I.1 Introduction

Une machine électrique est un dispositif électromécanique permettant la conversion d'énergie électrique en énergie mécanique, ainsi que la conversion d'énergie mécanique en énergie électrique. Suivant les conditions d'utilisation, une seule et même machine électrique peut opérer la conversion d'énergie dans les deux sens, c'est-à-dire qu'elle peut fonctionner soit en moteur soit en génératrice donc réversibles

I.2 Classification des machines électriques

Les machines électriques peuvent être classées en trois catégories :

- Générateurs : qui transforment l'énergie mécanique en énergie électrique
- Moteurs : qui transforment l'énergie électrique en énergie mécanique
- Convertisseurs statiques : qui transforment l'énergie électrique en énergie électrique

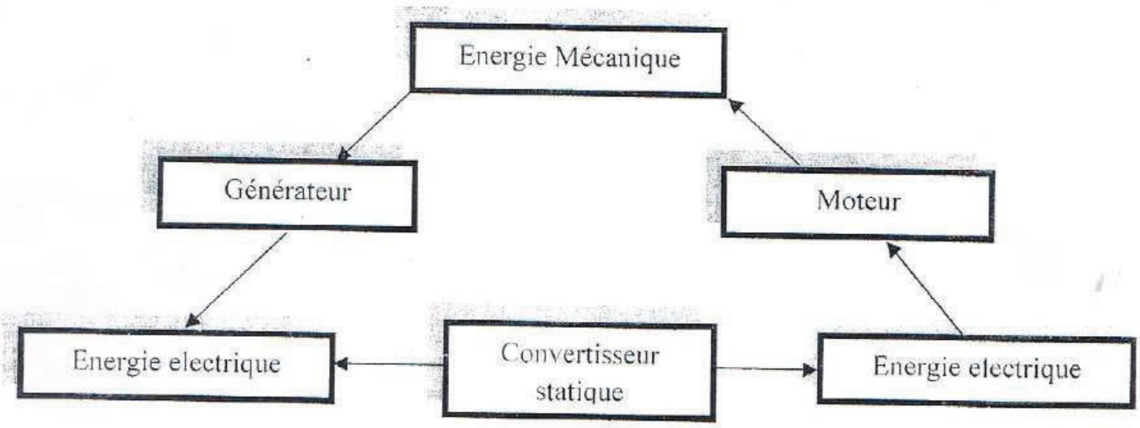

Figure I.1 : *La conversion d'énergie par les machines électriques.*

Les machines électriques font intervenir comme éléments fondamentaux :

- les courants électriques.
- les champs magnétiques.

Le fonctionnement est donc basé sur les lois de l'électromagnétisme, qui ont été étudiées au cours d'électricité, et qui seront brièvement rappelées dans ce cours. Car c'est de l'interaction des courants électriques et des champs magnétiques que résulte leur fonctionnement .

I.3 Circuits Magnétiques et Inductance

I.3.1 Equations générales de MAXWELL

Les équations de MAXWELL sont la formulation mathématique complète qui régit tous les phénomènes électromagnétiques de tous dispositifs. Ces équations sont généralement interdépendantes de faite que les phénomènes magnétiques et électriques sont couplés .

Ainsi qu'elles sont valables dans les différents milieux (air, milieu non homogènes, non linéaires et anisotropes…)

Ces équations sont :

- Equation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (I.\ 1)$$

- Equation de Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{H} = \vec{J_c} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (I.\ 2)$$

- Equation de conservation du flux magnétique

$$Div\,\vec{B} = 0 \qquad (I.\ 3)$$

- Equation de Maxwell-Gauss

$$\mathrm{Div}\,\vec{D} = \rho \qquad (I.\ 4)$$

Lois constitutives des milieux $B = \mu(H).H \ ou\ H = \nu(B).B$

$D = \varepsilon\, E$

$\vec{E}$: Vecteur champ électrique [v/m]

$\vec{B}$: Vecteur induction magnétique [T]

$\vec{H}$: Vecteur Champ magnétique [A/m]

