الجمهورية الجزائرية الديمقرطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمه لخضر – الوادي

كلية العلوم الدقيقة

قسم الفيزياء

دروس وتمارين محلولة لمقياس رياضيات 1

سنة اولى جذع مشترك علوم المادة

اعداد : د. بالهادي احفوظه

استاذ محاضر بجامعة الوادي

المحتويات

1. نظرية المجموعات

1.1 – المنطق الرياضي

تعريف القضية : نسمي قضية كل جملة يمكن ان تكون صحيحة اوخاطلئة

نرمزلها بالرمز $P, Q, \ldots$

امثلة

(1) الجزائر بلد افريقي. قضية صحيحة

(2) $6 + 1 = 8$ قضية خاطئة

(3) $x \in \mathbb{R},\ \ x + 1 = 3$ ليست قضية

نفي القضية : نفي قضية هو قضية و تكون صحيحة اذا كانت القضية خاطئة

و تكون خاطئة اذا كانت القضية صحيحة

نرمز لنفي القضية بالرمز $\bar{P}, \bar{Q}, \dots$

جدول الحقيقة : اذا كانت القضية صحيحة نرمزلها بالرمز 1 اذا كانت خاطئة

نرمزلها بالرمز 0

القضايا المركبة :

الوصل : لتكن P, Q قضيتان

الوصل بين القضيتين P, Q هو القضية Q و P نرمزلها بالرمز $P \wedge Q$

وتكون صحيحة الا اذا كان Q و P صحيحتان معا

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

الفصل : لتكن P, Q قضيتان

الفصل بين القضيتين P, Q هو القضية Q او P نرمزلها بالرمز $P \vee Q$

وتكون خاطئة الا اذا كان Q و P خاطئتان معا

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

الاستلزام : لتكن P, Q قضيتان

الاستلزام بين القضيتين P, Q هو القضية $\bar{P} \vee Q$ نرمزلها بالرمز $P \implies Q$

وتكون خاطئة الا اذا كانت P صحيحة و Q خاطئة

P	Q	$P \implies Q$

1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

التكافؤ : لتكن P, Q قضيتان

االتكافؤ بين القضيتين P, Q هو القضية $(P \Longrightarrow Q \wedge Q \Longrightarrow P)$

نرمزلها بالرمز $P \Leftrightarrow Q$

وتكون خاطئة الا ادا كان احداهما صحيحة و الاخرى خاطئة

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ملاحظات :

(1) $\bar{\bar{P}} \Leftrightarrow P$

(1) $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$

(2) $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$

(3) $S \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow (S \wedge P) \vee (S \wedge Q)$ الوصل توزيعي على الفصل

(4) $S \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (S \vee P) \wedge (S \vee Q)$ الفصل توزيعي على الوصل

المكممات :

الجملة المفتوحة :

نسمي جملة مفتوحة معرفة علئ المجموعة E كل جملة تحوي علئ متغيراو اكثروتصبح

قضية اذا استبدل المتغير بعنصرمن E نرمز لها بالرمز $\mathrm{P}(x), \mathrm{Q}(x)$, ...

المكمم الكلي

العبارة : من اجل كل عنصر x من المجموعة E نعبر عنها رياضيا $\forall x \in E$

الرمز $\forall$ يسمئ المكمم الكلي اذا ادخل علئ جملة مفتوحة اصبحت قضية

العبارة : يوجد علئ الاقل عنصر x من المجموعة E نعبر عنها رياضيا $\exists x \in E$

الرمز $\exists$ يسمئ المكمم االوجودي اذا ادخل علئ جملة مفتوحة اصبحت قضية

امثلة

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ قضية صحيحة

(2) $\exists\, x \in \mathbb{R}, x + 2 = 5$ قضية صحيحة

(3) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}, x < y$ قضية صحيحة

(3) $\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}, x < y$ قضية خاطئة

ملاحظة : ترتيب المكممات مهم

نفي المكممات : نفي المكمم االوجودي هو المكمم الكلي والعكس

نفي قضية مكممة هو نفي المكمم ونفي الجملة التي تلي المكمم

امثلة

(1) $\overline{\exists\, x \in \mathbb{R}, x + 2 = 5} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x + 2 \neq 5$

(2) $\overline{\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

(3) $\overline{\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}, x < y} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N}, x < y$

انماط البرهان :

(1) الاستنتاج : يعتمد على القاعدة التالية

اذا كانت P قضية صحيحة و القضية $P \Longrightarrow Q$ صحيحة فان Q قضية صحيحة

(2) البرهان بالخلف : لاثبات صحة قضية P نفرض ان $\bar{P}$ صحيحة ونبين ان

هذا يؤدي الي تناقض عندئذ نستنتج ان P سحيحة

مثال : اثبت ان $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

لنفرض ان $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ معناه $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$ كسر غير قابل للاختزال

ينتج ان $a^2 = 2b^2$ اي a^2 زوجي وبالتالي a زوجي

$a = 2k$, $b^2 = 2k^2$ زوجي وبالتالي b زوجي

ومنه $\frac{a}{b}$ كسر قابل للاختزال وهذا تناقض مع الفرض

ومنه $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(3) البرهان بفصل الحالات : اذا كانت القضية $(P \Longrightarrow Q \wedge \bar{P} \Longrightarrow Q)$ صحيحة

نستنتج ان القضية Q صحيحة

مثال : اثبت ان $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ مضاعف للعدد 2

(1) n زوجي نضع $n = 2k$

$n(n+1) = 2k(2k+1)$ زوجي

(2) n فردي نضع $n = 2k+1$

$n(n+1) = (2k+1)(2k+2)$ زوجي

$= 2(2k+1)(k+1)$

ومنه $n(n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ زوجي

(4) البرهان بعكس النقيض : يعتمد على التكافؤ $P \Longrightarrow Q \Leftrightarrow \bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}$

فلكي نثبت صحة الاستلزام $P \Longrightarrow Q$ يكفي اثبات صحة الاستلزام $\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}$

مثال : اثبت ان n زوجي $\Longrightarrow n^2$ زوجي $\forall n \in \mathbb{N},$

يكفي اثبات ان n^2 فردي $\Longrightarrow n$ فردي

n فردي نضع $n = 2k+1$

$$n^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

ومنه n^2 فردي

(5) البرهان بمثال مضاد :

يتمثل في اثبات عدم صحة القضية $\forall x \in E, P(x)$ فيكفي ايجاد عنصر x_0

من E لا يحقق القضية

مثال : اثبت عدم صحة القضية $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 = 2^n$

يكفي اخذ $n = 3$ $3^2 = 2^3$ خاطئة

(6) البرهان بالتراجع :

$P(n)$ خاصية تتعلق بعدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$

لاثبات صحة القضية $\forall\, n \geq n_0 P(n)$ يكفي تحقيق الشرطين

(1) $P(n_0)$ محققة

(2) صحة الاستلزام $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

يتمثل في : نفرض ان $P(n)$ صحيحة ونبرهن ان $P(n+1)$ صحيحة

مثال : اثبت ان $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)(n+2)$ مضاعف للعدد 3

(1) من اجل $n = 0$

$0(0+1)(0+2) = 0 = 3.0$ محققة

(2) نفرض ان $n(n+1)(n+2) = 3k$

ونبرهن ان $(n+1)(n+2)(n+3) = 3k'$

$$(n+1)(n+2)(n+3) = n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)$$
$$= 3k + 3(n+1)(n+2)$$
$$= 3[k + (n+1)(n+2)]$$
$$= 3k'$$

حيث $k' = 3 + (n+1)(n+2)$

2.1 المجموعات

المجموعة كائن رياضي يتكون من افراد تسمى عناصر المجموعة

اذا كانت E مجموعة و a عنصرا من E نقول ان a ينتمي الى E ونكتب $a \in E$

اذا كانت E مجموعة و a عنصرا ليس من E نقول ان a لا ينتمي الى E ونكتب $a \notin E$

ملاحظة

(1) نرمزب $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ مجموعة الاعداد الطبيعية, الاعداد الصحيحة

,الاعداد الناطقة, الاعداد الحقيقية, الاعداد المركبة على الترتيب

الاحتواء : نقول ان A مجموعة جزئية من B اذا كانت كل عناصر A موجودة في B

ونكتب $A \subset B$

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Longrightarrow x \in B$$

المساواة : نقول ان المجموعة A تساوي المجموعة B اذا كانت كل عناصر A

موجودة في B والعكس

ونكتب $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

التقاطع : لتكن B و A مجموعتان من E

مجموعة العناصر المشتركة بين B و A تسمى تقاطع المجموعتين B و A

ونرمز لها بالرمز $A \cap B$

ونكتب $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \in B\}$

الاتحاد : لتكن B و A مجموعتان من E

نسمى اتحاد المجموعتين B و A مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة

بين B و A نرمز لها الرمز $A \cup B$

ونكتب $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ او } x \in B\}$

متممة مجموعة : لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة E

متممة A هي المجموعة التي نرمز لها بالرمز $\overline{A}$ والمعرفة ب

$$\overline{A} = \{x \in E / x \notin A \}$$

الفرق بين مجموعتين :

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \notin B \}$$

الفرق التناظري لمجموعتين :

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

الجمع : لتكن E و F مجموعتين

الجمع بين E و F هو المجموعة $E + F$ والمعرفة ب

$$E + F = \{ x + y / x \in E \text{ و } y \in F \}$$

الجداء الديكارتي لمجموعتين : لتكن E و F مجموعتين

الجداء الديكارتي للمجموعتين E و F هو المجموعة $E \times F$ والمعرفة ب

$$E \times F = \{ (x, y) / x \in E \text{ و } y \in F \}$$

ملاحظة :

(1) اذا كان $E = F$

$$E^2 = E \times E = \{ (x, y) / x \in E \text{ و } y \in E \}$$

(2) يصفة عامة

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$$
$$= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,/\, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n\}$$
$$= \prod_{k=1}^{n} E_k$$

مثال :

$E = \{1,2\}$ $\qquad$ $F = \{3,4\}$

$$E \times F = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4) \}$$

تجزئة مجموعة :

لتكن E مجموعة غيرخالية

نقول عن جملة اجزاء $(E_i)_{i\in I}$ انها تشكل تجزئة ل E اذا تحقق

$\forall \mathrm{i} \in \mathrm{I}, E_i \neq \phi$ (1)

$\forall i,j \in I, i \neq j \quad E_i \cap E_j = \phi$ (2)

$\bigcup_{i\in I} E_i = E$ (3)

$E = \{1,2,3\}$

$E_1 = \{\{1\},\{2\},\{2,3\}\}$ $\quad E_2 = \{\{2\},\{1,3\}\}$ $\quad E_3 = \{\{1\}\{2\},\{3\}\}$

E_1 ليست تجزئة بينما كل من E_2 و E_3 تمثل تجزئة

خواص :

$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$ (1)

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (2)

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (3)

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (4)

(5)اذا كان $A \subset B$ فان $A \cup B = B, \quad A \cap B = A$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (6)

اذا كان $A \subset B$ فان $|A| \leq |B|$

(7) مجموعة اجزاء المجموعة :

المجموعات الجزئية ل E تسمى مجموعة اجزاء المجموعة E ونرمز

لها بالرمز $\mathcal{P}(E)$. اذا كانت $A \in \mathcal{P}(E)$ فان $A \subset E$

مثال :

$$E = \{a, b\}$$

$$\mathcal{P}(E) = \{\, \emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$$

الدالة المميزة

نسمى الدالة المميزة للمجموعة الجزئية $A \subset E$ الدالة التي نرمز لها

χ_A والمعرفة كما يلي : $\chi_A : A \longrightarrow \{0,1\}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

خواص :

(1) $A = B \Longrightarrow \chi_A = \chi_B$

(2) $A \subset B \Longrightarrow \chi_A \leq \chi_B$

(3) $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$

(4) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$

(5) $\chi_{A \cap B} = \chi_A . \chi_B$

3.1 العلاقات

العلاقة بين مجموعتين : لتكن E و F مجموعتان غير خاليتين

تعريف : تسمى علاقة بين E و F كل خاصية ترفق بعناصر من E يعناصر من F

ونرمز لها بالرمز $\mathfrak{R}$

اذا كان $x \in E$ يرفق ب $y \in F$ نكتب $x\ \mathfrak{R} y$

بيان العلاقة : لتكن $\mathfrak{R}$ علاقة بين E و F

بيان العلاقة $\mathfrak{R}$ هو المجموعة الجزئية من $E \times F$ والمعرفة ب

$$G_{\mathfrak{R}} = \{(x, y) \in E \times F, \qquad x\ \mathfrak{R} y\ \}$$

مثال : $E = \{1,,3\}, F = \{2,4,6,\}$

$\Re$ علاقة بين E و F معرفة ب x يقسم y

$$E \times F = \{(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6)\}$$

$$G_{\Re} = \{(x,y) \in E \times F, \qquad x \ \Re y \ \}$$
$$= \{(1,2),(1,4),(1,6),(3,6)\}$$

العلاقة العكسية : لتكن $\Re$ علاقة بين E و F

العلاقة العكسية للعلاقة $\Re$ هي العلاقة بين F و E والمرموز لها بالرمز $\Re^{-1}$

$$\forall (x,y) \in E \times F \ y \quad \Re^{-1} \ x$$

مثال : $E = \{1,,3\}, F = \{2,4,6,\}$

$\Re$ علاقة بين E و F معرفة ب x يقسم y

$\Re^{-1}$هي العلاقة بين F و E معرفة ب y مضاعف x

$$G_{\Re^{-1}} = \{(x,y) \in E \times F, \ \ y \ \ \Re^{-1} x \ \}$$
$$= \{(2,1),(4,1),(6,1),(6,3)\}$$

العلاقة في مجموعة : اذا كانت $\Re$ علاقة من E في E نقول ان $\Re$ علاقة في E

خواص :

(1) $\Re$ علاقة انعكاسية في E اذا وفقط اذا كان $\forall \ x \in E, x \ \Re x$

(2) $\Re$ علاقة تناظرية في E اذا وفقط اذا كان

$$\forall \ x, y \in E, x \ \Re y \Longrightarrow y \ \Re x$$

(3) $\Re$ علاقة ضد تناظرية في E اذا وفقط اذا كان

$$\forall \ x, y \in E, \begin{cases} x \ \Re y \\ \text{و} \\ y \ \Re x \end{cases} \Longrightarrow x = y$$

(4) $\Re$ علاقة متعدية في E اذا وفقط اذا كان

$$\forall\, x,y,z \in E, \begin{cases} x\,\Re y \\ \text{و} \\ y\,\Re z \end{cases} \Longrightarrow x\Re z$$

مثال :

$\Re$ علاقة $\mathbb{Z}$ معرفة كمايلي

$$\forall\, x,y \in \mathbb{Z}, x\,\Re y \iff x-y \text{ مضاعف ل } 3$$

$\Re$ علاقة انعكاسية قي $\mathbb{Z}$ لان :

$$\forall\, x \in \mathbb{Z}, x-x = 0 = 3.0 \iff \forall\, x \in \mathbb{Z}, x-x \text{ مضاعف ل } 3$$

$$\iff \forall\, x \in \mathbb{Z}, \qquad x\Re x$$

ومنه $\Re$ علاقة انعكاسية قي $\mathbb{Z}$

(2) $\Re$ علاقة تناظرية قي $\mathbb{Z}$ لان

$$\forall\, x,y \in \mathbb{Z}\,, x\,\Re y \Longrightarrow x-y \text{ مضاعف ل } 3$$

$$\Longrightarrow \forall x,y \in \mathbb{Z}\ \ x-y\ = 3k\ \ /\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \forall x,y \in \mathbb{Z}\ \ y-x\ = 3(-k)\ \ /\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \forall\, x,y \in \mathbb{Z}\,, y\,\Re x$$

