المحاضرة الثالثة: طرق حل نماذج البرمجة الخطية – الطريقة المبسطة

ما يميز الطريقة المبسطة (طريقة السمبلاكس) الدقة والكفاءة كما يمكن استخدامها لأي عدد من المتغيرات والقيود، وعملية هذه الطريقة تظهر من خلال تتبع خطوات نظامية متتالية تبدأ بالحل الممكن مرورا بالحل الأفضل وصولا إلى الحل الأمثل؛ وتتمثل خطوات الطريقة المبسطة فيما يلي:

الخطوة الأولى: تحويل النموذج الرياضي إلى الشكل المعياري (القياسي) أي تحويل كل القيود من متراجحات إلى معادلات كما يلي:

– إذا كانت إشارة القيد اقل من أو تساوي (≤) يتم إضافة متغير الفجوة (المتغير الراكد) Slack Variable إلى الطرف الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (S_i ; i = 1, 2, 3, 4, …..,m).

– إذا كانت إشارة القيد اكبر من أو تساوي (≥) يتم طرح متغير الفجوة (المتغير الفائض) Surplus Variable من الطرف الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (S_i ; i = 1, 2, 3, 4, ……..,m)، ونضيف متغير وهمي (متغير اصطناعي) Artificial Variable إلى الطرف الأيسر ويرمز له بالرمز (m,……. ,4, 3, 2, 1 = i ; A_i).

– إذا كانت إشارة القيد مساواة (=) يتم إضافة متغير وهمي (متغير اصطناعي) Artificial Variable إلى الطرف الأيسر ويرمز له بالرمز (m,……. ,4, 3, 2, 1 = i ; A_i).

– إعادة كتابة دالة الهدف في ضوء المتغيرات الجديدة، حيث تظهر مغيرات الفجوة بمعامل صفر (0) وتظهر المتغيرات الاصطناعية بمعامل (M) – والتي ترمز إلى عدد كبير جدا – وبإشارة سالبة إذا كانت دالة الهدف تعظيم وإشارة سالبة إذا كانت دالة الهدف تقليل.

الخطوة الثانية: تكوين جدول الحل الأولي (الأساسي) كما يلي:

Cof		c_{ij}	0	±M*	الطرف الأيمن للقيود
Var		x_{ij}	S_i	A_i	R.H.S
معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف	عمود المتغيرات الأساسية Basic Variable	معاملات المتغيرات في القيد الأول			b_1
		معاملات المتغيرات في القيد الثاني			b_2
		…….			.
		…….			.
		معاملات المتغيرات في القيد m			b_m
Z		Z_1	…….	Z_k	Z
C - Z		$C_1 – Z_1$	…….	$C_k – Z_k$	

* توضع الإشارة حسب طبيعة دالة الهدف.

ملاحظات حول جدول الحل الأولي:

1- توضع المتغيرات الاصطناعية والراكدة كمتغيرات أساسية في جدول الحل الأولي، أما المتغيرات الفائضة فلا يمكن إن تكون كمتغيرات أساسية.

2- يمثل العمود الأيمن من جدول الحل الأولي الكميات أو الطرف الأيمن Right Hand Side للقيود أو للمعادلات في الشكل القياسي.

3- يمثل السطر (Z) إجمالي الربح أو التكلفة حسب طبيعة دالة الهدف، و يتم احتسابه على النحو التالي: (معامل المتغير الأساسي الأول × معامل x_1 في القيد الأول) + (معامل المتغير الأساسي الثاني × معامل x_1 في القيد الثاني) + ... + (معامل المتغير الأساسي الأخير × معامل x_1 في القيد m)؛ وهكذا بالنسبة لجميع المتغيرات.

كما يتم حساب قيمة دالة الهدف (Z) كما يلي: (معامل المتغير الأساسي الأول × الطرف الأيمن للقيد الأول) + (معامل المتغير الأساسي الثاني × الطرف الأيمن للقيد الثاني) + ... + (معامل المتغير الأساسي الأخير × الطرف الأيمن للقيد m)

4- يسمى السطر ($C - Z$) بسطر تقييم الحل ، ويمثل صافي الربح أو التكلفة حسب طبيعة دالة الهدف؛ ويتم احتسابه على النحو التالي:

معامل المتغير في دالة الهدف – قيمة Z المقابلة له في السطر (Z)، فمثلا قيمة ($C - Z$) للمتغير x_1 هي: ($C_1 - Z_1$)

الخطوة الثالثة: التحقق من أمثلية الحل، وذلك من خلال فحص قيم سطر التقييم ($C - Z$) والذي يعبر عن مدى مساهمة كل متغير من متغيرات دالة الهدف عند إضافة وحدة واحدة، ويتم التحقق من شرط الأمثلية كما يلي:

- إذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) فان الحل الأمثل يتحقق عندما تكون جميع قيم السطر

($C - Z$) سالبة أو معدومة ($C - Z \leq 0$).

