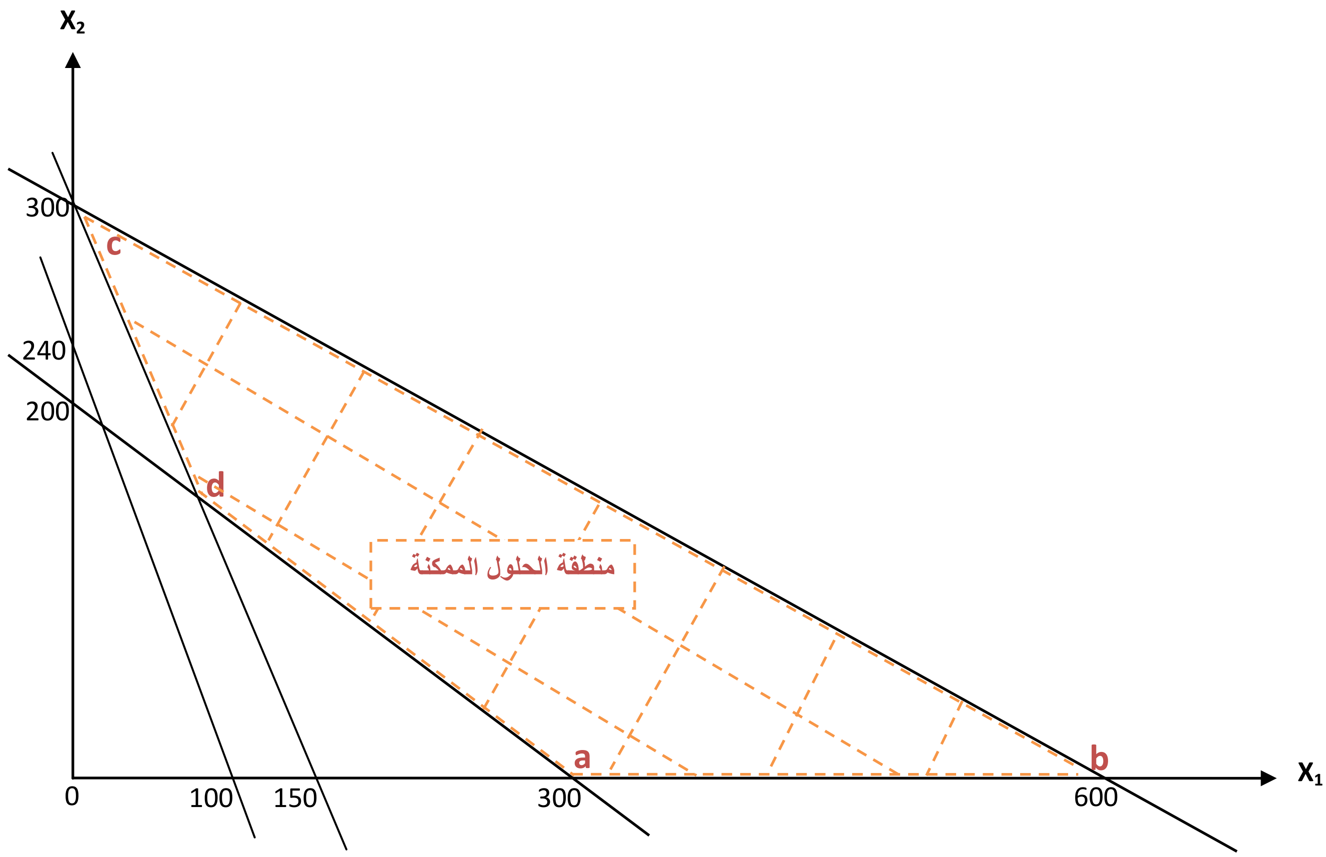
$2x_1 + 3x_2 = 600$ $(x_1 = 0\ ,\ x_2 = 200)$ $(x_1 = 300\ ,\ x_2 = 0)$

$x_1 + 2x_2 = 600$ $(x_1 = 0\ ,\ x_2 = 300)$ $(x_1 = 600\ ,\ x_2 = 0)$

$6x_1 + 3x_2 = 900$ $(x_1 = 0\ ,\ x_2 = 300)$ $(x_1 = 150\ ,\ x_2 = 0)$

$0.6x_1 + 0.25x_2 = 60$ $(x_1 = 0\ ,\ x_2 = 240)$ $(x_1 = 100\ ,\ x_2 = 0)$

2- التمثيل البياني:



3- حساب قيمة دالة الهدف عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة

أ- عند النقطة a: $a(300.0) \Rightarrow Z_a = 40 \times 300 + 35 \times 0 = 12000$

ب- عند النقطة b: $b(600.0) \Rightarrow Z_b = 40 \times 600 + 35 \times 0 = 24000$

ج- عند النقطة c: $C\ (0.300) \Rightarrow Z_b = 40 \times 0 + 35 \times 300 = 10500$

د- عند النقطة d: لإيجاد إحداثيات النقطة d نقوم بحل جملة معادلتي القيدين المتقاطعين عندها, أي الأول والثالث:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 600 \ldots\ldots(1) \\ 6x_1 + 3x_2 = 900 \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نجد:

$$4x_1 = 300 \Rightarrow x_1 = \frac{300}{4} = 75$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$x_2 = \frac{600 - 2 \times 75}{3} = 150$$

$$d\ (75.150) \Rightarrow Z_d = 40 \times 75 + 35 \times 150 = 8250$$

4 – الحل الأمثل: بمأن دالة الهدف تقليل (Min) فان الحل الأمثل عند النقطة التي تحقق أقل قيمة d (75.150)

75 وحدة من x_1 و 150 وحدة من x_2 لتحمّل أدنى تكلفة والمقدرة بـــــــ 8250 وحدة نقدية.