الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

دروس على الخط في مقياس:

بحوث العمليات 02

موجه لطلبة سنة ثالثة علوم اقتصادية تخصص اقتصاد كمي

من إعداد الأستاذ: قعيد إبراهيم

الموسم الدراسي: 2022/2021

المحتويات

مقدمة:

هذا المحتوى عبارة عن دروس عبر الخط في مقياس بحوث العمليات 02 المقررة للسداسي السادس والموجه لطلبة سنة ثالثة علوم اقتصادية تخصص اقتصاد كمي، بحيث تم جمعها من عديد المراجع وهي عبارة عن أمثلة وتمرينات مع الحلول النموذجية لها لكل وحدة من الوحدات المبرمجة في المقرر، وهي من شأنها مساعدة الطالب في التعرف على الكثير من الخبايا المتعلقة بالنماذج التي تم دراستها، على شاكلة نماذج خطوط الانتظار ونماذج تسيير المخزون ونظرية المباريات (الألعاب) وأخيرا نماذج المحاكاة.

الأستاذ قعيد أبراهيم

المحور الأول:

نظرية خطوط الانتظار (صفوف الانتظار)

وتقوم مشكلة خطوط الانتظار على وجود طلبات على خدمة معينة يفوق ما هو معروض منها في لحظة زمنية معينة، وبالتالي يتكون الصف من الذين ينتظرون تلبية طلبهم على الخدمة، وهذه المشكلة تواجه الكثير من المؤسسات سواء الكبيرة أو الصغيرة أو حتى المحلات والمؤسسات العامة والخاصة، وهو كيفية تلبية طلبات الزبائن وجعلهم ينتظرون لأقل وقت ممكن مع الأخذ بعين الاعتبار التكلفة التي تترب عن زيادة عدد مقدمي الخدمة، وسنركز على نموذجين الاكثر تداولا وهما:

أولا: نماذج خطوط الانتظار:

I. الحالة الأولى: نموذج صف الانتظار واحد ومركز خدمة واحد، والخدمة تتم بمرحلة واحدة.

وسنتطرق في هذا العنصر إلى القوانين المستخدمة في هذا النموذج وكيفية تطبيقها من خلال تطبيقات عملية:

1-القوانين المستخدمة في صفوف الانتظار في حالة مركز واحد للخدمة:

- P: احتمال وجود وحدات في النظام، معامل التشغيل: $P = \frac{\lambda}{\mu}$
- P0: احتمال عدم وجود وحدات في النظام، نسبة الوقت غير المستغل:

$$P_{o} = 1 - P$$

$$P_{o} = 1 - \lambda/\mu$$

- Ls: متوسط عدد الوحدات المتوقع وجودها في النظام، طول النظام:

$$Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

- Lq: متوسط عدد الوحدات المتوقع في صف الانتظار= طول صف الانتظار

$$Lq = P \times Ls$$

$$Lq = \lambda/\mu(\frac{\lambda}{\mu - \lambda})$$

- Ws : متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في النظام

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

- Wq : متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في صف الانتظار

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

2-تطبيق حول النموذج الأول:

يستطيع مطعم في مدينة الوادي باستقبال الزبائن بمعدل 150 زبون في الساعة في المتوسط، ومعدل وصول الزبائن للمطعم هو 140زبون في الساعة في المتوسط.

المطلوب:

1- احتمال أن يكون المطعم مشغولا؟

2- نسبة الوقت الضائع غير المستغل؟

3- متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام؟

4- متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار؟

5- متوسط وقت انتظار الزبائن المتوقع في النظام؟

6- متوسط وقت انتظار الزبائن المتوقع في صف الانتظار؟

الحل:

لدينا $\lambda = 140 \quad \mu = 150$

1- احتمال أن يكون المطعم مشغولا:

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{140}{150} = 0.9333$$

احتمال أن يكون المطعم مشغولا هو 93.33%

2- نسبة الوقت الضائع غير المستغل:

P0=1-P=1-0.9333=0.066

وبالتالي نسبة الوقت غير المستغل هو 6.66%

3- متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام

$$Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

=140/150-140=140/10=14 زبون

4- متوسط عدد الزبائن المتوقع وجودها في الصف:

Lq = P × Ls = 0.9333(14)=13.06 زبون

أي أن الذين ينتظرون هو 13 زبون، وواحد في الخدمة ويشكلون بذلك النظام ككل وهو (14) زبون.

5- حساب متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في النظام:

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

= 1/150-140 =1/10 = 0.1 ساعة

=0.1 (60دقيقة) =6 دقائق

وبالتالي متوسط الوقت الذي يقضيه الزبون في المؤسسة هو 6 دقائق.

6- متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل زبون في صف الانتظار:

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

=140/150(150-140)=140-1500=0.093 ساعة =0.093 (60 دقيقة)

=5.85 دقيقة = 5 دقائق و51 ثانية وهو وقت انتظار الزبون في الصف

II. الحالة الثانية: نموذج صف الانتظار واحد ومركز خدمة متعدد وتتم الخدمة على مرحلة واحدة.

وسنتطرق في هذا العنصر إلى القوانين المستخدمة في هذا النموذج وكيفية تطبيقها من خلال تطبيقات عملية:

1-القوانين المستخدمة في صف الانتظار الواحد بأكثر من مركز للخدمة:

- احتمال وجود وحدات في النظام:

$P=\frac{\lambda}{\mu}$ $\qquad$ $P= \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s} \left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right) P_{\circ}$ الحقيقي

S: هو عدد مراكز الخدمة.

- احتمال عدم وجود وحدات في النظام، النظام معطل:

- بالنسبة لقيم P0 لنموذج صفوف الانتظار بأكثر من خدمة S نجده في جداول خاصة بصفوف الانتظار وتعتمد على احتمال وجود وحدات في النظام P.

- متوسط عدد الوحدات في صف الانتظار:

$$Lq= \frac{(P)^{s}.\mu.\lambda.p_{\circ}}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^{2}}$$

- متوسط عدد الوحدات المتوقع في النظام:

$$Ls=Lq+\frac{\lambda}{\mu}$$

- متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في صف الانتظار:

$$Wq= \frac{Lq}{\lambda}$$

- متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في النظام

$$Ws = Wq+\frac{1}{\mu}$$

- عدد N وحدات في النظام: وهناك حالتان هما:

✓ إذا كان عدد الوحدات أقل أو يساوي عدد مراكز الخدمة$N\leq S$ فإننا نجده بالقانون التالي:

$$P(N) = \frac{P^{n}}{N!}\ P_{\circ}$$

✓ إذا كان عدد الوحدات أكبر تماما من عدد مراكز الخدمة $N>S$ فإننا نجده بالقانون التالي:

$$P(N) = \frac{P^{n}}{S!S^{n-s}} P_{\circ}$$

2-تطبيق حول النموذج الثاني:

يتوفر إحدى المعابر البرية على 4 موظفين بتقديم الخدمة للمسافرين بمعدل 150 مسافر بالساعة في المتوسط ومعدل وصول عابري الحدود هو 80 شخص بالساعة في المتوسط.

المطلوب: أوجد كل من:

1- احتمال وجود مسافرين في المعبر؟

2- احتمال عدم وجود أي عابر للمعبر؟

3- متوسط عدد المسافرين المتوقع في صف الانتظار؟

4- متوسط عدد المسافرين المتوقع في المعبر ككل؟

5- متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل مسافر في الصف؟

6- متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل مسافر في النظام؟

الحل: لدينا ما يلي:

$$S = 4 \qquad \mu = 150 \qquad \lambda = 80$$

1- حساب احتمال وجود مسافرين في المعبر:

$$P=\frac{\lambda}{\mu} = \frac{80}{150} = 0.5333$$

احتمال وجود وحدات في النظام هو 53.33%

$$P_{\text{الحقيقي}}= \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s} \left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right) P_{\circ}$$

$$P= \frac{1}{4!}\left(\frac{80}{150}\right)^{4} \left(\frac{4\times150}{4\times150-80}\right) 0.6065 = 0.0022$$

2- احتمال عدم وجود أي شخص عابر للمعبر:

حسب الجدول P(0)=0.6065

احتمال عدم وجود أي شخص في المعبر هو 60.65%

3- متوسط عدد المسافرين المتوقع في صف الانتظار:

$$Lq= \frac{(P)^{s}.\mu.\lambda.p_{\circ}}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^{2}}$$

$$= \frac{(0.53)^{4}.150.80.0.6065}{(4-1)!\,(4\times 150-80)^{2}}$$

$$= (0.07)(150)(80)(0.6065)/3!\,(520)2 = \frac{509.46}{1622400} = 0.00031$$

من المتوقع أن لا يكون أي مسافر في الصف

4- متوسط عدد المسافرين في المعبر ككل:

$$Ls=Lq+\frac{\lambda}{\mu} = 0.0003 + 0.53 = 0.5303$$

من المتوقع عدم وجود أي شخص في المعبر(أو يمكن القول هناك شخص يهم بالمغادرة)

5- متوسط الوقت الذي ينتظره كل مسافر في الصف

$Wq =\frac{Lq}{\lambda}$=0.0003/80=عدد صغير جدا

وبالتالي وقت الانتظار في الصف =0 دقيقة

6- متوسط وقت الانتظار لكل مسافر في المعبر

$$Ws = Wq + \frac{1}{\mu}$$

ثانيا- توزيع الوصول(عملية الوصول):

ويعني تحديد عدد الوحدات الواصلة إلى مركز الخدمة في وحدة زمنية معينة، وهو خاضع إلى توزيع بواسون لأنه يكون عشوائي ومستقل عن بعضه البعض.

