الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

دروس على الخط في مقياس:

بحوث العمليات 01

موجه لطلبة سنة ثالثة علوم اقتصادية تخصص اقتصاد كمي

من إعداد الأستاذ: قعيد إبراهيم

الموسم الدراسي: 2022/2021

المحتويات

مقدمة:

هذه المادة العلمية عبارة عن دروس عبر الخط موجه لطلبة سنة ثالثة علوم اقتصادية تخصص اقتصاد كمي، بحيث تم جمعها من عديد المراجع وهي في مجملها عبارة عن تمرينات مع الحلول النموذجية لها لكل وحدة من الوحدات المبرمجة في المقرر، وهي من شأنها مساعدة الطالب في التعرف على الكثير من الخبايا المتعلقة بالنماذج التي تم دراستها، على شاكلة نماذج النقل ونماذج التخصيص (التعيين)، ونماذج برمجة الأعداد الصحيحة (البرمجة العددية)، ونماذج التخطيط الشبكي (نماذج الشبكات).

الأستاذ قعيد أبراهيم

المحور الأول:

تطبيقات حول نماذج النقل (مشاكل النقل)

في هذا المحور سنتطرق إلى تمرينات مع الحلول النموذجية عن المحور المتعلق بنماذج النقل سواء ما تعلق بالحل الأساسي الاولي أو كيفية الوصول إلى الحل الأمثل.

التمرين رقم (01): تمتلك منشأة لصناعة الطحين (3) معامل في الجزائر العاصمة ووهران وعنابة، وأن الطاقة الإنتاجية لهذه المعامل (350)، (300)، (300) طن من الطحين يوميا على الترتيب. حيث تقوم بتجهيز (4) أسواق في ولايات هي الوادي، قسنطينة، المسيلة، غرداية حيث يبلغ احتياجاتها من الطحين (350)، (225)، (100)، (125) طن يوميا، إن كلفة نقل الطحين من الجزائر العاصمة إلى الوادي ، قسنطينة، المسيلة، غرداية هي (10)، (8)، (12)، (14) ألف دينار للطن الواحد على الترتيب، وأن كلفة نقل الطحين من وهران إلى الوادي، قسنطينة، المسيلة، غرداية هي (6)، (7)، (13)، (11) ألف دينار للطن الواحد على الترتيب، وأن كلفة نقل الطحين من عنابة إلى غرداية، المسيلة، قسنطينة، الوادي هي: (5)، (10)، (9)، (4) ألف دينار للطن الواحد على الترتيب.

المطلوب:

- كون جدول النقل لهذه المسألة.

- إيجاد الحل الأساسي الأولي بطريقة أقل التكاليف وأحسب التكاليف الكلية.

الحل:

- تكوين جدول النقل:

العرض	غرداية	المسيلة	قسنطينة	الوادي	
350	14	12	8	10	الجزائر العاصمة
300	11	13	7	6	وهران
300	5	10	9	4	عنابة
	125	100	225	350	الطلب

- ايجاد الحل الأساسي الاولي بطريقة أقل التكاليف:

- قبل ذلك نتحقق من شرط التوازن:

نجد أن العرض≠ الطلب بحيث(العرض= 950 والطلب = 800)

وبالتالي نضيف سوق وهمي بتكاليف صفرية وقيمة الطلب=150 وحدة من أجل أن يصبح العرض=الطلب (وتحقيق شرط التوازن)

	الوادي	قسنطينة	المسيلة	غرداية	سوق وهمي	العرض
الجزائر العاصمة	10	8	12 100	14 100	0 150	~~350~~ ~~200~~ ~~100~~ 0
وهران	6 50	7 225	13	11 25	0	~~300~~ ~~250~~ ~~25~~ 0
عنابة	4 300	9	10	45	0	~~300~~ 0
الطلب	~~350~~ ~~50~~ 0	~~225~~ 0	~~110~~ 0	~~125~~ 0 ~~100~~	~~150~~ 0	950/950

- طريقة أقل تكاليف: ففيها نختار أقل تكلفة في الجدول ونشغل الخلية وفي حالة أكثر من خلية لديها تكلفة صغيرة ومتساوية نختار عشوائيا، بعد ملئ الجدول نحسب التكلفة الكلية.

- التكلفة الكلية:

TC=(12*100)+(14*100)+(0*150)+(6*50)+(7*225)+(11*25)+(4*300)

=5950الف دينار

التمرين رقم (02): تريد مؤسسة توزيع البضاعة (X) نقل هذه البضاعة من مخازنها الأربعة إلى مختلف نقاط التوزيع الستة بأقل تكلفة إجمالية، إذا علمت أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل مخزن إلى كل نقطة بالدينار هي:

		نقـــــــاط التوزيـــــــــع					
		1	2	3	4	5	6
المخــــازن	I	12	27	61	49	83	35
	II	23	39	78	28	65	42
	III	67	56	92	24	53	54
	IV	71	43	91	67	40	49

وأن الكميات المعروضة في كل مخزن بآلاف الوحدات هي على التوالي: 18 ، 32 ، 14 ، 9 .

وأن الكميات الممكن استقبالها في كل نقطة توزيع بآلاف الوحدات هي على التوالي: 9 ، 11 ، 28 ، 6 ، 14 ، 5.

المطلوب:

- إيجاد الحل الأساسي الأولي بكل الطرق التي تعرفها.

الحل:

1. الحل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

شرط التوازن محقق: لان مجموع العرض = مجموع الطلب = 73 ألف

	1	2	3	4	5	6	العرض
I	12 9	27 9	61	49	83	35	~~18~~ ~~9~~ 0
II	23	39 2	78 28	28 2	65	42	~~32~~ ~~30~~ ~~2~~ 0
III	67	56	92	24 4	53 10	54	~~14~~ ~~8~~ ~~3~~ 0
IV	71	43	91	67	40 4	49 5	~~9~~ ~~5~~ 0

الطلب	~~9~~ 0	~~11~~ ~~2~~ 0	~~28~~ 0	~~6~~ ~~4~~ 0	0 ~~14~~ ~~4~~	~~5~~ 0	73/73

TC=(12×9)+(27×9)+(39×2)+(78×28)+(28×2)+(24×4)+(53×10)

+(49×5)+ (40×4) = 3808 الف دينار (لأن الكمية بالآلاف والتكلفة بالدينار)

2. الحل بطريقة أقل التكاليف:

شرط التوازن محقق: لان مجموع العرض = مجموع الطلب = 73 ألف

	1	2	3	4	5	6	العرض
I	12 9	27 9	61	49	83	35	~~18~~ ~~9~~ 0
II	23	39 2	78 25	28	65	42 5	~~32~~ ~~30~~ ~~2~~ 0
III	67	56	92 3	24 6	53 5	54	~~14~~ ~~8~~ ~~3~~ 0
IV	71	43	91	67	40 9	49	~~9~~ 0
الطلب	~~9~~ 0	~~11~~ ~~2~~ 0	~~28~~ ~~3~~ 0	~~6~~ 0	0 ~~14~~ ~~5~~	~~5~~ 0	73/73

TC=(12×9)+(27×9)+(39×2)+(78×25)+(42×5)+(92×3)+(24×6)

+(53×5)+ (40×4) = 3634 الف دينار

3. الحل بطريقة فوقل التقريبية:

شرط التوازن محقق: لان مجموع العرض = مجموع الطلب = 73 ألف

	1	2	3	4	5	6	العرض	الفرق1	الفرق2	الفرق3	الفرق4	الفرق5	الفرق6	الفرق7
I	12	27	61 18	49	83	35	~~18~~ 0	15	15	X	X	X	X	X
II	23 9	39 11	78 7	28	65	42 5	~~32~~ ~~23~~ ~~12~~ ~~7~~ 0	5	16	16	3	3	23	13
III	67	56	92 3	24 6	53 5	54	~~14~~ ~~8~~ ~~3~~ 0	29	1	1	1	1	1	39
IV	71	43	91	67	40 9	49	~~9~~ 0	3	3	3	3	X	X	X
الطلب	~~9~~ 0	~~11~~ 0	~~28~~ ~~3~~ 10 0	~~6~~ 0	14 ~~5~~ 0	~~5~~ 0	73/73							
الفرق1	11	12	17	4	13	7								
الفرق2	11	12	17	X	13	7								
الفرق3	44	4	13	X	13	7								
الفرق4	X	4	13 1	X	12 13	7								
الفرق5	X	17	14	X	12	12								
الفرق6	X	X	14	X	12	12								
الفرق7	X	X	14	X	12	X								

$TC=(61\times18)+(23\times9)+(39\times11)+(78\times7)+(42\times5)+(92\times3)+(24\times6)$

$+(53\times5)+(40\times9)=$ 3535 الف دينار

التمرين رقم (03): لدينا جدول النقل التالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	العرض
S_1	5	2	4	3	11	1200
S_2	0	6	1	0	2	1400
S_3	9	5	0	10	2	700
S_4	8	5	6	0	3	800
S_5	12	6	5	7	1	900
الطلب	1500	600	1100	1400	400	

المطلوب: أوجد:

1- تكلفة النقل الأولية بطريقة فوجل.

2- الحل الأمثل باستخدام بطريقة المسار المتعرج.

الحل:

1- ايجاد تكلفة النقل الأولية بطريقة فوجل:

شرط التوازن محقق العرض= الطلب 5000

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض	الفرق1	الفرق2	الفرق3	الفرق4	الفرق5	الفرق6	الفرق7
S1	5 100	2 500	4	3 600	11	~~1200~~ ~~1100~~ ~~500~~ 0	1	1	1	1	1	1	2
S2	0 1400	6	1	0	2	~~1400~~ 0	0	X	X	X	X	X	X
S3	9	5	0 700	10	2	~~700~~ 0	2	2	X	X	X	X	X
S4	8	5	6	0 800	3	~~800~~ 0	3	3	3	5	X	X	X
S5	12	6 100	5 400	7	1 400	~~900~~ ~~500~~ ~~100~~ 0	4	1 1 4	4	1	1	1	1
الطلب	~~1500~~ ~~100~~ 0	~~600~~ ~~100~~ 0	~~1100~~ ~~400~~ 0	~~1400~~ ~~600~~ 0	~~400~~ 0	5000/5000							
الفرق1	5	3	4	0	1								
الفرق2	3	3	1 6 4	3	1								
الفرق3	3	3	1	3	2								
الفرق4	3	3	1	3	X								
الفرق5	7	4	1	4	X								
الفرق6	X	4 6	1	4 7	X								
الفرق7	X	4	1	X	X								

$TC=(5\times100)+(2\times500)+(3\times600)+(0\times1400)+(0\times700)+(0\times800)+$

$(6\times100)+(5\times400)+(1\times400)=$ 6300 وحدة نقدية

2- ايجاد الحل الأمثل باستخدام بطريقة المسار المتعرج.

نتحقق أولا من شرط عدم التفكك $(m+n-1)=9$

عدد الخلايا المشغولة=9

محقق

الآن نختبر الخلايا الفارغة من خلال المسار المغلق لكل خلية فارغة وحساب التكلفة الغير المباشرة كما يلي:

التكلفة غير المباشرة	الخلية الفارغة	التكلفة غير المباشرة	الخلية الفارغة
10-3+2-6+5-0=8	(S3-D4)	4-5+6-2=3	(S1-D3)
2-0+5-1=6	(S3-D5)	11-1+6-2=14	(S1-D5)
8-5+3-0=6	(S4-D1)	6-0+5-2=9	(S2-D2)
5-2+3-0=6	(S4-D2)	لا يوجد لها مسار مغلق	(S2-D3)
6-5+6-2+3-0=8	(S4-D3)	0-0+5-3=2	(S2-D4)
3-1+6-2+3-0=9	(S4-D5)	لا يوجد لها مسار مغلق	(S2-D5)
12-5+2-6=3	(S5-D1)	لا يوجد لها مسار مغلق	(S3-D1)
7-6+2-3=0	(S5-D4)	-0+5-6=45	(S3-D2)

بما أن جميع الخلايا الفارغة تكلفتها الغير مباشرة موجبة وبالتالي فنحن أمام الحل الأمثل والتكلفة الاجمالية تقدر بـــــ TC= 6300 وحدة نقدية

التمرين رقم (04): لدينا جدول النقل التالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	5	1	0	4	100
S_2	7	5	2	3	50
S_3	6	10	9	0	75
S_4	2	4	1	6	25
الطلب	20	100	30	100	

المطلوب:

1ـ أوجد الحل الأولي بإستخدام طريقة أقل التكاليف.

2ـ أوجد الحل الأمثل بإستخدام طريقة التوزيع المعدلة.

الحل:

1ـ ايجاد الحل الأولي بطريقة أقل التكاليف.

نتحقق من شرط التوازن: العرض=250 وحدة و الطلب=250 وحدة، وبالتالي العرض = الطلب (معناه أن شرط التوازن المحقق)

في البداية نبدأ بالخلية التي لديها أقل تكلفة ونجد أن الخلية(S1-D3) تكلفتها (0) والخلية (S3-D4) تكلفتها (0) وبالتالي نختار عشوائيا أي خلية منهم وبالتالي سنختار (S3-D4) ونبدأ بها.

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$ 70	$\boxed{0}$ 30	$\boxed{4}$	~~100~~ ~~70~~ 0
S_2	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$ 25	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$ 25	~~50~~ ~~25~~ 0
S_3	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	$\boxed{9}$	$\boxed{0}$ 75	~~75~~ 0
S_4	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{4}$ 5	$\boxed{1}$	$\boxed{6}$	~~25~~ ~~5~~ 0
الطلب	~~20~~ 0	~~100~~ ~~30~~ ~~25~~ 0	~~30~~ 0	~~100~~ ~~25~~ 0	250

$TC=(2\times 20)+(1\times 70)+(5\times 25)+(4\times 5)+(0\times 30)+(3\times 25)+(0\times 75) =$

330 وحدة نقدية

ملاحظة: بالنسبة للذين بدؤوا بالخلية (S1-D3) يمكن أن يتحصلوا على تكلفة مختلفة لكن لا يهم لأنها تكلفة حل أولي فقط.