$\vec{D}$: Vecteur induction électrique (vecteur déplacement électrique [C/m2]

ρ : densité volumique de charge électriques [C/m3]

$\overrightarrow{J_c}$: Vecteur densité du courant électrique de conduction [A/m2]

ε : permittivité électrique [F/m]

μ : perméabilité magnétique [H/m]

σ : conductivité électrique [S / m]

ν : réluctivité magnétique [m/H]

À ces équations doit être associer la loi d'ohm généralisée

$$\overrightarrow{J_c} = \overrightarrow{J_{ex}} + \sigma\,\vec{E} + \sigma(\vec{V} \wedge \vec{B}) \qquad \text{(III. 5)}$$

Avec :

$\vec{V}$: Vecteur vitesse des pièces conductrices susceptible de se déplacer [m /s]

σ : Conductivité électrique [s/m]

$\overrightarrow{J_{ex}}$: Densité du courant d'excitation (source) [A/m^2]

$\sigma\,\vec{E}$: Densité des courants induits du champ électrique E [A/m^2]

$\sigma(\vec{V} \wedge \vec{B})$: Densité des courants induits par mouvement [A/m^2].

I.3.2 Théorème d'Ampère

La circulation du vecteur **H** le long d'une courbe fermée (C) quelconque est égale à la somme algébrique des courants traversant la surface s'appuyant sur le contour (C).

$$\oint_C \boldsymbol{H}\, dl = \sum_k \mp I_k \qquad \text{(I. 6)}$$

Le courant sera pris positivement s'il est dans le sens de la normale à la surface (règle du tirebouchon par rapport au sens de parcours du contour C). Le courant sera pris négativement s'il est dans le sens contraire de la normale à la surface (règle du tire-bouchon par rapport au sens de parcours du contour C).

➢ Exemple de calcul

A. Cas général

Soit la configuration de la figure ci-dessous

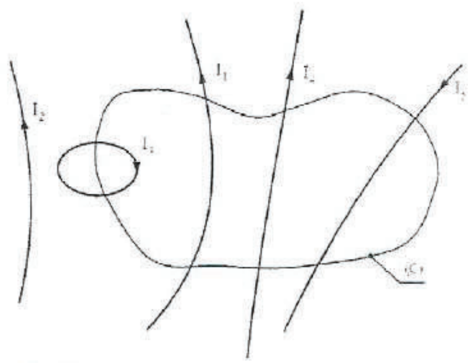

Figure I.2 : *Théorème d'Ampère*

Le courant sera pris positivement s'il est dans le sens de la normale à la surface (règle du tirebouchon par rapport au sens de parcours du contour C).

Le courant sera pris négativement s'il est dans le sens contraire de la normale à la surface (règle du tire-bouchon par rapport au sens de parcours du contour C).

Le courant I_2 n'intervient pas dans le calcul. L'application du théorème d'ampère donne :

$$\oint_C \boldsymbol{H}\, dl = I_1 - I_3 + I_4 - I_5 \qquad (I.7)$$

B. Cas du fil de longueur infinie

Les lignes de champ des vecteurs **B** et **H** sont des cercles dont l'axe normal est le conducteur électrique. Nous allons prendre comme contour fermé une ligne de champ située à une distance R. Sur ce contour, le champ est constant.

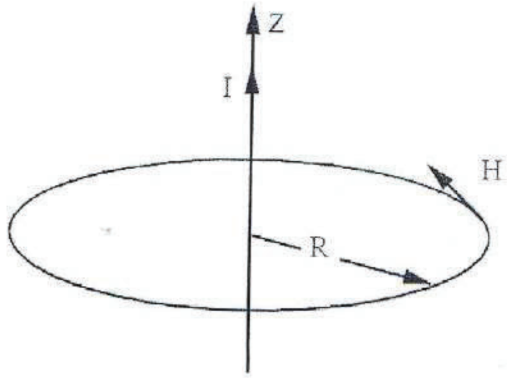

Figure I.3 : Champ magnétique crée par un courant circulant dans un conducteur de longueur infinie.

$$\oint_C \boldsymbol{H}\, dl = I = H.2\pi R \tag{I. 8}$$

On retrouve le résultat calculé en $B = \mu_0 . H$.