ومنه $\Re$ علاقة تناظرية قي $\mathbb{Z}$

(4) $\Re$ علاقة متعدية قي $\mathbb{Z}$ لان

$$\forall\, x,y,z \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x\,\Re y \\ \text{و} \\ y\,\Re z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-y = 3k \\ \text{و} \\ y-z = 3k' \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x-z\ = 3(k+k')/k'' = k+k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow x\,\Re z$$

ومنه $\Re$ علاقة متعدية قي $\mathbb{Z}$

علاقة التكافؤ : $\Re$ علاقة لتكافؤ قي E اذ وفقط اذا كان

$\Re$ علاقة انعكاسية تناظرية و متعدية

اصناف التكافؤ : $\Re$ علاقة لتكافؤ قي E و $x \in E$

صنف تكافؤ العنصر x هي مجموعة العناصرمن E التي تحقق العلاقة $\Re$ مع x

والتي نرمز لها بالرمز $\dot{x}$ والمعرفة كمايلي

$$\dot{x} = \{ y \in E \ / \ x\Re y\}$$

مثال :

$\Re$ علاقة تكافؤ قي $\mathbb{Z}$ معرفة كمايلي

$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}, x\, \Re y \iff$ $x - y$ مضاعف ل 3

$$\dot{0} = \{ y \in E \ / \ 0\Re y\}$$

$$= \{ y \in E / y - 0 = 3k\}$$

$$= \{\dots -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9 \dots\}$$

$$\dot{1} = \{ y \in E \ / \ 1\Re y\}$$

$$= \{ y \in E / y - 1 = 3k\}$$

$$= \{\dots -10, -7, -4, 0, 4, 7, 10 \dots\}$$

علاقة الترتيب : $\Re$ علاقة ترتيب قي E اذ وفقط اذا كان

$\Re$ علاقة انعكاسية ضد تناظرية و متعدية

علاقة الترتيب الكلي : $\Re$ علاقة ترتيب كلي قي E اذ وفقط اذا كان

$\Re$ علاقة ترتيب قي E و $\forall\, x, y \in E, \quad x\,\Re y$ او $y\Re x$

اذا كانت $\Re$ ليست علاقة ترتيب كلي قي E فانها علاقة ترتيب جزئي

علاقة الترتيب قي $\mathbb{R}$:

نعرف قي $\mathbb{R}$ العلاقة $'' \dots \le \dots ''$ وهي علاقة ترتيب كلي قي $\mathbb{R}$

مثال :

$\Re$ علاقة قي $\mathbb{R}$ معرفة كمايلي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, x\, \Re y \iff x \leq y$$

$\Re$ علاقة انعكاسية لان $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x \leq x$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x \leq x \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}, x\, \Re x$$

ومنه $\Re$ علاقة انعكاسية

(2) $\Re$ علاقة ضد تناظرية قي $\mathbb{R}$ لان

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \begin{cases} x\, \Re y \\ \text{و} \\ y\, \Re x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \leq y \\ \text{و} \\ y \leq x \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad x = y$$

ومنه $\Re$ علاقة ضد تناظرية قي $\mathbb{R}$

(4) $\Re$ علاقة متعدية قي $\mathbb{Z}$ لان

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x\, \Re y \\ \text{و} \\ y\, \Re z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \leq y \\ \text{و} \\ y \leq z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x \leq z$$

$$\Longrightarrow x\, \Re z$$

ومنه $\Re$ علاقة متعدية قي $\mathbb{R}$

بمان $\Re$ علاقة انعكاسية ضد تناظرية و متعدية اذا فهي علاقة ترتيب قي $\mathbb{R}$

بمان $y \leq x$ او $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$

اذا $\Re$ علاقة ترتيب كلي قي $\mathbb{R}$

خواص علاقة الترتيب قي $\mathbb{R}$:

(1) الجزء الصحيح :

من اجل كل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح $[x]$ او $E(x)$ يحقق

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

$[x]$ يسمى الجوء الصحيح للعدد x

امثلة :

$x = 2,6$ اذا $2 \leq 2,6 < 3$ ويكون $[2,6] = 2$

$x = -2,6$ اذا $-3 \leq -2,6 < -1$ ويكون $[-2,6] = -3$

(2) كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \;; x < y \Longrightarrow \exists\, r \in \mathbb{Q} \quad x < r < y$$

(3) الحواد العليا و السفلى :

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$

نقول عن A انه محدود من الاعلى اذا وجد العدد M يحيث :

$$\forall\, x \in A\,, \qquad x \leq M$$

نقول عن A انه محدود من الاسفل اذا وجد العدد m يحيث :

$$\forall\, x \in A\,, \qquad x \geq m$$

نقول عندئذ ان M حاد اعلى ل A (علوي) و m حاد ادنى (سفلي) ل A

نقول عن A انه محدود اذا كان محدود من الاعلى و من الاسفل اي

$$\forall\, x \in A\,, \exists\, M, m \quad m \leq x \leq M$$

(4) الحد الاعلى – الحد الادنى

ليكن A جزء غير خال من $\mathbb{R}$ ومحدود من الاعلى (من الاسفل من)

نسمي اصغر الحواد العليا بالحد الاعلى ونرمز له بالرمز $supA$

نسمي الاكبر الحواد الدنيا بالحد الادنى ونرمز له بالرمز $infA$

امثلة :

$$A =]-1,3]$$

$$supA = 3\,, \qquad infA = -1$$

(5)الحد الاكبر والحد الاصغر

اذا كان $supA \in A$ فانه في هذه الحالة يسمى بالحد الاكبر ونرمز له بالرمز $maxA$

اذا كان $infA \in A$ فانه في هذه الحالة يسمى بالحد الاصغر ونرمز له بالرمز $minA$

مثال :

$$A =]-1,3]$$

$infA = -1 \notin A$ اذا $minA$ غير موجود $\qquad maxA = supA = 3 \in A ,$

تمرين (1) :

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} , 2 + \frac{1}{n} , \qquad n \in \mathbb{R}^*\right\}$$

عين $supA$ و $infA$, $maxA$ و $minA$

الحل

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow 2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3 \Rightarrow 2 < A \leq 3$$

$$maxA = supA = 3 \in A$$

$infA = 2 \notin A$ اذا $minA$ غير موجود

تمرين (2) :

اوجد $(1) \quad sup\{x \in \mathbb{R} , x^2 + x + 2 > 0 \quad \}$

$$(2) \quad inf\left\{x + \frac{1}{x}; \quad x > 0\right\}$$

$$(3)^* \quad inf\left\{2^x + 2^{\frac{1}{2}}; \quad x > 0\right\}$$

الحل :

$$(1)\ \Delta = -7 < 0 \quad \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 + x + 2 > 0$$

$sup\{x \in \mathbb{R} , x^2 + x + 2 > 0 \quad \} = +\infty$ ومنه انه غير موجود

نضع $(2) f(x) = x + \frac{1}{x}; \quad x > 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\forall x > 0 \quad f(x) \geq f(1) = 2$$

$$inf\left\{x + \frac{1}{x}; \quad x > 0\right\} = 2$$

الخاصية المميزة للحد الاعلى (الادنى) :

ليكن $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$

$$supA = M \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in A \ , x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \qquad M - \varepsilon < x \end{cases}$$

$$infA = m \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in A \ , x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \qquad x < m + \varepsilon \end{cases}$$

الاثبات

لنفرض $supA = M$ وليكن $\varepsilon > 0$ نضع $M_0 = M - \varepsilon$

نجد $M_0 < M$ وبمان M اصغر الحواد العليا وبالتالي M_0 ليس حاد ا من الاعلى

اذا يوجد $x \in A$ بحيث $M_0 < x$ ومن جهة اخرى $x \leq M$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \qquad M - \varepsilon \ < \ x \leq M$$

4.1 التطبيقات

4.1.1 التطبيق : نقول عن f انه تطبيق من E نحو F اذا كان كل عنصر x

من E يرفق بعنصر وحيد y من F ونكتب :

$$f : E \longrightarrow F$$

$$x \longrightarrow y = f(t)$$

تسمى E مجموعة السوابق او (البدء) و F مجموعة الصور او (الوصول)

x يسمى سابقة y و y صورة x

التطبيق المطابق : نسمي التطبيق المطابق كل تطبيق I_E من E قي E المعرف كمايلي

$$I_E : E \rightarrow E$$

$$x \rightarrow I_E(x) = x$$

اقتصار وتمديد تطبيق : ليكن f تطبيق من E قي F و g تطبيق من G قي H

بحيث $G \subset E$ و $H \subset F$ نقول ان g اقتصار f علىG و fامتداد g على E

تركيب تطبيقات : ليكن f تطبيق من E قي F و g تطبيق من F قي G

التطبيق من Eنحو Gالمرموزله بالرمز $g \circ f$ والمعرف كمايلي

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

يسمى مركب التطبيقين fوg

الصورة المباشرة والصورة العكسية : ليكن f تطبيق من E قي F

الصورة المباشرة : ليكن f تطبيق من E قي F و $A \subset E$ الصورة المباشرة ل A

هي مجموعة صورعناصر A وفق f نرمز لها ب $f(A)$ والمعرفة كمايلي

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$$

الصورة العكسية : ليكن $B \subset F$

مجموعة عناصر E صورها وفق f في B نرمز لها ب $f^{-1}(B)$ والمعرفة كمايلي

والمعرفة كمايلي

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E, f(x) \in B \} \subset E$$

خواص : ليكن f تطبيق من E في F

ولتكن A, B مجموعتين جزئيتين من E و C, D مجموعتين جزئيتين من F

يكون لدينا عندئذ

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \,.\, f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad (1)$$

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \quad (2)$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

$$A \subset f^{-1}\big(f(A)\big) \,,\, f\big(f^{-1}(C)\big) \subset C \quad (3)$$

$$f^{-1}(C_F C) = C_E\big(f^{-1}(C)\big)$$

مثال : ليكن التطبيق $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ حيث $f(x) = x^2$

(1) $A = [-3:3] \subset \mathbb{R}$ عين $f(A)$

(2) $B = [0,4] \subset \mathbb{R}^+$ عين $f^{-1}(B)$

الحل :

$$f(A) = \{f(x) = x^2 \,/\, x \in [-3:3]\} = [0,9] \quad (1)$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2 \in [0:4]\} \quad (2)$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 \leq x^2 \leq 4\} = [-2,2]$$

التطبيقات المتباينة – الغامرة – المتقابلة :

ليكن f تطبيق من E في F

التطبيق المتباين :

f تطبيق متباين من E في F $\Leftrightarrow \forall\, x, x' \in E \,/\, x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$

$$\Leftrightarrow \forall\, x, x' \in E / f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

التطبيق الغامر :

f تطبيق غامر من E في F $\Leftrightarrow \forall\, y \in F, \exists\, x \in E / y = f(x)$

التطبيق التقابلي :

f تطبيق تقابلي من E في F $\Leftrightarrow \forall\, y \in F, \exists!\ \ x \in E / y = f(x)$

f تطبيق تقابلي من E في $F \Leftrightarrow$ f متباين وغامر من E في F

مثال :

ليكن تطبيق من $\mathbb{R} - \{-2\}$ في $\mathbb{R} - \{3\}$ المعرف كمايلي

$$f(x) = \frac{2x + 4}{x - 3}$$

بين f متباين وغامر

$$\forall x, x' \in \mathbb{R} - \{3\} : \ \ f(x) = f(x') \Leftrightarrow \forall x, x' \in \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\frac{2x + 4}{x - 3} = \frac{2x' + 4}{x' - 3} \Leftrightarrow (2x + 4)(x' - 3) = (2x' + 4)(x - 3)$$

$$\Longrightarrow x = x'$$

ومنه f متباين

$$\forall\, y \in, \mathbb{R} - \{2\} \exists\, x \in \mathbb{R} - \{3\} / y = f(x)$$

$$y = \frac{2x + 4}{x - 3} \Longrightarrow x = \frac{3y + 4}{y - 2}$$

ومنه f غامر

تمارين محلولة

التمرين الاول :

(1)هل القضايا التالية صحيحة ؟

(ا) $1-1=0$ او $\frac{1}{2} \in \mathbb{N}$

(ب) $x \in \emptyset \Longrightarrow x \in E$

(2) اكتب نفي القضيتين (ا) و (ب) وكذا عكس النقيض ل (ب)

اكتب القضية (ا) على شكل استلزام

الحل :

(1) حسب جدول الحقيقة فان القضيتين (ا) و (ب) صحيحتين

(2) نفي القضية (ا) هو $1-1 \neq 0$ و $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

نفي القضية (ا) $x \notin E$ و $x \in \emptyset$ لان $x \in E$ او $x \notin \emptyset$ هو

$$\overline{x \in \emptyset \Longrightarrow x \in E} \Leftrightarrow \overline{x \in E \text{ او } x \notin \emptyset}$$

$$\Leftrightarrow x \notin E \text{ و } x \in \emptyset$$

كتابة القضية (ا) على شكل استلزام

$$1-1=0 \text{ او } \frac{1}{2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \Longrightarrow x \in E$$

التمرين الثاني :

لتكن A و B و C و D اجزاء للمجموعة E اثبت ان

(1) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C_E^B$

(2) $A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$

(3)* $A \subset B \quad C \subset D \Longrightarrow A \cap C \subset B \cap B$

الحل :

$$A \cap B = \emptyset \iff A \subset C_E^B \qquad (1)$$

للبرهان على التكافؤ يكفي البرهان على الاستلزام في الاتجاهين

لنبرهن ان $A \cap B = \emptyset \implies A \subset C_E^B$

لنفرض ان $A \cap B = \emptyset$ ونبرهن ان $A \subset C_E^B$

$\forall x \in A \implies x \notin B \quad \left(A \cap B = \emptyset\right.$ لان$\left.\right)$

$\implies x \in C_E^B$

ومنه $A \subset C_E^B$

لنبرهن ان $A \subset C_E^B \implies A \cap B = \emptyset$

لنفرض ان $A \subset C_E^B$ ونبرهن ان $A \cap B = \emptyset$

نستعمل البرهان بالخلف لنفرض ان $A \cap B \neq \emptyset$

$\forall x \in A \cap B \implies x \in A$ و $x \in B$

$\implies x \notin B$ و $x \in B$ $\left(A \subset C_E^B\right.$ لان$\left.\right)$

وهذا تناقض ومنه $A \cap B = \emptyset$

ومنه ان $A \cap B = \emptyset \iff A \subset C_E^B$

$$A \subset B \iff C_E^B \subset C_E^A \qquad (2)$$

للبرهان على التكافؤ يكفي البرهان على الاستلزام في الاتجاهين

لنبرهن ان $A \subset B \implies C_E^B \subset C_E^A$

لنفرض ان $A \subset B$ ونبرهن ان $C_E^B \subset C_E^A$

$\forall x \in C_E^B \implies x \notin B$

$\implies x \notin B$

$\implies x \notin A \quad \left(A \subset B\right.$ لان$\left.\right)$

$\implies x \in C_E^A$

ومنه $C_E^B \subset C_E^A$

بنفس الطريقة نبرهن ان $C_E^B \subset C_E^A \Longrightarrow A \subset B$

التمرين الثالث :

لتكن A و B و C اجزاء للمجموعة E اثبت ان

(1) $A \cup B = A \cup C$ و $A \cap B = A \cap C \Longrightarrow B = C$

(2)* $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

الحل :

لنفرض ان $A \cap B = A \cap C$ و $A \cup B = A \cup C$ ونبرهن ان $B = C$

$$B = B \cap (A \cup B)$$

$$= B \cap (A \cup C) \left(A \cup B = (A \cup C) \text{ لان } \right)$$

$$= (B \cap A) \cup (B \cap C) \quad \left(\text{لان } \cap \text{ توزيعي على } \cup \right)$$

$$= (A \cap B) \cup (B \cap C)$$

$$= (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$= (A \cup B) \cap C$$

$$= (A \cup C) \cap C = C$$

التمرين االرابع :