2- ايجاد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدلة

نتحقق من شرط عدم التفكك (عدد الأسطر+ عدد الأعمدة-1= عدد الخلايا المشغولة)

فنجد أن (4+4-1=7) وبالتالي الشرط محقق

- نشكل معادلات للخلايا المشغولة من الشكل Cij=Ui+Vj

$C_{12}+U_1+V_2=1$.........(1)

$C_{13}=U_1+V_3=0$........(2)

$C_{22}=U_2+V_2=5$........(3)

$C_{24}=U_2+V_4=3$........(4)

$C_{34}=U_3+V_4=0$........(5)

$C_{41}=U_4+V_1=2$........(6)

C42=U4+V2=4.......(7)

- نقوم بحب المعادلات السابقة من أجل ايجاد قيمة المتغيرات:

لدينا 07 معادلات و08 مجاهيل وبالتالي نفرض أن(U1=0) ونجد باقي المتغيرات بالتعويض في المعادلات:

$V_1=-1$ $U_1=0$

$V_2=1$ $U_2=4$

$V_3=0$ $U_3=1$

$V_4=-1$ $U_4=3$

- نختبر الخلايا الفارغة بمعدلات من الشكل Cij-Ui-Vj:

(S1-D1)=$C_{11}-U_1-V_1=5-0-(-1)=6$

(S1-D4)=$C_{14}-U_1-V_1=4-0-(-1)=5$

$(S2\text{-}D1)=C_{21}-U_2-V_1=7-4-(-1)=4$

$(S2\text{-}D3)=C_{23}-U_2-V_3+2-4-(0)=$ -2

$(S3\text{-}D1)=C_{31}-U_3-V_1=6-1-(-1)=6$

$(S3\text{-}D2)=C_{32}-U_3-V_2=10-1-1=8$

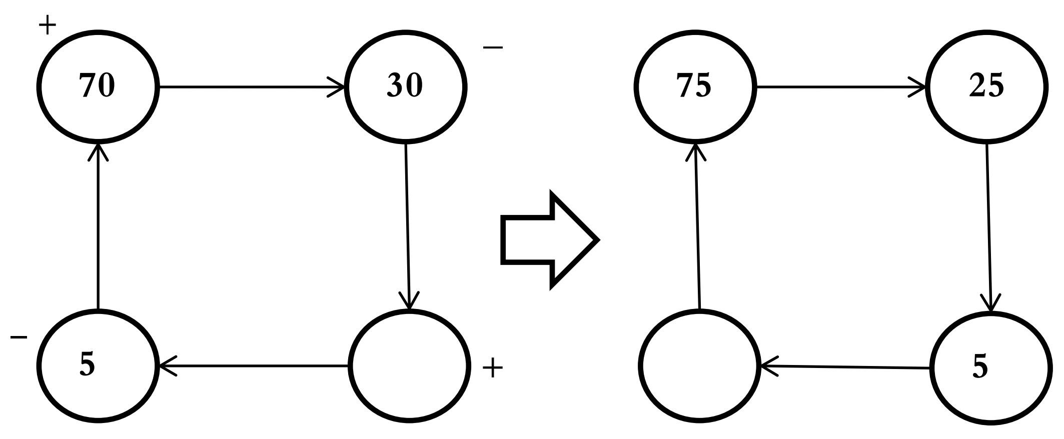
$(S3\text{-}D3)=C_{33}-U_3-V_3=9-1-0=8$

$(S4\text{-}D3)=C_{43}-U_4-V_3=1-3-0=$ -2

$(S4\text{-}D4)=C_{44}-U_4-V_4=6-3-(-1)=4$

بما أن هناك خلايا فارغة تكلفتها الغير مباشرة سالبة فإننا لم نصل إلى الحل الأمثل ويجب ادخال الخلية التي تكلفتها الغير مباشرة في الحل ونبدأ بأكبر قيمة سالبة، فنجد أن (S2-D3) و(S4-D3) تكلفتهم الغير مباشرة(2-) وبالتالي نختار أحداهما عشوائيا:

نختار الخلية (S4-D3) وندخلها في الحل من خلال مسارها المغلق كما يلي:



بحيث اخترنا أقل قيمة بإشارة(-) وننقصها في الخلايا السالبة ونضيفها إلى الخلايا الموجبة وهذه القيمة هي (5)، مع عدم احتساب الاشارات التي فوق الخلايا خلال العمليات الحسابية.

فنتحصل على الجدول التالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	5	1 75	0 25	4	100
S_2	7	5 25	2	3 25	50
S_3	6	10	9	0 75	75
S_4	2 20	4	1 5	6	25
الطلب	20	100	30	100	250

$TC=(1\times75)+(0\times25)+(5\times25)+(3\times25)+(0\times75)+(2\times20)+(1\times5)=$

320 وحدة نقدية

نلاحظ أن التكلفة انخفضت، الآن نختبر أمثلية هذا الحل كما في الطريقة السابقة كالاتي:

- التحقق من شرط عدم التفكك(عدد الأسطر+ عدد الأعمدة-1= عدد الخلايا المشغولة)

محقق لأن (7=7)

- تكون معادلات للخلايا المشغولة من الشكل $Cij=Ui+Vj$

$C_{12}=U_1+V_2=1$......(1)

$C_{13}=U_1+V_3=0$......(2)

$C_{22}=U_2+V_2=5$......(3)

$C_{24}=U_2+V_4=3$......(4)

$C_{34}=U_3+V_4=0......(5)$

$C_{41}=U_4+V_1=2......(6)$

$C_{43}=U_4+V_3=1......(7)$

- نقوم بحل المعدلات من أجل اجاد قم المتغيرات:

بما أن المجاهيل أكثر من المعادلات نفرض أن ($U_1=0$) وكذا بقية المتغيرات

$U_1=0 \qquad V_1=1$

$U_2=4 \qquad V_2=1$

$U_3=1 \qquad V_3=0$

$U_4=1 \qquad V_4= -1$

- نختبر الخلايا الفارغة بمعادلات من الشكل Cij-Ui-Vj:

$(S1-D1)=C_{11}-U_1-V_1=5-0-1=4$

$(S1-D4)=C_{14}-U_1-V_4=4-0-(-1)=5$

$(S2-D1)=C_{21}-U_2-V_1=7-4-1=2$

$(S2-D3)= C_{23}-U_2-V_3=2-4-0= -2$

$(S3-D1)= C_{31}-U_3-V_1=6-1-1= 4$

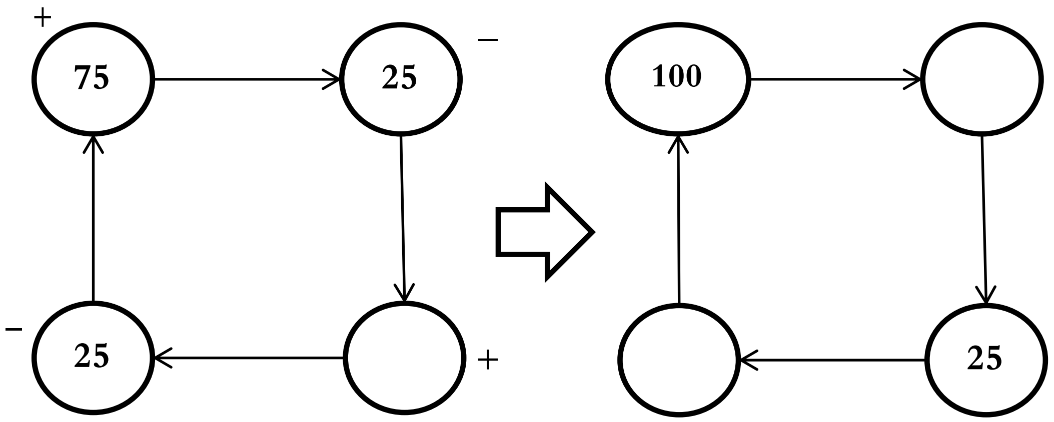
$(S3-D2)=C_{32}-U_3-V_2=10-1-1=8$

$(S3-D3)= C_{33}-U_3-V_3=9-1-0=8$

$(S4-D2)=C_{42}-U_4-V_2=4-1-1=2$

$(S4-D4)=C_{44}-U_4-V_4=6-1-(-1)=6$

من خلال التكاليف الغير مباشرة للخلايا الفارغة نلاحظ أن الخلية (S2-D3) خلية سالبة، وبالتالي ندخلها في الحل(نشغلها) من خلال مسارها المغلق كما يلي:



فيصبح الجدول كما يلي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	5	1 100	0 0	4	100
S_2	7	5	2 25	3 25	50
S_3	6	10	9	0 75	75
S_4	2 20	4	1 5	6	25
الطلب	20	100	30	100	250

$$TC=(1\times 100)+(2\times 25)+(3\times 25)+(0\times 75)+(2\times 20)+(1\times 5)=$$

270 وحدة نقدية

نلاحظ أن التكلفة انخفضت، الآن نتحقق من أمثلية هذا الحل، كما ف الطريقتين السابقتين كما يلي:

- التحقق من شرط عدم التفكك: عدد الأسطر+ عدد الأعمدة-1=7 } الشرط غير محقق
عدد الخلايا المشغولة= 6

نلاحظ أن الشرط غير محقق وبالتالي نضيف خلية مشغولة ليتحقق الشرط، وذلك باعتبار الخلية الفارغة والتي فيها أقل تكلفة وهي(S1-D3) نعتبرها مشغولة وعدد الوحدات فيها هو (0) وحدة، بحيث لا يؤثر ذلك على التكلفة الكلية لكنه يحقق لنا شرط عدم التفكك، ثم نكمل بقية خطوات البحث عن الحل الأمثل:

- تكوين معادلات للخلايا المشغولة من الشكل Cij=Ui+Vj:

$C_{12}= U_1+V_2=1......(1)$

$C_{13}= U_1+V_3=0......(2)$

$C_{23}= U_2+V_3=2......(3)$

$C_{24}=U_2+V_4=3......(4)$

$C_{34}=U_3+V_4=0......(5)$

$C_{41}=U_4+V_1=2......(6)$

$C_{43}=U_4+V_3=1......(7)$

- حل المعادلات وايجاد قيم المتغيرات:

بما أن المجاهيل أكثر من المعادلات نفرض أن (U1=0) ونجد بقية قيم المتغيرات:

$V_1=1$ $U_1=0$

$V_2=1$ $U_2=2$

$V_3= 0$ $U_3= -1$

$V_4=1$ $U_4=1$

- نختبر الخلايا الفارغة بمعادلات من الشكل Cij-Ui-Vj:

(S1-D1)= C_{11}-U_1-V_1=5-0-1=4

(S1-D4)= C_{14}-U_1-V_4= 4-0-1=3

(S2-D1)=C_{21}-U_2-V_1=7-2-1=4

(S2-D2)=C_{22}-U_2-V_2=5-2-1=2

(S3-D1)=C_{32}-U_3-V_2=6-(-1)-1=6

(S3-D2)=C_{32}-U_3-V_2=10-(-1)-1=10

(S3-D3)=C_{33}-U_3-V_3=9-(-1)-0=10

(S4-D2)=C_{42}-U_4-V_2=4-1-1=2

(S4-D4)=C_{44}-U_4-V_4=6-1-1=4

بما أن جميع الخلايا الفارغة تكاليفها ايجابية وبالتالي لقد وصلنا إلى الحل الأمثل والتكلفة المثلى تقدر بـــ TC=270 وحدة نقدية، كما هو موضح في آخر جدول.

المحور الثاني:

تطبيقات حول نماذج التخصيص (مشاكل التعيين)

في هذا المحور سنتطرق إلى تمرينات مع الحلول النموذجية عن المحور المتعلق بنماذج التخصيص أو التعيين فيما يتعلق بكيفية الوصول إلى الحلول المثلى للتخصيص والطرق الأفضل لذلك من خلال جميع الطرق المتاحة.

التمرين رقم (01): إذا كان لدينا مصنع أربع آلات وثلاثة عمال فنيين للعمل على هذه الآلات الأربعة، والجدول التالي يعطي إنتاج كل عامل على كل آلة من هذه الآلات:

		الآلات			
		1	2	3	4
العمال	A	10	15	12	20
	B	17	13	18	10
	C	7	9	11	9

المطلوب: ما هي الآلة التي يجب أن لا تعمل ليعطي النموذج أعلى إنتاج ممكن، وما هو هذا الإنتاج مستخدما الطريقة المجرية ؟

الحل:

لدينا في التمرين جدول أرباح غير متوازن وبالتالي نحوله إلى جدول تكاليف عن طريق طرح أكبر قيمة من الجدول وهي(20) من باقي القيم نتحصل على:

الآلات

العمال

	1	2	3	4
A	10	5	8	0
B	3	7	2	10
C	13	11	9	11

ثم نضيف عامل وهي(D) بتكاليف صفرية(0) من أجل موازنة المشكل:

10	5	8	0
3	7	2	10
13	11	9	11
0	0	0	0

طرح الأعمدة: يبقى نفس الجدول لأن الأعمدة كلها فيها قيمة (0) لأننا سنأخذ أقل قيمة في كل عمود وننقصها من بقية القيم وبالتالي يبقى نفس الجدول(لا يتغير).

- طرح الأسطر(الصفوف):

نأخذ أقل قيمة في كل صف وننقصها من باقي القيم نتحصل على الجدول التالي:

10	5	8	0
1	5	0	8
4	2	0	2
0	0	0	0

- تغطية الأصفار: بأقل عدد ممكن من المستقيمات،

بعد التغطية في الجدول السابق نلاحظ أن عدد المستقيمات المغطى بها (3) وعدد الصفوف والأعمدة (4)، ($3 \neq 4$)، وبالتالي لم نصل إلى الحل الأمثل نضيف خطوة أخرى وهي بأخذ أقل قيمة غير مغطاة (1) وننقصها من باقي القيم الغير مغطاة، ونضيفها إلى نقاط تقاطع المستقيمات، وباقي القيم لا تتغير، فنتحصل على الجدول التالي:

	1	2	3	4
A	10	5	9	0
B	0	4	0	7
C	3	1	0	1
D	0	0	1	0

بما أن عدد المستقيمات المغطى بها يساوي عدد الصفوف والأعمدة(4=4) فإننا وصلنا إلى الحل الأمثل ونضع التخصيص الأولي مكان الأصفار التي في الجدول:

✓ التخصيص الأولي

العامل A ← الآلة 4

العامل B ← الآلة 1 و ~~3~~

العامل C ← الآلة 3

العامل D ← الآلة ~~1~~ و 2 و ~~4~~

✓ التخصيص الأمثل

العامل A ← الآلة 4

العامل B ← الآلة 1

العامل C ← الآلة 3

العامل D ← الآلة 2

الآلة التي تعمل هي الآلة 2 لأن (العامل D) هو عامل وهمي غير موجود استعننا به من أجل موازنة المشكلة فقط.

والإنتاج الأمثل TP هو:(نستخرجه من الجدول الأول في التمرين الأصلي)

$TP=20+17+11+0=48$ وحدة

التمرين رقم (02): طلب من مدير مصنع أن يخصص صناعة أربعة أنواع من المنتجات على أربعة أقسام بسبب اختلاف التجربة وعبء العمل، يمكن للأقسام المختلفة إنتاج المنتجات الجديدة بكميات مختلفة والجدول أدناه يبين كمية الإنتاج اليومية لكل نوع من المنتجات في كل قسم من الأقسام، فما هو التخصيص الأمثل للمنتجات الجديدة بحيث تزيد الإنتاج اليومي الكلي إلى أعلى حد مستخدما الطريقة الهنغارية؟

المنتجات

		A	B	C	D
الأقسام	1	90	65	125	90
	2	100	90	160	100
	3	110	70	140	120
	4	85	60	100	75

الحل:

بما أن الجدول هو أرباح(إنتاج) نحوله إلى تكاليف بإنقاص أكبر قيمة (160) من بقية القيم:

	A	B	C	D
1	70	95	35	70
2	60	70	0	60
3	50	90	20	40
4	75	100	60	85

- طرح الأعمدة

20	25	35	30
10	0	0	20
0	20	20	0
25	30	60	45

- طرح الصفوف

0	5	15	10
10	0	0	20
0	20	20	0
0	5	35	20

- تغطية الأصفار: بعد التغطية نجد أن المستقيمات المغطى بها (3) وعدد الصفوف والأعمدة (4)، (4≠3)، وبالتالي لم نصل إلى الحل الأمثل نضيف خطوة أخرى وهي بأخذ أقل قيمة غير مغطاة (1) وننقصها من باقي القيم الغير مغطاة، ونضيفها إلى نقاط تقاطع المستقيمات، وباقي القيم لا تتغير، فنتحصل على الجدول التالي:

	A	B	C	D
1	0	0	10	10
2	15	0	0	25
3	0	15	15	0
4	0	0	30	20

بما أن عدد المستقيمات المغطى بها 4 وعدد الصفوف والأعمدة 4، (4=4) إذن وصلنا إلى الحل الأمثل ونقوم بالتخصيص الأولي ثم نستخرج التخصيص الأمثل.

التخصيص الأولي

القسم1 ⟵ المنتج A، B

القسم2 ⟵ المنتج B، C

القسم3 ⟵ المنتج A، D

القسم4 ⟵ المنتج A، B

من خلال التخصيص الاولي نلاحظ أن هناك أكثر من تخصيص، وهما كما يلي:

✓ التخصيص الأول:

القسم 1 ⟵ المنتج A

القسم2 ⟵ المنتج C

القسم 3 ⟵ المنتج D

القسم 4 ⟵ المنتج B

TP=90+160+120+60=430وحدة

✓ التخصيص الثاني:

القسم1 ⟵ المنتج B

القسم 2 ⟵ المنتج C

القسم3 ⟵ المنتج D

القسم 4 ⟵ المنتج A

TP=65+160+120+85=430 وحدة

في هذه الحالة لدينا تخصيصين اثنين وكلاهما نصل إلى أقصى إنتاج ممكن وهو 430 وحدة.