I.3.3 FLUX MAGNÉTIQUE

Définition

Le flux du vecteur d'induction magnétique B à travers une surface fermée (S) est définie par :

$$\Phi_S = \iint_{(S)} \boldsymbol{B}.\boldsymbol{n}\, ds \tag{I. 9}$$

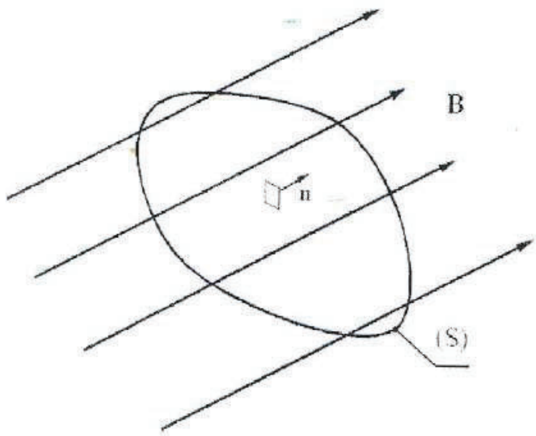

Figure I.4 : Flux au travers d'une surface quelconque

Avec **n** vecteur normal à la surface S. Le flux magnétique s'exprime en Weber [Wb].

Cas d'une spire inclinée

On supposera le champ d'induction constant au travers de la spire S. On appellera α l'angle entre la normale à la spire et le champ d'induction B :

$$\Phi_S = \iint_{(S)} \boldsymbol{B}.\boldsymbol{n}\, ds = \iint_{(S)} B.cos(\alpha)\, ds = B.cos(\alpha) \iint_{(S)} ds = BScos(\alpha) \qquad (I.10)$$

Propriété : loi de conservation du flux

- Notion de tube d'induction

Un tube d'induction (ou de champ) est un morceau d'espace fermé s'appuyant sur deux contours fermés C1 et C2, où chaque point de C1 est relié à un point de C2 par une ligne de champ magnétique (le champ y est tangentiel).

- Propriété

Le flux magnétique est conservé au sein d'un tube de champ

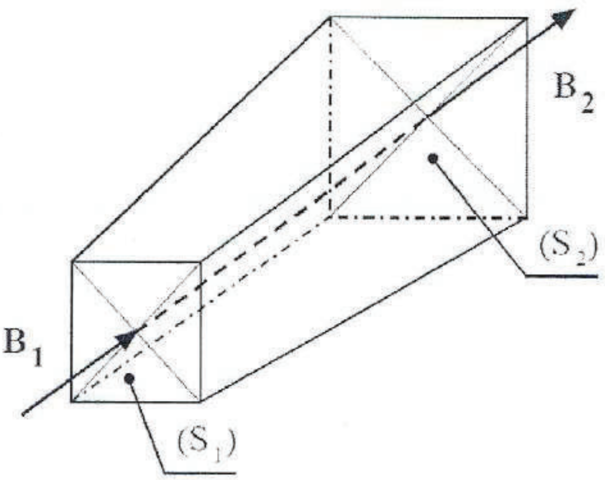

Figure I.5 : *Tube de flux*

$$\Phi_{S1} = \Phi_{S2} \qquad (I.11)$$

$$B_1.S_1 = B_2.S_2 \qquad (I.12)$$

On peut généraliser ce principe en disant qu'au sein d'un volume fermé, le flux rentrant est égal au flux sortant.