حيث بإمكاننا إيجاد احتمال الوصول لعدد من الوحدات كما يلي:

$$P(x) = \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{X!}$$

$$X = 0,1,2,3 \ldots N$$

X: عدد الوحدات الواصلة خلال فترة زمنية

λ: المعدل المتوقع للواصلين خلال فترة زمنية

e= العدد النيبيري وهو قيمة ثابتة ويساوي 2.71828

تمرين: بافتراض أن مؤسسة معينة قامت بتحليل معطياتها حول وصول الزبائن، وتوصلت إلى أن معدل الوصول هو 45 زبون في الساعة.

- ما هو احتمال وصول (X) وحدات خلال الدقيقة؟ بحيث قيم X = 0.1.2

الحل:

في الساعة λ=45 ، معناه λ في الدقيقة: $\frac{45}{60}$= 0.75 في الدقيقة

- احتمال صفر وصول(أي عدم وصول أي وحدة) في الدقيقة:

$$P(x)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{X!}=P(0)=\frac{(0.75)^{0}(e)^{-0.75}}{0!}$$

$=0.4723$

من الجدول$(e)^{-0.75} = 0.4723$

أي احتمال عدم وصول أي وحدة في الدقيقة هو 47.23%

- احتمال وصول شخص واحد في الدقيقة:

$$P(x)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{X!}=P(1)=\frac{(0.75)^{1}(e)^{-0.75}}{1!}$$

$$=\frac{(0.75)(0.4723)}{1!}=0.3542$$

أي احتمال وصول شخص هو 35.42%

- احتمال وصول شخصين في الدقيقة:

$$P(x)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{X!}=P(2)=\frac{(0.75)^{2}(e)^{-0.75}}{2!}$$

$$=\frac{(0.56)(0.4723)}{2}=0.1322$$

احتمال وصول شخصين في الدقيقة هو 13.22%

ثالثا- توزيع وقت الخدمة:

هو الوقت المستغرق لتأدية الخدمة أي الوقت الذي يستغرقه الزبون من بدايته لتلقي الخدمة إلى نهاية تلقيه الخدمة، ولقد أكد العلماء أن التوزيع الأساسي هو المناسب لأوقات الخدمة في صفوف الانتظار.

وبالتالي فإن احتمال وقت الخدمة يكون أقل من أو يساوي لوقت الامتداد(أو الطول) t كما يلي:

$$P(\text{وقت الخدمة} \leq t) = 1 - e^{-ut}$$

$$P(x \leq t) = 1 - e^{-ut}$$

u = معدل أو متوسط عدد الوحدات الممكن تقديم الخدمة لهم في وقت معين

تمرين: بافتراض أنه يمكن أن تقدم بمعدل 60 زبون في الساعة، أحسب ما يلي:

- أوجد احتمال طلبية قدمت لها الخدمة في 1/2 دقيقة أو أقل

- أوجد احتمال زبون قدمت له الخدمة في 1 دقيقة أو أقل

الحل:

معدل الخدمة في الدقيقة هو $\frac{\mu}{60_{\text{دقيقة}}} = \frac{60}{60} = 1 = \mu$

أي معدل تقديم الخدمة هو زبون واحد في الدقيقة.

- إيجاد احتمال تقديم الخدمة لزبون في 1/2 دقيقة أو أقل:

$$P(t \leq 0.5) = 1 - e^{-1\times 0.5} = 1 - 0.606 = 0.394$$

احتمال تقديم الخدمة لزبون في نصف دقيقة هو 39.4%

- ايجاد احتمال تقديم الخدمة لزبون في 1 دقيقة أو أقل:

$P(t \leq 1) = 1 - e^{-1\times1}$ =1-0.3678=0.6322

احتمال أن تقدم خدمة للزبون في دقيقة أو أقل هو 63.22%

رابعا- احتمال N عدد الوحدات في النظام:

وهي احتمال وجود شخص في النظام، أو وجود شخصين، أو احتمال وجود 03 أشخاص في النظام وهكذا، فإننا نجد هذا الاحتمال عن طريق القانون التالي:

$$P(N) = P^n \times p(0) = (\frac{\lambda}{\mu})^n \times p(0)$$

تمرين:

لدينا $\lambda = 45$ و $\mu = 60$

- أوجد احتمال وجود شخص واحد في النظام

- أوجد احتمال وجود شخصين في النظام

- أوجد احتمال وجود 3 أشخاص في النظام

الحل:

$P= \frac{\lambda}{\mu} = \frac{45}{60}$ =0.75 P0=1-0.75=0.25

P(1)=P(1) P(0)=(0.75)1 (0.25)=0.1875

P(2)=P(2) P(0)=(0.75)2 (0.25)=0.1406

P(3)=P(3) P(0)=(0.75)3 (0.25)=0.1054

خامسا- حساب التكاليف الخاصة بصفوف الانتظار:

تعتبر التكلفة الكلية لنموذج صفوف الانتظار تمثل تكلفة الانتظار بالإضافة إلى تكلفة الخدمة، وبالتالي متخذ القرار أو المؤسسة تسعى إلى تخفيض أحد التكاليف أو كلاهما، من أجل تحقيق أفضل عائد، وبالتالي التكلفة الكلية هي تكلفة الانتظار وتكلفة الخدمة أي:

TC=C(w) L+C(s) S

حيث أن:

TC: التكلفة الاجمالية.

C(w): تكلفة الانتظار لكل وحدة زمنية.

L أو L(s): متوسط عدد الوحدات في النظام.

C(s): تكلفة الخدمة لكل وحدة زمنية لكل محطة.

S أو K: عدد محطات الخدمة.

تمرين:

مؤسسة خدماتية قدرت معدل وصول زبائنها ب 45 زبون في الساعة وتستطيع هذه المؤسسة تقديم خدماتها بمعدل 60 زبون في الساعة.

المطلوب: إذا تم تقدير تكلفة الانتظار ب 10 وحدات نقدية، وتكلفة الخدمة ب 7 وحدات نقدية، أحسب التكلفة الكلية

الحل:

$$S = 1 \qquad \mu = 60 \quad \lambda = 45$$

أولا حساب متوسط عدد الوحدات في النظام Ls:

$$Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{45}{60 - 45} = \frac{45}{15} = 3$$

إذا كانت تكلفة الانتظار بـ 10 وحدات نقدية، وتكلفة الخدمة بـ 7 وحدات نقدية، حساب التكلفة الكلية في كلتا الحالتين بالقانون التالي: TC=C(w) L+C(s) S

$TC=C(w)\ L+C(s)\ S= (10\times3)+(7\times1)= 37$ وحدة نقدية

المحور الثاني:

نماذج تسيير المخزون

في هذا المحور سنتطرق إلى مشكلة المخزون التي تتمثل أساسا في تحديد الكمية المثلى، والوقت المناسب لإصدار أمر الطلبية(التوريد)، والكمية المثلى لكل طلبية، وسنتطرق إلى عديد المفاهيم حول هذا النموذج كما يليك

أولا: تكلفة المخزون:

ونحددها من خلال التكاليف التالية:

التكاليف الكلية للمخزون = تكلفة الوحدات(شراء/انتاج) + تكلفة إعداد الطلبية + تكلفة التخزين (الاحتفاظ) بالسلعة + تكلفة العجز(النفاذ).

ثانيا: نماذج المخزون:

هناك نوعان من نماذج المخزون، فهناك حالات نكون على علم بكمية الطلب وكمية الاحتياجات وأوقاتها وبالتالي هذه حالة تأكد، وهناك حالة أخرى وهي بكثرة أين يكون معدل الطلب والكميات وأوقاتها غير معلوم، وبالتالي فهي حالة عدم تأكد، وعموما نماذج المخزون نوعان هما:

I. النماذج المحددة:

وهناك عدة أنواع هي:

1- نموذج الشراء بدون عجز: (كمية الطلب الاقتصادية)(EOQ)

هناك قرارات هامة على متخذ القرار اتخاذها للتحكم والرقابة على المخزون:

- الكمية المثلى:

نجدها كما يلي:

$$Q=\sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}}$$

- يمكن تحديد عدد مرات الطلب خلال فترة زمنية معينة N كما يلي:

$$N=\frac{D}{Q}$$

- الزمن بين الطلبيات T يستخرج بالمعادلة التالية:

$$T=\frac{1}{N}\,(\text{عدد الأيام})=\frac{Q}{D}\,(\text{عدد الأيام})$$

- التكلفة الكلية السنوية للمخزون K تحسب بالمعادلة التالية:

$$K=\sqrt{2C_1DC_2} \quad \text{أو} \quad K=\frac{DC_1}{Q}+\frac{QC_2}{2}$$

تمرين:

لدينا مصنع يحتاج إلى2000 وحدة خلال العام القادم، وكان سعر الوحدة الواحدة 5 دينار، فإذا علمنا أن كلفة إصدار الطلبية الواحدة 5 دينار، وأن تكلفة الاحتفاظ بالمخزون خلال السنة 1.5 دينار، يضاف إليها تكلفة رأس المال والمقدرة ب 10% من سعر الشراء.