التمرين رقم (03): في مكتب قانوني لتدقيق الحسابات هناك أربع مجاميع تدقيق، وكانت هناك أربع شركات يجب تدقيق حساباتها بسرعة لمعرفة مركزها المالي في سوق الأوراق المالية وكان الوقت اللازم لتدقيق كل مجموعة كما هو في الجدول الآتي:

الشركات

المجاميع

	الشركة 1	الشركة2	الشركة3	الشركة4
المجموعةA	27	18	19	21
المجموعةB	18	15	16	19
المجموعةC	19	17	18	15
المجموعةD	20	23	15	24

المطلوب: إجراء التخصيص الأمثل لتخفيض فترة التدقيق أقل ما يمكن باستخدام الطريقة الهنغارية؟

الحل:

الجدول في هذا التمرين هو عبارة عن جدول تكاليف لأنه يمثل الوقت وبالتالي نبدأ بالخطوات مباشرة.

- طرح الأعمدة:

9	3	4	6
0	0	1	4
1	2	3	0
2	8	0	9

- طرح الصفوف:

	ش1	ش2	ش3	ش4
م A	6	0	1	3
م B	0	0	1	4
مC	1	2	3	0
م D	2	8	0	9

تغطية الأصفار: بما أن عدد المستقيمات المغطى بها تساوي عدد الصفوف والاعمدة (4=4)، فيعنني أننا وصلنا إلى الحل الأمثل ونبدأ عملية التخصيص.

- التخصيص الأولي

المجموعة A ⟵ الشركة 2

المجموعة B ⟵ الشركة 1أو ~~2~~

المجموعة C ⟵ الشركة 4

المجموعة D ⟵ الشركة 3

✓ التخصيص الأمثل

المجموعة A ⟵ الشركة 2

المجموعة B ⟵ الشركة 1

المجموعة C ⟵ الشركة 4

المجموعة D ⟵ الشركة 3

وحدة زمنية 66 =TC= 18+18+15+15 التكاليف

التمرين رقم (04): في جدول التخصيص التالي:

	1	2	3	4

A	2	3	7	8
B	1	5	6	2
C	4	2	9	7
D	9	8	1	10

المطلوب: استخدم طريقة النقل في إيجاد اقل التكاليف، (طريقة فوجل، والمسار المتعرج)

الحل:

بالنسبة لطريقة النقل نحول جدول التخصيص إلى جدول نقل بإضافة قيم العرض والطلب كما يلي:

	1	2	3	4	العرض	الفرق1	الفرق2	الفرق3
A	2 1	3 0	7 /	8 /	~~1~~ 0	1	1	1
B	1 0	5 /	6 /	2 1	~~1~~ 0	1	1	X
C	4 0	2 1	9 /	7 /	~~1~~ 0	1	2	2 4
D	9 /	8 /	1 1	10 /	~~1~~ 0	7	X	X
الطلب	~~1~~ 0	~~1~~ 0	~~1~~ 0	~~1~~ 0	4/4			
الفرق1	1	1	5	5				
الفرق2	1	1	X	5				
الفرق3	2 4	1	X	X				

- نقوم بالحل الأولي لطريقة فوجل:

- لدينا شرط التوازن محقق لأن مجموع العرض يساوي مجموع الطلب.

العرض=4 } محقق
الطلب=4

- التأكد من الحل الأمثل بطريقة المسار المتعرج

نتحقق من شرط عدم التفكك: عدد الأسطر+ عدد الأعمدة-1=7 } غير محقق
عدد الخلايا المشغولة=4

الشرط غير محقق ($4\neq7$) وبالتالي نضيف الخلايا(03) الفارغة والتي لديها أقل تكلفة ونشغلها بقيمة(0) حتى لا يتأثر الحل الأولي(أنظر الجدول النقل السابق) .

- نشكل مسار مغلق لكل خلية فارغة ونحسب التكاليف الغير مباشرة

التكلفة غير المباشرة	الخلية الفارغة	التكلفة غير المباشرة	الخلية الفارغة
7-4+1-2=2	(C-4)	لا يوجد لديها مسار	(A.3)
لا يوجد لديها مسار	(D.1)	+8-2+1=5	(A.4)
لا يوجد لديها مسار	(D.2)	5-1+2-3=3	(B.2)
لا يوجد لديها مسار	(D.4)	لا يوجد لديها مسار	(B.3)
		لا يوجد لديها مسار	(C.3)

بما أن جميع الخلايا التي لديها مسار موجبة (الخلايا التي ليس لديها مسار لا تدخل في الحل) فإننا وصلنا إلى الحل الأمثل والتخصيص يكون مكان الخلايا المشغولة.

التخصيص الأمثل:

$A \longrightarrow 1$

B ⟵ 4

C ⟵ 2

D ⟵ 3

إجمالي التكاليف TC=2+2+2+1=7 وحدة نقدية

التمرين رقم (05): في شركة صناعية إذا أردنا تعيين أربعة عمال على أربع آلات بحيث أن العامل الأول لا يستطيع تشغيل الآلة الرابعة والعامل الثالث لا يستطيع تشغيل الآلة الثانية وكانت تكلفة كل عامل على كل آلة معطاة في الجدول التالي:

الآلات

العمال		الألة1	الألة2	الألة3	الألة4
	أحمد	20	50	30	/
	علي	40	20	30	70
	مُحَمَّد	20	/	50	60
	عثمان	30	50	40	10

المطلوب: أوجد التخصيص الأمثل بإستخدام الطريقة المجرية؟

الحل:

بالنسبة لعدم قبول التخصيص فإننا نضع قيمة كبيرة جدا لأن الجدول هو مشكل تكلفة، أو لا نستخدم الخلية أصلا(المهم نضمن عدم ظهور الصفر في الخلايا الغير قابلة للتخصيص).

- نقوم بطرح الأعمدة:

	الآلة 1	الآلة 2	الآلة3	الآلة4
أحمد	0	30	0	/
علي	20	0	0	60
مُحَمَّد	0	/	20	50
عثمان	10	30	10	0

- طرح الأسطر: يبقى نفس الجدول لأن جميع الأسطر بها أصفار.
- تغطية الأصفار: بما أن عدد المستقيمات المغطى بها هو (4) وعدد الصفوف والأعمدة(4) إذن وصلنا إلى الحل الأمثل.

التخصيص الأولي:

أحمد ⟵ الآلة ~~1~~ و3

علي ⟵ الآلة 2 و ~~3~~

مُحَمَّد ⟵ الآلة 1

عثمان ⟵ الآلة 4

التخصيص الأمثل

أحمد ⟵ الآلة 3

علي ⟵ الآلة 2

مُحَمَّد ⟵ الآلة 1

عثمان ⟵ الآلة 4

التكلفة الاجمالية TC= 30+20+20+10=80 وحدة نقدية

التمرين رقم (06): مؤسسة للنقل تملك ثلاث حافلات مختلفة الحمولة تريد تخصيصها لنقل ركاب ثلاثة أحياء مختلفة، الدراسة الأولية بينت أنه وفقا للتعريفة الجاري العمل بها ووفقا لحجم حركة الركاب فإن الأرباح التي يمكن جنيها من جراء تخصيص كل حافلة لكل حي موضحة كما يلي:

الأحياء / الحافلات	08 ماي	18 فيفري	20 أوت
A	72	24	56
B	48	56	40
C	64	32	40

المطلوب: أوجد التخصيص الذي يسمح للمؤسسة بالحصول على أعلى الأرباح بالطرق الأربع المدروسة سلفا؟

الحل:

المطلوب في هذا التمرين حل المثال بجميع الطرق الأربعة المدروسة سابقا وهي كما يلي:

1. الحل بطريقة العد الكامل:

- التحقق من شرط التوازن: عدد الصفوف والأعمدة=3 وبالتالي مشكل التخصيص متوازن.

- نعد الآن جميع البدائل الممكنة وعددها: ! 3

$3!=3\times2\times1=6$ بدائل

البدائل	الوصف	إجمالي الأرباح
1	A1 B2 C3	72+56+40=168
2	A1 B3 C2	72+40+32=144
3	A2 B1 C3	24+48+40=112
4	A2 B3 C1	24+40+64=128

5	A3 B1 C2	56+48+32=136
6	A3 B2 C1	56+56+64=176

نلاحظ أن أكبر ربح هو البديل رقم 6 بتقدير 176 وحدة وهذا التخصص هو:

الحافلة A ⟵ حي 20 أوت

الحافلة B ⟵ حي 18فيفري

الحافلة C ⟵ حي 08 ماي

TB =176وحدة نقدية

2. الحل بالطريقة المجربة (الهنغارية):

وذلك بإتباع الخطوات التالية:

- تحويل جدول الأرباح إلى جدول تكاليف: يجب أن نحول الجدول إلى تكاليف وذلك لأن الطريقة الهنغارية تتطلب ذلك، وذلك بطرح (72) من جميع القيم.

0	48	16
24	16	32
8	40	32

- طرح الأعمدة:

0	32	0
24	0	16
8	24	16

- طرح الأسطر:

	08 ماي	18 فيفري	20 أوت
الحافلةA	0	32	0

الحافلة B	24	0	16
الحافلة C	0	16	8

- تغطية الأصفار: بما أن عدد المستقيمات المغطى بها تساوي عدد الصفوف والاعمدة ،فهذا يعني أننا وصلنا إلى الحل الأمثل ونقوم بعملية التخصيص

التخصيص الأولي:

الحافلة A ⟵ ~~8 ماي~~، 20 أوت

الحافلة B ⟵ 18 فيفري

الحافلة C ⟵ 08 ماي

✓ التخصيص الأمثل:

الحافلة A ⟵ حي 20 أوت

الحافلة B ⟵ حي 18 فيفري

الحافلة C ⟵ حي 08 ماي

إجمالي الأرباح TB=56+56+64=176 وحدة نقدية

3. الحل بطريقة النقل:

- نحول جدول الارباح إلى جدول تكاليف:

بالنسبة لمشاكل النقل تعاملنا فقط مع التكاليف وبالتالي نحول جدول الأرباح إلى تكاليف وذلك بإنقاص قيمة (72) من باقي القيم فنتحصل على الجدول التالي:

0	48	16
24	16	32
8	40	32

- نحول جدول التخصيص إلى جدول نقل: وذلك بإضافة العرض والطلب ونحل بطريقة النقل (فوقل للحل الأولي والمسار المتعرج للحل الأمثل).

بما أنه لم يطلب بأي طرف النقل نعالج المشكل فإننا سنختار طريقة فوجل للحل الأولي (لأنها الأقرب لإيصالنا إلى الحل الأمثل) ثم نتأكد من الحل الأمثل بطريقة المسار المتعرج لأنها أسهل (عدد الخطوات أقل).

- في البداية نتحقق من شرط التوازن:

مجموع العرض=3
مجموع الطلب=3
محقق

	1	2	3	العرض	الفرق1	الفرق2
A	0 0	48 /	16 1	~~1~~ 0	16	16
B	24 0	16 1	32 /	~~1~~ 0	8	X
C	8 1	40 /	32 /	~~1~~ 0	24	24
الطلب	0 ~~1~~	0 ~~1~~	0 ~~1~~	4/4		
الفرق1	8	24	16			
الفرق2	8	X	16			

- قبل بداية البحث عن الحل الأمثل نتأكد من شرط عدم التفكك

عدد الأسطر + عدد الأعمدة-1= 5
عدد الخلايا المشغولة= 3
غير محقق

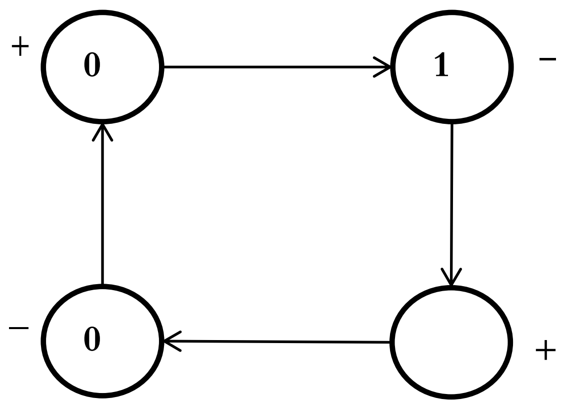
لدينا 5≠3 وبالتالي شرط عدم التفكك غير محقق، ومن أجل تحقيقه نضيف للخليتين التي لها أقل تكلفة قيمة(0) ونعتبرها مشغولة ليتحقق شرط عدم التفكك وفي نفس الوقت لا يتأثر الحل الأولي لأننا أضفنا قيمة صفر(0).

نقوم بحساب التكلفة الغير مباشرة للخلايا الفارغة لغرف الحل الأمثل

التكلفة الغير مباشرة	الخلية الفارغة
+48-16+24-0=56	(18 فيفري، الحافلة A)
32-24+0-16=8-	(20 أوت، الحافلة B)
40-8+24-16=40	(18 فيفري، الحافلة C)
32-8+0-16=8	(20 أوت، الحافلة C)

بما أن التكاليف الغير مباشرة للخلايا الفارغة التي تم حسابها وجدنا أن الخلية(20 أوت،B) لديها إشارة سالبة(-8) وبالتالي ندخلها في الحل من أجل تحسين الحل

بالنسبة لإشغال الخلية الفارغة فإننا سنختار أقل قيمة من القيم للخلايا(-) فنجدها(0) وبالتالي القيم لا تتغير والحل يبقى نفسه كما يلي:



و التخصيص يكون في الخلايا المشغولة(1) كالتالي:

الحافلة A ⟵——— حي 20 أوت

الحافلة B ⟵——— حي 18 فيفري

الحافلة C ⟵ حي 08 ماي

وحدة نقدية$TB=56+56+64=176$ إجمالي الأرباح

4. طريقة البرمجة الخطية: وهي طريقة غير عملية بالنسبة لمشاكل التخصيص وبالتالي سنكتفي بكتابة البرنامج الخطي للمشكلة فقط.

فإذ كانت X_{ij} تمثل تخصيص الحافلة i للحي j فإن نموذج البرمجة الخطية يكون بالشكل الآتي:

$$\text{Max } Z = 72X_{11} + 24X_{12} + 56X_{13} + 48X_{21} + 56X_{22} + 40X_{23} + 64X_{31} + 32X_{32} + 40X_{33}$$

S.t

$$\begin{cases} 72X_{11}+24X_{12}+56X_{13} = 1 \\ 48X_{21}+56X_{22}+40X_{23} = 1 \\ 64X_{31}+32X_{32}+40X_{33} = 1 \\ 72X_{11}+48X_{21}+64X_{31} = 1 \\ 24X_{12}+56X_{22}+32X_{32} = 1 \\ 56X_{13}+40X_{23}+40X_{33} = 1 \end{cases}$$

$X_{ij} \geq 0 \quad i=1.2.3 \quad j=1.2.3$

وعند حل هذا البرنامج بطريقة (simplex, big M) نتحصل على نفس التخصيص ونفس النتائج المتحصل عليها في الطرق الثلاثة السابقة، وهي الملاحظة التي يجب التنويه لها بأن الحل الأمثل بجميع الطرق يبقى نفسه ويكون دائما له نفس النتيجة وهي في هذا التمرين 176 وحدة نقدية مهما كانت طريقة الحل.