- Exemple

Soit la Figure I.6 , en appliquant la loi de conservation du flux on obtient comme relation

$$B_1.S_1 = B_2.S_2 + B_3.S_3 \qquad (I.13)$$

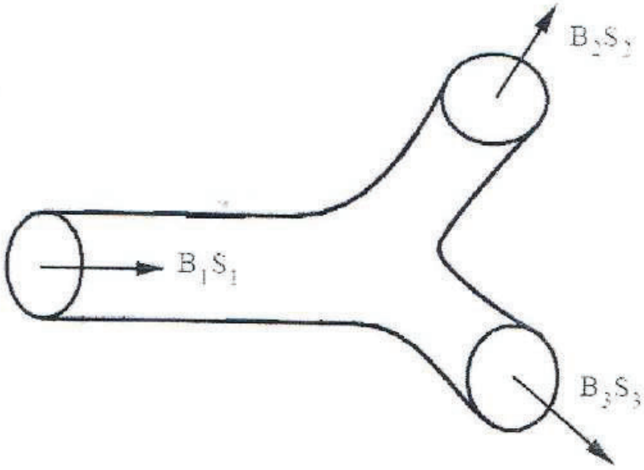

Figure I.5 : *Tube de flux avec embranchements*

I.3.4 FORCE DE LORENTZ

Quand la particule se déplace dans une région où il y a un champ électrique et magnétique, la force totale est la somme de la force électrique q**E** et de la force magnétique q**v**×**B**. On a donc :

$$F = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \mathbf{B}) \qquad (I.13)$$

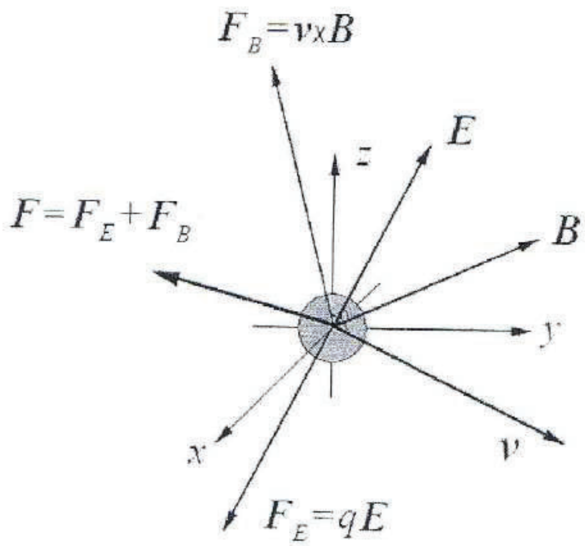

Figure I.6 : *Forces appliquées à une charge en mouvement dans un milieu électromagnétique*

- **Force magnétique agissant sur un courant électrique**

Le courant électrique est un écoulement de charges électriques dans le vide ou à travers un milieu conducteur. L'intensité du courant électrique a été définie comme la charge passant par unité de temps au travers une section du conducteur. Considérons une section d'orientation quelconque du conducteur dans lequel se déplacent, avec une vitesse **v**, des particules de charge q. S'il y a n particules par unité de volume, le nombre total de particules traversant une surface unité par unité de temps est *nv*, et la densité de courant définie comme la charge passant par unité de temps à travers la surface unité est le vecteur