أوجد:

1- حجم الطلبية الاقتصادي؟ (الكمية المثلى)؟ Q

2- حساب تكلفة التخزين؟ (K)

3- ما هو عدد الطلبيات خلال السنة؟ (N)

4- الفترة الزمنية بين الطلبيات؟ (T)

الحل:

معدل الطلب D=2000

تكلفة الشراء C=5

تكلفة إعداد الطلبية C1=5

تكلفة المخزون C2 =(5×0.1)+1.5 = 2

1- حجم الطلبية الاقتصادي= Q

$$Q= \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{(2)\times(2000)\times(5)}{2}} = \sqrt{\frac{20000}{2}} = \sqrt{10000}$$

= 100 وحدة =

وبالتالي كمية الطلب الاقتصادي Q تساوي 100 وحدة

2- تكلفة التخزين: K

$$K= \frac{DC_1}{Q} + \frac{QC_2}{2} \quad K= \frac{(2000)\times(5)}{100} + \frac{(100)\times(2)}{2} = 100+100$$

=200دينار=

ويمكن حسابها أيضا بالقانون التالي:

$$K=\sqrt{2C1DC2} = \sqrt{2(5)(2000)(2)} = 200$$ دينار

وبالتالي تكلفة المخزون الاجمالية تساوي 200 دينار.

3- حساب عدد الطلبيات خلال السنة (N):

$$N= \frac{D}{Q} = \frac{2000}{100} = 20$$

بمعنى صاحب المخزون سيقوم بـــ 20 طلب في السنة.

4- الفترة الزمنية بين الطلبات (T):

بافتراض عدد أيام السنة 365 يوم فإن الفترة الزمنية بين الطلبات هو:

$$T= \frac{1}{N}\,(\text{عدد الأيام}) = \frac{1}{20}\,(365) = 18.25 \text{ يوم}$$

ويمكن حسابها أيضا بالقانون التالي:

$$T= \frac{Q}{D}\,(\text{عدد الأيام}) = \frac{100}{2000}\,(365) =18.25 \text{ يوم}$$

وبالتالي صاحب الخزين سيقوم بالطلب كل 18 يوم و6 ساعات.

2- نموذج الشراء مع وجود عجز:

أما الصيغ الرياضية لهذا النموذج هي:

- حجم الطلبية الاقتصادي:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2} \times \frac{C_2+C_3}{C_3}}$$

- أقصى كمية تخزين مسموح بها:

$$I\ max=\frac{C_3}{C_2+C_3} \times Q$$

- كمية العجز المسموح به:

$$S = Q\text{-}Imax = \left(\frac{C_2}{C_2+C_3}\right) \times Q$$

- الكلفة الكلية للمخزون:

$$K = \frac{D}{Q}\, C_1 + \frac{Q}{2} C_2 \left(\frac{C_3}{C_2 + C_3}\right)^2 + \frac{Q}{2} C_3 \left(\frac{C_2}{C_2 + C_3}\right)^2$$

مثال: شركة لبيع الأجهزة الكهربائية تعلم أن الطلب السنوي على المولدات الكهربائية هو 5000 وحدة، فإن كان سعر شراء الوحدة الواحدة هو 20 دينار، وتكلفة خزن الوحدة الواحدة يساوي 25% من سعر الشراء، وكلفة إصدار طلبية الشراء يساوي 10 دينار.

المطلوب:

1- حدد حجم الطلبية الاقتصادي، وكلفة الخزين السنوية

2- إذا كانت الشركة تهتم بالسماح لبعض الطلبيات المتأخرة، وقد قدرت تكلفة العجز ب 15 دينار للوحدة الواحدة، فما هو حجم الطلبية الاقتصادية؟ وما هو أعلى مستوى للتخزين، وحجم العجز المسموح به؟ وكذا التكاليف الكلية.

الحل: لدينا:

معدل الطلب D = 5000 وحدة

سعر الشراء C = 20 دينار

كلفة الطلبية C1 = 10 دينار

كلفة التخزين C2 = (20)×(0.25) = 5 دينار

1- في حالة العجز غير مسموح به:

- كمية الطلبية الاقتصادية وتكلفة الخزين السنوية:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{(2)\times(5000)\times(10)}{5}} = \sqrt{20000} = 141.421$$ وحدة

وبالتالي كمية الطلب الاقتصادي تساوي تقريبا 142 وحدة.

$$K = \frac{D}{Q}\,C_1 + \frac{Q}{2}C_2 = \frac{5000}{142}(10) + \frac{142}{2}(5)$$
$$= 352.11 + 355$$

=707.11 دينار

وبالتالي التكلفة الكلية للمخزون تساوي 707.11 دينار.

2- في حالة السماح بوجود عجز تكلفته 15 دينار:

وبالتالي: دينار 15= C3

- حجم الطلبية الاقتصادي:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2} \times \frac{C_2+C_3}{C_3}} = \sqrt{\frac{(2)(5000)(10)}{5} \times \frac{5+15}{15}} = \sqrt{26600}$$

$$Q = 163.09 \text{ وحدة}$$

وبالتالي كمية الطلب الاقتصادي تقدر تقريبا بـــ 163 وحدة.

- أعلى مستوى خزين:

$$I\ max = \frac{C_3}{C_2+C_3} \times Q = \frac{15}{5+15} \times (163) = 122 \text{ وحدة}$$

وبالتالي اعلى مستوى للمخزون هو 122 وحدة.

- حجم العجز المسموح به:

$$S = \left(\frac{C_2}{C_2+C_3}\right) \times Q = \left(\frac{5}{5+15}\right) \times (163) = 41 \text{ وحدة}$$

ويمكن حسابها بالقانون التالي:

$$S = Q - Imax = 163 - 122 = 41 \text{وحدة}$$

وبالتالي كمية العجز المسموح به هو 41 وحدة.

- التكلفة الكلية:

$$K = \frac{D}{Q} C_1 + \frac{Q}{2} C_2 \left(\frac{C_3}{C_2 + C_3}\right)^2 + \frac{Q}{2} C_3 \left(\frac{C_2}{C_2 + C_3}\right)^2$$

$$K = \frac{5000}{163}(10) + \frac{163}{2}(5)\left(\frac{15}{5+15}\right)^2 + \frac{163}{2}(15)\left(\frac{5}{5+15}\right)^2$$

= 612 دينار =

وبالتالي التكاليف الكلية السنوية في الحالة الثانية أقل من الحالة الأولى، يعني أن الشركة إذا سمحت ببعض الطلب المتأخر فإنها سوف توفر 13.4% من التكاليف المترتبة عن النموذج الأول (عدم السماح بالعجز).

3- نموذج الإنتاج بدون عجز:

يختلف هذا النموذج عن النموذجين السابقين كون السلعة المطلوبة يتم إنتاجها داخل المنشأة بدلا من شرائها من خارج المؤسسة، والقوانين الرياضية لهذا النموذج كما يلي:

- الكمية الاقتصادية (المثلى):

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2} \times \frac{P}{P-D}}$$

- الزمن بين الطلبيات:

$$T = \frac{1}{N} \times (\text{عدد الأيام}) = \frac{Q}{D} \times (\text{عدد الأيام})$$

- التكلفة الكلية:

$$K = CP + \frac{D}{Q}\, C_1 + \frac{Q}{2} C_2 \left(\frac{P-D}{P}\right)$$

- عدد الطلبيات خلال الفترة الزمنية:

$$N = \frac{D}{Q}$$

- فترة الإنتاج:

$$T_p = t_1 = \frac{Q}{P}$$

- أعلى مستوى مخزون: (كمية الإنتاج التي نتوقف عندها):

$$I_{max} = T_p\ (P - D)$$

مثال:

تقوم إحدى الشركات بإنتاج20000 وحدة سنويا من منتج معين، فإذا علمت أن تكلفة تهيأت وجبة الصنع الواحدة تساوي 250 دينار، وأن تكلفة تخزين الوحدة الواحدة يساوي 0.36 دينار، وأن مقدار الطلب المتوقع على هذا المنتوج يساوي 9000 وحدة خلال السنة.

المطلوب:

1- أوجد الحجم الإنتاجي الأمثل للدورة الإنتاجية (الكمية الاقتصادية)؟

2- أوجد أعظم مخزون ممكن، وزمن الإنتاج والزمن الكلي، وكذا عدد العمليات الإنتاجية؟

3- أوجد التكاليف الكلية السنوية إذا علمت أن تكلفة كل وحدة 2 دينار ؟

الحل:

P =20000 وحدة خلال السنة،

D =9000 وحدة خلال السنة،

C1 = 250 تكلفة تهيأ وجبة الصنع (تقابلها تكلفة إعداد الطلبية في حالة الشراء)

C2 = 0.36 دينار للوحدة

1- حساب الحجم الانتاجي الأمثل Q:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2} \times \frac{P}{P-D}} = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2} \times \frac{P}{P-D}}$$
$$= \sqrt{12500000 \times 1.8181}$$
$$Q = \sqrt{22727272.8} = 4767.2 \approx 4767 \text{ وحدة}$$

2- حساب الآتي:

- حساب عدد الدورات الإنتاجية خلال العام:

$$N = \frac{D}{Q} = \frac{9000}{4767} = 1.88 \approx 2 \text{ (تقريبا مرتين)}$$

وبالتالي عدد الدورات الانتاجية هي دورتين خلال السنة تقريبا، بمعنى الدورة الثانية تنتهي في بداية العام الموالي.