لتكن A و B و C مجموعات جزئية للمجموعة E اثبت ان

(1) $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$

(2)* $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$

(3) $A - B = A \cap C_E^{A \cap B} = A \cap C_E^B$

(4)* $(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{C \cap \bar{A}}) = E$ و $(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{C \cup \bar{A}}) = \phi$

الحل :

(1) البرهان على $C_E^{A\cap B} = C_E^A \cup C_E^B$

للبرهان على $C_E^{A\cap B} = C_E^A \cup C_E^B$ يكفي البرهان على $C_E^{A\cap B} \subset C_E^A \cup C_E^B$
$C_E^A \cup C_E^B \subset C_E^{A\cap B}$

البرهان على $C_E^{A\cap B} \subset C_E^A \cup C_E^B$

$$\forall x \in C_E^{A\cap B} \Longrightarrow x \notin A \cap B$$

$$\Longrightarrow x \notin A \vee x \notin B$$

$$\Longrightarrow x \in C_E^A \vee x \in C_E^B$$

$$\Longrightarrow x \in C_E^A \cup C_E^B$$

ومنه $C_E^{A\cap B} \subset C_E^A \cup C_E^B$

بنغس الطريقة نبرهن ان $C_E^A \cup C_E^B \subset C_E^{A\cap B}$

(3) البرهان على $A - B = A \cap C_E^{A\cap B} = A \cap C_E^B$ يكفي البرهان

الاحتواء من الجهاتين

البرهان على $A - B \subset A \cap C_E^{A\cap B}$

$$\forall x \in A - B \Longrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

$$\Longrightarrow x \in A \wedge x \in C_E^B$$

$$\Longrightarrow x \in A \cap C_E^B$$

ومنه $A - B \subset A \cap C_E^{A\cap B}$

بنغس الطريقة نبرهن ان $A \cap C_E^{A\cap B} \subset A - B$

التمرين الخامس :

لتكن $\mathcal{P}(E)$ مجموعة احزاء المجموعة E و f تطبيق من $\mathcal{P}(E)$ في$\mathcal{P}(E)$

ويحقق :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ A \cap B = \phi \Longrightarrow f\ (A \cup B) = f(A) + f(B)$$

(1) اثبت ان $f(\phi) = 0$

(2) اثبت انه اذا كان $A \cap B \neq \phi$ فان

$$f\ (A \cup B) = f(A) + f(B) - f\ (A \cap B)$$

*(3) احسب $f\ (A \cup B \cup C)$ حيث $A, B\ , C \in \mathcal{P}(E)$

الحل :

(1) اثبات ان $f(\phi) = 0$

$$\phi \cap \phi = \phi \Longrightarrow f\ (\phi \cup \phi) = f(\phi) + f(\phi)$$

$$\Longrightarrow f\ (\phi) = f(\phi) + f(\phi)$$

$$\Longrightarrow f\ (\phi) = 0$$

(2) اثبات انه اذا كان $A \cap B \neq \phi$ فان

$$f\ (A \cup B) = f(A) + f(B) - f\ (A \cap B)$$

$\{A - B, A \cap B\}\{A - B, B\}$ تجزئة ل $A\ ,A \cup B$ على الترتيب

$$(A - B) \cap (A \cap B) = \phi \qquad (A - B) \cap B = \phi\ ,$$

$$(A - B) \cup (A \cap B) = A \quad \text{و} \quad (A - B) \cup B = A \cup B$$

ومنه حسب (1) نجد

$$f\ (A \cup B) = f\ \big((A - B) \cup B\big) = f\ (A - B) + f\ (B)$$

$$f(A) = f\ (A - B) + f\ (A \cap B)$$

بطرح العبارتين طرف لطرف

$$f\ (A \cup B) - f(A) = f\ (B) - f\ (A \cap B)$$

$$f\ (A \cup B) = f(A) + f\ (B) - f\ (A \cap B)$$

التمرين السادس :

ليكن f تطبيق من E قيF و A , B مجموعتين جزئيتين من E و D, C منF

(1) اثبت ان $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

و $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

(2) اثبت ان $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

و $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

(3) اثبت ان $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

و $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

الحل :

(1) اثبات ان $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

نفرض ال $A \subset B$ ونبرهن ان $f(A) \subset f(B)$

$$\forall y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A / y = f(x)$$

$$\Rightarrow \exists x \in B / y = f(x)$$

$$\Rightarrow y \in f(B)$$

ومنه $f(A) \subset f(B)$

(1) اثبات ان $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

نفرض ال $C \subset D$ ونبرهن ان $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

$$\forall x \in f^{-1}(C) \Rightarrow f(x) \in C \subset D$$

$$\Rightarrow f(x) \in D$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(D)$$

ومنه $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

(2) اثبات ان $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

و $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

للبرهان على $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ يكفي ان نبرهن على

$f\ (A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ و $f(A) \cup f(B) \subset f\ (A \cup B)$

للبرهان على $f\ (A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

$$\forall\ \mathrm{y} \in \ \ f\ (A \cup B) \Longrightarrow \exists x \in (A \cup B)\ /y = f\ (x)$$

$$\Longrightarrow \exists x \in A\ \ \vee x \in B/y = f\ (x)$$

$$\Longrightarrow \exists x \in A\ /y = f\ (x) \vee x \in B/y = f\ (x)$$

$$\Longrightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B)$$

$$\Longrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$$

$(A) \cup f(B) \subset f\ (A \cup B)(A) \cup f(B) \subset f\ (A \cup B)$ اذا $f\ (A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ ... (1)

للبرهان على $f(A) \cup f(B) \subset f\ (A \cup B)$

$$A \subset\ A \cup B \Longrightarrow f(A) \subset f\ (A \cup B)$$

$$B \subset\ A \cup B \Longrightarrow f(B) \subset f\ (A \cup B)$$

وعليه فان $f(A) \cup f(B) \subset f\ (A \cup B)$ ... (2)

من (1) و (2) نجد ان $(A) \cup f(B) = f\ (A \cup B)$

البرهان على $f^{\,-1}\ (C \cup D) = f^{\,-1}(C) \cup f^{\,-1}\ (D)$

$$\forall\ x \in \ \ f^{\,-1}\ (C \cup D) \Leftrightarrow f(x) \in C \cup D$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in C \vee f(x) \in D$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{\,-1}(C) \vee f(x) \in f^{\,-1}(D)$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{\,-1}(C) \cup f^{\,-1}(D)$$

(3) اثبات ان $f\ (A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

و $f^{\,-1}\ (C \cap D) = f^{\,-1}(C) \cap f^{\,-1}\ (D)$

البرهان على $f\ (A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(A \cap B) \subset f(A) \\ f(A \cap B) \subset f(B) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

البرهان على $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

$$\forall x \in \quad f^{-1}(C \cap D) \Leftrightarrow f(x) \in C \cap D$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \in D$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge f(x) \in f^{-1}(D)$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

التمرين السابع :

ليكن f تطبيق من E فيF و $A\,,B$ مجموعتين جزئيتين من E و D,C منF

(1) اثبت ان $f^{-1}(C - D) = f^{-1}(C) - f^{-1}(D)$

(2) اثبت ان $f^{-1}(C_F^B) = C_F^{f^{-1}(B)}$

اكتب المعادلة هنا.

التمرين الثامن :

ليكن تطبيق معرف كمايلي

$$f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{x+1}{x-2}$$

(1) بين ان f تطبيق متباين هل f غامر ؟

(2) نعتبر g تطبيق من $\mathbb{R} - \{2\}$ في $\mathbb{R} - \{a\}$ $g(x) = f(x)$

عين قيمة a حتى يكون g غامر في هذه الجالة عين g^{-1}

(3) ليكن تطبيق معرف كمايلي

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (3)$$

$$x \to 2x + 3$$

عين $h\circ g$ و $g\circ h$ عين مجموعة تعريف كلا من $h\circ g$ و $g\circ h$

الحل :

$$\forall x,x' \in \mathbb{R}-\{2\}:\ \ f(x)=f(x') \Leftrightarrow \forall x,x' \in \mathbb{R}-\{2\}$$

$$\frac{x+1}{x-2}=\frac{x'+1}{x'-2} \Leftrightarrow (x+1)(x'-2)=(x'+1)(x-2)$$

$$\Longrightarrow x=x'$$

ومنه f متباين

$$\forall\, y\in\mathbb{R}\,,\exists\, x\in\mathbb{R}-\{3\}/y=f(x)$$

$$y=\frac{x+1}{x-2}\Longrightarrow x=\frac{2y+1}{y-1}$$

اذا كان $y=1$ فان x غير موجود ومنه غير غامر

في $\mathbb{R}-\{a\}$ $g(x)=f(x)$

$$\forall\, y\in,\qquad \exists\, x\in\mathbb{R}-\{3\}/y=f(x)$$

$$y=\frac{x+1}{x-2}\Longrightarrow x=\frac{2y+1}{y-1}$$

حتى يكون غامر يجب ان يكون $y\neq 1$ بمعنى $y\in\mathbb{R}-\{1\}$

$$y=\frac{x+1}{x-2}\Leftrightarrow x=\frac{2y+1}{y-1}\ \ =g^{-1}(y)$$

ومنه

$$g^{-1}:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}-\{2\}$$

$$x\to g^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-1}$$

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad (3)$$

$$x\to 2x+3$$

$$(h\circ g)(x)=h[g(x)]=2g(x)+3=2\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+3=\frac{5x-4}{x-2}$$

$$(g\circ h)(x)=g[h(x)]=\frac{(2x+3)+1}{(2x+3)-2}=\frac{2x+4}{2x-1}$$

التمرين التاسع :

ليكن التطبيقين f , g حيث f من E في F و g من F في G

بين ان :

(1) f متباين $\Longrightarrow g\circ f$ متباين

(2) g متباين $\Longrightarrow f$ غامر و $g\circ f$ متباين

$(3)^{*}$ g غامر $\Longrightarrow g\circ f$ غامر

$(4)^{*}$ f غامر $\Longrightarrow g$ متباين و $g\circ f$ غاتر

الحل :

(1) اثبات f متباين $\Longrightarrow g\circ f$ متباين

لنفرض ان $g\circ f$ متباين ونثبت ان f متباين

$$\forall x,x' \in E:\ f(x)=f(x') \iff \forall x,x' \in \mathbb{R}-\{2\}$$

$(g\circ f)(x)=(g\circ f)(x')$ (لان g تطبيق) $\Leftrightarrow x=x'$ (لان $g\circ f$ متباين)

وعليه فانه اذا كان $g\circ f$ متباين فان f متباين

(2) g متباين $\Longrightarrow f$ غامر و $g\circ f$ متباين

$g\circ f$ متباين فان f متباين ومنه f تقابلي وعليه فان التطبيق f^{-1} موجود

$$[\forall x,x' \in E\ (g\circ f)(x)=(g\circ f)(x') \Longrightarrow x=x'] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x,x' \in E, [(g\circ f)\circ f^{-1}](x)=[(g\circ f)\circ f^{-1}](x') \Longrightarrow x=x'$$

$$\Leftrightarrow \forall x,x' \in E, [g\circ (f\circ f^{-1})](x)=[g\circ (f\circ f^{-1})](x') \Longrightarrow x=x'$$

$$\Leftrightarrow \forall x,x' \in E, g(x)=g(x') \Longrightarrow x=x'$$

$\Leftrightarrow$ gمتباين

التمرين العاشر :

ليكن f تطبيق من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ معرف كمايلي

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

(1) هل f متباين ؟ هل f غامر ؟

(2) ليكن $I = [0,\infty[$ عين $f(I)$ صورة I بالتطبيق f

(3) بين ان f تقابلي من I نحو مجال يطلب تحديده

(4) عين $f^{(2)} = f \circ f$ $f^{(3)} = f \circ f \circ f$ ثم استنتج

$$f^{(n)} = f \circ f \circ \ldots \quad \circ \; f$$

الحل :

(1) هل f متباين ؟ هل f غامر ؟

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f(x') \Longrightarrow \frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{1+|x'|}$$

$$\Longrightarrow |x| = |x'|$$

$$\Longrightarrow x = x' \vee x = -x'$$

ومنه fليس متباين

التمرين الحادي عشر :

$\mathfrak{R}$ علاقة في $\mathbb{Z}$ معرفة كمايلي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}, x\, \mathfrak{R} y \iff x - y \text{ مضاعف ل } 7$$

(1) بين ان $\mathfrak{R}$ علاقة تكافؤ في $\mathbb{Z}$

(2) ليكن $a \in \mathbb{Z}$ عين صنف تكافؤ a

(3) عين مجموعة حاصل قسمة مجموعة اصناف التكافؤ $\mathbb{Z} \,/\, \mathfrak{R}$

التمرين الثاني عشر :

$\mathfrak{R}$ علاقة قي $\mathbb{R}$ معرفة كمايلي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\, \mathfrak{R} y \iff x^3 - y^3 = x - y$$

(1) بين ان $\mathfrak{R}$ علاقة تكافؤ قي $\mathbb{R}$

(2) ليكن $a \in \mathbb{R}$ عين صنف تكافؤ a

(3) عين صنف تكافؤ $\frac{1}{2}$

التمرين الثالث عشر :

لتكن E مجموعة و $\mathcal{P}(E)$ مدموعة اجزاء المجموخة E

ولتكن $\mathfrak{R}$ علاقة قي $\mathcal{P}(E)$ معرفة كمايلي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\, \mathfrak{R} y \iff x^3 - y^3 \geq 0$$

(1) بين ان $\mathfrak{R}$ علاقة ترتيب قي $\mathbb{R}$

(2) هل $\mathfrak{R}$ علاقة ترتيب كلي قي $\mathbb{R}$?

التمرين الرابع عشر :

لتكن E مجموعة و $\mathcal{P}(E)$ مدموعة اجزاء المجموخة E

ولتكن $\mathfrak{R}$ علاقة قي $\mathcal{P}(E)$ معرفة كمايلي

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E), \qquad A\, \mathfrak{R} B \iff A \subset B$$

(1) بين ان $\mathfrak{R}$ علاقة ترتيب قي $\mathcal{P}(E)$

(2) هل $\mathfrak{R}$ علاقة ترتيب كلي قي $\mathcal{P}(E)$?