التمرين رقم (7): يريد أحد الأشخاص أن يستثمر أربعة مبالغ مالية على أربعة مشاريع استثمارية، على أن يخصص كل مبلغ على مشروع واحد فقط، بعد دراسة جدوى المشاريع تبين للمستثمر أن هناك امكانيات مختلفة للربح والخسارة في بعض الأحيان، وتقدر بآلاف الوحدات النقدية كما هي موضحة في الجدول التالي:

	المشروع 1	المشروع 2	المشروع 3	المشروع 4
المبلغ 1	6	10	-12	4
المبلغ 2	10	-7	2	10
المبلغ 3	4	8	13	14
المبلغ 4	2	4	-8	6

الحل:

- بما أن أقل قيمة في الجدول (12-) وهي أكبر قيمة سالبة، فإننا نضيف قيمة (12) لجميع عناصر المصفوفة، فتصبح كما يلي:

	المشروع 1	المشروع 2	المشروع 3	المشروع 4
المبلغ 1	18	22	0	16
المبلغ 2	22	5	14	22

المبلغ 3	16	20	25	26
المبلغ 4	14	16	4	18

- الجدول المتحصل عليه هو جدول أرباح وبما أننا سنقوم بالحل بالطريقة المجرية (الهنقارية) فأننا نحوله إلى جدول تكاليف وذلك بطرح أكبر قيمة في الجدول (26) من جميع القيم فنتحصل على الجدول التالي:

	المشروع 1	المشروع 2	المشروع 3	المشروع 4
المبلغ 1	8	4	26	10
المبلغ 2	4	21	12	4
المبلغ 3	10	6	1	0
المبلغ 4	12	10	22	8

- طرح الأعمدة: نطرح أقل قيمة في كل عمود على باقي قيم العمود، فنتحصل على الجدول التالي:

	المشروع 1	المشروع 2	المشروع 3	المشروع 4
المبلغ 1	4	0	25	10
المبلغ 2	0	17	11	4
المبلغ 3	6	2	0	0
المبلغ 4	8	6	21	8

- طرح الصفوف: نطرح أقل قيمة في كل صف على باقي قيم الصف، فنتحصل على الجدول التالي:

	المشروع 1	المشروع 2	المشروع 3	المشروع 4
المبلغ 1	4	0	25	10
المبلغ 2	0	17	11	4
المبلغ 3	6	2	0	0
المبلغ 4	2	0	15	2

- تغطية الاصفار: في الجدول السابق نغطي الاصفار بأقل عدد ممكن من المستقيمات.
- بعد تغطية الاصفار نلاحظ أن عدد المستقيمات المغطى بها تساوي (3) وعدد المبالغ أو المشاريع تساوي (4)، وبالتالي لم نصل للحل الامثل لأن (3≠4)، وبالتالي نضيف خطوة أخرى وهي بطرح أقل قيمة غير مغطاة في الجدول السابق (2) من باقي القيم ونضيفها إلى نقاط تقاطع المستقيمات، وباقي القيم تبقى على حالها، فنتحصل على الجدول التالي:

	المشروع 1	المشروع 2	المشروع 3	المشروع 4
المبلغ 1	4	0	23	8
المبلغ 2	0	17	9	2
المبلغ 3	8	4	0	0
المبلغ 4	2	0	13	0

- من خلال الجدول الأخير نلاحظ أن عدد المستقيمات المغطى بها تساوي (4)، وعدد المبالغ والمشاريع تساوي (4)، وبالتالي فلقد وصلنا إلى الحل الأمثل لأن (4=4)، ويمكن تخصيص المبالغ على المشاريع عند القيم الصفرية (0) في الجدول كما يلي:
- وبالتالي التخصيص الأولي يكون كالآتي:
  - المبلغ 1 ← المشروع 2
  - المبلغ 2 ← المشروع 1
  - المبلغ 3 ← المشروع 3 أو ~~المشروع~~ 4
  - المبلغ 4 ← ~~المشروع 2~~ أو المشروع 4
- وبالتالي التخصيص الأمثل يكون كالآتي:
  - المبلغ 1 ← المشروع 2
  - المبلغ 2 ← المشروع 1
  - المبلغ 3 ← المشروع 3
  - المبلغ 4 ← المشروع 4

أما العوائد الناجمة عن هذا التخصيص نستخرجها من الجدول الأول الذي يحتوي على الأرباح والتكاليف، وهذه العوائد الناجمة عن هذا الاستثمار هي كالآتي:

وحدة نقدية 39000=6000+13000+10000+10000

المحور الثالث:

تطبيقات حول برمجة الأعداد الصحيحة

في هذا المحور سنتطرق إلى تمرينات مع الحلول النموذجية عن المحور المتعلق ببرمجة الاعداد الصحيحة وكيفية الوصول إلى حل أمثل متغيراته القرارية كلها أعداد صحيحة خاصة إذا كانت المتغيرات المتعامل معها متغيرات متقطعة غير قابلة للقسمة، سواء ما تعلق بالحل البياني أو عن طريق البرمجة الخطية.

التمرين رقم (1):

توجد في نوعين من غذاء الرجيم، A وB ثلاثة مركبات معدنية هي اليود، الفوسفور والحديد، والجدول التالي يعطي نسبة كل معدن في كل نوع غذاء:

	نوع الغذاء	
المعدن	A	B
اليود	0.15	0.10
الفسفور	0.75	1.70
الحديد	1.30	1.10

فإذا كانت تكلفة الغذاء (A) هي (2 دولار) والغذاء (B) هي (1.7 دولار)، وتكون الاحتياجات اليومية الأساسية من هذه المركبات هي على الاقل (1.0 ملغ) من اليود و(7.5 ملغ) من الفسفور و(10.0 ملغ) من الحديد.

- ما هي عدد الغرامات المصنعة من كل نوع من الأغذية الذي يحقق أقل تكلفة بالطريق البيانية (طريقة المستوي القاطع)؟ على أن يكون عددها عدد صحيح.

الحل:

- في البداية نكون النموذج الرياضي للمسألة:

- نفترض أن X1 هي عدد الغرامات المنتجة من الغذاء A
- نفترض أن X2 هي عدد الغرامات المنتجة من الغذاء B

$$Min : Z= 2X_1 + 1.7X_2$$

$$S / c \begin{cases} 0.15X_1+0.10X_2 \geq 1.0 \\ 0.75 X_1+ 1.70X_2 \geq 7.5 \\ 1.3X_1+1.10X_2 \geq 10 \end{cases}$$

$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$ أعداد صحيحة

- نقوم الآن بالحل بالطريقة البيانية:

✓ نحول القيود إلى معادلات:

$0.15X_1+0.10X_2 =1.0$ ....(1)

$0.75 X_1+ 1.70X_2 = 7.5$ ....(2)

$1.3X_1+1.10X_2 = 10$ ....(3)

✓ نبحث عن احداثيات المستقيمات:

- من المعادلة (1):

نفرض أن $X_1=0$ فنجد أن $10X_2=$ (0.10)

نفرض أن $X_1= 6.7$ فنجد أن $X_2=0$ (6.7 .0)

- من المعادلة (2):

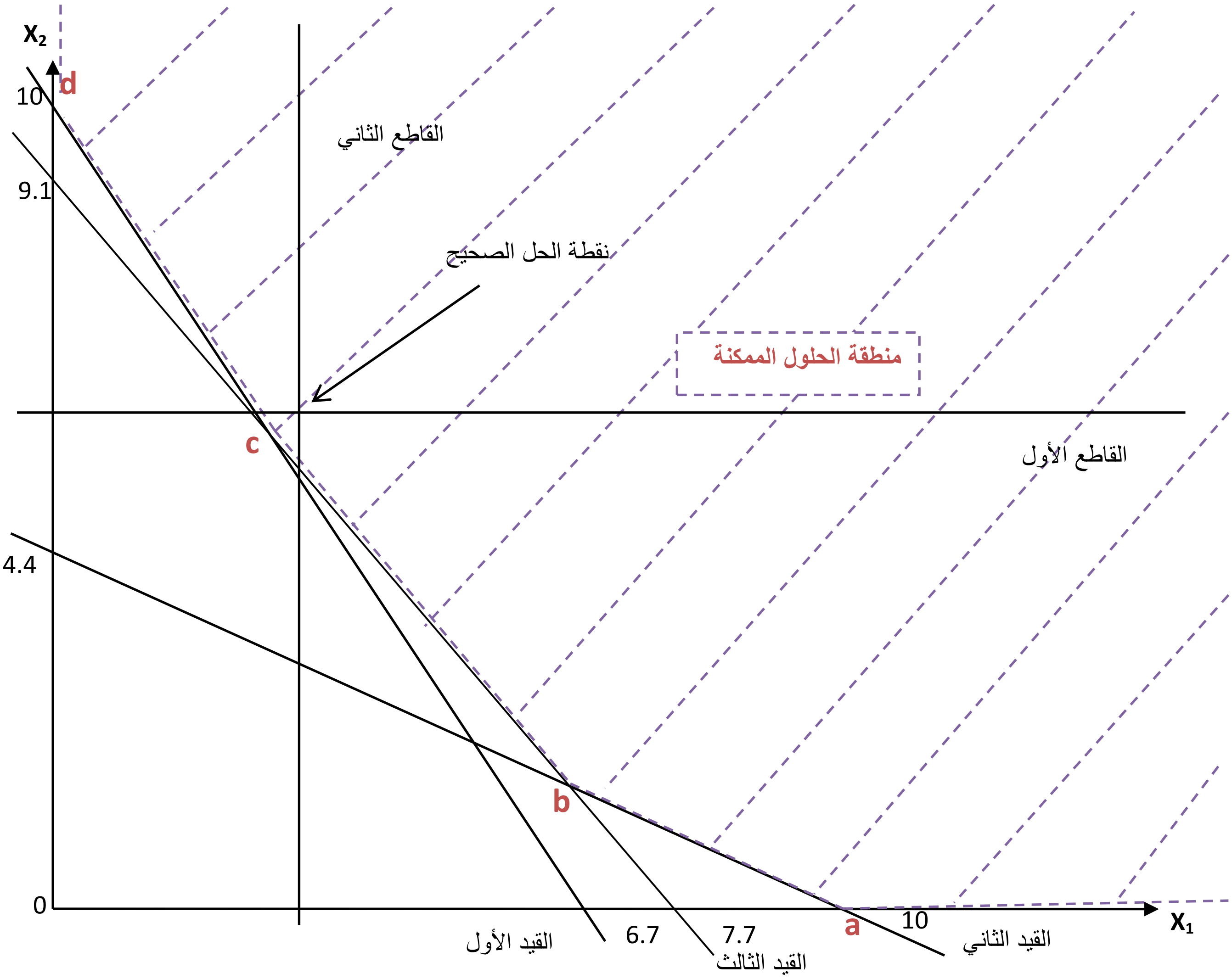
نفرض أن $X_1=0$ فنجد أن $X_2=4.4$ (0. 4.4)

نفرض أن $X_1=10$ فنجد أن $X_2=0$ (10.0)

- من المعادلة (3):

نفرض أن $X_1=0$ فنجد أن $X_2=9.1$ (0. 9.1)

نفرض أن $X_1=7.7$ فنجد أن $X_2=0$ (7.7 .0)



- نبحث عن إحداثيات النقاط (a, b, c, d)

- احداثيات (a) هي (10 .0)

- احداثيات (b) هي (0 .10)

- احداثيات (c) هي عند تقاطع القيدين (1) و(3)

$0.15X_1+0.10X_2 =1.0$ ....(1)

$1.3X_1+1.10X_2 = 10$ ....(3)

$(1.3)[\ 0.15X_1 + 0.10X_2 = 1\ ] = 0.195X_1 + 0.13X_2 = 1.3$

$(-0.15)[\ 1.3X_1 + 1.1X_2 = 10] = 0.195X_1 - 0.165X_2 = -1.5$

بالجمع $-0.035X_2 = -0.2 \Longrightarrow X_2 = \frac{-0.2}{-0.035} = 5.71$

نعوض في المعادلة (1) أو (3) نحصل على قيمة $X_1=2.86$

احداثيات (c) هي (5.71، 2.86)

- احداثيات (b) هي عند تقاطع القيدين (2) و(3)

$0.75\ X_1+ 1.70X_2 = 7.5$ ....(2)

$1.3X_1+1.10X_2 = 10$ ....(3)

$(1.3)[\ 0.75X_1 + 1.70X_2 = 7.5\ ] = 0.975X_1 + 2.21X_2 = 9.75$

$(-0.75)[\ 1.3X_1 + 1.1X_2 = 10] = -0.975X_1 - 0.825X_2 = -7.5$

بالجمع $1.385X_2 = 2.25 \Longrightarrow X_2 = \frac{2.25}{1.385} = 1.62$

نعوض في المعادلة (1) أو (3) نحصل على قيمة $X_1=6.32$

احداثيات (b) هي (1.62، 6.32)

وبالتالي نقاط الحل كما يلي:

الحل	X_1	X_2	Z
A	10	0	20
B	6.32	1.62	15.39
C	2.86	5.71	15.43
D	0	10	17

الحل الأمثل

الحل الامثل والذي يقلل التكاليف إلى أقل ما يمكن هو عند النقطة (b) لكنه ليس حل بأعداد صحيحة، لذلك نضع قاطع عند النقطة (X_1=7) و النقطة (X_2=2) فنجد قيمة دالة الهدف (Z) تساوي 17.4 دولار ، وبالتالي هناك حل صحيح أفضل منها بالقرب من النقطة عند النقطة (c)، وبالتالي نضع قاطع عند النقطة (X_1=3) والنقطة (X_2=6) فنجد قيمة دالة الهدف (Z) تساوي 16.2 دولار.

وبالتالي يكون الحل الأمثل الصحيح (بأعداد صحيحة) هو:

X_1= 3ملغ

X_2= 6ملغ

Z= 16.2

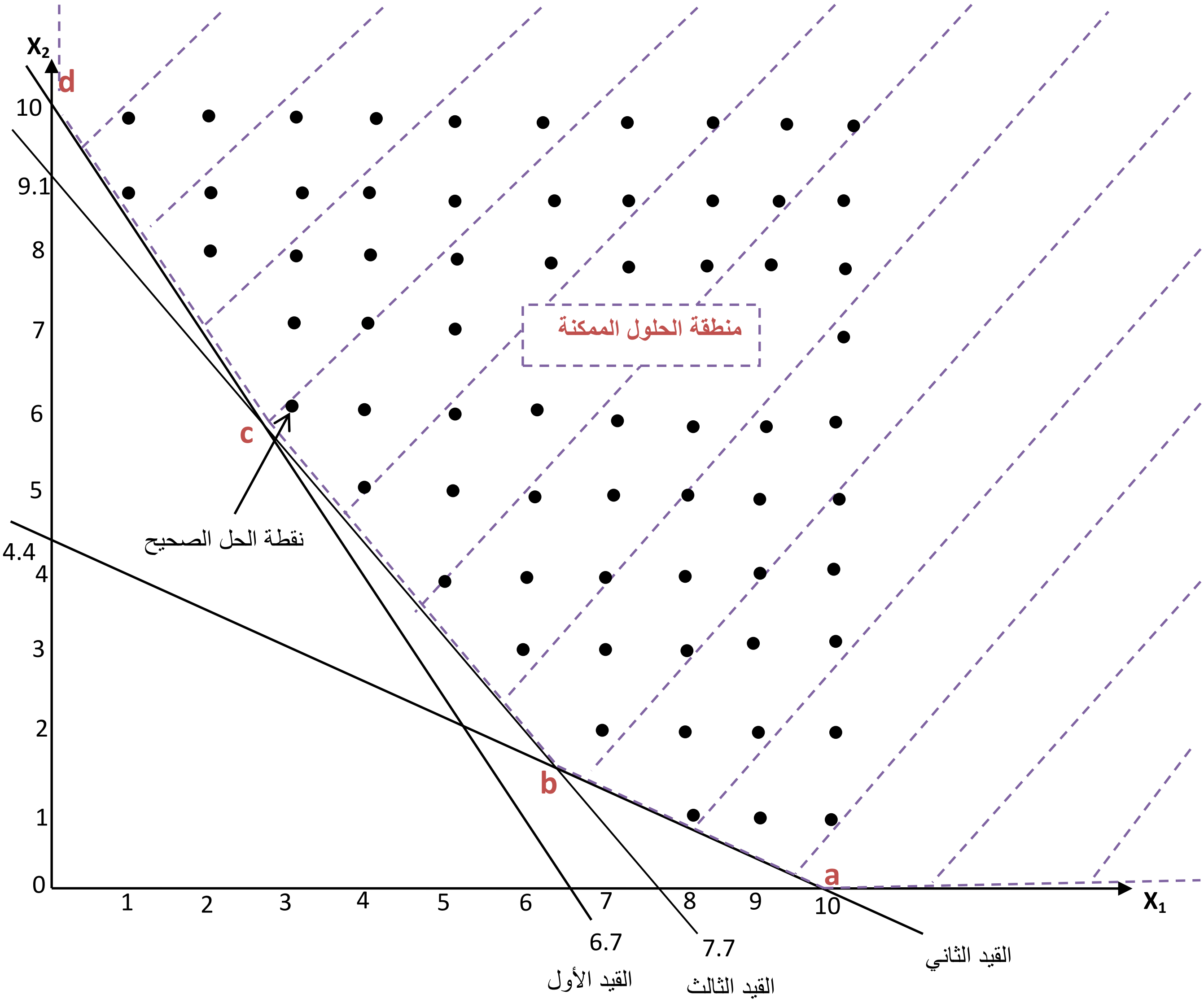
التمرين رقم (2):

نستخدم نفس التمرين رقم واحد، لكن الاختلاف يكون في طريقة الحل كما يلي:

- ما هي عدد الغرامات المصنعة من كل نوع من الأغذية الذي يحقق أقل تكلفة بالطريق البيانية (طريقة الحد والفرع)؟ على أن يكون عددها عدد صحيح.

