المحاضرة الأولى: البرمجة الخطية – صياغة النموذج الرياضي

تحتل البرمجة الخطية في الوقت الحاضر مركزا مرموقا في مجالات بحوث العمليات، وتكمن أهمية البرمجة الخطية في كونها وسيلة لدراسة سلوك عدد كبير من الأنظمة، وتعتبر البرمجة الخطية linear Programming أحد أساليب البرمجة الرياضية التي تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل لحلها وتلعب دوراً هاماً في الوصول إلى التوزيع الأمثل للموارد المتاحة على الأنشطة المختلفة وفقاً للهدف المطلوب.

تعريف البرمجة الخطية

للبرمجة الخطية عدة تعاريف وذلك باختلاف أراء المفكرين والمنظرين، وفيما يلي بعض التعاريف التي تناولت هذا الموضوع:

- أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة أي أن يكون توزيعها مثاليا.
- أسلوب رياضي يساعد على استخدام كفء للموارد الاقتصادية المتاحة وذلك إما بهدف تعظيم المنافع كالأرباح أو تقليل التكاليف، وتعتبر البرمجة الخطية بمثابة أداة يمكن للإدارة استخدامها في تسهيل عملية اتخاذ القرار.
- إن تعبير البرمجة يعني البحث عن البرنامج الذي يحقق الهدف المطلوب, أما تعبير خطية فيعني أن جميع العلاقات بين متغيرات البرنامج الرياضي خطية (من الدرجة الأولى) أي أن تغير قيمة المخرجات تبعا لتغير قيمة المدخلات بنفس النسبة.

مجالات استخدام البرمجة الخطية

تعد البرمجة الخطية من أكثر الطرق الكمية المستخدمة في صناعة القرارات، ومن أمثلة الحالات التي تقدم فيها البرمجة الخطية دعما لصانعي القرار ما يلي:

مشاكل الإنتاج: كتحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من كل نوع من المنتجات، التي ينتجها المشروع بالشكل الذي يعظم الأرباح، وذلك في ظل إمكانيات مختلفة.

المزيج الإنتاجي: في كثير من الصناعات هناك عدد من المكونات أو العناصر التي تخلط مع يعضها وبنسب معنية لتعطي منتجا آخرا جديدا كصناعة الأعلاف والأدوية والأسمدة ....الخ. والهدف هنا هو تحديد الكميات التي يجب استخدامها من كل عنصر، وذلك لصنع المنتج الجديد عند أقل تكلفة ممكنة مع ضمان وجود خصائص إنتاجية معنية في ذلك المنتج.

تخطيط الاستثمارات: لنفترض أن هناك مبلغا ماليا معينا ويراد تحديد مقدار ما ينفق على عدد من البدائل الاستثمارية وذلك لجعل مجموع العوائد السنوية أكبر ما يمكن علما بأن المشروع ليس لديه أية أموال أخرى عدا هذا المبلغ.

التخطيط للدعاية والإعلان: في هذا النوع من المشاكل يكون الهدف هو تحديد حجم الأموال التي يجب صرفها على مجموعة مختلفة من وسائل الإعلان، من أجل ترويج السلعة المنتجة بفعالية مثلى، وذلك تحت عدد من القيود، مثل قدرة السوق الاستيعابية، ومحدودية الموارد المالية، والحدود المفروضة على استخدام كل وسيلة من تلك الوسائل الإعلانية.

مشاكل الشحن: كم عدد الوحدات التي يجب شحنها من عدد من المنتجات المختلفة وذلك باستخدام وسيلة نقل معنية ذات طاقة تحميلية محدودة لتعظيم الأرباح في الوقت الذي يراد فيه نقل كميات معنية مطلوبة من السلعة المنتجة.

شروط استخدام البرمجة الخطية

هناك عدد من الشروط أو الخصائص الواجب توافرها عند استخدام البرمجة الخطية، ومن أبرزها ما يلي:

- يجب أن يكون للظاهرة المدروسة هدف واضح ومحدد مع إمكانية التعبير عن ذلك الهدف بصورة عددية.

– محدودية الموارد المتاحة الخاضعة للبرمجة مثل الأيدي العاملة, المواد الأولية، الآلات ورأس المال المطلوب، .... الخ.

- وجود استخدامات (أكثر من متغير في البرنامج) متنافسة على الموارد موضوع البرمجة، ويمكن زيادتها أو تخفيضها حسب الخطة الموضوعة لحل المشكلة المطروحة ومن ثم سوف تؤثر هذه الزيادة أو النقصان على الهدف المطلوب تحقيقه.