التمرين الخامس عشر :

عين $supA$, infA , maxA minA قي كل حالة

(1) $A = \{-x^2 + 2x, x \in]1,2[\}$

(2) $A = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\ ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$

$$A=\left\{\frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1}\ ;n\in\mathbb{N}^*\right\}\quad(3)$$

$$A=\{x\in\mathbb{R}\,;\ x^3>8\}\quad(4)^*$$

الحل

$$A=\{-x^2+2x, x\in\,]1,2[\}\quad(1)$$

$$f(x)=-x^2+2x$$

$$f'(x)=-2x+2$$

اذا كان $x\in\,]1,2[$ فان $f'(x)<0$

$$supA=f(1)=1\notin A\,,infA=f(2)=0\notin A$$

ومنه $maxA, minA$ غير موجود

$$A=\{1+\ ;n\in\mathbb{N}^*\}\quad(2)$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*-1\le(-1)^n\le1\Rightarrow\ -1\le\frac{(-1)^n}{n}<1$$

$$\Rightarrow 0\le 1+\frac{(-1)^n}{n}<2$$

$$supA=2\notin A\,,infA=0\in A$$

ومنه $minA=0$ و $maxA$ غير موجود

$$A=\left\{\frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1}\ ;n\in\mathbb{N}^*\right\}\quad(3)$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1}=1-\frac{1}{4n+2}$$

$$n>0\Rightarrow\frac{1}{2}<1-\frac{1}{4n+2}<1$$

$$supA=1\notin A\,,infA=\frac{1}{2}\notin A$$

ومنه $maxA, minA$ غير موجود

التمرين السادس عشر :

لتكن المجموعة

$$A = \left\{\frac{n+2}{n-1}\ ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right\}$$

(1) بين ان $\inf A = 1\ , supA = 4$

(2) هل $\max A\ \ \min A$ موجودة ؟

(3)

$$B = \left\{\frac{1}{4} + \frac{n+2}{n-1}\ ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right\}$$

عين $\inf B\ , supB$

$$C = \left\{\frac{1}{4}, \frac{n+2}{n-1}\ ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right\}$$

عين $supC$

الحل

$$\frac{n+2}{n-1} = 1 + \frac{3}{n-1}$$

$$\forall n \geq 2 \Rightarrow n-1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n-1} \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{n-1} \leq 3$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{3}{n-1} \leq 4$$

ومنه $supA = 4$

وبمان $4 \in A$ اذا $maxA = 4$

$$\forall n \geq 2 \Rightarrow n-1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{n-1} > 0 \Rightarrow \frac{3}{n-1} > 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{3}{n-1} > 1$$

ومنه $infA = 1$ وبمان $1 \notin A$ اذا $minA$ غير موجود

$$B = \left\{\frac{1}{4} + \frac{n+2}{n-1}\ ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right\} = \underbrace{\left\{\frac{n+2}{n-1}\ ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right\}}_{A} + \underbrace{\left\{\frac{1}{4}\right\}}_{D}$$

$$supB = supA + supD = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

$$infB = infA + infD = +\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$C = \left\{\frac{1}{4}, \frac{n+2}{n-1}\ ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right\}$$

$$C = \left\{\frac{1}{4}, \frac{n+2}{n-1}\ ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right\} = \underbrace{\left\{\frac{n+2}{n-1}\ ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right\}}_{A} \cup \underbrace{\left\{\frac{1}{4}\right\}}_{D}$$

$$supC = sup(A \cup D) = maxs(upA, supD) = max\left(4, \frac{1}{4}\right) = 4$$

سلسلة تمارين رقم 1(المنطق الرياضي – المجموعات – العلاقات – التطبيقات)

التمرين الاول :

(1)هل القضايا التالية صحيحة ?

ا) $1-1=0$ او $\frac{1}{2} \in \mathbb{N}$

ب) $x \in \emptyset \Longrightarrow x \in E$

(2) اكتب نفي القضيتين (ا) و (ب) وكذا عكس النقيض ل (ب)

اكتب القضية (ا) على شكل استلزام

التمرين الثاني :

لتكن A و B و C و D اجواء للمجموعة E اثبت ان

(1) $A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow A \subset C_E^B$

(2) $A \subset B \Longleftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$

(3) $A \subset B \quad C \subset D \Longrightarrow A \cap C \subset B \cap B$

التمرين الثالث :

لتكن A و B و C اجواء للمجموعة E اثبت ان

(1) $A \cup B = A \cup C \quad A \cap B = A \cap C \Longrightarrow B = c$

(2) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

التمرين االرابع :

لتكن A و B اجواء للمجموعة E اثبت ان

(1) $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$ (2) $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$

(3) $A - B = A \cap C_E^B$

*(4) $(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{C \cup \bar{A}}) = \phi$ و $(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{C \cap \bar{A}}) = E$

التمرين الخامس :

لتكن $\mathcal{P}(E)$ مجموعة احزاء المجموعة E و f تطبيق من $\mathcal{P}(E)$ في $\mathcal{P}(E)$

ويحقق :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ A \cap B = \phi \Longrightarrow f\ (A \cup B) = f(A) + f(B)$$

(1) اثبت ان $f(\phi) = 0$

(2) اثبت انه اذا كان $A \cap B \neq \phi$ فان

$$f\ (A \cup B) = f(A) + f(B) - f\ (A \cap B)$$

(3) احسب $f\ (A \cup B \cup C)$ حيث $A, B\ , C \in \mathcal{P}(E)$

التمرين السادس :

ليكن f تطبيق من E في F و $A\ , B$ مجموعتين جزئيتين من E و D, C من F

(1) اثبت ان $A \subset B \Longrightarrow f\ (A) \subset f(B)$

و $C \subset D \Longrightarrow f^{\ -1}(C) \subset f^{\ -1}(D)$

(2) اثبت ان $f\ (A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

و $f^{\ -1}\ (C \cup D) = f^{\ -1}(C) \cup f^{\ -1}\ (D)$

(3) اثبت ان $f\ (A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

و $f^{\ -1}\ (C \cap D) = f^{\ -1}(C) \cap f^{\ -1}\ (D)$

التمرين السابع :

ليكن f تطبيق من E في F و $A\ , B$ مجموعتين جزئيتين من E و D, C من F

(1) اثبت ان $f^{\ -1}\ (C \cap D) = f^{\ -1}(C) \cap f^{\ -1}\ (D)$

(2) اثبت ان $f^{\ -1}\ (C_F^B) = C_F^{f^{\ -1}(C)}$

التمرين الثامن :

ليكن تطبيق معرف كمايلي

$$f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{x+1}{x-2}$$

(1) بين ان f تطبيق متباين هل f غامر ؟

(2) نعتبر g تطبيق من $\mathbb{R}-\{2\}$ في $\mathbb{R}-\{a\}$ $g(x) = f(x)$

عين قيمة a حتى يكون g غام في هذه الجالة عين g^{-1}

(3) ليكن تطبيق معرف كمايلي

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (3)$$

$$x \to 2x+3$$

عين $h \circ g$ هل يمكن تعيين $g \circ h$ علل

التمرين التاسع :

ليكن التطبيقين f , g حيث f من E في F و g منF في G

بين ان :

(1) f متباين $\Longrightarrow$ $g \circ f$ متباين

(2) g متباين $\Longrightarrow$ fغاتر و $g \circ f$ متباين

(3) g غامر $\Longrightarrow$ $g \circ f$ غامر

(4) f غامر $\Longrightarrow$ g متباين و $g \circ f$ غاتر

التمرين العاشر :

ليكن f تطبيق من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ معرف كمايلي

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

(1) هل f متباين ؟ هل f غامر ؟

(2) ليكن $I = [0,\infty[$ عين $f(I)$ صورة I بالتطبيق f

(3) بين ان f تقابلي من I نحو مجال يطلب تحديده

(4) عين $f^{(2)} = f \circ f$ $f^{(3)} = f \circ f \circ f$ ثم استنتج

$$f^{(n)} = f \circ f \circ \ldots \quad \circ \ f$$

التمرين الحادي عشر :

$\mathfrak{R}$ علاقة قي $\mathbb{Z}$ معرفة كمايلي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}, x\, \mathfrak{R} y \iff 7 \text{ مضاعف ل } x - y$$

(1) بين ان $\mathfrak{R}$ علاقة تكافؤ قي $\mathbb{Z}$

(2) ليكن $a \in \mathbb{Z}$ عين صنف تكافؤ a

(3) عين مجموعة حاصل قسمة مجموعة اصناف التكافؤ $\mathbb{Z} \,/\, \mathfrak{R}$

التمرين الثاني عشر :

$\mathfrak{R}$ علاقة قي $\mathbb{R}$ معرفة كمايلي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\, \mathfrak{R} y \iff x^3 - y^3 = x - y$$

(1) بين ان $\mathfrak{R}$ علاقة تكافؤ قي $\mathbb{R}$

(2) ليكن $a \in \mathbb{R}$ عين صنف تكافؤ a

(3) عين صنف تكافؤ $\frac{1}{2}$

التمرين الثالث عشر :

لتكن E مجموعة و $\mathcal{P}(E)$ مدموعة اجزاء المجموخة E

ولتكن $\mathfrak{R}$ علاقة قي $\mathcal{P}(E)$ معرفة كمايلي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\, \mathfrak{R} y \iff x^3 - y^3 \geq 0$$

(1) بين ان $\mathfrak{R}$ علاقة ترتيب قي $\mathbb{R}$

(2) هل $\mathfrak{R}$ علاقة ترتيب كلي قي $\mathbb{R}$?

التمرين الرابع عشر :

لتكن E مجموعة و $\mathcal{P}(E)$ مدموعة اجزاء المجموخة E

ولتكن $\mathfrak{R}$ علاقة قي $\mathcal{P}(E)$ معرفة كمايلي

$$\forall\, A,B \in \mathcal{P}(E), \qquad A\,\Re B \iff A \subset B$$

(1) بين ان $\Re$ علاقة ترتيب في $\mathcal{P}(E)$

(2) هل $\Re$ علاقة ترتيب كلي في $\mathcal{P}(E)$ ؟

التمرين الخامس عشر :

عين $supA$, infA , maxA minA في كل حالة

(1) $A = \{-x^2 + 2x, x \in \,]1,2[\}$

(2) $A = \left\{1 + \dfrac{(-1)^n}{n} \;; n \in \mathbb{N}^*\right\}$

(3) $A = \left\{\dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{2n+1} \;; n \in \mathbb{N}^*\right\}$

$(4)^*$ $A = \{x \in \mathbb{R} \;;\; x^3 > 8\}$

الدوال العددية لمتغير حقيقي

1 – عموميات

1 – 1 تعريف : نسمي دالة عددية لمتغير حقيقي كل علاقة من $E \subseteq \mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ ترفق بكل عنصر من E بعنصر على الاكثر من $\mathbb{R}$ ونرمز لها بالرمز $f, g, h, \ldots$

$$f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

1 – 2 مجموعة تعريف دالة : هي مجموعة الاعداد الحقيقيةالتي لها صورة بالدالة f ونرم لها بالرمز D_f

امثلة

(1) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ معرفة على $\mathbb{R}$ ومنه $D_f = \mathbb{R}$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 3}$ معرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

(3) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ معرفة على المجال $[-1,1]$ ومنه $D_f = [-1,1]$

ملاحظات :

(1) دوال كثيرات الحدود معرفة على $\mathbb{R}$

(2) الدوال الناطقة معرفة اذا كان المقام غير معدوم

(3) دالة الجذر معرفة اذا كان ما داخل الجذر موجب

(4) الدوال $x \longrightarrow cos(x)$ $x \longrightarrow sin(x)$ معرفة على $\mathbb{R}$

1 – 3 بيان دالة :

تعريف : نسمي بيان الدالة f مجموعة النقط $M(x, y)$ حيث $\{(x, y), x \in D_f, y = f(x)\}$ ونرمز لها بالرمز Γ ونكتب

$$\Gamma = \{(x, y), x \in D_f, y = f(x)\}$$

2 – الدوال الزوجية – الفردية – الدورية

fزوجية $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in\ D_f : -x \in\ D_f\, ; f(-x) = f(x)$

fفردية $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in\ D_f : -x \in\ D_f\, ; f(-x) = -f(x)$

fدورية $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in\ D_f : x + r \in\ D_f\, ; f(x + r) = f(x)$

ملاحظة : اذا كانت f زوجية (فردية على التوالي) فان بيانها متناظربالنسبة

لمحور الترتيب (للمبدا على التوالي) يكفي دراسة دالة زوجية او فردية على D_f

$D_f \cap \mathbb{R}_+$ ثم اتمام بيان f بالتناظر

ملاحظة : (1) اذا كانت f دورية يكفي دراستها مجال طوله الدور

(2) توجد دوال دوؤية (غير ثابة) ليس لها دور

مثلا

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

الدوال الرتيبة – الدوال المحدودة :

fمتزايدة $\Leftrightarrow$ $\forall\, x, y \in\ D_f : x \leq y\ \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

fمتزايدة $\Leftrightarrow$ $\forall\, x, y \in\ D_f : x \leq y\ \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

fثابة $\Leftrightarrow$ $\forall\, x, y \in\ D_f : x \leq y\ \Rightarrow f(x) = f(y)$

f رتيبة $\Leftrightarrow$ fمتزايدة او fمناقصة

fثابة $\Leftrightarrow$ $\forall\, x, y \in\ D_f : x \leq y\ \Rightarrow f(x) = f(y)$

fمحدودة من الاعلى $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in E\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}\ \ f(x)\ \leq \alpha$

fمحدودة من الاسفل $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in E\ \exists\, \beta \in \mathbb{R}\ \ f(x) \geq\ \beta$

fمحدودة $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in E\ \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \ \beta \leq f(x)\ \leq \alpha$

ملاحظة :

$$M = \sup_{x \in E} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in E\ \ , f(x) \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, \qquad M - \varepsilon < f(x) \end{cases}$$

$$\inf_{x\in E} f(x) = m \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in E \ \ , f(x) \geq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, \qquad f(x) < m + \varepsilon \end{cases}$$

مثلا

$$f(x) = sinx$$

$$f(\mathbb{R}\,) = [0,1] \ \ \underset{x\in\mathbb{R}}{sup}\, f(x) \ = 1$$

عمليات على الدوال :

نشيرب $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ الى مجموعة الدوال من $\mathbb{R}$ $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$

من اجل كل $f, g \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ من اجل كل $\lambda \ \in \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ \ , \qquad g(x) \neq 0$$

ملاحظة : $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ $x \ \in \ E \subset \mathbb{R}$

تمرين 1 : عين مجموعة تعريف الدوال التالية

$$(1) f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad (2)^* \quad f(x) = \frac{x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-1}}$$

الحل

$f(x) = \sqrt{4-x^2},$ معرفة $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}\; 4 - x^2 \geq 0$

$\mathrm{x}\in [-2,2] \Leftrightarrow$

$$D_f = [-2,2]$$

تمرين 2 : بين ان f دورية وعين دوؤها في حالة

$$(1) f(x) = \cos 2x - 4cosx, (2) f(x) = \frac{1}{3} sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(3) f(x) = sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

تمرين 3 : ادرس زوجية او فردية الدوال النالية

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad f(x) = \frac{sin^2(x) + cos3x}{x^2} \quad = \frac{1}{x} ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

$$, \quad f(x) = \frac{1}{x} ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \quad , \quad f(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$$

النهايات

النهاية المنتهية عند عدد حقيقي :

تعريف 1 : ليكن $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة على مجال مفتوح I يشمل a

نقول ان b نهاية ل f عند a ونرمز لها بالرمز $\lim_{x \to a} f(x) = b$ اذا كان

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

تعريف 2 : ليكن $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة على مجال مفتوح I يشمل a

نقول ان b نهاية ل f على يمين a ونرمز لها بالرمز $\lim_{\substack{> \\ x \to \alpha}} f(x) = b$ ا كان

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < x - a < \alpha \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

تعريف 3 : ليكن $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة على مجال مفتوح I يشمل a

نقول ان b نهاية ل f على يسار a ونرمز لها بالرمز $\lim_{\substack{< \\ x \to \alpha}} f(x) = b$ ا كان

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < a - x < \alpha \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

مثال :

اثبت ان $\lim_{\substack{> \\ x \to 2}} x^2 = 4$

من اجل $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 2||x + 2| < \varepsilon$$

من اجل $x \in]1,3[$ لدينا $1 < x < 3$

ومنه $|x+2| < 5$ و $|x-2| < 1$

$$|x+2| < 5 \Leftrightarrow |x-2||x+2| < 5|x-2| < 5\alpha$$

يكفي اختيار $5\alpha < \varepsilon$ يعني $\alpha < \frac{\varepsilon}{5}$

ومنه اذا اخذنا $\alpha < \frac{\varepsilon}{5}$ نحصل على

$$|x-2| < \alpha \Longrightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$$

مثال :

اثبت ان $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \sqrt{x-1} = 0$

ل الاثبات ان $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \sqrt{x-1} = 0$ نتحقق من صحة مايلي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < x - 1 < \alpha \Longrightarrow \left|\sqrt{x-1}\right| < \varepsilon$$

لدينا

$$\left|\sqrt{x-1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < x - 1 < \varepsilon^2$$

ومنه

$$0 < x - 1 < \varepsilon^2 \Longrightarrow \left|\sqrt{x-1}\right| < \varepsilon$$