- إذا كانت دالة الهدف تقـليل (Min) فان الحل الأمثل يتحقق عندما تكون جميع قيم السطر

($C - Z$) موجبة أو معدومة ($C - Z \geq 0$).

وفي حالة تحقق شرط الأمثلية يتم التوقف عند هذه الخطوة ويكون الحل المتحقق هو الحل الأمثل، وإذا لم يتحقق شرط الأمثلية يتم الانتقال إلى الخطوة الرابعة.

الخطوة الرابعة:

أ)- تحديد عمود الدوران بتحديد المتغير الداخل إلى الأساس وهو المتغير الذي يقابل أعلى قيمة في سطر التقييم ($C - Z$) وذات إشارة موجبة إذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) أو إشارة سالبة إذا كانت دالة الهدف تقـليل (Min).

ب)- تحديد سطر الدوران بتحديد المتغير الخارج من الأساس والذي يقابل اقل حاصل قسمة بين عناصر الطرف الأيمن للقيود وعناصر عمود الدوران (العناصر السالبة والمعدومة في عمود الدوران لا تأخذ بعين الاعتبار)، ويسمى عنصر تقاطع سطر وعمود الدوران بعنصر الدوران (عنصر الارتكاز).

ج)- الانتقال إلى جدول سمبلكس جديد عن طريق:

- تحسب قيم سطر المتغير الداخل إلى الأساس عن طريق قسمة قيم سطر الدوران على عنصر الدوران، ويسمى السطر الناتج بسطر العمل Working Row أو المعادلة المحورية.

- تحسب قيم الأسطر الأخرى باستخدام القاعدة التالية:

قيم السطر الجديدة = القيمة القديمة للسطر – (الرقم المناظر لعنصر الدوران في السطر × الرقم المقابل في سطر العمل)

الرقم المناظر لعنصر الدوران في السطر هو الرقم الذي يقع أسفل أو أعلى عنصر الدوران.

ويمكن كذلك حساب قيم الأسطر الأخرى باستخدام القاعدة التالية:

العنصر الجديد = العنصر القديم + (المقابل في سطر الدوران × المقابل في عمود الدوران) / عنصر الدوران.

- حساب قيم السطر (Z) وقيم السطر (C – Z).

وبعد الانتهاء من الحساب نقوم بالتحقق من أمثلية الحل كما مر في الخطوة الثالثة.

المثال الأول: تختص مؤسسة في صناعة ثلاث أنواع من الأثاث الخشبي: مكاتب، طاولات، كراسي، أظهر التحليل الفني للإنتاج الأسبوعي بيانات الجدول التالي:

المنتجات / الموارد	متطلبات الوحدة الواحدة من الموارد			الحد الأقصى المتاح من الموارد
	المكاتب	الطاولات	الكراسي	
المادة الأولية (م2)	04 متر مربع	02 متر مربع	01 متر مربع	400 متر مربع
اليد العاملة (سا)	02 ساعة	02 ساعة	04 ساعة	600 ساعة
قوى محركة (سا)	01 ساعة	02 ساعة	01 ساعة	400 ساعة
الربح الوحدوي	200 دينار	160 دينار	100 دينار	

المطلوب: أوجد خطة الإنتاج الأسبوعية التي تحقق أكبر ربح ممكن.