- حساب الزمن بين الدورات الإنتاجية:

$$T = \frac{1}{N}\,(\text{عدد الأيام}) = \frac{1}{1.88}\,(366) = 194.68 \approx 195 \text{ يوم}$$

وبالتالي زمن الدورة الانتاجية هو 195 يوم، وتتكون من فترة إنتاج Tp وفترة توقف T2 اللذان سنتعرف عليهما كما يلي:

$$T_p = t_1 = \frac{Q}{P} = \frac{4767}{20000} = 0.238 \text{ من السنة} = 87.1 \text{ يوم}$$

وبالتالي فترة الانتاج T1 تساوي تقريبا 87 يوم.

نحسب الآن زمن التوقف عن الانتاج T2:

$$T = T_1 + T_2 => T_2 = T - T_1 = 195 - 87 = 108 \text{ يوم}$$

-حساب أقصى كمية للمخزون:

$$I_{max} = T_p(P-D) = 0.238 \times (20000-9000)$$
$$= 2618 \text{ وحدة}$$

وبالتالي كمية الانتاج التي نتوقف عندها هي: 2618 وحدة.

3- حساب التكلفة الكلية السنوية:

C=2

$$K = CP + \frac{D}{Q}\ C_1 + \frac{Q}{2} C_2 \left(\frac{P-D}{P}\right)$$
$$= 2 \times (20000) + \frac{9000}{4767} \times 250 + \frac{4767}{2} \times 0.36\left(\frac{20000-9000}{20000}\right)$$
$$= 40000 + 471.99 + 471.93 = 40943.92 \text{ دينار}$$

4- نموذج الشراء مع خصم:

ونطبق التمرين التالي من أجل فهم هذا النموذج:

مثال:

لدينا مصنع يحتاج إلى 2000 وحدة خلال العام القادم، وكان سعر الوحدة الواحدة 5 دينار، فإذا علمت أن كلفة إصدار الطلبية الواحدة هو 5 دينار، وأن تكلفة الاحتفاظ بالمخزون خلال السنة 1.5 دينار يضاف إليها رأس المال المقدر ب 10% من سعر الشراء.

وعرض على المصنع تخفيض قدره 5% من سعر الوحدة الواحدة، إذا كان حجم الطلبية 200 وحدة أو أكثر، فبماذا تنصح صاحب هذا المصنع؟

الحل:

لدينا:

D =2000 خلال السنة، وحدة

C1 = 5 دينار (تكلفة إعداد الطلبية)

C2 =1.5 + (5×0.1) = 2 دينار للوحدة

نحسب التالي:

كلفة الشراء بالسعر الأساسي قبل الخصم دينار (2000)×(5)=10000

كلفة الشراء سعر الخصم دينار 9500=(0.95)× (5)× (2000)

وبالتالي سعر الخصم سوف يخفض كلفة الشراء بمقدار دينار 500 =(9500)-(10000)

الآن نقارن مع كلفة الخزين:

نحسب حجم الطلبية الاقتصادي بالاعتماد على السعر الأساسي:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{2 \times 2000 \times 5}{2}} = 100 \text{ وحدة}$$

$$K = \frac{D}{Q}\, C_1 + \frac{Q}{2} C_2 = \frac{2000}{100}(5) + \frac{100}{2}(2) = 100 + 100 = 200 \text{ دينار}$$

إذ قبلنا بالعرض المقدم فإن حجم الطلبية Q يجب أن تكون على الأقل 200 وحدة، أي أن الكمية تكون $Q \geq 200$ وكلفة الاحتفاظ بالمخزون خلال السنة للوحدة الواحدة(C2) سوف تتأثر وتكون قيمتها الجديدة كما يلي:

C2 = 1.5+(0.1)×(5)×(0.95) =1.5+0.475 = 1.975 دينار

Q=200

أما تكلفة المخزون:

$$K=\frac{D}{Q}\ C_1+\frac{Q}{2}C_2=\frac{2000}{200}(5)+\frac{200}{2}(1.975)$$
$$=50+197.75=247.5\ \text{دينار}$$

نلاحظ أن تكلفة إصدار الطلبية انخفضت من 100 إلى 50، وتكلفة الاحتفاظ بالخزين ارتفعت من 100 دينار إلى 197.75 دينار.

أما الزيادة الصافية في تكلفة الخزين هي دينار 47.75 = 200 - 247.75

هذه الزيادة في التكلفة (الخسارة) أقل بكثير من قيمة التخفيض في تكلفة الشراء والبالغة 500 دينار

- وبالتالي ننصح صاحب المؤسسة بقبول العرض ويطلب 200 وحدة، وبالتالي سيستفيد من التالي: دينار452.25 = 47.75 - 500

وهناك خطوة أخيرة يمكن القيام بها وهي هل بالإمكان أن يكون حجم الطلبية أكبر من 200 وحدة (الحد الأدنى) فيما لو استخدمنا سعر الخصم.

وهنا نحسب الكمية الاقتصادية Q بتكلفة حفظ الخزين بسعر الخصم:

$$Q=\sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}}=\sqrt{\frac{2\times 2000\times 5}{1.975}}=100.63\approx 100\ \text{وحدة}$$

بما أن الكمية المثلى بتكلفة المخزون بسعر الخصم أقل من كمية الحد الأدنى الخصم Q=200 فإنه من الأفضل لصاحب المخزون الاكتفاء بالحد الأدنى للخصم ويطلب 200 وحدة من السلعة لأنه الحل الامثل.

المحور الثالث:

نظرية الألعاب (نظرية المباريات)

وسنتطرق في هذا البرنامج إلى المباريات بين طرفين فقط، مرة ذات المجموع الصفري ومرة أخرى ذات المجموع غير الصفري تواليا كما يلي:

أولا: المباريات ذات المجموع الصفري بين طرفين:

وهي مباراة بين لاعبين والتي يكون فيها مجموع عوائد اللاعبين في النهاية يساوي صفر، أي ما يربحه اللاعب الأول يخسره اللاعب الثاني ومن أجل حل هذه المباراة نتبع الخطوات التالية:

✍نجد أصغر قيمة في كل صف ونضعها في عمود(Min) ثم نختار من هذا العمود أكبر قيمة (Max) أي Maximim، وتكون هذه قيمة اللعبة بالنسبة للاعب الأول ونرمز لها بـــ V1.

✍نجد أكبر قيمة في كل عمود ونصها في صف Max، ثم نأخذ أصغر قيمة في هذا الصف (Min) أي Minimax، وتكون هذه القيمة هي نتيجة المباراة بالنسبة للاعب الثاني ونرمز لها بـــ V2.

✍يكون مجموع المباراة صفر إذا كان V1=V2 وتسمى نقطة التوازن.

تمرين:

علي

أحمد

	أ	ب	ج	د
أ	4	-4	-5	0
ب	-3	-4	-9	9
ج	6	7	-8	-9
د	7	3	-9	5

المطلوب: أوجد قيمة المباراة؟

الحل:

علي

أحمد

	أ	ب	ج	د	Min	
أ	4	-4	-5	0	-5	max
ب	-3	-4	-9	9	-9	
ج	6	7	-8	-9	-9	
د	7	3	-9	5	-9	
Max	7	7	-5	9		

Min

$V1 = -5$ $\qquad\qquad$ $V2 = -5$

$V1 = V2$

وبالتالي هناك نقطة توازن عند القيمة (5-)، وعليه فإن:

- علي يلعب بالاستراتيجية "ج".

- أحمد يلعب بالاستراتيجية "أ".

- قيمة المباراة (5-) أي أن علي فاز على أحمد لأن قيمة المباراة (5-).

ثانيا: المباريات بين طرفين ذات مجموع غير صفري (مباريات الاستراتيجيات المختلطة):

لا يمكن أن تكون جميع المباريات مستقرة (احتوائها على نقطة استقرار) بل هناك بعض المباريات أعلى قيمة من القيم الصغرى للصفوف لا تساوي أصغر قيمة من القيم العظمى للأعمدة، أي أن:

Maximin Value $\neq$ Minimax Value

وبالتالي الوصول إلى وقت التوازن يتحقق من خلال توزيع أوقات اللعب على استراتيجية معينة لكل فترة زمنية، ويحقق الطرف المسيطر أقل ما يمكن الحصول عليه، ويخسر الطرف التابع أقل ما يجب التضحية به في ظل توفر معلومات كاملة عن سير المباراة، وطرق حل هذه المباريات نجد:

1- الطريقة الجبرية.

تمرين: ليكن لدينا مصفوفة الدفع التالية:

B / A	Y1	Y2
X1	1	-1/2
X2	-1/2	0

- أوجد احتمالات اللعب بالاستراتيجيات المختلفة لكل لاعب؟

الحل:

		اللاعب B			
		Y1	Y2	Min	
اللاعب A	X1	1	-1/2	-1/2	max
	X2	-1/2	0	-1/2	
	Max	1	0		
			min		

المباراة غير مستقرة، وبالتالي نستخدم الطريقة الجبرية لمعرفة نسب استخدام كل استراتيجية من طرف كلا اللاعبين؟

- اللاعب A:

$$P_1 = \frac{(a_{22} - a_{21})}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$P_1 = \frac{(0 - (-\frac{1}{2}))}{(1 + 0) - ((-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2}))} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P_2 = 1 - P_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

وبالتالي اللاعب A سيلعب بالاستراتيجية الأولى X1 بنسبة 25% من وقت المباراة، ويلعب بالاستراتيجية الثانية X2 بنسبة 75% من وقت المباراة.