اذا اخذنا

$\alpha \leq \varepsilon^2$ نحصل على الاستلزام التالئ

$$0 < x - 1 < \alpha \Longrightarrow \left|\sqrt{x-1}\right| < \varepsilon$$

النهايات غير المنتهية عند عدد حقيقي :

تعريف 4 : لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0 , x_0 + a[$

تكون نهاية f عند x_0 على يمين هي $+\infty$ اذا وفقط اذا تحقق مايلي :

$$\forall b > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < x - x_0 < \alpha \Longrightarrow f(x) > b$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = +\infty$$

تعريف 5 : لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0 - a\ ,\ \ x_0\ [$

تكون نهاية f عند x_0 على اليسار هي $\infty +$ اذا وفقط اذا تحقق مايلي :

$$\forall b > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < \ x_0 \ - x < \alpha \Longrightarrow f(x) > b$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = +\infty$$

تعريف 6 : ليكن $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة على مجال مفتوح I يشمل x_0

تكون نهاية f عند x_0 هي $\infty +$ اذا وفقط اذا تحقق مايلي :

$$\forall b > 0, \exists \alpha > 0 : \ |\ x - x_0\ | < \alpha \Longrightarrow f(x) > b$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

النهايات عند $\infty +$ او $-\infty$:

تعريف 7 :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists b > 0 : x > b \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall a > 0, \exists b > 0 : x > b \Longrightarrow f(x) > a$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall a > 0, \exists b > 0 : x < -b \Longrightarrow f(x) < -a$$

نظريات الاولية على النهايات :

لتكن f و g دالتان عدديتان $l' \ , l, x_0$ اعداد حقيقية

نقبل بدون برهان النظربات التالية

نهاية مجموع دالتين :

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

نهاية جداء دالتين :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \times g(x)$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	∞	0
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞	ح ع ت	ح ع ت

حالات عدم التعيين : هناك اربع حالات عدم التعيين و هي

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0\times\infty, \quad +\infty-\infty$$

نهاية دالة كثير حدود او دالة ناطقة عند $+\infty$ او $-\infty$:

النهاية عند $+\infty$ او $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية الحد درجةالاكبر عند

$+\infty$ او $-\infty$

النهاية عند $+\infty$ و$-\infty$ ا لدالة ناطقة هي نهايه حاصل قسمة الحدين الاكبر درجة

عند $+\infty$ او $-\infty$

مثال

$$\lim_{x\to+\infty} x^3+x^2+2x-5 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3} \qquad (2)$$

نهاية دالة مركبة : f , g دالتان عدديتان c, b , a اعداد حقيقية او $+\infty$

او $-\infty$ واذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = b$ و $\lim_{x\to b} g(x) = c$

فان $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$

مثال

$\lim_{x\to\infty} tan\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}\right)$ نضع $h(x) = tan\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}\right)$ $f(x) = \frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}$

$g(x) = tanx$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} g(x) = 1$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = \lim_{x\to\infty} tan\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

النهايات والمقارنة : h, g, f ثلاث دوال معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$

(1) اذا كانت $\forall x \in I, g(x) \le f(x)$ وكانت $lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ فان

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

(2) اذا كانت $\forall x \in I, g(x) \ge f(x)$ وكانت $lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ فان

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

(3) اذا كانت $\forall x \in I, h(x) \le g(x) \le f(x)$ وكانت

$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} f(x) = l$ فان $\lim_{x\to a} g(x) = l$

ملاحظة : تبقى هذه القواعد صحيحة من اجل $+\infty$ $-\infty$

امثلة : (1) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x) = x + sinx$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ -1 \le sinx \le 1 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ x-1 \le x+sinx \le x+1$$

بمان $\lim_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ فان $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

بمان $\lim_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$ فان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(2) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ب $f(x) = \frac{sinx}{x}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* -1 \leq sinx \leq 1 \Longrightarrow \forall x \in]0,+\infty[\quad \frac{-1}{x} \leq \frac{sinx}{x} \leq \frac{1}{x}$$

بمان $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{x}$ فان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{sinx}{x} 0$

تمرين 1 : بين ان

$$(1) \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x} = 0, \qquad (2) \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{1}{x^2-1}$$

$$(3) \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{1}{x^2-1}$$

(1) باستعمال التعريف

(2)باستعمال النظريات على النهايات

الحل

(1) باستعمال التعريف

$$(1) \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x} = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : x > A \Longrightarrow \left|\frac{1}{1+x}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{1+x}\right| < \varepsilon \Longrightarrow \frac{1}{1+x} < \varepsilon \Longrightarrow 1 + x > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

اذا اخذنا $0 < \alpha < \frac{1}{\varepsilon} - 1$ نحصل على الاستبزام التالي

$$x > A \Longrightarrow \left|\frac{1}{1+x}\right| < \varepsilon$$

وبالتالي $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x} = 0$

تمرين 2 : احسب النهايات التالية

$$(1) \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}, \qquad (2) \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1},$$

$$(3)^* \lim_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x^3+1}$$

الحل

$$(1) \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}x^2+2x+4=12$$

$$(2) \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(x+1)^2}=\frac{3}{4}$$

تمرين 3 : احسب النهايات التالية

$$(1) \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \qquad (2) \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$$

$$(4)^* \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} \qquad (3)^* \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

الحل

$$(1) \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

$$(2) \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\left(\sqrt{x+7}+3\right)\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\left(\sqrt{x+7}+3\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\left(\sqrt{x+7}+3\right)\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\left(\sqrt{x+7}+3\right)\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{3}{2}$$

*تمرين 4 : احسب النهايات التالية

$$(1)\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x+1 \qquad (2)^* \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}-x+1$$

$$(3)\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1} \quad (4)^* \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$$

$$(5)\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}} \qquad (6)^* \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}{x}$$

الحل

$$(1)\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x+1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-(x-1)\right)\left(\sqrt{x^2+x}+(x-1)\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+(x-1)\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)}$$

$$=\frac{3}{2}$$

$$(3)\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

$$=\frac{3}{2}$$

$$(5)\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}}\right)} = 0$$

تمرين 5 : احسب النهايات التالية

$$(1) \lim_{x\to 0} \frac{x.sinx}{1-cosx} \qquad (2)^* \quad \lim_{x\to 0} \frac{.tan2x}{\sqrt{1-cosx}}$$

$$(3) \quad \lim_{x\to 0} \frac{sinx-.tanx}{x^3} \qquad (4)^* \quad \lim_{x\to 0} \frac{.sin2x + sinx}{sinx - sin2x}$$

الحل

$$(1) \lim_{x\to 0} \frac{x.sinx}{1-cosx} = \lim_{x\to 0} \frac{2x.cos\left(\frac{x}{2}\right) sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{.cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{2\ sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \lim_{x\to 0} \frac{sinx-.tanx}{x^3} = \quad \lim_{x\to 0} \frac{sinx[cosx-.1]}{x^3 cosx} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx\left[-2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{x^3 cosx}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} \times \frac{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \times \frac{1}{cosx} = -\frac{1}{2}$$

الاستمرار

الاستمرار عند نفطة x_0

تعريف 1 : لتكن f دالة معرفة على مجال $I \subset \mathbb{R}$ يشمل x_0

f دالة مستمرة عند x_0 اذا تحقق $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

مثال : لتكن f دالة معرفة ب

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 2$$

ومنه f مستمرة عند 0

الاستمرار على يمين x_0

تعريف 2 : لتكن f دالة معرفة على مجال $[x_0, \ x_0 + \alpha[$ حيث $\alpha > 0$

f دالة مستمرة على يمين x_0 اذا تحقق $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$

مثال : لتكن f دالة معرفة

$$f(x) = \sqrt{x - 2}\text{-}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} = \sqrt{x - 2} = 0 = f(2)$$

الاستمرار على يسار x_0

تعريف3 : لتكن f دالة معرفة على مجال $]x_0 - \alpha , \quad x_0]$ حيث $\alpha > 0$

f دالة مستمرة على يسار x_0 اذا تحقق $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$

مثال : لتكن f دالة معرفة

$$f(x) = \sqrt{1 - x}\text{-}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} = \sqrt{1 - x} = 0 = f(1)$$

تعريف 4 : لتكن f دالة معرفة على مجال $I \subset \mathbb{R}$

f دالة مستمرة عند x_0 اذا تحقق $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$

الاستمرار على مجال :

تعريف 5 : لتكن f دالة معرفة على مجال $I \subset \mathbb{R}$

(1) – f دالة مستمرة على المجال $I \subset \mathbb{R}$ اذا كانت f مستمرة عند اي نقطة من I

(2) – f دالة مستمرة على المجال $]a, b[$ اذا كانت f مستمرة عند اي نقطة منه

(3) – f دالة مستمرة على المجال $[a, b[$ اذا كانت f مستمرة على المجال $]a, b[$ و عند a على اليمين

(4) – f دالة مستمرة على المجال $]a, b]$ اذا كانت f مستمرة على المجال $]a, b[$ وعند b على اليسار

(5) – f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ اذا كانت f مستمرة على المجال $]a, b[$ و عند a على اليمين وعند b على اليسار

مثال :

(1) دوال كثيرات الحدودمستمرة على $\mathbb{R}$

(2) الدوال الناطقة مستمرة على مجموعة تعريفها

(3) الدوال $x \to cosx$, $x \to sinx$ مستمرة على $\mathbb{R}$

التمديد يالاستمرار :

تعريف 5 : لتكن f دالة معرفة على مجال $I \subset \mathbb{R}$ لا يشمل x_0

اذا كانت $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ فان الدالة g المعرفة كمايلي

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq x_0 \\ l, & x = x_0 \end{cases}$$

تسمى تمديد يالاستمرار ل f عند x_0

مثال : لتكن f دالة معرفة ب

$$f(x)=\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}$$

اوجد g تمديد يالاستمرار ل f عند 1

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 1}-\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{2}$$

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & ,x\neq 1\\ -\frac{1}{2}, & x=1\end{cases}$$

مثال : لتكن f دالة معرفة

$$f(x)=\frac{sinx}{x}$$

اوجد g تمديد يالاستمرار ل f عند 0

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$$

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & ,x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

نظريات على الدوال المستمرة :

f و g دالتان عدديتان

نظرية 1 : اذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ وكانت g مستمرة عند l فان

$$\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big)=g(l)$$

الاثبات :

g مستمرة عند l حسب تعريف النهاية نجد

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0:|y-l|<\alpha\Longrightarrow|g(y)-g(l)|<\varepsilon$$

وبمان l نهاية f عند x_0 فانه يوجد $\alpha'>0$ بحيث

$$|x-x_0|<\alpha'\Longrightarrow|f(x)-l|<\alpha$$

وبالتالي يكون

$$|x-x_0|<\alpha' \Longrightarrow |f(x)-l|<\alpha \ \Longrightarrow |g(y)-g(l)|<\varepsilon$$

اذا

$$\forall \varepsilon>0, \exists \alpha^{'}>0 \ |x-x_0|<\alpha' \Longrightarrow |g(y)-g(l)|<\varepsilon$$

ومنه $\lim\limits_{x\to x_0} g\big(f(x)\big)=g(l)$

استمرار دالة مركبة :

نظرية 2 : اذا كانت f مستمرة عند x_0 وكانت g مستمرة عند $f(x_0)$ فان

gof مستمرة عند x_0

الاثبات :

لدينا

من جهة f دالة مستمرة عند x_0 اذا تحقق $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0\ )$

من جهة اخرى $\lim\limits_{x\to x_0} g\big(f(x)\big)=g\big(f(x_0\ )\big)$

وحسب النظرية 1 نجد $\lim\limits_{x\to x_0}(gof)(x)=(gof)(x_0)$

اذا الدالة gof مستمرة عند x_0

نظرية 2 : اذا كانت f و g مستمرتان عند x_0 و k عدد حقيقي فان

$kf, f\times g, f+g$ دوال مستمرة عند x_0 واذا كانت $g(x_0)\ \neq 0$

$\dfrac{f}{g},\dfrac{1}{g}$ مستمرتان عند x_0

نظرية القيم المتوسطة : اذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ وكان

$f(a)\times f(b)<0$ فانه يوجد على الاقل $c\in\ ]a,b[$ بحيث $f(c)=0$

مثال :

بين ان المعادلة $x^3+x+1=0$ تقبل حلا على المجال $[-1,0]$

الحل :

$$f(x) = \quad x^3 + x + 1$$

f دالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على المجال $[-1,0]$

$$f(-1) = \quad -1^3 - 1 + 1 = -1,$$
$$f(0) = \quad 0^3 + 0 + 1 = 1$$

$$f(-1) \times f(0) = -1 < 0$$

حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $x^3 + x + 1 = 0$

تقبل حلا على المجال $[-1,0]$

نظرية : اذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ وكان k عدد حقيقي

محصور بين $f(b)$ و $f(a)$ فانه يوجد على الاقل $c \in [a,b]$ بحيث $f(c) = k$

الاثبات :

من اجل $k = f(a)$ يكفي اخذ $c = a$

من اجل $k = f(b)$ يكفي اخذ $c = b$

من اجل $f(a) < k < f(b)$ $f(b) < k < f(a)$ نضع

$$g(x) = f(x) - k$$

g مستمرة على المجال $[a,b]$ لانها مجموع دالتين مستمرتين على $[a,b]$

و $g(a) \times g(b) < 0$

حسب نظرية القيم المتوسطة فانه يوجد على الاقل

$c \in [a,b]$ بحيث $g(a) = f(c) - k = 0$

بمعنى ان $f(c) = k$

مثال : بين ان المعادلة $4\,xcosx = 1$ تقبل حلا على المجال $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على المجال $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل :

$$f(x) = 4xcosx - 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\frac{\pi}{3}cos\frac{\pi}{3} - 1 = 2\frac{\pi}{3} - 1 > 0,$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi}{2} - 1 = -1 < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \times f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $4xcosx - 1 = 0$

تقبل حلا على المجال $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

نتيجة : اذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة على المجال $[a, b]$ وكان k

عدد حقيقيا محصور بين $f(b)$ و $f(a)$ فانه يوجد $c \in [a, b]$ وحيد

بحيث $f(c) = k$

صورة مجال بواسطة دالة مستمرة :

لتكن الدالة f معرفة ومستمرة المجال $I \subset \mathbb{R}$ محدود او غير محدود

صورة المجال I بالدالة f المجال هو $f(I)$ المعرف كمايلي

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in I : \ y = f(x)\}$$

نظرية : اذا كانت f مستمرة على مجال I فان صورة I بالدالة f هو مجال من $\mathbb{R}$

تمرين محلول

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

f مستمرة على كل مجال I حيث $I \subset]-\infty, 1[$ او $I \subset]1, +\infty[$

اذا كان $I =]0,1[$ فان $f(I) =]-\infty,-1[$

اذا كان $I = [-1,0]$ فان $f(I) = [-1,0]$

اذا كان $I = [2,+\infty[$ فان $f(I) =]1,3]$

تمارين محلولة

تمرين 1 : α عدد حقيقي f الدالة العددية المعرفة كمايلي

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ , & x \geq 0 \\ x + \alpha\ , & x < 0 \end{cases}$$

عين قيمة α حتى تكون f مستمرة على $\mathbb{R}$

الحل

اذا كان $x \geq 0$ فان $f(x) = x^2$ مستمرة لانها دالة مربع

اذا كان $x < 0$ فان $f(x) = x + \alpha$ مستمرة لانها دالة تالفية

حتى تكون fمستمرة على $\mathbb{R}$ يجب ان تكون مستمرة عند 0

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 = 0 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x + \alpha = \alpha = f(0)$$

حتى تكون fمستمرة على $\mathbb{R}$ يجب ان تكون $\alpha = 0$

تمرين 2 : لتكن f الدالة العددية المعرفة كمايلي

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x - 3}{x - 1}$$

بين ان f تقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0 = 1$

الحل

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + x - 3)(x - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} x^2 + x - 3 = -1$$