الحل:

سيكون نفس الحل التغيير يكون فقط في التمثيل البياني عند البحث عن الحل الأمثل الصحيح بطريقة الحد والفرع كما يلي:



كما تم حل هذا التمرين سابقا فإن نقاط الحل كما يلي:

الحل	X_1	X_2	Z
A	10	0	20
B	6.32	1.62	15.39
C	2.86	5.71	15.43
D	0	10	17

الحل الأمثل

من خلال نقاط الحل نجد أن الحل الأمثل عند النقطة (b) لكن قيم المتغيرات (X_1) و(X_2) ليست قيم بأعداد صحيحة، وبالتالي وعند استخدام طريقة الحد والفرع فغننا نحدد جميع النقاط التي تكون ضمن منطقة الحل بحيث تكون قيم المتغيرات(X_1) و(X_2) أعداد صحيحة

(كما هو موضح في التمثيل البياني)، ونجرب هذه النقاط في دالة الهدف(Z) ونختار الأقل قيمة، كما أنه بالإمكان أخذ كامل النقاط أو أخذ النقاط الأقرب للحل الأمثل، لأنه كلما ابتعدنا عن نقاط الحل الامثل كلما زادت قيمة دالة الهدف وبالتالي الابتعاد عن الحل الأمثل، وسنختار النقاط التالية والتي سيكون منها الحل الأمثل بأعداد صحيحة كما يلي:

$(X_1 . X_2)$	$Z=2X_1 + 1.7X_2$
(9 . 1)	Z =19.7
(8 . 1)	Z =17.7
(7 . 2)	Z =17.4
(6 . 3)	Z =17.1
(5 . 4)	Z =16.8
(4 . 5)	Z = 16.5
(3 . 6)	Z =16.2
(3 . 7)	Z = 17.9
(2 . 8)	Z =17.6
(1 . 9)	Z = 17.3

وبالتالي ومن خلال الجدول السابق، يكون الحل الأمثل الصحيح (بأعداد صحيحة) هو:

X_1= 3ملغ

X_2= 6ملغ

Z= 16.2

وهو نفس الحل الذي وجدناه بالطريقة بطريقة المستوى القاطع في التمرين رقم (1).

التمرين رقم (3):

أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

$$\text{Max } Z = 21X_1+11X_2$$

Subject to:

$$7X1+4X_2 \leq 13$$

$X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$ وهي أعداد صحيحة

الحل:

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$\text{Max } Z = 21\,X1 + 11\,X2 + 0\,S1$ $Z-21X_1-11X_2 = 0$

Subject to:

$$7X_1+4X_2+S_1= 13$$

$x1$, $x2$, $S1 \geq 0$

2 – إعداد جدول الحل الأولي:

	X_1	X_2	S_1	الثابت
S_1	7	4	1	13
Z	-21	-11	0	0

العمود المحوري العنصر المحوري السطر المحوري

من خلال جدول الحل الأولي يظهر أن الحل ليس حل أمثل، لأننا انطلقنا من دالة تعظيم (max) وقيم دالة الهدف (Z) فيها قيم سالبة، وبالتالي يجب ادخال أحد المغيرين إلى النموذج،

والقانون يقول يجب ادخال المتغير الذي لديه أكبر قيمة سالبة، وفي هذه الحالة هو المتغير X1 لأن معامله في دالة الهدف (21-)، ويخرج من النموذج المتغير الوحيد S1.

- بالنسبة للسطر X1 نجده بقسمة الصف S1 على العنصر المحوري (7).
- أما عناصر Z الجديدة نجدها بالقاعدة التالية:

Zالجديدة = Zالقديمة – (عنصر Z الواقع في العمود المحوري) (الصف المحوري وهو صف X1 الجديد، أي في الجدول الثاني)

$$
\begin{array}{lcccc}
 & -21 & -11 & 0 & 0 \\
- & & & & \\
 & (-21)[(1) & 4/7 & 1/7 & 13/7\ ] \\
= & -21 & -12 & -3 & -39 \\
\hline
 & 0 & 1 & 3 & 39
\end{array}
$$

فنتحصل على جدول الحل رقم 2 التالي:

	X_1	X_2	S_1	الثابت
X_1	1	4/7	1/7	13/7
Z	0	1	3	39

من خلال الجدول وبما أن قيم معاملات دالة الهدف (Z) موجبة يعني أننا وصلنا إلى الحل الأمثل، وبالتالي قيم المتغيرات ودالة الهدف كما يلي:

$$X_1 = 1.85$$

$$X_2 = 0$$

$$Z = 39$$

صحيح أن هدا هو الحل الامثل للمسألة، لكن المطلوب إيجاد المتغيرات بأعداد صحيحة، وهنا لدينا قيمة المتغير X1 هي 1.85 وهي عدد غير صحيح، بالتالي نذهب للخطوة الثانية وهي تفريع البرنامج الأصلي إلى برنامجين كما يلي:

نلاحظ أن : $1 < X_1 < 2$

وبالتالي استنتاج قيدين هما : $X_1 \leq 1$ $X_1 \geq 2$

وبالتالي بإضافة كل قيد للبرنامج الأصلي نحصل على برنامجين جديدين هما:

البرنامج الأول:

$\text{Max } Z = 21X_1 + 11X_2$

Subject to:

$7X_1 + 4X_2 \leq 13$

$X_1 \leq 1$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

البرنامج الثاني:

$\text{Max } Z = 21X_1 + 11X_2$

Subject to:

$7X_1 + 4X_2 \leq 13$

$X_1 \geq 2$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

هذا البرنامج متناقض، وبالتالي ليس له حل وبالتالي يتم الاستغناء عنه (في حال $X_1=2$ فقط (القيد الثاني) ، فإن القيد الأول يكون $13 \leq 14$ وهذا مستحيل).

وبالتالي نحاول إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الفرعي الأول كما يلي :

$\text{Max } Z = 21X_1 + 11X_2$

Subject to:

$7X_1+4X_2 \leq 13$

$X_1 \leq 1$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$\text{Max } Z = 21 X1 + 11 X2 + 0 S1 + 0 S2$ $\qquad Z-21X_1-11X_2 = 0$

Subject to:

$7X_1+4X_2+S_1= 13$

$X_1 + S_2 = 1$

$x1 , x2, S1, S2 \geq 0$

2 – إعداد جدول الحل الأولي:

المتغير الداخل

	X_1	X_2	S_1	S_2	الثابت	
S_1	7	4	1	0	13	1.85
S_2	1	0	0	1	1	1
Z	-21	-11	0	0	0	/

العنصر المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (1) (جدول الحل الأولي) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم X1 وX2 لكن سيدخل للنموذج المتغير X1 لأن لديه أكبر قيمة سالبة (-21).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر الصف الداخل X1 ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير S2 من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة 1 وهي أقل من 1.85، وبالتالي يخرج S2 من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 2) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف X1 فنجدها بقسمة الصف S2 (الجدول 1) على العنصر المحوري(1) فنتحصل على عناصر السطر X1 (الجدول رقم 2)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (2).
- بالنسبة للصفوف المتبقية (S1,Z) فإننا نجدها بالقانون التالي:

العنصر الصف الجديد= العنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل)X(عناصر الصف المحوري، أي عناصر X1 في الجدول رقم 2)

وبالتالي لدينا قيم السطر S1 وقيم السطر Z وسنجدهم كما يلي:

- S1 الجديدة = S1 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S1 (7)) x (الصف المحوري X1)

$$
\begin{array}{ccccc}
7 & 4 & 1 & 0 & 13 \\
- & & & & \\
(7)[1 & 0 & 0 & 1 & 1\ ] \\
= 7 & 0 & 0 & 7 & 7 \\
\hline
0 & 4 & 1 & -7 & 5
\end{array}
$$

- Z الجديدة= Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z(-21))x (الصف المحوري X1)

$$
\begin{array}{ccccc}
-21 & -11 & 0 & 0 & 0 \\
- & & & & \\
(-21)[1 & 0 & 0 & 1 & 1\ ] \\
= -21 & 0 & 0 & -21 & -21 \\
\hline
0 & -11 & 0 & 21 & 21
\end{array}
$$

بعد حساب جميع الصفوف نتحصل على الجدول رقم (2) التالي:

الجدول رقم (02)

المتغير الخارج

المتغير الداخل

	X_1	X_2	S_1	S_2	الثابت	
S_1	0	4	1	-7	5	1.25
X_1	1	0	0	1	1	غير معرفة
Z	0	-11	0	21	21	/

الصف المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (2) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم X2 الذي سيدخل للنموذج لأنه الوحيد الذي لديه قيمة سالبة (-11).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر العمود الداخل X2 ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير S1 من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة 1.25 وهي القيمة الوحيدة لأن القيمة الأخرى هي قيمة غير معرفة بقسمة 1 على 0، وبالتالي يخرج المتغير S1 من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 3) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف X2 فنجدها بقسمة الصف S1 (الجدول 2) على العنصر المحوري(4) فنتحصل على عناصر السطر X2 (الجدول رقم 3)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (3).
- بالنسبة للصفوف المتبقية (X1,Z) فإننا نجدها بالقانون التالي:

العنصر الصف الجديد= العنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل)$_X$(عناصر الصف المحوري، أي عناصر X2 في الجدول رقم 3)

وبالتالي لدينا قيم السطرX1 وقيم السطر Z وسنجدهم كما يلي:

- X1 الجديدة = X1 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف X1 (0)) x (الصف المحوري X2)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ - & & & & \\ (0)[0 & 1 & 1/4 & -7/4 & 5/4\,] \\ =0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

- Z الجديدة= Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z(-11))x (الصف المحوري X2)

$$\begin{array}{ccccc} 0 & -11 & 0 & 21 & 21 \\ - & & & & \\ (-11)[0 & 1 & 1/4 & -7/4 & 5/4\,] \\ =0 & -11 & -2.75 & 19.25 & -13.75 \\ \hline 0 & 0 & 2.75 & 1.75 & 34.75 \end{array}$$

بعد حساب جميع الصفوف نتحصل على الجدول رقم (3) التالي:

الجدول رقم (03)

	X_1	X_2	S_1	S_2	الثابت
X_2	0	1	1/4	-7/4	1.25
X_1	1	0	0	1	1
Z	0	0	2.75	1.75	34.75

من خلال الجدول رقم (03) يظهر أنه جدول الحل النهائي لأننا وصلنا إلى الحل الأثل لأن قيم دالة الهدف (Z) كلها موجبة (أكبر من أو تساوي الصفر)، وقيم المتغيرات ودالة الهدف كما يلي:

$X_1=1$ $X_2=1.25$ $Z=34.75$

من خلال الحل يتوضح أن قيم المتغير X_2 لا تأخذ قيم صحيحة $X_2=1.25$ وبالتالي :

$$1 < X_2 < 2$$

ويمكننا أن نضيف القيود التالية للبرنامج الفرعي الأول: $X_2 \geq 2$ و $X_2 \leq 1$

وبالتالي فالبرنامج الجديدين المتفرعين عن البرنامج الفرعي الأول هما :

البرنامج الثالث:

Max $Z = 21X_1 + 11X_2$

Subject to:

$7X_1+4X_2 \leq 13$

$X_1 \leq 1$

$X_2 \leq 1$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

البرنامج الرابع:

$$\text{Max } Z = 21X_1 + 11X_2$$

Subject to:

$7X_1+4X_2 \leq 13$

$X_1 \leq 1$

$X_2 \geq 2$

$X_1 ,X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

حل البرنامج الثالث:

وبالتالي نقوم بحل البرنامج الفرعي الثالث التالي والبحث عن الحل الأمثل:

$$\text{Max } Z = 21X_1 + 11X_2$$

Subject to:

$7X_1+4X_2 \leq 13$

$X_1 \leq 1$

$X_2 \leq 1$

$X_1 , X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$Max\ Z = 21X_1+11X_2+0S_1+0S_2+0S_3$$

$$\Longrightarrow\ Max\ Z - 20X_1-2X_2 = 0$$

$7X_1+4X_2+S_1 = 13$........(1)

$X_1+S_2 = 1$ ....(2)

$X_2+S_3 = 1$ ....(3)

2 – إعداد جدول الحل الأولي:

الجدول رقم (01)

المتغير الخارج المتغير الداخل

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الثابت	
S_1	7	4	1	0	0	13	1.85
S_2	1	0	0	1	0	1	1
S_3	0	1	0	0	1	1	غير معرف
Z	-21	-11	0	0	0	0	/

العنصر المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (1) (جدول الحل الأولي) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم X1 وX2 لكن سيدخل للنموذج المتغير X1 لأن لديه أكبر قيمة سالبة (-21).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر الصف الداخل X1 ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير S2 من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود

الداخل نتحصل على قيمة 1 وهي أقل من 1.85 أما القيمة الأخرى فهي غير معرفة، وبالتالي يخرج S2 من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 2) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف X1 فنجدها بقسمة الصف S2 (الجدول 1) على العنصر المحوري وهو (1) فنتحصل على عناصر السطر X1 (الجدول رقم 2)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (2).
- بالنسبة للصفوف المتبقية (S1,S3,Z) فإننا نجدها بالقانون التالي:

عنصر الصف الجديد= عنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل)$_X$(عناصر الصف المحوري، أي عناصر X1 في الجدول رقم (2))

وبالتالي لدينا قيم السطرS1 وقيم السطر S2 وقيم السطر Z سنجدهم كما يلي:

- ➢ S1 الجديدة = S1 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S1 (7)) $_X$ (الصف المحوري X1)
- ➢ S3 الجديدة = S3 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S3 (0)) $_X$ (الصف المحوري X1)
- ➢ Z الجديدة = Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z (21-)) $_X$ (الصف المحوري X1)

بعد القيام بجميع العمليات الحسابية الماضية نتحصل على الجدول رقم (02) التالي:

الجدول رقم (02):

المتغير الخارج المتغير الداخل

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الثابت	
S_1	0	-3	1	-7	0	6	-2
X_1	1	0	0	1	0	1	غير معرف
S_3	0	1	0	0	1	1	1
Z	0	-11	0	21	0	21	/

العنصر المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (2) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم X2 الذي سيدخل للنموذج لأنه الوحيد الذي لديه قيمة سالبة (20-).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر الصف الداخل X2 ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير S3 من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة (1)وهي القيمة الوحيدة، لأن لدينا قيمة غير معرفة بقسمة 1 على 0، وقيمة سالبة (2-)، وهما يلغيان من الاعتبار في تحديد المتغير الداخل إلى النموذج، وبالتالي يخرج المتغير S3 من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 3) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف X2 فنجدها بقسمة الصف S3 (الجدول 2) على العنصر المحوري(1) فنتحصل على عناصر السطر X1 (الجدول رقم 3)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (3).
- بالنسبة للصفوف المتبقية (S1,X1,Z) فإننا نجدها بالقانون التالي:

عنصر الصف الجديد= عنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل)$_X$(عناصر الصف المحوري، أي عناصر X2 في الجدول رقم 3)

وبالتالي لدينا قيم السطرS1 وقيم السطر X1 وقيم السطر Z سنجدهم كما يلي:

- S1 الجديدة = S1 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S1 (3-)) $_X$ (الصف المحوري X2)
- X1 الجديدة = X1 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف X1 (0)) $_X$ (الصف المحوري X2)
- Z الجديدة = Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z (11-)) $_X$ (الصف المحوري X2)

بعد القيام بجميع العمليات الحسابية الماضية نتحصل على الجدول رقم (03) التالي:

الجدول رقم (03):

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الثابت
S_1	1	0	1	-7	3	8
X_1	0	0	0	1	0	1
X_2	0	1	0	0	1	1
Z	0	0	0	21	11	33

من خلال الجدول رقم (03) يظهر أنه جدول الحل النهائي لأننا وصلنا إلى الحل الأمثل لأن قيم دالة الهدف (Z) كلها موجبة (أكبر من أو تساوي الصفر)، وقيم المتغيرات ودالة الهدف كما يلي:

$X_1=1$ $S_1=8$

$X_2=1$

$Z=33$

وهو الحل الأمثل الصحيح للنموذج الأصلي، بحيث نلاحظ أن قيم المتغيرات X1 وX2 أعداد صحيحة، وهذا هو المطلوب، لكن يجب أن نقوم بحل البرنامج رقم (4)، فإذا كان حل البرنامج رقم (4) يعطينا أعدادا غير صحيحة فإننا سنعتمد حل البرنامج رقم (3)، أما إذا كان حل البرنامج رقم (4) أعطانا أعدادا صحيحة فإننا سنقارنه بحل البرنامج رقم (3) ونختار الأفضل يعني قيمة دالة الهدف (Z) الأكبر لأننا نبحث عن تعظيم دالة الهدف.