- اللاعب B:

$$q_1 = \frac{(a_{22} - a_{12})}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$q_1 = \frac{(0 - (-\frac{1}{2}))}{(1 + 0) - ((-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2}))} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$q_2 = 1 - q_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

وبالتالي اللاعب B يلعب بالاستراتيجية Y1 بنسبة 25% ويلعب بالاستراتيجية Y2 بنسبة 75% من توقيت المباراة.

- أما قيمة المباراة V:

$$V = \frac{(a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$= \frac{(1 \times 0) - ((-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}))}{(1 + 0) - ((-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2}))} = \frac{-\frac{1}{4}}{2} = -\ \frac{1}{8}$$

ومنه نتيجة المباراة هي $-\frac{1}{8}$ وهي محصورة بين:

$$\text{Minimax} \leq V \leq \text{Maximin}$$

$$-1/2 \leq V \leq 0$$

وهو ما يعرف بمدى المباراة

2- الطريقة الحسابية (المصفوفات).

من أجل فهم هذه الطريقة نورد المثال التالي:

تمرين:

	اللاعب B	
اللاعب A	8	-5
	2	6

- أوجد الاستراتيجيات المثلى لكل لاعب؟

الحل:

		اللاعب B			
		Y1	Y2	Min	
اللاعب	X1	8	-5	-5	
A	X2	2	6	2	← max
	Max	8	6		
			↑ min		

لدينا V1= 2 و V2=6 بما أن $V1 \neq V2$ فإن المباراة غير مستقرة وبالتالي نقوم بحلها بالطريقة الحسابية كما يلي:

من أجل الحل بالطريقة الحسابية تقوم بإيجاد عدد مرات التنافس لكل لاعب، ومن أجل ذلك نقوم بضرب قيمة(a12 و a21) للمصفوفة بـــــ (-1) فتصبح لدينا المصفوفة بالشكل التالي:

	اللاعب B	
اللاعب A	8	-(-5)
	-2	6

- بالنسبة للاعب A:

		اللاعب B		
		Y1	Y2	عدد مرات التنافس
اللاعبA	X1	8	- (-5)	8-(-5)=13
	X2	-2	6	-2+6=4
				المجموع 17

وبالتالي عدد مرات التنافس الكلية بالنسبة للاعب A على الاستراتيجيتين (X1 و X2)

هو

(4+13) =17

وبالتالي احتمالات اللعب (A) نجد:

$$P_1 = \frac{4}{17} = 0.235 = 23.5\%$$

$$P_2 = \frac{13}{17} = 0.764 = 76.4\%$$

- بالنسبة للاعب B:

		اللاعب B	
		Y1	Y2
اللاعبA	X1	8	- (-5)
	X2	-2	6
عدد مرات التنافس		8-2 =6	-(-5) +6 =11
		المجموع 17	

وبالتالي عدد مرات التنافس الكلية على الاستراتيجيتين(Y1وY2) هو:

(11+6) = 17

ومنه فإن احتمالات اللعب ل اللاعب (B) هي:

$$q_1 = \frac{11}{17} = 0.647 = 64.7\%$$

$$q_2 = \frac{6}{17} = 0.352 = 35.2\%$$

3- طريقة الرسم البياني.

من أجل هذه الطريقة نورد المثال التالي:

تمرين: هناك عقد ما سيجري بين الحكومة وشركة خاصة، قبل انتهاء مدة العقد القديم، والجدول التالي يوضح العوائد:

		الشركة			
		ش1	ش2	ش3	ش4
الحكومة	ح1	20	15	12	35
	ح2	25	14	8	10
	ح3	40	2	19	5
	ح4	-5	4	11	0

المطلوب: أوجد الحل بالطريقة البيانية؟

الحل:

قبل ايجاد الحل نختزل المصفوفة إذا كان بالإمكان فعل ذلك:

نلاحظ أن السطر(ح4) أقل من السطر(ح1) وبالتالي(ح4) ينزع، فنتحصل على المصفوفة التالية:

	ش1	ش2	ش3	ش4
ح1	20	15	12	35
ح2	25	14	8	10
ح3	40	2	19	5

لدينا أيضا العمود(ش1) أكبر من العمودين(ش2) (ش3) وبالتالي (ش1) ينزع، فنتحصل على الجدول الموالي:

	ش2	ش3	ش4
ح1	15	12	35
ح2	14	8	10
ح3	2	19	5

لدينا كذلك السطر (ح2) أقل من السطر(ح1) وبالتالي السطر (ح2) ينزع، ونتحصل على الجدول التالي:

	ش2	ش3	ش4
ح1	15	12	38
ح3	2	19	5

لدينا أيضا أن العمود (ش4) أكبر من العمود (ش2) وبالتالي العمود (ش4) ينزع، ونتحصل على الجدول التالي:

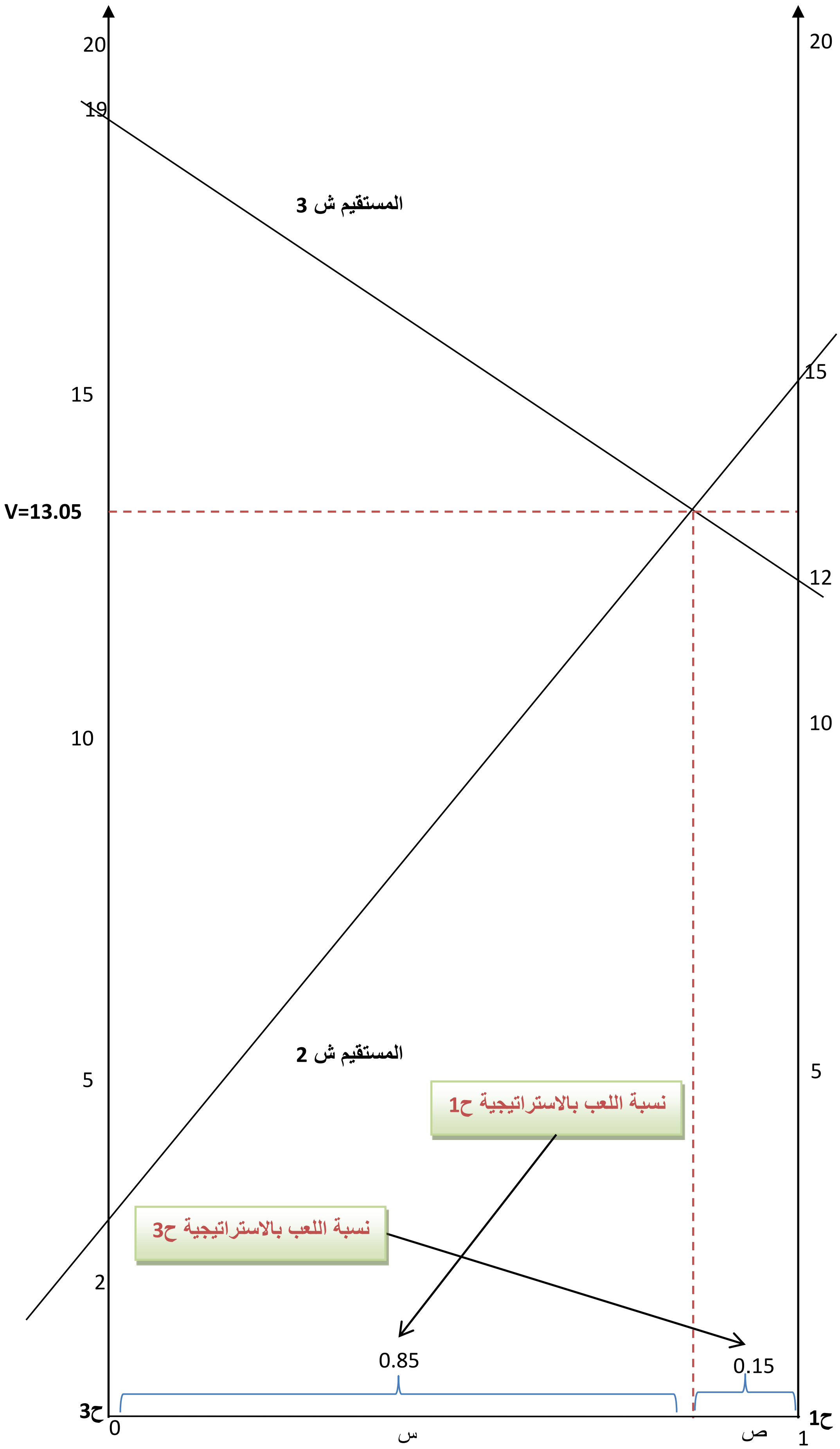
		الشركة	
		ش2	ش3
الحكومة	ح1	15	12
	ح3	2	19

من خلال الجدول الأخير والذي يمثل المباراة بشكلها النهائي بعد الاختزال باستخدام نظرية الهيمنة، نقوم الآن بالحل بالطريقة البيانية كما يلي:

- بالنسبة للحكومة:

- نقود برسم خط أفقي وعلى طرفيه خطين عموديين مدمجين أحدهما هو (ح1) والاخر هو(ح3)

أي من وجهة نظر الحكومة.