ومنه f تقبل الدالة g تمديد بالاستمرار عند $x_0 = 1$ والمعرفة كمايلي

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+2x-3}{x-1} \quad , & x \neq 1 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$

*تمرين 3 : لتكن f العددية المعرفة كمايلي

$$f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$$

بين ان f تقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0 = 0$

*تمرين 4 : لتكن f الدالة العددية المعرفة كمايلي

$$f(x) = \pi \frac{cos^2(x) - cosx}{2cos^2(x) - 3cosx + 1}$$

بين ان f تقبل التمديد بالاستمرار عند $x_0 = 0$

*تمرين 5 : لتكن f الدالة العددية المعرفة كمايلي

$$f(x) = \begin{cases} x - \alpha \quad , & x \geq 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{sinx} \quad , & x < 0 \end{cases}$$

عين قيمة α حتى تكون f مستمرة عند $x_0 = 0$

الدوال العكسية

الدالة العكسية لدالة مستمرة ورتيبة :

نظرية : اذا كانت f مستمرة وؤتيبة تماما على مجال I فان f تقبل دالة عكسية

f^{-1} لها الخواص التالية :

الدالة f^{-1} معرفة على المجال $f(I)$ وتاخذ قيمها في المجال I

الدالة f^{-1} مستمرة وؤتيبة تماما على المجال $f(I)$ ولها نفس اتجاه

تفيرالدالة f

الاثبات :

$f(1)$رتيبة تماما على I $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Leftrightarrow$ f متباين على I

(2)اذا كانت f دالة مستمرة على I من $\mathbb{R}$ عندئذ f غامر من I في $f(I)$

بالفعل. حسب تعريف $f(I)$ صورة المجال I بواسطة الدالة المستمرة f

$$\forall y \in f(I) \quad , \exists x \in I: y = f(x)$$

مما يعني ان f غامر من I في $f(I)$

ومنه اذا كانت f مستمرة ورتيبة تماما على مجال I

فان fتطبيق تقابلي من I في $f(I)$ وعليه فهي تقبل تطبيق عكسي f^{-1}

معرف $f(I)$ نحو I

الدالة f^{-1} تطبيق تقابلي من $f(I)$ في I اذن فهي مستمرة وؤتيبة تماما على

مجال $f(I)$

$\forall y_1, y_2 \in f(I)$ بحيث$y_1 \neq y_2$ $\exists x_1, x_2 \in I: y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$

وهذا يكافي ايظا

$x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$ فيكون لدينا مع ملاحظة $x_1 \neq x_2$

$$\frac{f^{-1}(\,y_1)\ \ x_2 - \ f^{-1}(y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{x_1 - x_2}{f(\,x_1) - \ f(x_2)} = \frac{1}{\frac{f(\,x_1) - \ f(x_2)}{x_1 - x_2}}$$

مما يعني ان f^{-1} لها نفس اتجاه تغير f

مثال : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

عين $f([0,+\infty[)$ صورة المجال $[0,+\infty[$ بالدالة f

بين ان f تقبل دالة عكسية على المجال $[0,+\infty[$ يطلب تعينها

الحل :

تعيين$f([0,+\infty[)$

$$f(0) = -1, \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

ومنه $f([0,+\infty[) = [-1,1[$

f مستمرة على $[0,+\infty[$ لانها دالة ناطقة

f دالة متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$ لان

$$\frac{f(\,x_1) - \ f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{2(x_1 + x_2)}{({x_1}^2 + 1)({x_2}^2 + 1)} > 0$$

بمان f دالة مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $[0,+\infty[$

فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال $[-1,1[$ نحو المجال $[0,+\infty[$

$$\forall y \in [-1,1[\ \exists x \in [0,+\infty[\ : y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y+1}{1-y}} \quad \vee\, x = -\sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$$

بمان $x \in [0,+\infty[$ فان $x = \sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$ فالدالة العكسية f^{-1} معرفة كمايلي

$$f^{-1}: [-1,1[\ \rightarrow [0,+\infty[$$

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$$

الدوال المثلثية ودوالها العكسية :

الجيب وقوس الجيب $(Arcsin, sin)$:

نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي :

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1,1]$$

$$x \rightarrow f(x) = sinx$$

بمان f دالة مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال$[-1,1]$ ونرمز لها بالرمز

$Arcsinx$ فهي مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $[-1,1]$

وتاخذ قيمها في المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ حيث

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ , \forall y \in [-1,1] \ y = sinx \Leftrightarrow x = Arcsiny$$

الجيب التمام وقوس الجيب التمام $(Arccos, cos)$:

نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي :

$$f: [0,\pi] \ \rightarrow [-1,1]$$

$$x \rightarrow f(x) = cosx$$

بمان f دالة مستمرة ورتيبة تماما (متناقصة تماما) على المجال $[0,\pi]$

فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال$[-1,1]$ ونرمز لها بالرمز

$Arccosx$ فهي مستمرة ورتيبة تماما (متناقصة تماما) على المجال $[-1,1]$

وتاخذ قيمها في المجال $[0,\pi]$ حيث

$$\forall x \in [0,\pi] \ ,\forall y \in [-1,1] \ y = cosx \Leftrightarrow x = Arccosy$$

الظل وقوس الظل$(Arctan, tan)$

نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي :

$$f: \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ \to \ ]-\infty,+\infty[$$

$$x \to f(x) = tanx$$

بمان f دالة مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال$]-\infty,\infty[$ ونرمز لها بالرمز

$Arctanx$ فهي مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $]-\infty,\infty[$

وتاخذ قيمها في المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$حيث

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ ,\forall y \in]-\infty,\infty[\ y = tanx \Leftrightarrow x = Arctany$$

نتائج :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \ Arcsin(sinx) = x \quad (1)$$

$$\forall x \in [0,\pi] \ Arcscos(cosx) = x \quad (2)$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ Arctan(tanx) = x \quad (3)$$

$$\forall x \in [-1,1] \ sin(Arcsinx) = x \quad (4)$$

$$\forall x \in [-1,1] \ cos(Arccosx) = x \quad (5)$$

$$\forall x \in]-\infty,+\infty[tan(Arctanx) = x \quad (6)$$

$$\forall x \in [-1,1] \quad (Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (7)$$

$$\forall x \in [-1,1] \quad (Arccosx)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (8)$$

$$\forall x \in]-1,1[\quad (Arctanx)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (9)$$

الاثبات :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \ ,\forall y \in [-1,1]\ y = sinx \Leftrightarrow x = Arcsiny \ \ (1)$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] Arcsin(sinx) = Arcsiny = x$$

$$\forall x \in [0,\pi] \ ,\forall y \in [-1,1]\ y = cosx \Leftrightarrow x = Arccosy \ \ (2)$$

$$\forall x \in [0,\pi]\ Arccos(sinx) = Arccosy = x$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ ,\forall y \in]-\infty,\infty[\ y = tanx \Leftrightarrow x = Arctany \ \ (3)$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[Arctan(tanx) = Arctany = x$$

$$\forall y \in [-1,1]\ sin(Arcsiny) = y \ \ (4)$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \ ,\forall y \in [-1,1]\ y = sinx \Leftrightarrow x = Arcsiny$$

$$\forall y \in [-1,1]\ sin(Arcsiny) = sinx = y$$

$$\forall x \in [-1,1] \quad (Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (7)$$

$$\forall \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \ ,\forall x \in [-1,1]\ y = Arcsinx \Leftrightarrow x = siny$$

$$\Leftrightarrow 1 = (siny)' = y'cosy$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1-(siny)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [-1,1] \quad (Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

تمرين : احسب $Arcsinx$ و $Arccosx$, لكل من $0,1,\frac{\sqrt{2}}{2}$

احسب $Arctanx$ لكل من $0,1,\sqrt{3}$

حسب تعريف قوس الجيب

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \ ,\forall y \in [-1,1]\ y = sinx \Leftrightarrow x = Arcsiny$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \ x = Arcsin0 \Leftrightarrow sinx = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

حسب تعريف قوس الجيب التمام

$$\forall x \in [0,\pi] \ ,\forall y \in [-1,1]\ y = cosx \Leftrightarrow x = Arccosy$$

$$x = Arccos0 \Leftrightarrow 0 = cosx \ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

حسب تعريف قوس الظل

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ ,\forall y \in]-\infty,\infty[\ y = tanx \Leftrightarrow x = Arctany$$

$$x = Arctan0 \Leftrightarrow 0 = tanx \ \Leftrightarrow x = 0$$

حسب تعريف قوس الجيب

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \ ,\forall y \in [-1,1]\ y = sinx \Leftrightarrow x = Arcsiny$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \ x = Arcsin1 \Leftrightarrow sinx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

حسب تعريف قوس الجيب التمام

$$\forall x \in [0,\pi] \ ,\forall y \in [-1,1]\ y = cosx \Leftrightarrow x = Arccosy$$

$$x = Arccos1 \Leftrightarrow 1 = cosx \ \Leftrightarrow x = 0$$

حسب تعريف قوس الظل

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ ,\forall y \in]-\infty,\infty[\ y = tanx \Leftrightarrow x = Arctany$$

$$x = Arctan1 \Leftrightarrow 1 = tanx \ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

حسب تعريف قوس

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ ,\forall y \in [-1,1]\ y = sinx \Leftrightarrow x = Arcsiny$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ \ x = Arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow sinx = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

حسب تعريف قوس الجيب التمام

$$\forall x \in [0,\pi]\ ,\forall y \in [-1,1]\ y = cosx \Leftrightarrow x = Arccosy$$

$$x = Arccos\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = cosx\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

حسب تعريف قوس الظل

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ ,\forall y \in]-\infty,\infty[\ y = tanx \Leftrightarrow x = Arctany$$

$$x = Arctan\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = tanx\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

الدوال الزائدية ودوالها العكسية :

دالة الجيب الزائدي :

الدالة $x \to \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ تسمى دالة الجيب الزائدي ونرمز لها بالرمز $sh(x)$

$$sh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\ ,x \in \mathbb{R}$$

دالة الجيب التمام الزائدي :

الدالة $x \to \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ تسمى دالة الجيب التمام الزائدي ونرمز لها بالرمز $ch(x)$

$$ch(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\ ,x \in \mathbb{R}$$

دالة الظل الزائدي :

الدالة $x \to \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ تسمى دالة الظل الزائدي ونرمز لها بالرمز $th(x)$

$$th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ },x \in \mathbb{R}$$

نتائج :

$$ch^2(x) - sh^2(x) = 1 \quad (1)$$

$$Ch^2(x) - Sh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ ch(x+y) = chxchy + shxshy \quad (2)$$

$$sh(x+y) = shxchy + shychx$$

$$, \quad \forall x \in \mathbb{R}\ ch2x = ch^2(x) - sh^2(x), \qquad sh2x = 2shxchx\ (3)$$

$$ch2x = 2\,ch^2(x) - 1, \qquad ch2x = 2\,sh^2(x) \quad +1$$

(4) الجيب التمام الزائدي دالة زوجية لان $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad ch(-x) = ch(x)$

االجيب الزائدي دالة فردية لان $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad sh(-x) = -sh(x)$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad (shx)' = chx,\ (chx)' = shx \quad (5)$$

$$(thx)' = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$$

الدوال العكسية للدوال الزائدية :

عمدة الجيب الزائدي $(Argsh)$:

لدينا

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad (shx)' = chx > 0$$

وبالتالي

$$sh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to shx$$

مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دالة عكسية

نرمز لها بالؤمز $Argsh$ حيث

$$Argsh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to Argshx$$

وهي مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على $\mathbb{R}$ وتاخذ قيمها في $\mathbb{R}$ وتحقق

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \forall y \in \mathbb{R} \ ; \quad y = shx \Leftrightarrow x = \ Argshx$$

عمدة جيب التمام الزائدي $(Argch)$:

لدينا

$$\forall \ x \ \in \mathbb{R} \quad (chx)' = shx > 0$$

وبالتالي

$$\forall x \in [0, \infty[\quad (chx)' = shx > 0$$

$$ch: [0, \infty[\to [1, \infty[$$

$$x \to chx$$

مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على $]0, \infty[$ فهي تقبل دالة عكسية

نرمز لها بالؤمز $Argch$ حيث

$$Argch: [1, \infty[\to [0, \infty[$$

$$x \to Argchx$$

وهي مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على $]1, \infty[$ وتاخذ قيمها في $]0, \infty[$وتحقق

$$\forall x \in [0, \infty[\ , \forall y \in [1, \infty[\ ; \quad y = chx \Leftrightarrow x = \ Argchx$$

عمدة الظل الزائدي $(Argth)$:

لدينا

$$\forall \ x \ \in \mathbb{R} \quad (thx)' = \frac{1}{ch^2(x)} > 0$$

وبالتالي$\forall x \in \mathbb{R} \quad (thx)' > 0$

$$th: \mathbb{R} \to]-1,1[$$

$$x \to thx$$

مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دالة عكسية

نرمز لها بالؤمز $Argch$ حيث

$$Argth:]-1,1[\to \mathbb{R}$$

$$x \to Argthx$$

وهي مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على $]-1,1[$ وتاخذ قيمها في$\mathbb{R}$وتحقق

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \forall y \in]-1,1[\ ; \quad y = thx \Leftrightarrow x = Argthx$$

نتائج :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ Argshx = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) (1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \forall y \in \mathbb{R} \ ; \quad y = Argshx \Leftrightarrow x = shy = = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} > 0 \qquad e^y = x - \sqrt{x^2+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow y = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Argshx = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ Argchx = ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) (2)$$

$$\forall x \in [1, \infty[\ , \forall y \in [0, \infty[\ ; y = Argchx \Leftrightarrow x = chy$$

$$x = chy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2-1} > 0 \quad \vee \quad e^y = x - \sqrt{x^2-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow y = ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \geq 0 \ \vee \ y = ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) \leq 0$$

$$\forall x \in [1,\infty[Argchx = ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Argshx = ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\forall x \in]-1,1[\quad Argtnx = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (3)$$

$$\forall x \in\in]-1,1[\ , \forall y \in \mathbb{R} \, ; y = Argthx \Leftrightarrow \ x = thy$$

$$x = chy = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

$$\Leftrightarrow e^y - e^{-y} = x(e^y + e^{-y})$$

$$\Leftrightarrow (1-x)e^{2y} = 1 + x$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} = \ \frac{1+x}{1-x} > 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

ومنه $\forall x \in]-1,1[\quad Argtnx = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

تمارين محلولة

تمرين (1) : عين مجموعة تعريف الدوال النالية

$$f(x) = \arcsin(2-x) \qquad\qquad f(x) = argch\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1+x}{x}\right) \qquad\qquad f(x) = arctg\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$$

الحل :

معرفة $f(x) = \arcsin(2-x) \Leftrightarrow \ -1 \leq 2-x \leq 1$

$$\Leftrightarrow -3 \leq -x \leq -1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$$

$$D_f = [1,3]$$

معرفة $f(x) = argch\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right) \Leftrightarrow \ \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 1 \wedge x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x} \geq 0 \wedge x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

$$D_f =]0,+\infty[$$

معرفة $f(x) == \arccos\left(\frac{1+x}{x}\right) \Leftrightarrow \ -1 \leq \frac{1+x}{x} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1+x}{x}\right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1+x}{x}\right|^2 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+x}{x} - 1\right)\left(\frac{1+x}{x} + 1\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(\frac{1+2x}{x}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1+2x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$$

$$D_f = \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$$

تمرين 2 :

بين ان $\quad arctgx + arctg\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in]0,+\infty[$

الحل

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) = arctgx + arctg\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) = c$$

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) = f(1) = 2\, arctg1$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه $\quad \forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) = arctgx + arctg\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

تمرين 3 :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال من [01] نحو [01] كمايلي :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