حل البرنامج الرابع:

$\text{Max } Z = 21X_1 + 11X_2$

Subject to:

$7X_1+4X_2 \leq 13$

$X_1 \leq 1$

$X_2 \geq 2$

$X_1 ,X_2 \geq 0$ وهي صحيحة

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$\text{Max } Z = 21X_1+11X_2+0S_1+0S_2+0S_3-MA_1$

$\Longrightarrow \text{Max } Z - 21X_1-11X_2+A_1M = 0$

$7X_1+4X_2+S_1 = 13$........(1)

$X_1+S_2 = 1$ ....(2)

$X_2-S_3+A_1= 2$ ....(3)

من المعادلة رقم (3) نستخرج قيمة A فنجدها تساوي: $(A_1=2-X_2+S_3)$

نعوضها في دالة الهدف فنتحصل على :

$$Max\ Z - 21X_1 - 11X_2 + M(2\text{-}X_2\text{+}S_3)$$

$$Max\ Z - 21X_1 - 11X_2 + 2M - MX_2 + MS_3 = 0$$

$$Max\ Z - 21X_1 + X_2(\text{-}11\text{-}M) + MS_3 = \text{-}2M$$

2 – إعداد جدول الحل الأولي:

الجدول رقم (01)

المتغير الخارج المتغير الداخل

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	الثابت	
S_1	7	4	1	0	0	0	13	3.25
S_2	1	0	0	1	0	0	1	غير معرفة
A_1	0	1	0	0	-1	1	2	2
Z	-21	-11-M	0	0	M	0	-2M	/

العنصر المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (1) (جدول الحل الأولي) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم X1 وX2 لكن سيدخل للنموذج المتغير X2 لأن لديه أكبر قيمة سالبة (-11-M).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر الصف الداخل X2 ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير A1 من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود

الداخل نتحصل على قيمة 2 وهي أقل من 3.25 أما القيمة الأخرى فهي غير معرفة، وبالتالي يخرج A1 من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 2) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف X2 فنجدها بقسمة الصف A1 (الجدول 1) على العنصر المحوري وهو (1) فنتحصل على عناصر السطر X2 (الجدول رقم 2)، وهذا الصف نسميه بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (2).
- بالنسبة للصفوف المتبقية (S1;S2,Z) فإننا نجدها بالقانون التالي:

عنصر الصف الجديد= عنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل)$_X$(عناصر الصف المحوري، أي عناصر X2 في الجدول رقم (2))

وبالتالي لدينا قيم السطرS1 وقيم السطر S2 وقيم السطر Z سنجدهم كما يلي:

- S1 الجديدة = S1 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S1 (4)) $_X$ (الصف المحوري X2)
- S2 الجديدة = S2 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S2 (0)) $_X$ (الصف المحوري X2)
- Z الجديدة = Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z (M-11-)) $_X$ (الصف المحوري X2)

بعد القيام بجميع العمليات الحسابية الماضية نتحصل على الجدول رقم (02) التالي:

الجدول رقم (02):

المتغير الخارج المتغير الداخل

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	الثابت	
S_1	7	0	1	0	4	-4	5	0.71
S_2	1	0	0	1	0	0	1	1
X_2	0	1	0	0	-1	1	2	غير معرفة
Z	-21	0	0	0	-11	11+M	22	/

العنصر المحوري

الملاحظ من خلال الجدول رقم (2) أن الحل يمكن تحسينه لأنه ليس حل أمثل وذلك لأننا انطلقنا من دالة الهدف (max) ومعاملات دالة الهدف في الجدول بها قيم سالبة، وهي قيم X1 و S3 لكن الذي سيدخل للنموذج هو X1 لأن لديه أكبر قيمة سالبة (20-)، لأن S3 قيمته في دالة الهدف (11-).

أما المتغير الخارج فنحدده بقسمة الثابت على عناصر الصف الداخل X1 ونخرج الأقل القيمة، ففي هذه الحالة يخرج المتغير S1 من النموذج لأننا عندما نقسم قيم الثوابت على عناصر العمود الداخل نتحصل على قيمة (0.71)وهي أقل من القيمة الأخرى (1) أما بالنسبة للقيمة الأخرى فهي غير معرفة بقسمة 2 على 0، وبالتالي يخرج المتغير S1 من النموذج.

أما بالنسبة للقيم الجدول الجديد (الجدول رقم 3) فنجدها كما يلي:

- بالنسبة لعناصر الصف X1 فنجدها بقسمة الصف S1 (الجدول 2) على العنصر المحوري(7) فنتحصل على عناصر السطر X1 (الجدول رقم 3)، وهذا الصف نسميه

بالصف المحوري لأننا قسمناه على العنصر المحوري، والذي سنحتاجه لإيجاد باقي قيم الجدول رقم (3).

- بالنسبة للصفوف المتبقية (S2,X2,Z) فإننا نجدها بالقانون التالي:

عنصر الصف الجديد= عنصر الصف القديم – (عنصر الصف المراد حسابه الواقع في العمود الداخل)x(عناصر الصف المحوري، أي عناصر X1 في الجدول رقم 3)

وبالتالي لدينا قيم السطرS2 وقيم السطر X2 وقيم السطر Z سنجدهم كما يلي:

- S2 الجديدة = S2 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف S2 (1)) x (الصف المحوري X1)
- X2 الجديدة = X2 القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف X2 (0)) x (الصف المحوري X1)
- Z الجديدة = Z القديمة – (عنصر العمود الداخل الواقع في الصف Z (21-)) x (الصف المحوري X1)

بعد القيام بجميع العمليات الحسابية الماضية نتحصل على الجدول رقم (03) التالي:

الجدول رقم (03):

الثابت	A_1	S_3	S_2	S_1	X_2	X_1	
5/7	-4/7	4/7	0	1/7	0	1	X_1
2/7	4/7	-4/7	1	-1/7	0	0	S_2
2	1	-1	0	0	1	0	X_2
37	-1+M	1	0	3	0	0	Z

من خلال الجدول رقم (03) يظهر أنه جدول الحل النهائي لأننا وصلنا إلى الحل الأمثل لأن قيم دالة الهدف (Z) كلها موجبة (أكبر من أو تساوي الصفر)، وقيم المتغيرات ودالة الهدف كما يلي:

$X_1=5/7$ $S_2=2/7$

$X_2=2$

$Z=37$

بعد حل البرنامج الرابع نلاحظ أن المتغير X1 لديه قيمة غير صحيحة، ونحن نبحث عن المتغيرات بأعداد صحيحة، وبالتالي وفي هذه الحالة سنعتبر حل البرنامج رقم (3) هو الحل الأمثل الصحيح للنموذج الأصلي، بحيث نلاحظ أن قيم المتغيرات X1 وX2 أعداد صحيحة، والتي كانت كما يلي:

$X_1=1$ $S_1=8$

$X_2=1$

$Z=33$

وهذا هو المطلوب.

المحور الرابع:

تطبيقات حول نماذج شبكات الأعمال

(التخطيط الشبكي)

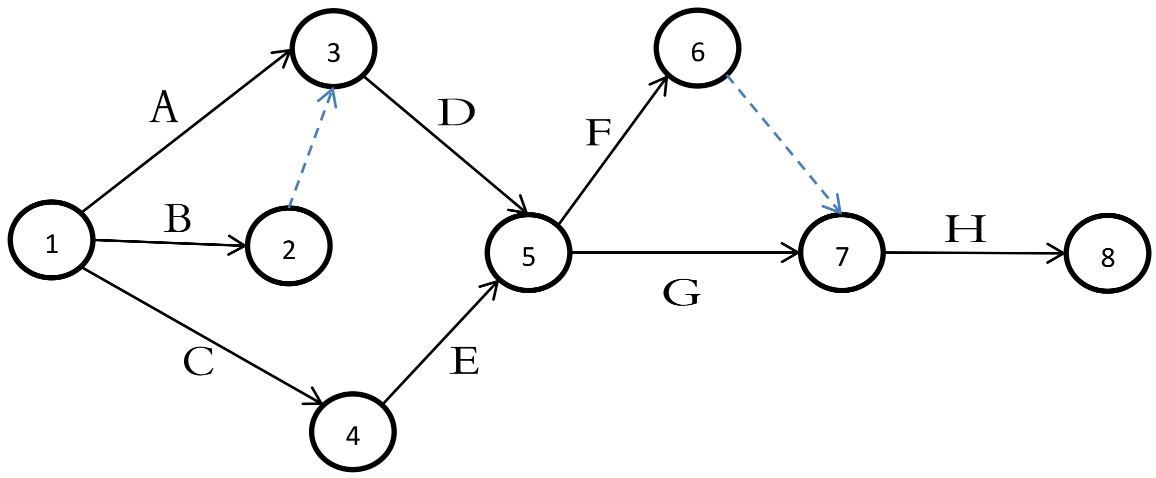
في هذا المحور سنتطرق إلى تمرينات مع الحلول النموذجية عن المحور المتعلق بنماذج الشبكات سواء ما تعلق بشبكات الوقت المحدد أو المعلوم من جهة أو شبكات الوقت الاحتمالي من جهة ثانية وكيفية الوصول إلى الحل الأمثل والمقصود به الوقت الامثل الانجاز المشاريع والتحكم فيها.

التمرين رقم (1):

أرسم المخطط الشبكي لتمثيل النشاطات الآتية:

النشاط	A	B	C	D	E	F	G	H
النشاط السابق	/	/	/	A,B	C	D,E	D,E	F, G

الحل:

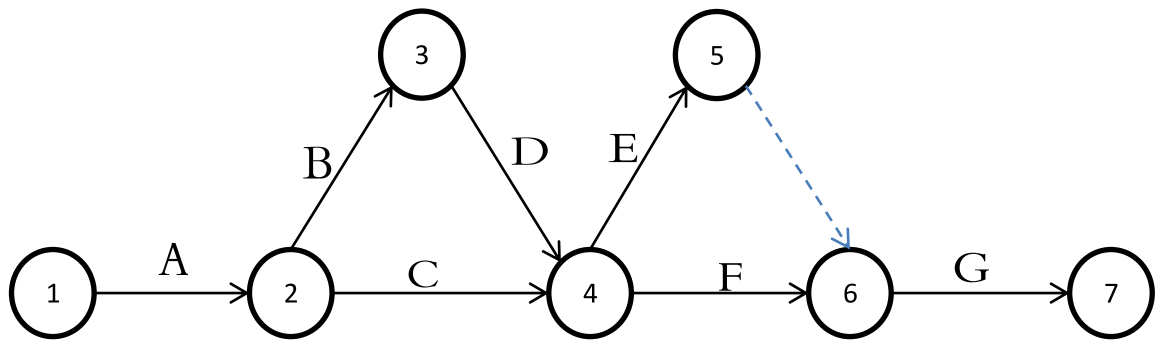


التمرين رقم (2):

أرسم شبكة الأعمال الآتية:

النشاط السابق	النشاط
/	A
A	B
A	C
B	D
C,D	E
C,D	F
E,F	G

الحل:



التمرين رقم (3):

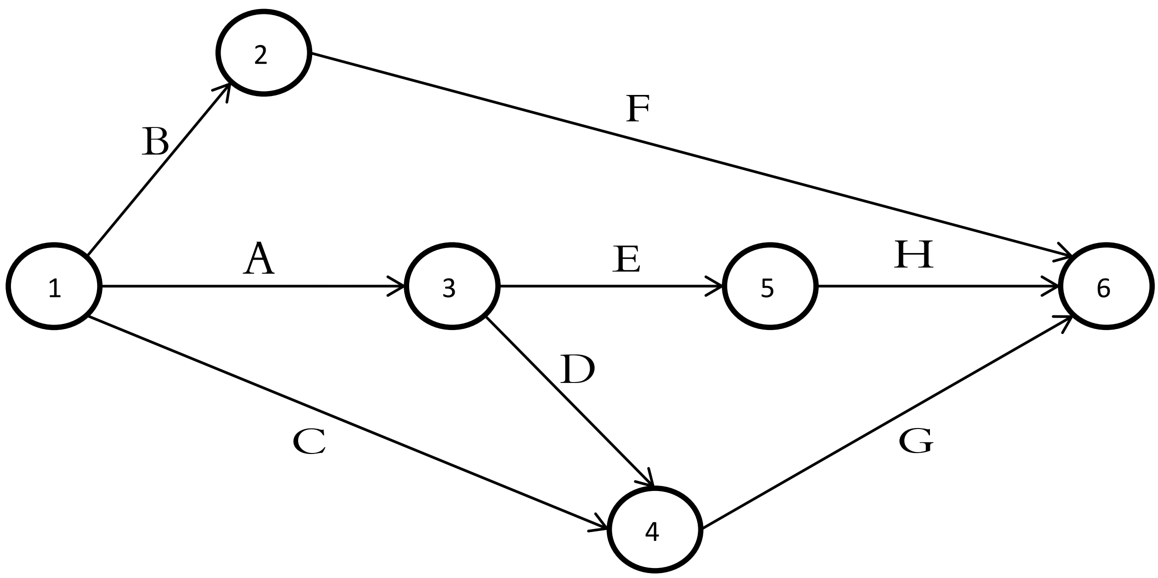
أحد المشروعات يحتوي على الوظائف من A إلى H حيث:

1- C,B,A النشاطات المبتدئ بها المشروع.

2- تتابع الوظائف.

- D,E يجب أن تتبع A
- F يجب أن تتبع B
- G يجب أن تتبع C,D
- H يجب أن تتبع E

الحل:

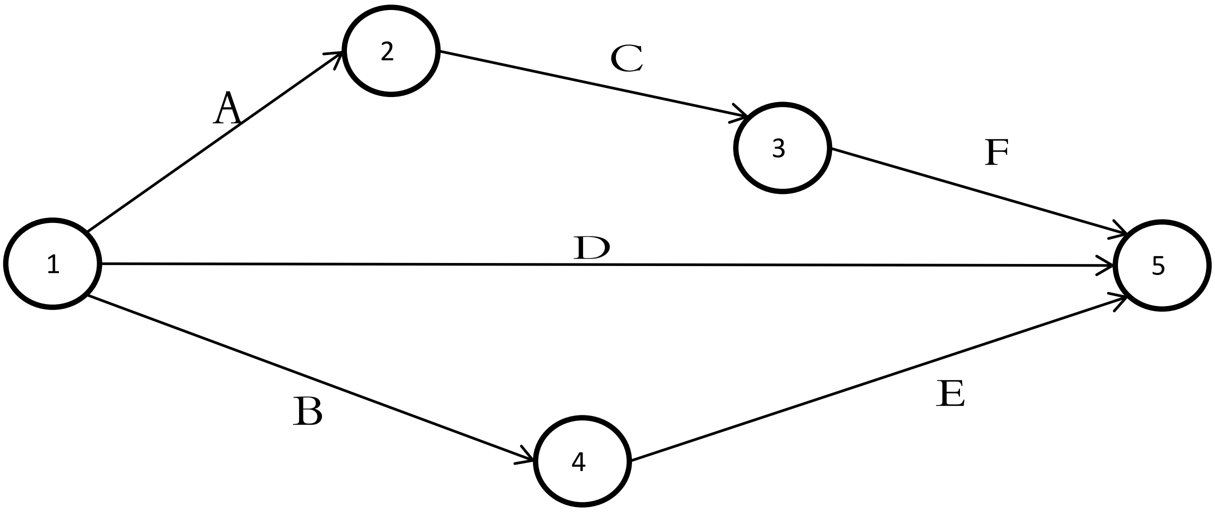


التمرين رقم (4): المشروع التالي ممثل حسب المعطيات التالية:

النشاط	A	B	C	D	E	F
النشاط السابق	/	/	A	/	B	C

المطلوب: تمثيل المشروع شبكيا.