الحل:1- كتابة النموذج الرياضي للمسألة:

نقرض أن x_1: عدد المكاتب المنتجة أسبوعيا.

x_2: عدد الطاولات المنتجة أسبوعيا.

x_3: عدد الكراسي المنتجة أسبوعيا.

$$\text{Max } Z = 200\,x_1 + 160\,x_2 + 100\,x_3$$

Subject to:

$$4\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \leq 400$$

$$2\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 \leq 600$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 400$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

2- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$\text{Max } Z = 200\,x_1 + 160\,x_2 + 100\,x_3 + 0\,S_1 + 0\,S_2 + 0\,S_3$$

Subject to:

$$4\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 + S_1 = 400$$

$$2\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 + S_2 = 600$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + S_3 = 400$$

$$x_1 , x_2 , x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

3 – إعداد جدول الحل الأولي:

Cof		**200**	**160**	**100**	**0**	**0**	**0**	**R.H.S**
Var		**x_1**	**x_2**	**x_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	
0	**S_1**	**4**	**2**	**1**	**1**	**0**	**0**	**400**
0	**S_2**	**2**	**2**	**4**	**0**	**1**	**0**	**600**
0	**S_3**	**1**	**2**	**1**	**0**	**0**	**1**	**400**
Z		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
C-Z		**200**	**160**	**100**	**0**	**0**	**0**	

- يتم احتساب قيم السطر (Z) كما يلي:

$$Z_1 = 0\times4+0\times2+0\times1 = 0. \quad Z_2 = 0\times2+0\times2+0\times2 = 0. \quad Z_3 = 0\times1+0\times4+0\times1 = 0$$

$Z_4= 0\times1+0\times0+0\times0= 0.$ $Z_5= 0\times0+0\times1+0\times0= 0.$ $Z_6= 0\times0+0\times0+0\times1= 0$

قيمة دالة الهدف: $Z= 0\times400+0\times600+0\times400= 0$

- يتم احتساب قيم السطر $(C - Z)$ كما يلي: معامل المتغير في دالة الهدف – قيمة Z المقابلة له في السطر (Z).

$C_1 – Z_1=200-0=200.$ $C_2 – Z_2=160-0=160.$ $C_3 – Z_3=100-0=100.$

$C_4 – Z_4=0-0=0.$ $C_5 – Z_5=0-0=0.$ $C_6 – Z_6=0-0=0.$

ونلاحظ من جدول الحل الأولي ما يلي:

- قيمة دالة الهدف تساوي صفر $(Z= 0)$، وقيم المتغيرات الراكدة هي:

$S_1= 400, S_2= 600, S_3= 400$

وهذا يدل على عدم استغلال الموارد المتاحة، أي أن عملية الإنتاج لم تبدأ بعد.

- التحقق من أمثلية الحل، وبما أن دالة الهدف تعظيم (Max) فان الحل الأمثل يتحقق عندما تكون جميع قيم السطر ($C – Z$) سالبة أو معدومة $(C – Z \leq 0)$، ومن خلال فحص قيم سطر التقييم ($C – Z$) نلاحظ وجود قيم موجبة وهذا يعني أن الحل ليس أمثل، لذلك نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سيدخل إلى الأساس وتحديد المتغير الذي سيغادر الأساس.

وبما أن دالة الهدف تعظيم (Max) فان المتغير الذي سيدخل إلى الأساس هو المتغير الذي يقابل أعلى قيمة موجبة في سطر التقييم ($C – Z$) لأنها تعطي أعلى مساهمة في دالة الهدف وهو المتغير ($\mathbf{x_1}$) والذي يقابل القيمة (200) وعموده هو عمود الدوران.

ولتحديد المتغير الذي سيغادر الأساس نقسم قيم عمود الكميات على القيم المقابلة لها في عمود الدوران كما يلي:

ناتج حاصل القسمة	قيم عمود الدوران	÷	قيم عمود الكميات
=100	4	÷	400
=300	2	÷	600
=400	1	÷	400

ونختار أقل حاصل قسمة (100)، وبذلك (S_1) هو المتغير الذي سيغادر الأساس وسطره هو سطر الدوران، والرقم (4) هو عنصر الدوران كما هو موضح في الجدول التالي.

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	4	2	1	1	0	0	400
0	S_2	2	2	4	0	1	0	600
0	S_3	1	2	1	0	0	1	400
Z		0	0	0	0	0	0	0
C-Z		200	160	100	0	0	0	

سطر الدوران عنصر الدوران عمود الدوران

– الانتقال إلى جدول سمبلكس جديد نحصل من خلاله على حل أفضل من الحل الأولي وذلك بعد إجراء التعديلات التالية :

– تحسب قيم سطر المتغير الذي دخل إلى الأساس عن طريق قسمة قيم سطر الدوران على عنصر الدوران،

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
قيم سطر العمل	4/4	2/4	1/4	1/4	0/4	0/4	400/4
	1	1/2	1/4	1/4	0	0	100