- إمكانية التعبير عن الفعاليات أو المتغيرات موضوع البرمجة بصورة كمية (عددية).

– أن تكون العلاقة بين المتغيرات في النموذج الرياضي من الدرجة الأولى.

صياغة نموذج البرمجة الخطية

إن أهم مرحلة في البرمجة الخطية هي مرحلة إنشاء نموذج البرمجة الخطية. ونعني بالنموذج هو التعبير عن علاقات واقعية بعلاقات رياضية مفترضة ومبنية على دراسة الواقع وتحليله. وبعد الانتهاء من تكوين النموذج الملائم يجب التأكد من مطابقته للمشكلة قيد الدراسة ثم الانتقال إلى المرحلة التالية والمتمثلة في تقييمه وتحليله للتعرف على تأثيرات العوامل المختلفة في المشكلة والوصول إلى الحل المناسب.

ويتكون نموذج البرمجة الخطية من العناصر الأساسية التالية:

– **دالة الهدف** Function objective: وهي دالة خطية تعبر عن الهدف المنشود الذي نرغب في تحقيقه, ويكون الهدف عادة هو الوصول إلى أقصى ربح ممكن أو أدنى تكلفة ممكنة.

وتكتب دالة الهدف وفق الصيغة الرياضية التالية: $Optimalité\ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_J$

حيث أن:

Optimalité: وتعني الامثلية, وتكون تعظيم (Maximization) هذه القيمة إذا كان الهدف المنشود ربحا أو تقليل القيمة (Minimization) إذا كان الهدف تكلفة أي الوصول إلى أدنى تكلفة ممكنة.

C_j: معاملات دالة الهدف. و يكون المعامل الخاص بكل متغير هو عبارة عن ربح الوحدة الواحدة في حالة تعظيم دالة الهدف أو يكون المعامل عبارة عن تكلفة الوحدة الواحدة في حالة تخفيض دالة الهدف.

X_j: المتغيرات القرارية, وهي المجاهيل التي نبحث عنها.

j: مؤشر لعدد المتغيرات والمقدرة بـ (n)

– **القيود (الموارد)** Constraints: وتشير عادة الشروط أو الظروف المتحكمة في الظاهرة بشكل متراجحات أو معادلات خطية أو خليط منهما ذات الصيغة الرياضية التالية:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j (\geq, \leq, =) b_i$$

حيث أن:

a_{ij}: العلاقات الفنية التي توضح ما تحتاجه كل وحدة إنتاج من كل مورد من الموارد المتاحة المحدودة.

b_j: الكميات المتاحة من الموارد.

i: مؤشر لعدد القيود والمقدرة بـــ (m).

ملاحظة: نماذج البرمجة الخطية يمكن أن تأخذ ثلاث صيغ هي:

الصيغة العامة (المختلطة)، وهي الصيغة التي تحتوي قيودها على كل الإشارات (≥, ≤، =).

الصيغة القانونية، وهي الصيغة التي تحتوي قيودها على إشارتي (≤) أو (≥) فقط:

- فإذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) فان إشارة القيود تكون أقل من أو يساوي (≤).

- وإذا كانت دالة الهدف تقـــــــــــــــليل (Min) فان إشارة القيود تكون أكبر من أو يساوي (≥).

الصيغة المعيارية (القياسية)، وهي الصيغة التي تحتوي قيودها على إشارة مساواة (=) فقط.

- شرط عدم السلبية Non-Negativity: إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشـــكلة قيـــد الدراســـة متغيرات موجبة أو صفرية ولا يمكن أن تكون سالبة أي: $x_j \geq 0$.

لتوضيح عملية صياغة نموذج البرمجة الخطية سنطرح بعض الأمثلة:

المثال الأول: مصنع يقوم بإنتاج نوعين من الخزانات المعدنية هما A وB وكل نوع يمر بآلتين: الآلة الأولى لقطع الصفائح وطاقاتها التشغيلية 80 ساعة أسبوعيا، والآلة الثانية لطي ووصل الصفائح لتعطيها شكل الخزان المناسب المطلوب وطاقاتها التشغيلية 70 ساعة أسبوعيا.

إذا علمت أن النوع الأول A يحتاج 4 ساعات على الآلة الأولى و10 ساعات على الآلة الثانية والنوع B يحتاج 5ساعات على الآلة الأولى و6 ساعات على الآلة الثانية.