$$J = nq\mathbf{v} \tag{I. 14}$$

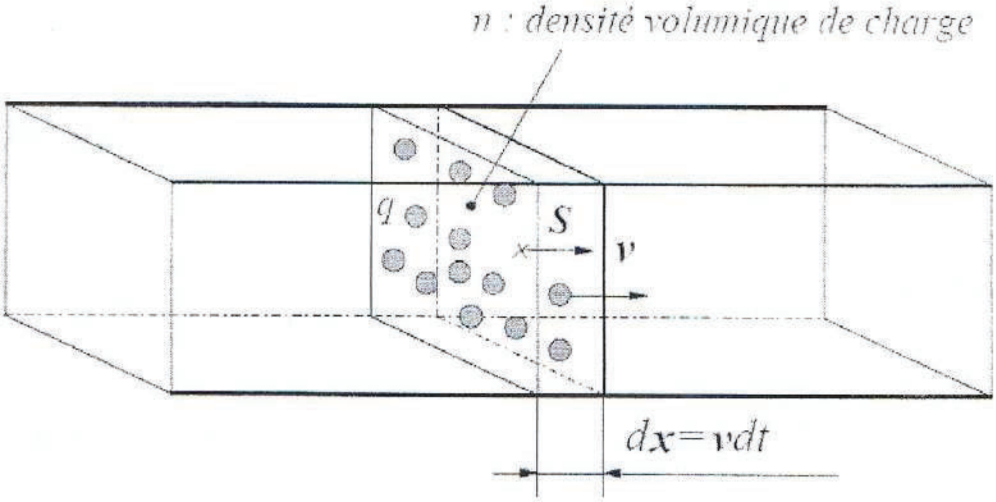

Figure I.7 : *Déplacement de charge dans un conducteur*

Si S est l'aire de la section considérée du conducteur, le courant est le produit vectoriel

$$I = J.S = nq\mathbf{v}.\mathrm{S} \tag{I. 15}$$

Supposons maintenant que le conducteur soit dans un champ magnétique. La force agissant sur chaque charge est donnée par la relation I.13 et comme il y a n particules par unité de volume la force f par unité de volume est

$$\boldsymbol{f} = nq\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{I. 16}$$

et la force totale sur un volume fini s'obtient par intégration de cette expression sur tout le volume, soit

$$\boldsymbol{F} = \int_{Volume} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \; dV \tag{I. 17}$$

Considérons maintenant le cas où le courant s'écoule à travers un conducteur. L'élément de volume dV est donné par S dl et par conséquent la relation I.17 donne

$$\boldsymbol{F} = \int_{Conducteur} \mathbf{J} \times \mathbf{B}\ Sdl = \int_{Conducteur} S\mathbf{J} \times \mathbf{B}\ dl = \int_{Conducteur} I\mathbf{u} \times \mathbf{B}\ dl \qquad (I.18)$$

Avec **u** : vecteur unité normal à la surface S
SJ=I, et le courant I qui parcourt le fil est le même en tous points du conducteur en raison de la loi de conservation des charges électriques. Par conséquent la relation 1.30 pour la force agissant sur un conducteur parcouru par un courant devient

$$\boldsymbol{F} = I \int_{Conducteur} \mathbf{u} \times \mathbf{B}\ dl \qquad (I.19)$$

I.3.5 FORCE DE LAPLACE

L'équation de Laplace découle de la force de Lorentz. Elle est l'expression de la force s'exerçant sur un conducteur idéal placé dans un champ d'induction magnétique :

$$\boldsymbol{dF} = i d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \qquad (I.20)$$

On considère un conducteur rectiligne de longueur l = PM parcouru par un courant électrique d'intensité I et placé dans un champ magnétique **B** perpendiculaire à PM. Les N électrons libres contenus dans ce conducteur et constituant le courant, de charge q = -e, se déplacent avec une certaine vitesse **v** à travers **B**. Ils subissent donc tous une force de Lorentz:

$$F_l = |qv\mathrm{B}\sin(\alpha)| = ev\mathrm{B}\sin(\alpha) \qquad (I.21)$$

Afin de déterminer F, nous raisonnons sur le modèle simplifié du courant électrique où les N électrons libres se déplacent à la même vitesse constante **v** .

Dans ces conditions, les N électrons subissent la même force de Lorentz

Force de Laplace :