20
19
المستقيم ش 3
15
V=13.05
12
10
المستقيم ش 2
5
نسبة اللعب بالاستراتيجية ح1
نسبة اللعب بالاستراتيجية ح3
2
0.85
0.15
ح3
0
س
ص
1
ح1

قيمة المباراة هي نقطة التقاطع بين (ش2) و (ش3) ونرسم خط أفقي فإن القيمة المتحصل عليها من (ح1) و (ح3) هي تقريبا 85 % و 15 %تقريبا أما قيمة المباراة هي تقريبا V=13، ويمكن التأكد من قيمة المباراة واستراتيجيات الحكومة حسابيا كما يلي:

- طريقة المعادلات لإيجاد الاستراتيجيات:

لنفرض أن المزيج الذي نبحث عنه هو س% من ح1 و ص% من ح3 وعند نقطة تقاطع (ش2) و(ش3) لابد من تحقيق الشرط التالي:

15س +2 ص = 12س + 19 ص......(1)

15 س - 12س = 19 ص- 2 ص

3س = 17ص =» س= $\frac{17}{3}$ ص......(2)

لكن لدينا س+ ص = 1 (أي بمعنى مجموع احتمالين = 100%)

س =1 - ص......(3)

نعوض قيمة س من المعادلة (2) في المعادلة رقم (3) أعلاه:

1- ص = $\frac{17}{3}$ ص =» 1= $\frac{17}{3}$ ص+ ص =» 1= $\frac{20}{3}$ ص =» ص = $\frac{3}{20}$ = 0.15

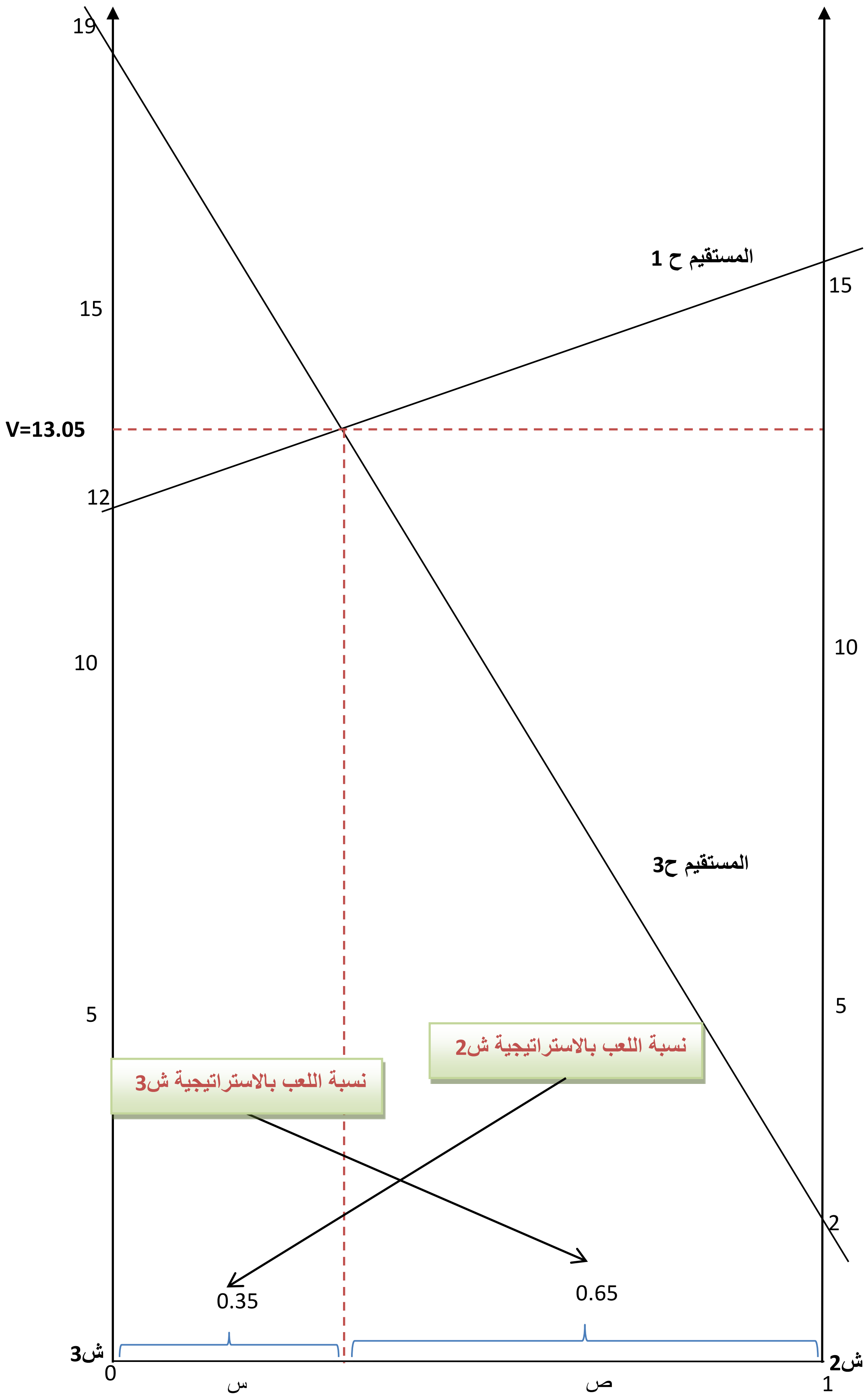
س= 1- ص =1 - 0.15 = 0.85

بالتعويض في المعادلة (1) وفي إحدى الطرفين أو كلاهما نجد:

13.05= 0.3+ 12.75= (0.15) ×(2)+ (0.85)× (15)

13.05= 2.85+ 10.2= (0.15)×(19) + (0.85) ×(12)

➢ بالنسبة للشركة:



قيمة المباراة هي نقطة التقاطع بين (ح1) و (ح3) ونرسم خط أفقي فإن القيمة المتحصل عليها من (ش2) و (ش3) هي تقريبا 35 % و 65 %تقريبا أما قيمة المباراة هي تقريبا V=13، ويمكن التأكد من قيمة المباراة واستراتيجيات الحكومة حسابيا كما يلي:

- طريقة المعادلات لإيجاد الاستراتيجيات:

المزيج الذي نبحث عنه هو س% من ش2 وهي % من ش3 وعند نقطة تقاطع (ح1) و(ح3) يجب تخفيف الشرط التالي:

15س+ 12ص = 12س +19 ص......(1)

15- 2س = 19ص - 12ص

13س = 7ص => س= $\frac{7}{13}$ ص......(2)

ولدينا س + ص =1=> س=1- ص......(3)

نعوض قيمة س من المعادلة (2) في المعادلة رقم (3) أعلاه:

1- ص = $\frac{7}{13}$ ص => 1= $\frac{7}{13}$ ص+ ص => 1= $\frac{20}{13}$ ص => ص = $\frac{13}{20}$ = 0.65

س= 1- ص =1 - 0.65 = 0.35

بالتعويض في المعادلة (1) وفي إحدى الطرفين أو كلاهما نجد:

13.05=7.8+5.25=(0.66) × (12)+(0.35) × (15)

13.05=12.35+0.7=(0.65) × (19)+(0.35) × (2)

4- طريقة البرمجة الخطية.

تمرين: أوجد الاستراتيجيات المثلى للاعبين A و B باستخدام طريقة البرمجة الخطية إذا كانت المباراة غير مستقرة؟

		اللاعب B		
		Y1	Y2	Y3
اللاعب A	X1	6	0	3
	X2	8	-2	3
	X3	4	6	5

الحل:

		اللاعب B			
		Y1	Y2	Y3	Min
اللاعب A	X1	6	0	3	0
	X2	8	-2	3	-2
	X3	4	6	5	4 ← max
	Max	8	6	5 ↑ min	

Minimax = 5 = V2　　　　Maximin = 4 = V1

من خلال النتائج نلاحظ أن: Minimax $\neq$ Maximin

وبالتالي لا توجد استراتيجية حرة (واحدة) بل توجد استراتيجيات مختلطة لأن: $4 \leq V \leq 5$

- وعند محاولة اختزال هذه المصفوفة فإننا لا يمكن اختزالها وبالتالي فهي من الشكل(3×3) وبالتالي فالطريقة الوحيدة التي تمكننا من الحل هي طريقة البرمجة الخطية:

- نقوم باستخراج البرنامج الخطي للاعب B:

$$\text{PLB}\quad \begin{cases} \text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} \overline{Y}j = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \cdots + \overline{Y}_n \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \overline{Y}j \ \leq 1 \qquad i \in (1, m) \end{cases}$$

وبالتالي البرنامج الخطي للاعب B يكون كالآتي:

$$\text{Max } Z = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3$$

$$\begin{cases} 6\overline{Y}_1 + 0\overline{Y}_2 + 3\overline{Y}_3 \leq 1 \\ 8\overline{Y}_1 - 2\overline{Y}_2 + 3\overline{Y}_3 \leq 1 \\ 4\overline{Y}_1 + 6\overline{Y}_2 + 5\overline{Y}_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \overline{Y}_3 \geq 0$$

مع العلم أن: $\overline{Y}_3 = \frac{Y_3}{V}$ و $\overline{Y}_2 = \frac{Y_2}{V}$ و $\overline{Y}_1 = \frac{Y_1}{V}$

نقوم الآن بحب البرنامج الخطي بإتباع الخطوات التالية:

1- نحول الشكل القانوني إلى الشكل المعياري:

$$\text{Max } Z = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 + 0\overline{S}_1 + 0\overline{S}_2 + 0\overline{S}_3$$

$$\Rightarrow \text{Max } Z - \overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 - \overline{Y}_3 = 0$$

$$\begin{cases} 6\overline{Y}_1 + 0\overline{Y}_2 + 3\overline{Y}_3 + \overline{S}_1 = 1 \\ 8\overline{Y}_1 - 2\overline{Y}_2 + 3\overline{Y}_3 + \overline{S}_2 = 1 \\ 4\overline{Y}_1 + 6\overline{Y}_2 + 5\overline{Y}_3 + \overline{S}_3 = 1 \end{cases}$$

مع العلم أن: $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \overline{S}_3$ (متغيرات الفجوة، متغيرات مكملة)

2-تشكيل جدول الحل الأساسي الأولي:

الجدول رقم (01)

المتغير الخارج المتغير الداخل

	$\overline{Y}_1$	$\overline{Y}_2$	$\overline{Y}_3$	$\overline{S}_1$	$\overline{S}_2$	$\overline{S}_3$	الثابت	
$\overline{S}_1$	6	0	3	1	0	0	1	$1/_6$
$\overline{S}_2$	8	-2	3	0	1	0	1	$1/_8$ الأقل
$\overline{S}_3$	4	6	5	0	0	1	1	$1/_4$
Z	-1	-1	-1	0	0	0	1	/

الصف المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (1) (جدول الحل الأولي) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم و$\overline{Y}_3$و $\overline{Y}_2$و $\overline{Y}_1$ ولكن سندخل للنموذج المتغير $\overline{Y}_1$ وذلك لأننا اخترناه عشوائيا لأن قيم جميع المتغيرات تساوي (1-) وبالتالي اخترنا عشوائيا $\overline{Y}_1$.

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر العمود الداخل $\overline{Y}_1$ ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير $\overline{S}_2$ من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة $\frac{1}{8}$ وهي أقل من القيمتين الباقيتين، وبالتالي يخرج $\overline{S}_2$ من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 2) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف $\bar{Y}_1$ فنجدها بقسمة الصف $\bar{S}_2$ (الجدول 1) على العنصر المحوري (8) فنتحصل على عناصر السطر $\bar{Y}_1$ (الجدول رقم 2)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (2).
- بالنسبة للصفوف المتبقية ($Z, \bar{S}_3, \bar{S}_1$) فإننا نجدها بالقانون التالي:

العنصر الصف الجديد= العنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل) X (عناصر الصف المحوري، أي عناصر $\bar{Y}_1$ في الجدول رقم 2)

وبالتالي لدينا قيم السطر $\bar{S}_1$ وقيم السطر $\bar{S}_3$ وقيم السطر Z وسنجدهم كما يلي:

➢ $\bar{S}_1$ الجديدة = $\bar{S}_1$ القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف $\bar{S}_1$ (6)) X (الصف المحوري $\bar{Y}_1$)

$$\begin{array}{ccccccc}
6 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
- & & & & & & \\
(6)[1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8}] \\
= 6 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\
\hline
0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4}
\end{array}$$

➢ $\bar{S}_3$ الجديدة = $\bar{S}_3$ القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف $\bar{S}_3$ (4)) X (الصف المحوري $\bar{Y}_1$)

$$
\begin{array}{ccccccc}
4 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

-

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
(4)[1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8}\,] \\
= 4 & -1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}
\end{array}
\right\}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\hline
0 & 7 & \frac{7}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

➢ Z الجديدة= Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z(-1))X (الصف المحوري $\bar{Y}_1$)

$$
\begin{array}{ccccccc}
-1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

-

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
(-1)[1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8}\,] \\
= -1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8}
\end{array}
\right\}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\hline
0 & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8}
\end{array}
$$

بعد حساب جميع الصفوف نتحصل على الجدول رقم (2) التالي:

الجدول رقم (02)

المتغير الخارج المتغير الداخل

	$\bar{Y}_1$	$\bar{Y}_2$	$\bar{Y}_3$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	الثابت	
$\bar{S}_1$	0	$3/2$	$3/4$	1	$-3/4$	0	$1/4$	0.166
$\bar{Y}_1$	1	$-1/4$	$3/8$	0	$1/8$	0	$1/8$	قيمة غير معرفة
$\bar{S}_3$	0	7	$7/2$	0	$-1/2$	1	$1/2$	الأقل 0.07
Z	0	$-5/4$	$-5/8$	0	$1/8$	0	$1/8$	/

العنصر المحوري الصف المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (2) أن الحل يمكن تحسينه أيضا لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم و$\bar{Y}_3$و $\bar{Y}_2$ ولكن سندخل للنموذج المتغير $\bar{Y}_2$ وذلك لأن معاملها في دالة الهدف هي أكبر قيمة سالبة $(-\frac{5}{4})$ وبالتالي اخترنا عشوائيا $\bar{Y}_2$ للدخول إلى النموذج (المتغير الداخل).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر العمود الداخل $\bar{Y}_2$ ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير $\bar{S}_3$ من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة (0.07) وهي أقل من القيمتين الباقيتين، وبالتالي يخرج $\bar{S}_3$ من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 3) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف $\overline{Y}_2$ فنجدها بقسمة الصف $\overline{S}_3$ (الجدول 2) على العنصر المحوري (7) فنتحصل على عناصر السطر $\overline{Y}_2$ (الجدول رقم 3)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (3).
- بالنسبة للصفوف المتبقية ($Z, \overline{Y}_1, \overline{S}_1$) فإننا نجدها بالقانون التالي:

العنصر الصف الجديد= العنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل) X (عناصر الصف المحوري، أي عناصر $\overline{Y}_2$ في الجدول رقم 3)

وبالتالي لدينا قيم السطر $\overline{S}_1$ وقيم السطر $\overline{S}_3$ وقيم السطر Z وسنجدهم كما يلي:

➢ $\overline{S}_1$ الجديدة = $\overline{S}_1$ القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف $\overline{S}_1$ $(\frac{3}{2})$) X (الصف المحوري $\overline{Y}_2$)

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4}
\end{array}
$$

$$
-\left\{\begin{array}{ccccccc}
(\frac{3}{2})[0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{14}] \\
= 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{28} & \frac{3}{14} & \frac{3}{28}
\end{array}\right\}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{7}
\end{array}
$$

➢ $\overline{Y}_1$ الجديدة = $\overline{Y}_1$ القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف $\overline{Y}_1$ $(-\frac{1}{4})$) X (الصف المحوري $\overline{Y}_2$)

$$1 \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{3}{8} \quad 0 \quad \frac{1}{8} \quad 0 \quad \frac{1}{8}$$

-

$$\left\{\begin{array}{l} \left(-\frac{1}{4}\right)\left[0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{14} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{14}\right] \\ = 0 \quad -\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{8} \quad 0 \quad \frac{1}{56} \quad -\frac{1}{28} \quad -\frac{1}{56} \end{array}\right\}$$

$$1 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{3}{28} \quad \frac{1}{28} \quad \frac{1}{7}$$

- Z الجديدة= Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف $Z\left(-\frac{5}{4}\right)$)) X (الصف المحوري $\overline{Y}_2$)

$$0 \quad -\frac{5}{4} \quad -\frac{5}{8} \quad 0 \quad \frac{1}{8} \quad 0 \quad \frac{1}{8}$$

-

$$\left\{\begin{array}{l} \left(-\frac{5}{4}\right)\left[0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{14} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{14}\right] \\ = 0 \quad -\frac{5}{4} \quad -\frac{5}{8} \quad 0 \quad \frac{5}{56} \quad -\frac{5}{28} \quad -\frac{5}{56} \end{array}\right\}$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{28} \quad \frac{5}{28} \quad \frac{3}{14}$$

بعد حساب جميع الصفوف نتحصل على الجدول رقم (3) التالي:

الجدول رقم (03)

	$\overline{Y}_1$	$\overline{Y}_2$	$\overline{Y}_3$	$\overline{S}_1$	$\overline{S}_2$	$\overline{S}_3$	الثابت
$\overline{S}_1$	0	0	0	1	$-9/14$	$-3/14$	$1/7$
$\overline{Y}_1$	1	0	$1/2$	0	$3/28$	$1/28$	$1/7$
$\overline{Y}_2$	0	1	$1/2$	0	$-1/14$	$1/7$	$1/14$
Z	0	0	0	0	$1/28$	$5/28$	$3/14$

- بما أن جميع قيم Z أكبر من أو تساوي الصفر(0) (موجبة) ونن انطلقنا من دالة الهدف (Max) يعني ذلك أننا توصلنا إلى الحل الأمثل ونتحصل على القيم التالية:

$$Z = \frac{3}{14}$$

$$\overline{S}_1 = \frac{1}{7}$$

$$\overline{Y}_1 = \frac{1}{7}$$

$$\overline{Y}_2 = \frac{1}{14}$$

$$Z = \frac{1}{V} = \frac{3}{14} \Rightarrow V = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\frac{3}{14}} = \frac{14}{3}$$

$$\overline{S}_1 = \frac{1}{7} = \frac{S_1}{V} \Rightarrow S_1 = (\overline{S}_1 \times V) = \left(\frac{1}{7} \times \frac{14}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\overline{Y}_1 = \frac{1}{7} = \frac{Y_1}{V} \Rightarrow Y_1 = (\overline{Y}_1 \times V) = \left(\frac{1}{7} \times \frac{14}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\overline{Y}_2 = \frac{1}{14} = \frac{Y_2}{V} \Rightarrow Y_2 = (\overline{Y}_2 \times V) = \left(\frac{1}{14} \times \frac{14}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\overline{Y}_3 = 0 = \frac{Y_3}{V} \Rightarrow Y_3 = (\overline{Y}_3 \times V) = \left(0 \times \frac{14}{3}\right) = 0$$

ومنه اللاعب B سيلعب بالاستراتيجية Y1 بنسبة 66.66 % من وقت المباراة، وسيلعب بالاستراتيجية Y2 بنسبة 33.33% من وقت المباراة، وسوف لن يلعب بالاستراتيجية Y3 مطلقا وقيمة المباراة هي $\frac{14}{3}$.