بين ان f تقابل من المجال [01] نحو [01] ثم عين دالتها العكسية

الحل

f مستمرة على المجال [01] لانها دالة ناطقة

$$f'(x) = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} > 0 \text{ }, \forall\, x\ [01]$$

fرتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال [01]

f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة كمايلي

$$\forall x \in [01], \forall y \in [01\ ]\ \ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 1 - \sqrt{1-y^2}\ < 1\ \vee y = 1 + \sqrt{1-y^2} > 1$$

$$\Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{1-y^2}$$

ومنه

$$f^{-1}: [01]\ \ \to [01]$$

$$x \to f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$$

سلسلة تمارين رقم (2) حول(الدوال العددية

– الاستمرار – لدوال العكسية)

التمرين(1) : عين مجموعة تعريف الدوال التالية

$$(1)\ f(x)=\sqrt{-x^2+5x-4} \qquad (2)\ f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-5x+4}}$$

$$(3) f(x)\sqrt{\frac{x-1}{x^2-5x+4}} \quad (4)\ f(x)=\sqrt{E(x)-x}$$

$$(5)\ f(x)=ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (6)^*\ f(x)=ln[ln(lnx)]$$

$$(7)^* f(x)=\frac{1}{E(x)-x} \quad (8)\ f(x)=ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

$$(9)\ f(x)=e^{\frac{1-x}{1+x}}$$

التمرين(2) : ادرس ان كانت الدوال التالية زوجية او فردية او غير ذالك

$$(1)\ f(x)=\frac{x}{1+|x|} \quad (2)\ f(x)=\sqrt[3]{x^5+x}$$

$$(3) f(x)=ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (4)\ f(x)=|x|(1-3x)(1+3x)$$

$$(5)^* \qquad f(x)=\frac{sin^2(x)-cos3x}{x^2}$$

التمرين(3) :

احسب النهايات التالية

$$(2)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right) \quad (1)\ \lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{sinx}$$

$$(3)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x-2}-(x-1) \qquad (4)\ \lim_{x\to\pi}\frac{1+cosx}{x-\pi}$$

$$(5)^* \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{sinx - cosx}{x - \frac{\pi}{4}} \quad (6)^* \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + x - 2} - (4x - 1)$$

التمرين(4) : (1) ادرس استمرارية f عند $x_0 = 1$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+7} - 3}{\sqrt{2x+2} - 2}, & x \neq 1 \\ \frac{2}{3}, & x = 1 \end{cases}$$

(2) هل الدوال التالية تقبل التمديد بالاستمرار عند 0

$$f(x) = \frac{(1 - cosx)^2}{x^4} \quad f(x) = \frac{sin2x}{\sqrt{x+1} - 1} \quad f(x) = 3x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

التمرين(5) :

بين ان المعادلة $x^4 - 5x + 1 = 0$ تقبل ثلاث حلول كل حل محصور بين

عددين صحيحين متتاليين

التمرين(6)* :

بين ان المعادلة $x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$ تقبل ثلاث حلول كل حل محصور

بين عددين صحيحين متتاليين

التمرين(7) : (1) احسب $Arcsin$, $Arccos$ للقيم التالية $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 0, -1$

(2) احسب $Arctan$, $Arccotan$ للقيم التالية $\sqrt{3}, 1, 0, -1$

$(3)^*$ احسب $Arcsin\left(sin\frac{3\pi}{4}\right), Arccos\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right), Arctan\left(tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

التمرين(8) : اثبت ان

$$(1) \quad Arccos(x) + Arccos(-x) = \pi, \quad x \in [-1,1]$$

$$(2) \quad Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1,1]$$

(3) $Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad x > 0$

(4) $cos\left(Arcsin(x)\right) = \sqrt{1-x^2}\,, \qquad x \in [-1,1]$

(5) $sin\left(Arctan(x)\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(6) $sin\left(Arctan(x)\right) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad , \qquad x \in [-1,1] - \{0\}$

التمرين(9) : نعتبر الدالة f المعرفة كتايلي

$$f(x) = Arccos\left(\frac{2x}{2-x}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) بين ان $\forall x \in D_f \;\; f'(x) = \frac{-4}{(2-x)\sqrt{4-4x-3x^2}}$

(3) شكل جدول تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني

التمرين(10) : نعتبر الدالة f المعرفة كتايلي

$$f(x) = Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) بين ان $\forall x \in D_f \;\; f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2+1}$

(3) شكل جدول تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني

*التمرين(11) : نعتبر الدالة f المعرفة كتايلي

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} Arccos(x)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2)ادرس استمرارية f

(3) عين $f'(x)$

التمرين(12)* : نعتبر الدالة f المعرفة كتايلي

$$f(x) = Arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{x-1}\right) + Arctan\left(x\frac{\sqrt{3}}{4-x}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2)حسب $f(0), f(2), f(5)$ ا

(3) عين $f'(x)$ ثم اوجد عبارة بسيطة ل f

التمرين 13 : اثبت ان

(1) $y = Argch(x) \Leftrightarrow y = ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \ \forall x \in [1, +\infty[$

(2) $y = Argsh(x) \Leftrightarrow y = ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \ \forall x \in]-\infty, +\infty[$

(3) $y = Argth(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-v}\right) \ \forall x \in]-1, 1[$

(4) $y = Argcoth(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{v-1}\right) \ \forall x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

(5) $Argth(x) + Argth(y) = Argth\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \ \forall x, y \in]-1, 1[$

(6) $Argch\left(\sqrt{1+x^2}\right) = Argsh(x) \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[$

(7) $Argsh\left(\sqrt{x^2-1}\right) = Argch(x) \ \forall x \in [1, +\infty[$

(8) $\forall \theta \in]-\infty, +\infty[\ sh(3\theta) = 3sh\theta + 4sh^3\theta$

استنتج ان $Argsh(3x + 4x^2) = 3Argshx$

(9) $$Argsh\left[\sqrt{\frac{1+ch(x)}{2}}\right] - \frac{x}{2} = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

التمرين 14 : بسط العبارات التالية

$$Argth\left(\frac{\sqrt{chx-1}}{\sqrt{chx+1}}\right), Argsh\left(2x\sqrt{x^2+1}\right)\ , Argth\left(\frac{3x+x^2}{1+3x^2}\right)$$

التمرين(15) : نعتبر الدالة f المعرفة كتايلي

$$f(x) = Argth\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f احسب النهايات على اطراف D_f

(2) عين $f'(x)$ شكل جدول تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني

الحلول

التمرين(1) : عين مجموعة تعريف الدوال التالية التالي

$$(1)\ f(x) = \sqrt{-x^2+5x-4} \qquad (2)\ \ f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-5x+4}}$$

$$(3) f(x)\sqrt{\frac{x-1}{x^2-5x+4}}\ (4)\ f(x) = \sqrt{E(x)-x}$$

$$(5)\ f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (6)^*\ \ f(x) = ln[ln(lnx)]$$

$$(7)^* f(x) = \frac{1}{E(x)-x} \quad (8)^*\ f(x) = ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

$$(9)\ \ f(x) = \ e^{\frac{1-x}{1+x}}$$

(1) معرفة $f(x) = \sqrt{-x^2+5x-4} \Leftrightarrow -x^2+5x-4 \quad \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[4,+\infty\right[$$

$$D_f = \left]-\infty,-1\right] \cup \left[4,+\infty\right[$$

(2) معرفة $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-5x+4}} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} : x-1 \geq 0 \\ \wedge \\ x^2-5x+4 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}\ \ x \in \left]1,\infty\right[\\ \wedge \\ \left]-\infty,1\right[\cup \left]4,+\infty\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ \left]4,+\infty\right[$$

$$D_f = \left]4,+\infty\right[$$

(3) معرفة $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-5x+4}} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-5x+4} \geq 0 \\ \wedge \\ x^2-5x+4 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x \in \ ]4,+\infty[$$

$$D_f =]4,+\infty[$$

(4) معرفة $f(x) = \sqrt{E(x) - x} \Leftrightarrow E(x) - x \geq 0$

$$\Leftrightarrow E(x) \geq x \Leftrightarrow x \leq E(x)$$

لكن نعلم ان $\forall x \in \mathbb{R}\ E(x) \geq x$

وعليه

معرفة $f(x) = \sqrt{E(x) - x} \Leftrightarrow E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

$$D_f = \mathbb{Z}$$

(5) معرفة $f(x) = ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{1+x} > 0$

$$\Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-1,1[$$

$$D_f =]-1,1[$$

(9)معرفة $f(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}} \Leftrightarrow 1 + x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

التمرين(2) : ادرس ان كانت الدوال التالية زوجية او فردية او غير ذالك

(1) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ (2) $f(x) = \sqrt[3]{x^5 + x}$

(3)$f(x) = ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ (4) $f(x) = |x|(1-3x)(1+3x)$

(5)* $f(x) = \dfrac{sin^2(x) - cos3x}{x^2}$

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = \dfrac{-x}{1+|-x|} = \dfrac{-x}{1+|x|} = -f(x)$

ومنه fفردية

$$(2)\ \forall x \geq 0\ f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^5 - x} = \sqrt[3]{-x^5 - x} = -\sqrt[3]{x^5 + x}$$

$$= -f(x)$$

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^5 - x} = \sqrt[3]{-x^5 - x} \Leftrightarrow f(-x)^3 = -x^5 - x$$

$$\Leftrightarrow [-f(-x)]^3 = x^5 + x$$

$$\Leftrightarrow -f(-x) = \sqrt[3]{x^5 + x} = f(x)$$

ومنه fفردية

$$(3)\forall x \in]-1,1[\ f(-x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) == -ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\ f(x)$$

ومنه fفردية

$$(4)\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(-x) = |-x|(1+3x)(1-3x) = |x|(1+3x)(1-3x)$$

$$=\ f(x)$$

ومنه f زوجية

التمرين(3) :

احسب النهايات التالية

$$(2)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)\quad (1)\ \ \lim_{x\to+0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{sinx}$$

$$(3)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2 + x - 2} - (x^2 - 1)$$

$$(4)\ \ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{sinx - cosx}{x - \frac{\pi}{4}}\quad (5)\ \ \lim_{x\to\pi}\frac{1 + cosx}{x - \pi}$$

$$(1)\ \lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{sinx}==\lim_{x\to+0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)sinx}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{2x}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)sinx}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{2}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\times\frac{1}{\frac{sinx}{x}}=1$$

$$(2)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(x+1)(x+2)}=0$$

$$(3)\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x-2}-(x-1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x-2}-(x-1)\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}+(x-1)\right)}{\sqrt{x^2+x-2}+(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}+(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{2}$$

$$(4)\lim_{x\to\pi}\frac{1+cosx}{(x-\pi)^2}=\begin{cases} z=x-\pi \\ \lim\limits_{z\to0}\frac{1+cos(z+\pi)}{z^2}\end{cases}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{1-cosz}{z^2}=\lim_{z\to0}\frac{2sin^2z}{z^2}=2$$

التمرين(4) : (1) ادرس استمرارية f عند $x_0=1$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{2x+2}-2}\ , & x\neq1\\ \frac{2}{3}\ , & x=1\end{cases}$$

*(2) هل الدوال التالية تقبل التمديد بالاستمرار عند 0

$$f(x)=\frac{(1-cosx)^2}{x^4},f(x)=\frac{sin2x}{\sqrt{x+1}-1},f(x)=\ 3x^2sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(1)\lim_{x\to1}f(x)=\ \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{2x+2}-2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2x+7}-3\ \right)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{2x+2}-2\right)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(2x-2)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}{(2x-2)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=\frac{2}{3}\ =f(1)$$

ومنه ان f مستمرة عند 1

التمرين(5) :

بين ان المعادلة $x^5-5x+1=0$ تقبل ثلاث حلول كل حل محصور بين

عددين صحيحين متتاليين

$$f'(x)=5x^4-5=5(x^4-1)=5(x^2-1)(x^2+1)$$

f متزايده تماما على المجال $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $]-1,1[$

$-\ f$ مستمؤة و رتيبة تماما (متزايده تماما) على المجال $]-\infty,-1[$

و $0>f(-2)\times f(-1)$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة

$x^5-5x+1=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $]-\infty,-1[$

$-\ f$ مستمؤة و رتيبة تماما (متزايده تماما) على المجال $]1,+\infty[$

و $0>f(2)\times f(1)$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة

$x^5-5x+1=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $]1,+\infty[$

$-\ f$ مستمؤة و رتيبة تماما (متناقصة تماما) على المجال $]-1,1[$

و $0>f(-1)\times f(1)$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة

$x^5-5x+1=0$ تقيل حلا وحيدا على المجال $]-1,1[$

التمرين(7) : (1) احسب $Arccos\ , Arcsin$ للقيم التالية $-1, 0\ , 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) احسب $Arccotan\ \ , Arctan$ للقيم التالية $-1, 0\ , 1, \sqrt{3}$

$$Arcsin(-1)=y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ , siny=-1 \Leftrightarrow y=-\frac{\pi}{2}$$

$$Arcsin(0)=y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ , siny=0 \Leftrightarrow y=0$$

$$Arcsin(1)=y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ , siny=1 \Leftrightarrow y=\frac{\pi}{2}$$

$$Arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ , siny=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{\pi}{4}$$

$$Arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=y \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ , siny=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{\pi}{6}$$

$$Arccos(-1)=y \Leftrightarrow y \in [0,\pi]\ , cosy=-1 \Leftrightarrow y=\pi$$

$$Arccos(0)=y \Leftrightarrow y \in [0,\pi]\ , cosy=0 \Leftrightarrow y=\frac{\pi}{2}$$

$$Arccos(1)=y \Leftrightarrow y \in [0,\pi]\ , cosy=1 \Leftrightarrow y=0$$

$$Arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=y \Leftrightarrow y \in [0,\pi]\ , cosy=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{\pi}{4}$$

$$Arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=y \Leftrightarrow y \in [0,\pi]\ , cosy=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{\pi}{3}$$

$$Arctan(-1)=y \Leftrightarrow y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ , tany=-1 \Leftrightarrow y=-\frac{\pi}{4}$$

$$Arctan(0)=y \Leftrightarrow y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ , tany=0 \Leftrightarrow y=0$$

$$Arctan(1)=y \Leftrightarrow y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ , tany=1 \Leftrightarrow y=\frac{\pi}{4}$$

$$Arctan(\sqrt{3})=y \Leftrightarrow y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ , tany=\sqrt{3} \Leftrightarrow y=\frac{\pi}{6}$$

التمرين(8) : اثبت ان

$$(1)\quad Arccos(x) + Arccos(-x) = \pi\ , \qquad x \in [-1,1]$$

$$(2)\quad Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2}\ , \qquad x \in [-1,1]$$

$$(3)\quad Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\ , \qquad x > 0$$

$$(4)\ cos\big(Arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2}\ , \qquad x \in [-1,1]$$

$$(5)\quad sin\big(Arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad x \in [-1,1]$$

$$(6)\quad tan\big(Arccos(x)\big) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ , \qquad x \in [-1,1] - \{0\}$$

الحل

نعلم ان

$$\big(Arccos(x)\big)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , x \in]-1,1[$$

$$\big(Arcsin(x)\big)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , x \in]-1,1[$$

$$\big(Arctan(x)\big)' = \frac{1}{1+x^2} \quad , x \in]-\infty,+\infty[$$

$$(1)\quad Arccos(x) + Arccos(-x) = \pi\ , \qquad x \in [-1,1]$$

$$f(x) = Arccos(x) + Arccos(-x)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

ومنه ان f ثابتة وعليه

$$\forall x \in [-1,1] \quad f(x) = c = f(0)$$

$$Arccos(x) + Arccos(-x) = 2 \quad Arccos(x) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

ومنه $\forall x \in [-1,1] Arccos(x) + Arccos(-x) = \pi$

$$(2) \;\; Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad x \in [-1,1]$$

$$f(x) = Arcsin(x) + Arccos(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