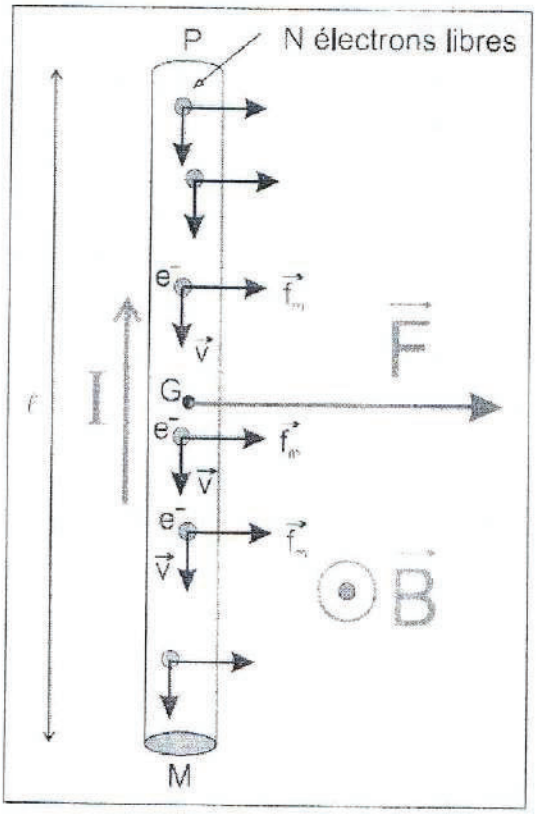

Figure I.8 : *Force de Laplace dans un conducteur*

$$F = NF_l = N|qvB\sin(\alpha)| = NevB\sin(\alpha) \tag{I.22}$$

Avec α angle entre qv et **B**

Exemple d'application

Le moteur électrique

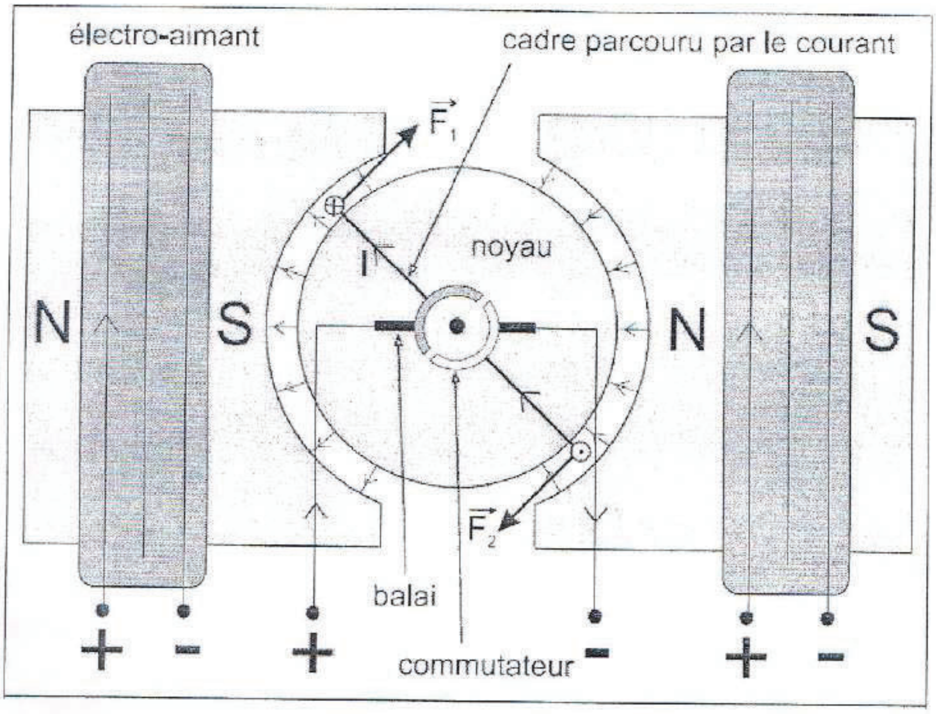

Figure I.8 : *Exemple d'application de la force de Laplace dans une machine CC*

La force électromotrice f.é.m:

La force électromotrice (f.é.m.) est un des paramètres caractéristiques d'un générateur électrique. Elle est, contrairement à ce qu'indique son nom, homogène à une tension et s'exprime en volts. Dans un circuit électrique, pour mettre en mouvement des charges, il est nécessaire de fournir du travail et la force électromotrice correspond au travail que fournit un générateur au circuit par unité de charge.