الحل:



التمرين رقم (5): لدينا المشروع التالي ويتكون من الأنشطة التالية:

الوقت اللازم	النشاط
04	1.2
03	2.3
06	2.4
05	3.4
10	3.5
08	4.6
06	4.7
07	5.8
08	5.9
03	6.8
06	7.8
44	7.9
04	8.9
02	9.10

المطلوب:

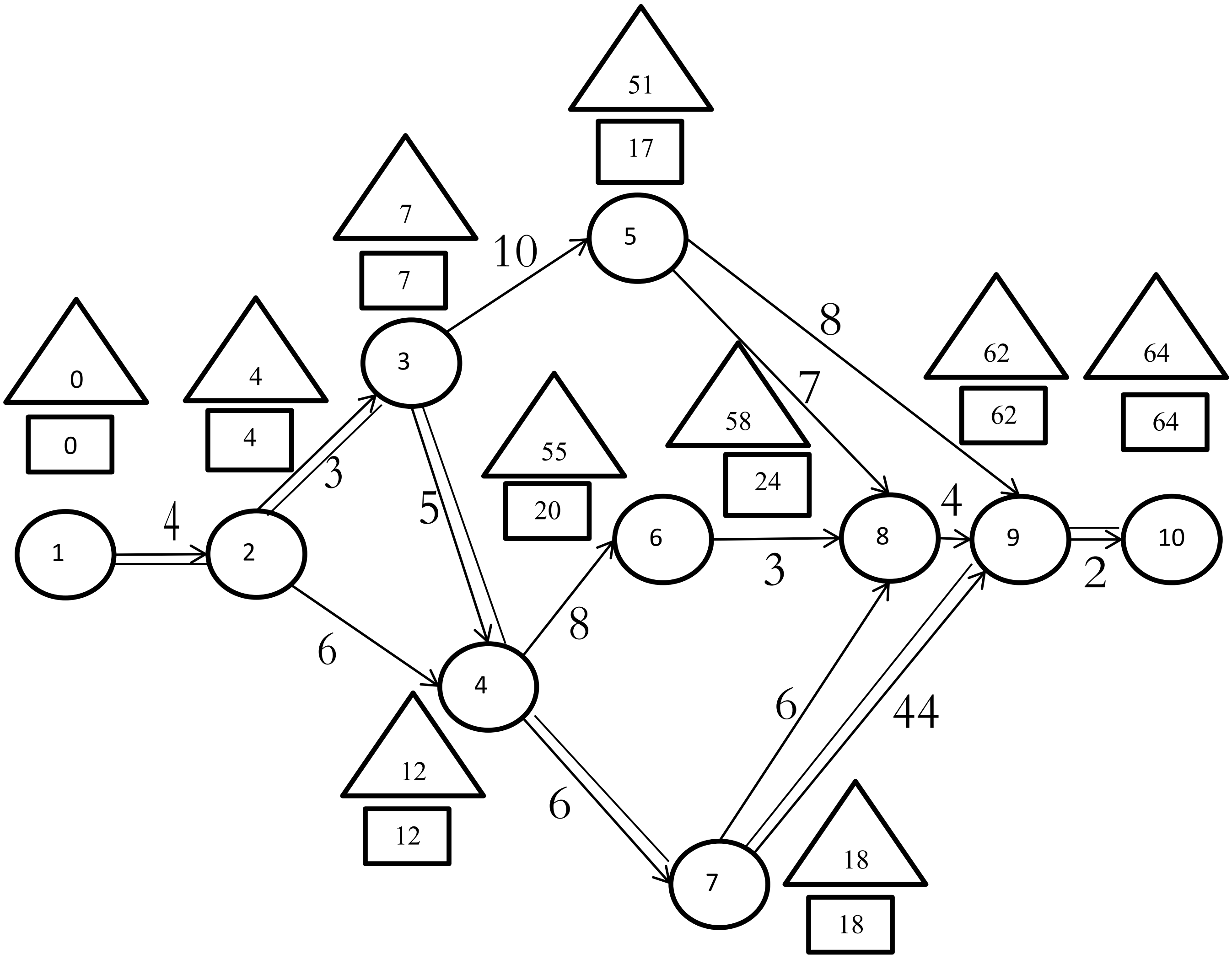
1. إعداد شبكة الأعمال لهذا المشروع؟

2. تحديد المسار الحرج؟

3. أوجد المرونة الكلية والمرونة الحرة، وماذا نقصد بكليهما؟

الحل:

1. رسم الشبكة:



2. تحديد المسار الحرج:

ــ من أجل ذلك نحسب وقت البداية المبكرة (ES) ووقت النهاية المتأخرة (LC) وفق القوانين التالية: $ES_j=Max_i\ (ES_i+Dij)$

$$LC_i = Min_j\ (LC_j + Dij)$$

(بالنسبة للحسابات الأمامية والخلفية أنظر الشبكة)

ــ بالنسبة للمسار الحرج يجب أن تتوفر فيه الشروط التالية:

$ECi = LCi$

$ESj = LCj$

$ESJ - ESi = LCj - LCi = Dij$

ونجدها تتوفر في الأنشطة التالية والتي تمثل المسار الحرج:

(1-2) (2-3) (3-4) (4-7) (7-9) (9-10)

3.ايجاد المرونة الكلية (TF) والمرونة الحرة (FF): ونجدهم بالقوانين التالية:

$$FF = Esj - ESi - Dij$$

$$TF = LCj - ESi - Dij$$

النشاط	Dij	ESi	ESj	LCj	FF	TF	نوع النشاط
1-2	4	0	4	4	0	0	حرج
2-3	3	4	7	7	0	0	حرج
2-4	6	4	12	12	2	2	مرن
3-4	5	7	12	12	0	0	حرج
3-5	10	7	17	51	0	34	مرن
4-6	8	12	20	55	0	35	مرن
4-7	6	12	18	18	0	0	حرج
5-8	7	17	24	58	0	34	مرن
5-9	8	17	62	62	37	37	مرن

6-8	3	20	24	58	1	35	مرن
7-8	6	18	24	58	0	34	مرن
7-9	44	18	62	62	0	0	حرج
8-9	4	24	62	62	34	34	مرن
9-10	2	62	64	64	0	0	حرج

- المقصود بالمرونة الحرة هي مقدار التأخر في النشاط الذي يؤثر في النشاط الموالي فقط.
- أما المقصود بالمرونة الكلية هي مقدار التأخر في النشاط الذي يؤثر على تأخر المشروع ككل.

التمرين رقم (6):

النشاط	A	B	C	D	E	F	G	H
النشاط السابق	-----	----	----	A/B	C	D/E	D/E	F/G
الوقت بالشهر	2	5	3	2	4	8	4	7

المطلوب:

1ـ أرسم شبكة الأعمال؟

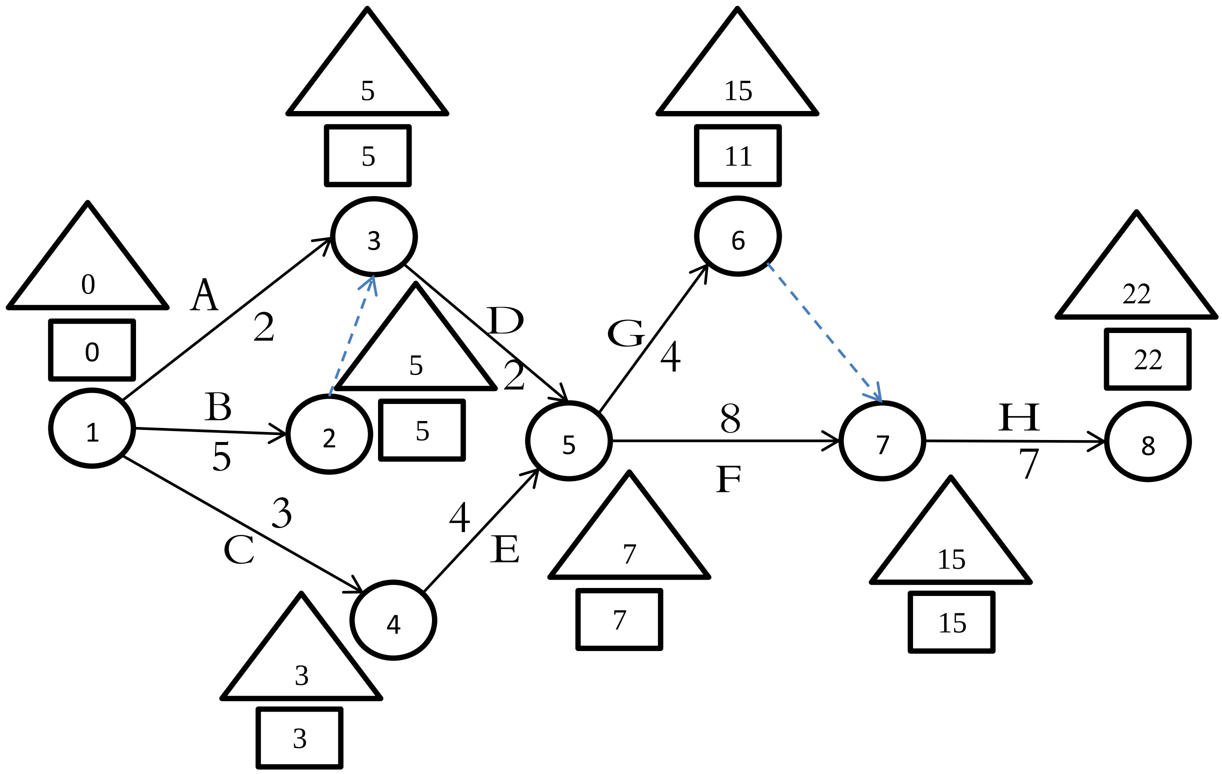
2ـ حدد المسار الحرج من خلال الفائض الزمني؟

3ـ إذا تأخر النشاط A ب 3 أشهر، هل يؤثر ذلك على النشاط الموالي؟ وهل يؤثر ذلك على نهاية المشروع ككل؟

4ـ إذا تأخر النشاط C بيوم واحد فقط، هل يؤثر ذلك على تأخر المشروع؟

الحل:

1. رسم الشبكة:



2. تحديد المسار الحرج:

النشاط	المسار	Dij	ESi	ESj	LCj	FF	TF	نوع النشاط
A	1-3	2	0	5	5	3	3	مرن
B	1-2	5	0	5	5	0	0	حرج
C	1-4	3	0	3	3	0	0	حرج
D	2-5	2	5	7	7	0	0	حرج
E	4-5	4	3	7	7	0	0	حرج
F	5-7	8	7	15	15	0	0	حرج
G	5-6	4	7	11	15	0	4	مرن
H	7-8	7	15	22	22	0	0	حرج

وبالتالي الأنشطة الحرجة هي: (B) (C) (D) (E) (F) (H)

نلاحظ في هذه الشبكة بالنسبة للمسار الحرج لدينا مسارين هما:

المسار الحرج الأول هو: (B) (D) (F) (H)

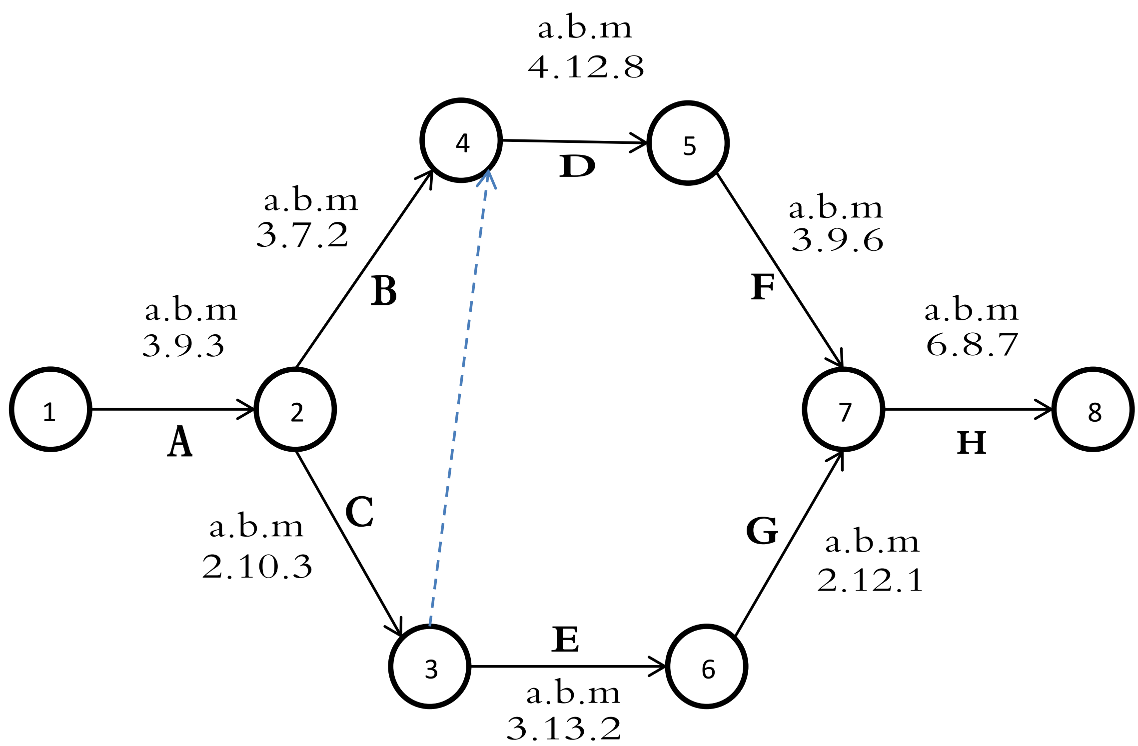
المسار الحرج الثاني هو: (C) (E) (F) (H)

وهذه الحالة نتيجة أن مجوع وقت النشاطين (D) و (B) يساوي مجموع وقت النشاطين (E) و(C) ويساوي كلا المجموعين 7 أشهر.

3.إذا تأخر النشاط (A) بـــ 3 أشهر فإنه لا يؤثر على النشاط الموالي لأن (FF=3)، ولا يؤثر كذلك على تأخر المشروع ككل لأن (TF=3).
4.إذا تأخر النشاط (C) بيوم واحد فقط فغنه يؤثر على نهاية أو تأخر المشروع لأنه نشاط حرج و (TF=0).

التمرين رقم (7):

لدينا شبكة الأعمال التالية، مع العلم أن كل نشاط له ثلاثة أزمنة مقدرة، أحسب احتمال انجاز هذا المشروع في 34 يوم.