– تحسب قيم السطر الثاني (S_2) باستخدام القاعدة التالية:

قيم السطر (S_2) الجديدة = القيمة القديمة للسطر (S_2) – (الرقم المناظر لعنصر الدوران في السطر (S_2) × الرقم المقابل في سطر العمل)

S_2	2	2	4	0	1	0	600
-(2)	1	1/2	1/4	1/4	0	0	100
=	0	1	7/2	-1/2	1	0	400

– تحسب قيم السطر الثاني (S_3) باستخدام القاعدة التالية:

قيم السطر (S_3) الجديدة = القيمة القديمة للسطر (S_3) – (الرقم المناظر لعنصر الدوران في السطر (S_3) × الرقم المقابل في سطر العمل)

S_3	1	2	1	0	0	1	400
-(1)	1	1/2	1/4	1/4	0	0	100
=	0	3/2	3/4	-1/4	0	1	300

- يتم احتساب قيم السطر (Z) كما يلي:

$Z_1= 200\times1+0\times0+0\times0= 200.$

$Z_2= 200\times1/2+0\times1+0\times3/2= 100.$

$Z_3= 200\times1/4+0\times7/2+0\times3/4= 50.$

$Z_4= 200\times1/4+0\times(-1/2)+0\times(-1/4)= 50.$

$Z_5= 200\times0+0\times1+0\times0= 0.$

$Z_6= 200\times0+0\times0+0\times1= 0$

قيمة دالة الهدف: $Z= 200\times100+0\times400+0\times300= 20000$

- يتم احتساب قيم السطر (Z - C) كما يلي: معامل المتغير في دالة الهدف – قيمة Z المقابلة له في السطر (Z).

$C_1 – Z_1=200-200=0.$ $C_2 – Z_2=160-100=60.$ $C_3 – Z_3=100-50=50.$

$C_4 – Z_4=0-50=-50.$ $C_5 – Z_5=0-0=0.$ $C_6 – Z_6=0-0=0.$

وبموجب الحسابات السابقة نحصل على الجدول التالي.

Cof		**200**	**160**	**100**	**0**	**0**	**0**	**R.H.S**
Var		**x_1**	**x_2**	**x_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	
200	**x_1**	**1**	**1/2**	**1/4**	**1/4**	**0**	**0**	**100**
0	**S_2**	**0**	**1**	**7/2**	**-1/2**	**1**	**0**	**400**
0	**S_3**	**0**	**3/2**	**3/4**	**-1/4**	**0**	**1**	**300**
Z		**200**	**100**	**50**	**50**	**0**	**0**	**20000**
C-Z		**0**	**60**	**50**	**-50**	**0**	**0**	

وبعد الانتهاء من الحساب نقوم بالتحقق أمثلية الحل، ومن خلال فحص قيم سطر التقييم (Z – C) نلاحظ وجود قيم موجبة وهذا يعني أن الحل ليس أمثل، لذلك نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سيدخل إلى الأساس وتحديد المتغير الذي سيغادر الأساس.

- تحسب قيم سطر العمل. - تحسب قيم الأسطر الأخرى.

- حساب قيم السطر (Z) وقيم السطر (Z – C).

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
200	x_1	1	0	0	1/3	0	-1/3	0
0	S_2	0	0	3	-1/3	1	-2/3	200
160	x_2	0	1	1/2	-1/6	0	2/3	200
Z		200	160	80	40	0	40	32000
C-Z		0	0	20	-40	0	-40	

وبعد الانتهاء من الحساب نقوم بالتحقق أمثلية الحل، ومن خلال فحص قيم سطر التقييم ($C - Z$) نلاحظ وجود قيم موجبة وهذا يعني أن الحل ليس أمثل، لذلك نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سيدخل إلى الأساس وتحديد المتغير الذي سيغادر الأساس.

- تحسب قيم سطر العمل.

- تحسب قيم الأسطر الأخرى.

- حساب قيم السطر (Z) وقيم السطر ($C - Z$).