Donc pour trouver la f.é.m *e* on a la définition de travail comme produit entre e et q comme suite:

$$W = q\,e \tag{I.23}$$

donc

$$W = \oint_C \boldsymbol{F}\, \boldsymbol{dl} = q \oint_C (\boldsymbol{v} \times \mathbf{B})\, \boldsymbol{dl} \tag{I. 24}$$

$$e = \oint_C (\boldsymbol{v} \times \mathbf{B})\, \boldsymbol{dl} \tag{I. 25}$$

et pour une pile électrique la fém est définie par l'équations suivant

$$e = \oint \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{dl} \tag{I. 26}$$

dans le cas d'induction magnétique provoque une spire circulaire déplace par une vitesse v, après un instant δt l'équation de flux (I. 9) sera

$$\delta^2 \phi = \boldsymbol{B}.\boldsymbol{ds} = B.(\delta t \times dl) \tag{I. 27}$$

$$\delta^1 \phi = \oint \boldsymbol{B}.(\delta t\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{dl}) = \delta t \oint \boldsymbol{B}.(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{dl}) = -\delta t \oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\, \boldsymbol{dl} \tag{I. 28}$$

A partir des expressions (I.28 et I.25)

$$\frac{\delta \phi}{\delta t} = -e \tag{I. 29}$$

Donc pour $\delta t \to 0$ on a

$$\frac{d\phi}{dt} = -e \tag{I. 30}$$

par les expressions (I.26 et I.30)

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \oint \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{dl} = -\frac{d}{dt}\left(\iint \boldsymbol{B}.\boldsymbol{ds}\right) == \left(\iint -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}.\boldsymbol{ds}\right) \tag{I. 31}$$

$$\oint \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{dl} = \iint \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{E}\,.\boldsymbol{ds} = \left(\iint -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}.\boldsymbol{ds}\right) \tag{I. 32}$$

Cette dernière nous définit l'équation de Maxwell-Faraday (I.1)

I.3.6 Circuits magnétiques

Un circuit magnétique est semblable µa un circuit électrique. C'est un parcours fermé qui est réalise avec un matériau magnétique de haute perméabilité (μ>>). Cependant, on va faire quelques hypothèses pour l'analyse de ces circuits :

-On suppose que B(H) est linéaire.

- Pas de saturation.

- Pas de hystérésis.

Une force magnétomotrice $F = NI$ un flux φ a circuler dans le circuit magnétique.

L'intensité du champ magnétique dans le noyau est donne par la loi d'Ampère :

$$NI = \oint_C \boldsymbol{H}\, dl = Hl \tag{I. 22}$$

Le flux magnétique circulant dans le noyau est égal à :

$$\varphi = BS = \mu HS = \mu(\frac{NI}{l})S = \frac{NI}{(\frac{l}{\mu S})} \tag{I. 23}$$

Cette relation peut être exprime sous la forme:

$$\varphi = \frac{\mathcal{F}}{\mathfrak{R}} \tag{I. 24}$$

On appelle $\mathfrak{R}$ la reluctance du circuit magnétique. La reluctance est une quantité qui caractérise la "résistance" du circuit magnétique au passage du flux. C'est un peu comme la loi d'Ohm pour des circuits magnétiques.

La reluctance d'un circuit de surface A, de longueur moyenne l et perméabilité µ est :

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu A} \tag{I. 25}$$

Circuit électrique	Circuit magnétique
Tension V	Force magnétomotrice $\mathfrak{F} = NI$
Résistance R	Réluctance $\mathfrak{R}$
Courant I	Flux φ

Reluctance en serie

La reluctance en serie se comporte de la même façon que des résistances en série. C'est-à-dire :

$$\Re_{eq} = \Re_1 + \Re_2 + \Re_3 + \ldots \quad (I.26)$$

Reluctance en parallèle

La reluctance en parallèle se comporte de la même façon que des résistances en parallèle. C'est-à-dire :

$$\Re_{eq} = \left(\frac{1}{\Re_1} + \frac{1}{\Re_1} + \frac{1}{\Re_1} \ldots\right)^{-1} \quad (I.27)$$