الحل: من أجل معرفة احتمال انجاز المشروع في 34 يوم نتبع الخطوات التالية:

1.حساب الوقت الطبيعي: عن طريق القانون التالي:

$$T = \frac{a+4m+b}{6}$$

$$TA = \frac{3+(4\times3)+9}{6} = 4 \quad TB = \frac{3+(4\times2)+7}{6} = 3$$

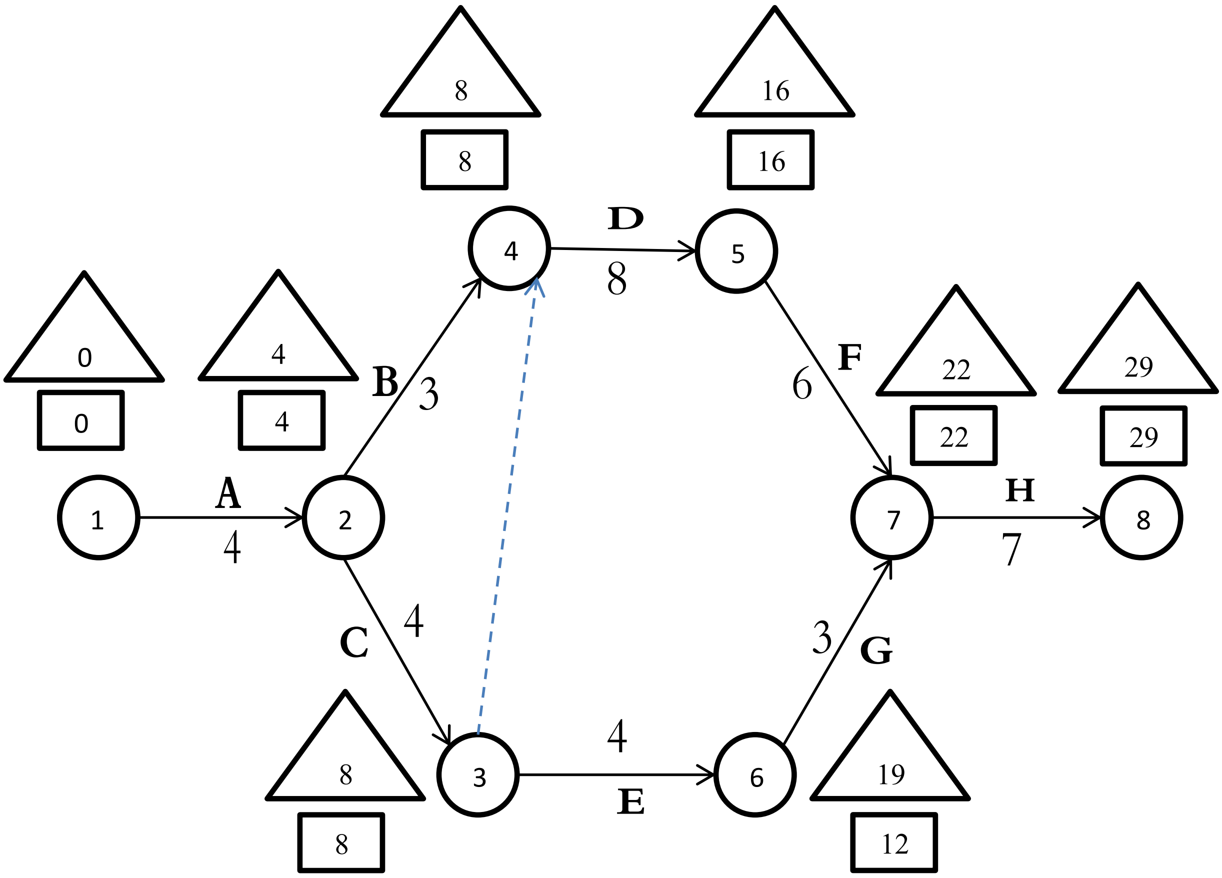
$$TC = \frac{2+(4\times3)+10}{6} = 4 \quad TD = \frac{4+(4\times8)+12}{6} = 8$$

$$TE = \frac{3+(4\times2)+13}{6} = 4 \quad TF = \frac{3+(4\times6)+9}{6} = 6$$

$$TG = \frac{2+(4\times1)+12}{6} = 3 \quad TH = \frac{6+(4\times7)+8}{6} = 7$$

ثم نضع الأرقام الخاصة بالوقت على رسم الشبكة:

2.رسم الشبكة:



3.تحديد المسار الحرج:

من أجل ذلك نحسب وقت البداية المبكرة (ES) ووقت النهاية المتأخرة (LC) وفق القوانين التالية:

$$ES_j=Max_i\ (ES_i+Tij)$$

$$LC_i=Min_j\ (LC_j+Tij)$$

(بالنسبة للحسابات الأمامية والخلفية أنظر الشبكة)

ـــ بالنسبة للمسار الحرج يجب أن تتوفر فيه الشروط التالية:

ECi=LCi

ESj=LCj

ESJ-ESi=LCj-LCi= Tij

وبالتالي المسار الحرج يتكون من الأنشطة (H) (F) (D) (C) (A)، مع العلم أن النشاط (C) متصل مباشرة بالنشاط (D)، أما النشاط الوهمي فهو لتسهيل الرسم فقط وهو غير موجود في الواقع.

4. حساب احتمال انجاز المشروع في 34 يوم:

ونجده عن طريق القانون التالي:

$$P(z \le t) = \frac{St-E(u)}{\sqrt{V}}$$

بحيث:

ST: هو الوقت الذي نريد أن نعرف احتمال انجاز المشروع فيه، وهو 34 يوم.

E(u): هو مجموع أوقات الأنشطة الحرجة، أو وقت المسار الحرج ، وهو 29 يوم.

$\sqrt{V}$: هو الانحراف المعياري لمجموع الأنشطة الحرجة فقط.

قبل ذلك نحسب تباين الأنشطة الحرجة بالقانون التالي $V=(\frac{b-a}{6})^2$

$$VA = \left(\frac{9-3}{6}\right)^2 = 1 \qquad VC = \left(\frac{10-2}{6}\right)^2 = 1.77$$

$$VD = \left(\frac{12-4}{6}\right)^2 = 1.77 \qquad VF = \left(\frac{9-3}{6}\right)^2 = 1$$

$$VH = \left(\frac{8-6}{6}\right)^2 = 0.11$$

$\sum V = V_A+V_C+V_D+V_F+V_H = 5.65 \qquad \sqrt{V} = \sqrt{5.65} = 2.37$

نحسب الآن احتمال انجاز المشروع في 34 يوم، ونطبق القانون نجد:

$$P(z \leq 34) = \frac{34-29}{2.37} = 2.10$$

من خلال جدول التوزيع الطبيعي نجد أن احتمال انجاز المشروع في 34 يوم هو 98.214%

التمرين رقم (8):

النشاط	النشاط السابق	الزمن التفاؤلي	الزمن الأكثر احتمالا	الزمن التشاؤمي
A	—	42	60	78
B	A	42	60	78
C	A	20	30	52
D	B	9	18	27
E	C/D	10	20	42
F	C/D	30	50	70
G	E/F	9	18	27

المطلوب:

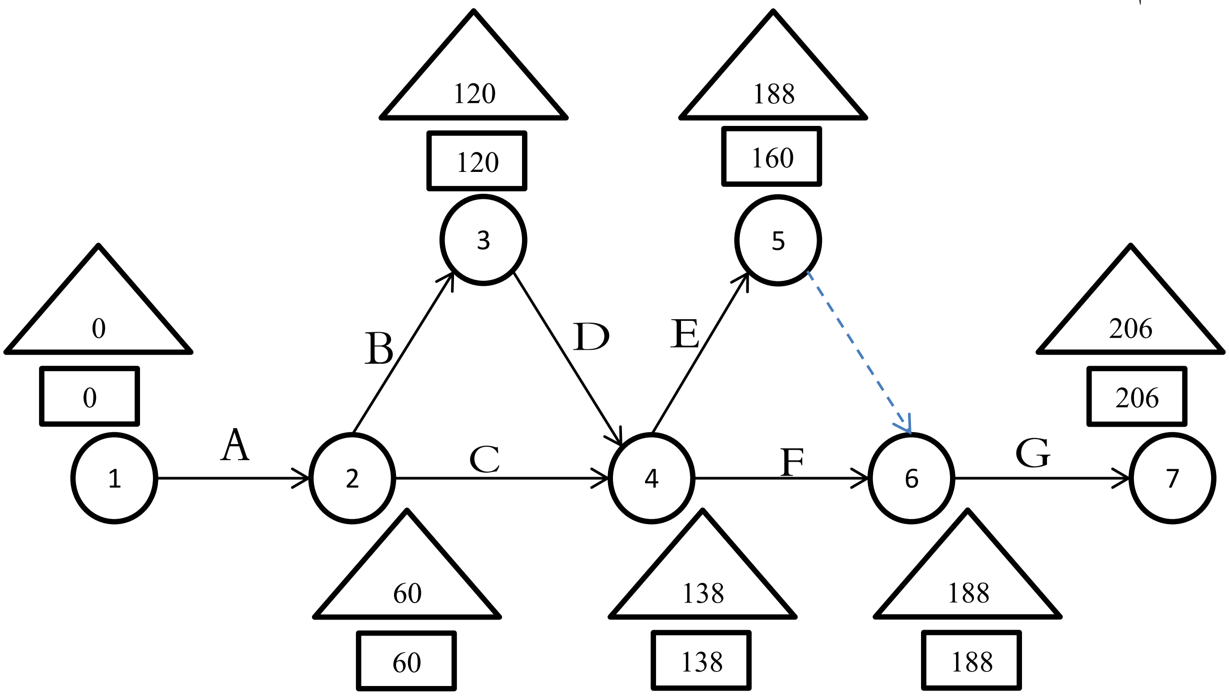
1ـ أوجد احتمال انجاز المشروع في الفترة الممتدة بين 200 يوم و 210 أيام ؟

2ـ أوجد احتمال انجاز المشروع في أكثر من 208 يوم؟

الحل:

من أجل حساب احتمال انجاز المشروع في مدة معينة يجب المرور بعديد الخطوات أولا وهي:

1. رسم الشبكة:



2. حساب الوقت الطبيعي: عن طريق القانون التالي:

$$T = \frac{a+4m+b}{6}$$

$$TA = \frac{42 + (4 \times 60) + 78}{6} = 60 \qquad TB = \frac{42 + (4 \times 60) + 78}{6} = 60$$

$$TC = \frac{20 + (4 \times 30) + 52}{6} = 32 \qquad TD = \frac{9 + (4 \times 18) + 27}{6} = 18$$

$$TE = \frac{10 + (4 \times 20) + 42}{6} = 22 \qquad TF = \frac{30 + (4 \times 50) + 70}{6} = 50$$

$$TG = \frac{9 + (4 \times 18) + 27}{6} = 18$$

ثم نضع الأرقام الخاصة بالوقت على رسم الشبكة.

3. تحديد المسار الحرج:

من أجل ذلك نحسب وقت البداية المبكرة (ES) ووقت النهاية المتأخرة (LC) وفق القوانين التالية:

$ES_j = Max_i\ (ES_i + Tij)$

$LC_i = Min_j\ (LC_j + Tij)$

(بالنسبة للحسابات الأمامية والخلفية أنظر الشبكة)

ـــ بالنسبة للمسار الحرج يجب أن تتوفر فيه الشروط التالية:

ECi=LCi

ESj=LCj

ESJ-ESi=LCj-LCi= Tij

وبالتالي المسار الحرج يتكون من الأنشطة (G) (F) (D) (B) (A)

4. حساب احتمال انجاز المشروع في مدة زمنية معينة أو فترة معينة نجده باستخدام القانون التالي:

$$P(z \leq t) = \frac{St - E(u)}{\sqrt{V}}$$

بحيث:

ST: هو الوقت الذي نريد أن نعرف احتمال انجاز المشروع فيه، وقد يكون فترة من إلى زمن معين.

E(u): هو مجموع أوقات الأنشطة الحرجة، أو وقت المسار الحرج ، وهو 206 يوم في هذا التمرين.

$\sqrt{V}$: هو الانحراف المعياري لمجموع الأنشطة الحرجة فقط.

قبل ذلك نحسب تباين الأنشطة الحرجة بالقانون التالي $V = (\frac{b-a}{6})^2$

$$VA = \left(\frac{78-42}{6}\right)^2 = 36 \qquad VB = \left(\frac{78-42}{6}\right)^2 = 36$$

$$VD = \left(\frac{27-9}{6}\right)^2 = 9 \qquad VF = \left(\frac{70-30}{6}\right)^2 = 44.4$$

$$VG = \left(\frac{27-9}{6}\right)^2 = 9$$

$\sum V = V_A+V_B+V_D+V_F+V_G = 134.4$ $\quad \sqrt{V} = \sqrt{134.4} = 11.59$

نحسب الآن الاحتمالات الواردة في أسئلة التمرين، وهما احتمالان كما يلي:

1.ايجاد احتمال انجاز المشروع في الفترة الممتدة بين 200 يوم و210 أيام ؟
في هذه الحالة نجد احتمال انجاز المشروع في 200 يوم، ثم نجد احتمال انجاز المشروع في 210 يوم، ثم نحسب الفرق بين النسبتين كما يلي:

- احتمال انجاز المشروع في 200 يوم:

$$P(Z \leq 200) = \frac{200-206}{11.59} = -0.51$$

من خلال جدول التوزيع الطبيعي فإن هذه القيمة (0.30503) وبالتالي احتمال انجاز المشروع في 200 يوم هو 30.503%

- احتمال انجاز المشروع في 210 يوم:

$$P(Z \leq 210) = \frac{210-206}{11.59} = 0.34$$

من خلال جدول التوزيع الطبيعي فإن هذه القيمة (0.63307) وبالتالي احتمال انجاز المشروع في 210 يوم هو 63.307%

وبالتالي احتمال انجاز المشروع في الفترة بين 200 و210 يوم هي الفرق بين النسبتين السابقتين كما يلي:

$$P(200 \leq Z \leq 210) = 0.63307 - 0.30503 = 0.32804$$

وبالتالي احتمال انجاز المشروع في الفترة ما بين 200 يوم و210 يوم هو 32.804%

2. ايجاد احتمال انجاز المشروع في أكثر من 208 يوم؟

في هذه الحالة نجد احتمال انجاز المشروع في 208 يوم، وبما أن السؤال هو البحث عن احتمال انجاز المشروع في أكثر من 208 يوم، فإنه سيكون الاحتمال العكسي للاحتمال الأول كما يلي:

- نحسب أولا احتمال انجاز المشروع في 208 يوم:

$$P(Z \leq 208) = \frac{208 - 206}{11.59} = 0.17$$

من خلال جدول التوزيع الطبيعي فإن هذه القيمة (0.56749) وبالتالي احتمال انجاز المشروع في 208 يوم هو 56.749%

- ثانيا نرجع للسؤال وهو احتمال انجاز المشروع في أكثر من 208 يوم:

$$P(Z \geq 208) = 1 - P(Z \leq 208)$$
$$P(Z \geq 208) = 1 - 0.56749 = 0.4325$$

يعني احتمال انجاز المشروع في أكثر من 208 يوم هو 43.25%

قائمة المراجع

1- أكرم مُحَمَّد عرفان المهتدي، **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية (بحوث العمليات)**، الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2010م/1431هـ.

2- حمدي طه، **مقدمة في بحوث العمليات** ، الجزء الأول النماذج المحددة، ترجمة أحمد حسين علي حسين، دار المريخ للنشر، الرياض، المملكة العربية السعودية، بدون تاريخ.

3- حمدي طه، **مقدمة في بحوث العمليات** ، الجزء الثاني النماذج الاحتمالية، ترجمة أحمد حسين علي حسين، دار المريخ للنشر، الرياض، المملكة العربية السعودية، بدون تاريخ.

4- دلال صادق الجواد وحميد ناصر الفتال، **بحوث العمليات**، الطبعة العربية، دار اليازوري للنشر، عمان، الأردن، 2008.

5- رابح بوقرة، **بحوث العمليات**، الجزء الأول، جامعة المسيلة، الجزائر، 2010/2009.

6- رابح بوقرة، **بحوث العمليات – مدخل لاتخاذ القرارات**، الجزء الثاني، جامعة المسيلة، الجزائر، 2012.

7- فتحي خليل حمدان، **بحوث العمليات – مع تطبيقات باستخدام الحاسوب** ، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2010.

8- مُحَمَّد راتول، **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،2006 .

9- مُحَمَّد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، أحمد شهاب الحمداني، **بحوث العمليات**، الطبعة الثانية ، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2011.

10- مُحَمَّد عبيدات، **الأساليب الكمية في إتخاذ القرار**، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2006.

11- مُحَمَّد الطراونة وسليمان عبيدات، **مقدمة في بحوث العمليات**، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر، عمان، الأردن، 2009.

12- منعم زمزير الموسوي، **بحوث العمليات – مدخل علمي لإتخاد القرارات**، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2009.

13- اليمين فالته، **بحوث العمليات**، الجزء الأول، دار إيتراك للطباعة والنشر والتوزيع، القاهرة، مصر، 2006.