- نحاول الآن إيجاد الاستراتيجيات المثلى للاعب، A بما أن البرنامج الخطي للاعب A هو المقابل للبرنامج الخطي للاعب B، إذا يمكن استنتاج الحلول المثلى للاعب A مباشرة من جدول الحل النهائي بالاعتماد على خاصية أسعار الظل في نماذج البرمجة الخطية.

من الجدول رقم (3) نجد:

$$\overline{X}_1 = 0$$

$$\overline{X}_2 = \frac{1}{28}$$

$$\overline{X}_3 = \frac{5}{28}$$

$$\overline{X}_1 = \frac{X_1}{V} \Rightarrow X_1 = (\overline{X}_1 \times V) = \left(0 \times \frac{14}{3}\right) = 0$$

$$\overline{X}_2 = \frac{X_2}{V} \Rightarrow X_2 = (\overline{X}_2 \times V) = \left(\frac{1}{28} \times \frac{14}{3}\right) = \frac{1}{6} = 0.1666$$

$$\overline{X}_3 = \frac{X_3}{V} \Rightarrow X_3 = (\overline{X}_3 \times V) = \left(\frac{5}{28} \times \frac{14}{3}\right) = \frac{5}{6} = 0.8333$$

ومنه اللاعب A سيلعب بالاستراتيجية X2 بنسبة 16.66 % من وقت المباراة، وسيلعب بالاستراتيجية X2 بنسبة 83.33% من وقت المباراة، وسوف لن يلعب بالاستراتيجية X1 مطلقا وقيمة المباراة هي $\frac{14}{3}$.

المحور الرابع:

المحاكاة

تعتبر المحاكاة هي القدرة على اختبار نظام معين من خلال متغيراته دون التطبيق المباشر عليه، ويتميز علم المحاكاة باختبار النظم بدون مخاطر وبتكاليف أقل وأكثر أمان من تطبيق الاختبار على النظام الفعلي، ففي كثير من النماذج الرياضية التي يكون حلها بالطريقة التحليلية التقليدية ولكن في بعض النماذج يكون من الصعوبة بمكان حلها فنلجأ إلى هذا الأسلوب الغير تقليدي في حل هذه المشاكل بحيث يتم عمل نموذج مصغر عن المشكلة بكافة جوانبها ومن ثم ايجاد خطوات للحل من خلال التعبير عن الأنظمة الفعلية والتغيرات التي تؤثر عليها بواسطة نماذج وقوانين رياضية للتعبير عنها والتي تعكس المنظومة الفعلية، وقد اثبت نموذج المحاكاة كفاءة ملحوظة في معالجة قسم كبير من المسائل المعقدة مثل مسائل التخزين وخطوط الانتظار والتنبؤ إلى غير ذلك، وفي معظم الحالات يتم استخدام الحاسوب في نماذج المحاكاة من خلال التجارب الاحصائية والاختبارات الاحتمالية، وسنركز هنا على طريقة مونت كارلو للمحاكاة من خلال التطبيقات التالية:

تمرين رقم (01):

أوجد نموذج محاكاة لسلوك المستهلك يعرض عليه ثلاثة أصناف من الزعتر A,B,C فإذا كانت مصفوفة الاحتمالات الانتقالية لماركوف هي:

$$P= \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$$

الحل:

لنفرض أن أخر عملية شراء للمستهلك من الصنف C حتى نرى كيف ستتم عملية الاختيار نعطي أرقاما من (0-9) للأصناف الثلاثة حيث يخصص الرقمان (0 ، 1) للاختيار A (2 ، 3) للاختبار B والارقام (4، 9) للاختبار C وعن تطبيق الاختبار نختار أرقاما عشوائية من جدول الأرقام العشوائية في نهاية الكتاب بحيث تختار (15) رقما من جدول الأرقام العشوائية من (0-9) ونبدأ من العمود الأيسر في الجدول لتكون النتائج المعطاة كما في الجدول التالي وهي توضح عدد الاختبارات لكل صنف، ونلاحظ من خلال الجدول أن الصنف A يختار (4) وأن الصنف B يختار (4) مرات و الصنف C يختار (7) مراتب، وهنا ترى أن اكثر اختبارات كانت للصنف C وبالتالي يكون هو الصنف الأفضل.

الاختيار	الرقم العشوائي	الصنف
1	5	C
2	2	B
3	4	C
4	3	B
5	0	A
6	6	C
7	1	A
8	0	A
9	2	B
10	9	C
11	5	C
12	0	A

B	2	13
C	8	14
C	5	15

تمرين رقم (02):

يرغب موزع للمواد الغذائية بتحديد عدد صناديق العصير التي يجب طلبها يوميا إذا كان عدد هذه الصناديق يتراوح بين (14-18) صندوقا أسبوعيا فإذا كان الطلب على الصناديق للسنة دوما السابقة هي كما في الجدول التالي:

احتمال الطلب (P)	تكرار الطلب	الصناديق المطلوبة يوميا (X)
0.15	15	14
0.10	10	15
0.10	10	16
0.20	20	17
0.15	15	18
1	100	المجموع

المطلوب: تحديد عدد الصناديق الواجب طلبها يوميا باستخدام طريقة مونت كارلو ؟

الحل:

بما أن العدد الموجود لدينا هو 100 صندوق فإننا نعطي أرقاما من (00) إلى (99) ونجزأ هذه الأرقام حسب الاحتمالات المعطاة كما في الجدول التالي:

عدد الصناديق المطلوبة (X)	احتمال الطلب P	الأرقام العشوائية المخصصة للطلب
14	0.15	14-0
15	0.10	54-15
16	0.10	64-55
17	0.20	84-65
18	0.15	100-85

والآن نذهب إلى جدول الأرقام العشوائية ونختار رقما مكون من خانتين ونبحث عنه ضمن الفئة الموجودة في الجدول ونكرر الاختبارات على سبيل المثال عشرة مرات لنرى ما هو العدد الأكبر ضمن هذه الاختبارات

الاختيار	الرقم العشوائي	عدد الصناديق المختارة
1	51	15
2	24	15
3	45	15
4	30	15
5	03	14
6	64	16
7	15	15
8	09	14
9	21	15
10	91	18

نلاحظ هنا أن أكثر طلب مكرر هو (15) وبالتالي يكون الطلب الأمثل لعدد الصناديق يوميا هو (15) صندوق.

قائمة المراجع

1- أبو القاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، الطبعة الثانية، المجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، مصر، 2009م/1430هـ

2- أكرم مُحَمَّد عرفان المهتدي، الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية (بحوث العمليات)، الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2010م/1431هـ.

3- حمدي طه، مقدمة في بحوث العمليات ، الجزء الأول النماذج المحددة، ترجمة أحمد حسين علي حسين، دار المريخ للنشر، الرياض، المملكة العربية السعودية، بدون تاريخ.

4- حمدي طه، مقدمة في بحوث العمليات ، الجزء الثاني النماذج الاحتمالية، ترجمة أحمد حسين علي حسين، دار المريخ للنشر، الرياض، المملكة العربية السعودية، بدون تاريخ.

5- دلال صادق الجواد وحميد ناصر الفتال، بحوث العمليات، الطبعة العربية، دار اليازوري للنشر، عمان، الأردن، 2008.

6- رابح بوقرة، بحوث العمليات، الجزء الأول، جامعة المسيلة، الجزائر، 2010/2009.

7- رابح بوقرة، بحوث العمليات – مدخل لاتخاذ القرارات، الجزء الثاني، جامعة المسيلة، الجزائر، 2012.

8- فتحي خليل حمدان، بحوث العمليات – مع تطبيقات باستخدام الحاسوب ، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2010.

9- مُحَمَّد راتول، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،2006 .

10- مُحَمَّد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، أحمد شهاب الحمداني، بحوث العمليات، الطبعة الثانية ، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2011.

11- محمد عبيدات، الأساليب الكمية في إتخاذ القرار، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2006.

12- محمد الطراونة وسليمان عبيدات، مقدمة في بحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر، عمان، الأردن، 2009.

13- سليمان خالد عبيدات، الأساليب الكمية في الادارة، بدون طبعة، دار المسيرة للنشر، عمان، الأردن،2015م/1436هـ.

14- منعم زمزير الموسوي، بحوث العمليات – مدخل علمي لإتخاد القرارات، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2009.

15- اليمين فالته، بحوث العمليات، الجزء الأول، دار إيتراك للطباعة والنشر والتوزيع، القاهرة، مصر، 2006.