I.3.7 Inductance d'une bobine

On considère une bobine de N tours dans laquelle circule un courant I. La bobine se trouve dans un milieu magnétiquement linéaire (comme l'air). Le flux magnétique produit par la bobine est Λ. Le flux produit par la bobine traverse la bobine. Le flux magnétique total couplé µa la bobine est $\Lambda = N\varphi$. L'inductance de la bobine est définie par :

$$L = \frac{\phi}{I} = \frac{N\varphi}{I} = \frac{N^2}{\Re} \quad (I.28)$$

Dans le cas d'une inductance µa air (où le milieu magnétique est de l'air), la valeur de l'inductance est fonction du nombre de tours et de la perméabilité du milieu. Elle est aussi indépendante de la fréquence et du courant. Par contre, la reluctance est difficile à calculer parce que le flux suit un parcours pas bien définit.

- **Inductance mutuelle :** dans tous les circuits magnétique il y a d'interaction entre le flux de spire et de bobine. Supposons que nous avons un circuit composé de deux bobines, l'inductance propre de chaque bobine et l'inductance mutuelle sont comme suite:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\Re}, L_2 = \frac{N_2^2}{\Re}, M_{12} = M_{21} = \frac{N_1 N_2}{\Re} \quad (I.29)$$

Conversion d'énergie

Dans un système électromagnétique de conversion d'énergie, un changement incrémental de l'énergie appliquée va engendrer un changement de l'énergie dW_{mag} stockée dans le champ magnétique et de l'énergie mécanique dW_{mec} utilisée pour le mouvement. La rélation entre les trois formes d'énergie est:

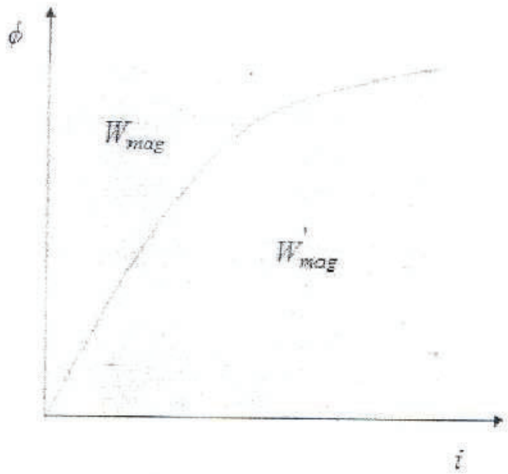

Figure I.9 : *Énergie magnétique et co-énergie dans un système non-linéaire.*

$$dW_{elec} = dW_{mag} + dW_{mec} \tag{I. 29}$$

La co-énergie dW'_{mag} est définie comme le complément de l'énergie stockée dans un circuit magnétique.

$$dW_{mec} = dW'_{mag} = d(i, \phi) - dW_{mag} = Fdx \tag{I. 30}$$

Avec ϕ le flux produit par le courant i.

La variation de la co-énergie est due non seulement au courant i mais également à la position de partie mobile.

D'après la Figure I.9, on obtient la relation :

$$W_{elec} = i\,\phi = W_{mag} + W_{co} \tag{I. 31}$$

Donc op peut écrire

$$W'_{mag} = \int_0^i \phi\, di \quad et \quad W_{mag} = \int_0^i i\, d\phi \tag{I. 32}$$

Ainsi, l'expression de la force en fonction de co-énergie est

$$F = \frac{dW'_{mag}}{dx} \tag{I. 33}$$

Dans le cas du système est fonctionné dans la zone où le circuit magnétique ne est pas saturé (μ=cte) les expression (31-33) donnez-nous:

$$W_{mag} = W_{co} = \frac{1}{2} i\, \phi = \frac{1}{2} L\, i^2 \tag{I. 34}$$

$$F = \frac{dW'_{mag}}{dx} = \frac{1}{2}\, i^2\, \frac{dL}{dx} \qquad \text{(I. 35)}$$

L'expression de la force en fonction de la position angulaire c'est a dire l'expression de couple comme suite:

$$F = \frac{dW'_{mag}}{d\theta} = \frac{1}{2}\, i^2\, \frac{dL}{d\theta} \qquad \text{(I. 36)}$$