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
200	x_1	1	0	0	1/3	0	-1/3	0
100	x_3	0	0	1	-1/9	1/3	-2/9	200/3
160	x_2	0	1	0	-1/9	-1/6	7/9	500/3
Z		200	160	100	340/9	20/3	320/9	100000/3
C-Z		0	0	0	-340/9	-20/3	-320/9	

وبعد الانتهاء من الحساب نقوم بالتحقق أمثلية الحل، ومن خلال فحص قيم سطر التقييم ($C - Z$) نلاحظ كل القيم سالبة أو معدومة وهذا يعني أن الحل أمثل، وهو:

$$x_1 = 0 \text{ ، } x_2 = 500/3 \text{ ، } x_3 = 200/3 \text{ ، } S_1 = 0 \text{ ، } S_2 = 0 \text{ ، } S_3 = 0$$

$$Z = 100000/3$$

إذن خطة الإنتاج الأسبوعية التي تحقق أكبر ربح ممكن (100000/3 دينار) هي: إنتاج 500/3 طاولة و 200/3 كرسي.

المثال الثاني: ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 9x_2 + x_3$$

Subject to:

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 18$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل:

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 9x_2 + x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

Subject to:

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 + \mathbf{S_1} = 1$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \mathbf{S_2} = 18$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + \mathbf{S_3} = 20$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

2- إعداد جدول الحل الأولي:

Cof		**3**	**9**	**1**	**0**	**0**	**0**	**R.H.S**
Var		**x_1**	**x_2**	**x_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	
0	**S_1**	**1**	**4**	**3**	**1**	**0**	**0**	**16**
0	**S_2**	**3**	**2**	**2**	**0**	**1**	**0**	**18**
0	**S_3**	**2**	**4**	**2**	**0**	**0**	**1**	**20**
Z		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
C - Z		**3**	**9**	**1**	**0**	**0**	**0**	

بعد إتمام جدول السمبلكس نلاحظ أن شرط الأمثلية غير محقق بما أنه يستوجب أن تكون عناصر السطر (C - Z) سالبة أو معدومة في البرامج الخطية التي هدفها التعظيم (Max)، وعليه سننتقل إلى الجدول الجديد بعد تحديد عمود المتغير الداخل (عمود الدوران) الذي يوافق المتغير المرتبط بـأكبر قيمة موجبة في السطر (C - Z)، وفي مثالنا هذا نجدها القيمة 9 والتي ترتبط بالمتغير x_2، أما الخطوة الموالية فهي تحديد سطر المتغير الخارج، والذي يوافق أقل حاصل قسمة كل عنصر من عناصر عمود الموارد على العنصر الذي يقابله من عمود المتغير الداخل، أي نختار السطر الذي يرتبط بأقل قيمة من بين : 16/4; 18/2; 20/4، وعليه نجد المتغير الخارج هو S_1، وبذلك يكون جدول السمبلكس الموالي كما يلي:

Cof		3	9	1	0	0	0	R.H.S
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
9	x_2	1/4	1	3/4	1/4	0	0	4
0	S_2	5/2	0	1/2	-1/2	1	0	10
0	S_3	1	0	-1	-1	0	1	4
Z		9/4	9	27/4	9/4	0	0	36
C - Z		3/4	0	-23/4	-9/4	0	0	

من خلال الجدول أعلاه نلاحظ أنه يقترح إدخال المتغير x_2 في عمود الأساس بكمية 4 وحدات بما يحقق قيمة في دالة الهدف قدرها 36، ولاختبار أمثلية الحل نعود لعناصر السطر (C - Z)، أين نلاحظ وجود قيمة موجبة (3/4) ارتبطت بالمتغير x_1 ما يعني أنه المتغير الداخل في الخطوة اللاحقة، أما سطر المتغير الخارج فهو سطر المتغير S_2 بتطبيق نفس قاعدة القرار، أي أقل حاصل قسمة عمود الموارد على ما يقابله من عنصر في عمود الدوران، وبذلك يكون جدول السمبلكس الجديد كما يلي:

Cof		3	9	1	0	0	0	R.H.S
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
9	x_2	0	1	7/10	9/20	-1/10	0	3
3	x_1	1	0	1/5	-1/5	2/5	0	4
0	S_3	0	0	-6/5	-4/5	-2/5	1	0
Z		3	9	69/10	69/29	3/10	0	39
C - Z		0	0	-59/10	-4/9	-3/10	0	

نلاحظ أن عناصر السطر (Z-C) كلها سالبة أو معدومة، وعليه فإن الجدول أعلاه يمثل جدول الحل الأمثل، أما قيم الحل الأمثل فنلخصها كما يلي:

$$x_1 = 4 \text{ ، } x_2 = 3 \text{ ، } S_1 = 0 \text{ ، } S_2 = 0 \text{ ، } S_3 = 0 \text{ ،}$$

$$Z = 39$$