المطلوب:كتابة وصياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحدد عدد الخزانات المعدنية الواجب إنتاجها من النـــوعين A وB لتحقيق أعلى ربح ممكن إذا كان ربح الخزان الواحد من النوع الأول A يقدر بـــ 30 دنانير وربح الخزان من النوع الثاني B يقدر بـــ 60 دنانير.

الحل:

الهدف هو تحقيق أعلى ربح ممكن للمصنع من خلال إنتاج الخزانات المعدنية من النوعين A وB.

نقرض أن

$\mathbf{x_1}$: عدد الخزانات المعدنية الواجب إنتاجها أسبوعيا من النوع A

$\mathbf{x_2}$: عدد الخزانات المعدنية الواجب إنتاجها أسبوعيا من النوع B

دالة الهدف: هي دالة تعظيم الربح الأسبوعي المصنع

إذا كان ربح إنتاج خزان واحد من النوع A 30 دنانير فان ربح إنتاج x_1 خزان هو: $30\ x_1$؛

وإذا كان ربح إنتاج خزان واحد من النوع B 60 دنانير فان ربح إنتاج x_2 خزان هو: $60\ x_2$.

ربح المصنع الأسبوعي هو: $Z = 30\ x_1 + 60\ x_2$

- دالة تعظيم ربح المصنع الأسبوعي هي: $\mathbf{Max\ Z = 30\ x_1 + 60\ x_2}$

القيود:

القيد الأول: قيد الآلة الأولى, عدد الساعات المستغلة أسبوعيا على الآلة الأولى يجب أن لا تتعدى طاقاتها التشغيلية أسبوعيا (80 ساعة) $\mathbf{4\ x_1 + 5\ x_2 \leq 80}$

القيد الثاني: قيد الآلة الثانية, عدد الساعات المستغلة أسبوعيا على الآلة الثانية يجب أن لا تتعدى طاقاتها التشغيلية أسبوعيا (70 ساعة) $\mathbf{10\ x_1 + 6\ x_2 \leq 70}$

شرط عدم السلبية: أن لا يكون عدد الخزانات المعدنية الواجب إنتاجها أسبوعيا من النـــوعين A و B عـــددا سالبا: $\mathbf{x_1 \geq 0}$ و $\mathbf{x_2 \geq 0}$

- ويكون بذلك النموذج الرياضي في صورته النهائية كما يلي:

$$\mathbf{Max\ Z = 30\ x_1 + 60\ x_2}$$

Subject to:

$$\mathbf{4\ x_1 + 5\ x_2 \leq 80}$$
$$\mathbf{10\ x_1 + 6\ x_2 \leq 70}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

المثال الثاني: تلقت إحدى المؤسسات طلب 1000 كغ من خليط خاص متكون من ثلاث مواد كيماوية يرمز لها بالرمز: M_3, M_2, M_1 وتقدر تكاليفها بالترتيب : 500 دج, 600 دج، 700 دج لكل كيلوغرام.

تخضع هذه المواد للشروط التالية :

لا يمكن استعمال أكثر من 300 كغ من M_1،

في نفس الوقت يجب استعمال 500 كغ على الأقل من M_2,

يجب استعمال 200 كغ على الأقل من M_3.

المطلوب: كتابة البرنامج الخطي المحدد للكميات الواجب استعمالها من المواد الثلاثة لتلبية هذا الطلب وذلك بأقل تكلفة ممكنة.

الحل: نقرض أن

x_1: كمية المادة M_1 المستعملة في الخليط

x_2: كمية المادة M_2 المستعملة في الخليط

x_3: كمية المادة M_3 المستعملة في الخليط

دالة الهدف: $\mathbf{Min\ Z = 500\ x_1 + 600\ x_2 + 700\ x_3}$

القيود: القيد الأول: قيد كمية المادة M_1 $\quad x_1 \leq 300$

القيد الثاني : قيد كمية المادة M_2 $\quad x_2 \geq 500$

القيد الثالث: قيد كمية المادة M_3 $\quad x_3 \geq 200$

القيد الرابع: قيد الكمية الإجمالية للخليط $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 1000$

شرط عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

- ويكون بذلك النموذج الرياضي في صورته النهائية كما يلي:

$$\mathbf{Min\ Z = 500\ x_1 + 600\ x_2 + 700\ x_3}$$

Subject to:

$$x_1 \leq 300$$

$$x_2 \geq 500$$

$$x_3 \geq 200$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$