ومنه ان f ثابتة وعليه

$$\forall x \in [-1,1] \quad f(x) = c = f(0)$$

$$Arcsin(x) + Arccos(x) = Arcsin(0) + Arccos(0)$$

$$= \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

ومنه $\forall x \in [-1,1] \quad Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

$$(3) \;\; Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}\,, \qquad x < 0$$

$$f(x) = Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \left(\frac{1}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

ومنه ان f ثابتة وعليه

$$\forall\, x \in]-\infty, 0[\quad f(x) = c = f(-1)$$

$$Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = Arctan(-1) + Arctan(-1)$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

ومنه $\forall x \in \left]-\infty, 0\right[\quad Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

$$(4)\ cos\big(Arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2}\,, \qquad x \in [-1,1]$$

نضع $Arcsin(x) = \mathrm{t}\ , \mathrm{t} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right]$

اذ $x = sint = sin\big(Arcsin(x)\big)$

نعلم ان $cos^2\big(Arcsin(x)\big) + sin^2\big(Arcsin(x)\big) = 1$

$$cos^2\big(Arcsin(x)\big) = 1 - sin^2\big(Arcsin(x)\big) = 1 - x^2$$

ومنه $cos\big(Arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]$

$$(5)\ \ sin\big(Arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad x \in \left]-\infty, +\infty\right[$$

نضع $Arctan(x) = \mathrm{t}\ , \mathrm{t} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right[$

اذ ن $x = tant$ و $sin\big(Arctan(x)\big) = sint$

نعلم انه اذا كان $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right[$ فان $cost > 0$

$$\frac{1}{cos^2 t} = 1 + tan^2 t \Longrightarrow cos^2 t = \frac{1}{1 + tan^2 t}$$

$$\Longrightarrow \ \ cost = \sqrt{\frac{1}{1 + tan^2 t}}$$

$$\Longrightarrow sint = tant \times cost = tant\sqrt{\frac{1}{1 + tan^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Longrightarrow sin\big(Arctan(x)\big) = sint = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \left]-\infty, +\infty\right[$$

$$(6)\ \ tan\big(Arccos(x)\big) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \ \ , \qquad x \in [-1,1] \setminus \{0\}$$

$$x \in [-1,1] \setminus \{0\}\ Arccos(x) = \mathrm{t} \Longrightarrow\ x = cost\ \ , \mathrm{t} \in [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

اذ ن $tan\big(Arccos(x)\big) = tant$ و $sint\ > 0$ $t \in [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$$tan\big(Arccos(x)\big) = tant = \frac{sint}{cost} = \frac{\sqrt{1-cos^2 t}}{cost} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

التمرين(9) : نعتبر الدالة f المعرفة كتايلي

$$f(x) = Arccos\left(\frac{2x}{2-x}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) بين ان $\forall x \in\ D_f\ \ f'(x) = \dfrac{-4}{(2-x)\sqrt{4-4x-3x^2}}$

(3) شكل جدول تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني

الحل

f معرفة $\Leftrightarrow\ \ 2-x \neq 0\ \wedge -1\ \leq \dfrac{2x}{2-x} \leq 1$

$$2-x \neq 0\ \wedge \frac{2x}{2-x} + 1 \geq 0\ \wedge\ \frac{2x}{2-x} - 1\ \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$2-x \neq 0\ \wedge \frac{2+x}{2-x} \geq 0\ \wedge\ \frac{3x-2}{2-x}\ \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$2-x \neq 0\ \wedge x \in [-2,2]\ \wedge\ x \in \left]-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [2,+\infty[\ \ \Leftrightarrow$$

$$x \in \left[-2, \frac{2}{3}\right] \Leftrightarrow$$

$$D_f = \left[-2, \frac{2}{3}\right]$$

$$\forall x \in\ D_f\ \ f'(x) = \frac{-\left(\frac{2x}{2-x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{2-x}\right)^2}} = \frac{\frac{-4}{(2-x)^2}}{\sqrt{\frac{4-4x-3x^2}{(2-x)^2}}}$$

$$= \frac{-4}{(2-x)\sqrt{4-4x-3x^2}} < 0 \quad j$$

التمرين(10) : نعتبر الدالة f المعرفة كتايلي

$$f(x) = Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) بين ان $\forall x \in D_f \;\; f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2+1}$

(3) شكل جدول تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني

الحل

f معرفة $\Leftrightarrow \; 1-x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq 1$$

$$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

باستخدام نهاية دالة مركبة

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0, \lim_{x\to 0} Arctan(x) = 0$$

$$\lim_{\substack{< \\ s\to 1}} Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

باستخدام نهاية دالة مركبة

$$\lim_{\substack{< \\ s\to 1}}\left(\frac{1}{1-x}\right) = +\infty, \lim_{x\to+\infty} Arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

باستخدام نهاية دالة مركبة

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \left(\frac{1}{1-x}\right) = -\infty, \lim_{x\to -\infty} Arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

باستخدام نهاية دالة مركبة

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{1-x}\right) = 0, \lim_{x\to 0} Arctan(x) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} Arctan\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0$$

$$\forall x \in\ D_f\ \ f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1-x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{(x-1)^2+1}{(1-x)^2}}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2+1} > 0$$

ومنه f متزايدة تماما على D_f

البني الجبرية

العملية الداخلية : لتكن E مجموعة غير خالية

كل تطبيق للمجموعة $E \times E$ نحو E يسمى عملية داخلية في E ونرمز لها بالرمز

$\star, \nabla, \Delta, \times, +$, ...

اذا كانت $\star$ عملية داخلية في E نكتب

$$\star : E \times E \rightarrow E$$

$$(x, y) \rightarrow x \star y$$

مثلا : $+, \times$ عمليتان داخليتان في $\mathbb{R}$

خواص : $\star, \Delta$ عمليتان داخليتان في E

$\star$ تبديلية في E اذا وفقط اذا تحقق

$$\forall x, y \in E: x \star y = y \star x$$

$\star$ تجميعية في E اذا وفقط اذا تحقق

$$\forall x, y, z \in E: (x \star y) \star z = y \star (x \star z)$$

$\star$ توزيعية على Δ في E اذا وفقط اذا تحقق

$$\forall x, y, z \in E : \begin{cases} x \star (y \Delta z) = (x \star y) \Delta (x \star z) \\ (y \Delta z) \star x = (y \star x) \Delta (z \star x) \end{cases} \text{ و}$$

يكون العنصر e من E حيادي للعملية $\star$ اذا وفقط اذا تحقق

$$\forall x \in E : x \star e = e \star x = x$$

يكون العنصر x' من E نضير العنصر x من E للعملية $\star$ اذا وفقط اذا تحقق

$$\forall x \in E : x \star x' = x' \star x = e$$

نتائج وملاحظات :

(1) العنصر الحيادي ان وجد فهو وحيد

ليكن e, e' عنصران حياديان للعملية $\star$ قي E لدينا $e' \star e = e$ حيث

e' عنصر حيادي من جهة اخرى $e' \star e = e'$ فينتج ان $e' = e$

(2)اذا كانت العمليةتجميعية فان العنصر النضير ان وجد فهو وحيد

لنفرض ان x' x'' عنصران نضيران ل x من E للعملية التجميعية $\star$

و e عنصر حيادي للعملية $\star$ في E

$$x' = x' \star e = x' \star (x \star x'') = (x' \star x) \star x'' = e \star x'' = x''$$

امثلة :

الجمع $(+)$ والضرب $(\times)$ عمليتان تبدليتان وتجميعيتان قي $\mathbb{R}$

الضرب توزيعي على الجمع قي $\mathbb{R}$

البنى الجبرية

لتكن $\star$ و Δ عمليتان داخليتان في المجموعة E

الزمرة : تكون $(E, \star)$ زمرة اذا وفقط اذا تحقق

(1) $\star$ تجميعية

(2) يوجد في E عنصر حيادي للعملية $\star$

(3) كل عنصر من E يقبل نضير في E بالنسبة للعملية $\star$

اذا كانت العملية $\star$ تبدلية نقول ان الزمرة $(E, \star)$ زمرة تبديلية

امثلة :

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}^*, \times), (\mathbb{R}, +)$ زمرة تبديلية بينما $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}', \times)$

ليست زمرة

الزمرة الجزئية : لتكن $(E, \star)$ زمرة و H مجموعة جزئية من E

تكون $(H \ ,\star)$ زمرة جزئية من الزمرة $(E \ ,\star)$ اذا وفقط اذا تحقق

$\forall x, y \in H, x \star y \in H$ (1)

(2) $e \in H$ حيث e العنصر الحيادي للعملية $\star$ في E

(3) $\forall x \in H, \forall x' \in H$ حيث x' نضير x للعملية $\star$ في E

امثلة :

$(\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}, +)$

$(\mathbb{Z}^*, \times)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^*, \times)$

$(2\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$

$(\mathbb{N}, +)$ ليست زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}/, +)$

الحلقة : تكون $(E \ ,\star, \Delta)$ حلقة اذا وفقط اذا تحقق

(1) $(E \ ,\star)$ زمرة تبديلية

(2) Δ تجميعية

Δ(3) توزيعية على $\star$ في E

اذا كانت العملية Δ تبديلية نقول ان الحلقة $(E \ ,\star, \Delta)$ حلقة تبديلية

اذ كانت العملية Δ عنصر حيادي نقول ان الحلقة $(E \ ,\star, \Delta)$ حلقة واحدية

امثلة

$(\mathbb{Z}, +, \times)$, حلقة تبديلية واحدية

$(\mathbb{R}, +, \times)$ حلقة تبديلية واحدية

$(\mathbb{R}^*, +, \times)$ حلقة تبديلية واحدية

الحلقة الجزئية : لتكن $(E \ ,\star, \Delta)$ حلقة و H مجموعة جزئية من E

تكون $(H \ ,\star, \Delta)$ حلقة جزئية من الحلقة $(E \ ,\star, \Delta)$ اذا وفقط اذا تحقق

(1) $(H \ ,\star)$ زمرة جزئية من الزمرة $(E \ ,\star)$

$\forall x, y \in H, x \Delta y \in H$ (2)

امثلة :

$(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{R},+,\times)$

$(\mathbb{N},+,\times)$ ليست حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{Z},+,\times)$

الجسم : تكون $(E\ ,\star\ ,\Delta)$ جسما اذا وفقط اذا تحقق

(1) $(E\ ,\star\ ,\Delta)$ حلقة تبدلية و واحدية

(2) كل عنصر من المجموعة غير لبخالية $E\setminus\{e\}$ يقبل نضير بالنسبة للعملية Δ

اذا كانت العملية Δ تبدلية نقول ان الجسم $(E\ ,\star\ ,\Delta)$ جسم تبديلي

امثلة

$(\mathbb{Q},+,\times),$ جسم تبديلي

$(\mathbb{R},+,\times)$ جسم تبديلي

$(\mathbb{R}^*,+,\times)$ جسم تبديلي

$(\mathbb{Z},+,\times)$ ليس جسم

تمرين تطبيقي :

$\star$ عملية داخلية قي $\mathbb{Q}$ معرفة كمايلي :

$$x\star y=x+y+xy$$

$(\mathbb{Q}\setminus\{-1\},\star)$ زمرة تبديلية

اثبات ان $\star$ داخلية قي $\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$

$$\forall x,y\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\}: x\star y\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$$

اي نبرهن $x+y+xy\neq -1$ نستعمل البرهان بالخلف

لنفرض ان $x+y+xy=-1$ اي $x+y+xy+1=0$

بمعنى $(x+1)(y+1)=0$ اي $y=-1$ او $x=-1$ وهذا تناقض مع

كون $y\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$ و $x\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$

اذن $x\star y=x+y+xy\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$ فالعملية $\star$ داخلية قي $\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$

اثبات ان $\star$ تبديلية قي $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : x \star y = y \star x$$

$$x \star y = x + y + xy = y + x + yx = y \star x$$

اثبات ان $\star$ تجميعية قي $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$$(x \star y) \star z = (x + y + xy) \star z = x + y + xy + z + (x + y + xy)z$$

$$= x + y + z + xy + xz + yz + xyz \ \dots (1)$$

$$x \star (y \star z) = x \star (y + z + yz) = x + y + z + yz + x(y + z + yz)$$

$$= x + y + z + yz + xy + xz + xyz \ \dots (2)$$

من (1) و (2) نجد ان $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ ومنه

ومنه ان $\star$ تجميعية قي $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

العنصر الحيادي للعملية $\star$ قي $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$:

ليكن e العنصر الحيادي للعملية $\star$ قي $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : \ x \star e = x$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : \ x + e + xe = x$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : \ e + xe = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : \ (1 + x)e = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} : \ e = 0$$

ومنه ان 0 هو العنصر الحيادي للعملية $\star$ قي $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

لكل عنصر من $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ نضير بالنسبة للعملية $\star$ قي $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$:

ليكن x' نضير x من $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ بالنسبة للعملية $\star$ فيتحقق مايلي

$$x' \star x = 0 \Longrightarrow x' + x + x' x = 0$$

$$\Longrightarrow x' (1 + x) = -x$$

$$\Longrightarrow x' = \frac{-x}{1+x} \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$$

وبالتالي $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\},\star)$زمرة تبديلية

تمرين محلول

لتكن $\star$ عملية في $I =]-1,1[$ معرفة كمايلي

$$x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$$

(1) بين ان $\star$ عملية داخلية في $I =]-1,1[$

(2) بين ان $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\},\star)$ زمرة تبديلية

الحل

(1) اثبات ان $\star$ عملية داخلية في $I =]-1,1[$

$$x, y \in]-1,1[\Longrightarrow -1 < x < 1 \text{ و } -1 < y < 1$$

$$\Longrightarrow |x| < 1, |y| < 1$$

$$\Longrightarrow |xy| < 1$$

$$\Longrightarrow -1 < xy < 1$$

$$\Longrightarrow 0 < 1 + xy < 2$$

$$\Longrightarrow 1 + xy > 0$$

الفضاءات الشعاعية

تعريف الفضاء الشعاعي : لنعتبر $(\mathbb{K}, +, \times)$ حقل تبديلي $(\mathbb{K} = \mathbb{C}$ او $\mathbb{K} = \mathbb{R})$

لتكن E مجموعة. نسمي $(E, +, *)$ فضاء شعاعيا على الحقل $\mathbb{K}$

(او $\mathbb{K}$ – فضاء شعاعي) اذا كانت

(1) $(E, +)$ زمرة تبديلية

(2) E مزودة بقانون تركيب خارجي $*$

$$\mathbb{K} \times E \to E$$

$$(\lambda, x) \rightarrow \lambda . x$$

من اجل كل x, y من E ومن اجل كل $\lambda\, \mu$ من $\mathbb{K}$ لدينا

(1) $(\lambda + \mu). x = \lambda. x + \mu. x$

(2) $\lambda. (x + y) = \lambda. x + \lambda. y$

(3) $\lambda. (\mu. x) = (\lambda . \mu). x$

(4) $I_E. x = x$ حيث I_E العنصر الحيادي للعملية (.) في $\mathbb{K}$

ملاحظات :

(1) عناصر E تسمى اشعة وعناصر $\mathbb{K}$ تسمى سلمبات

(2) نسمي الكتابة $\lambda. x$ بضرب الشعاع x بالسلمي λ ونكتب λx بدلا من $\lambda. x$

(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \lambda 0 = 0$ وذالك لان $\lambda x = \lambda(x + 0) = \lambda x + \lambda 0$ نجد $\lambda 0 = 0$

(4) $\forall x \in E\ 0x = 0$ وذالك لان $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$ نجد $0x = 0$

(5) $\lambda x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee x = 0$

امثلة :

(1) كل حقل تبديلي $\mathbb{K}$ هو فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$

(2) $(V, +, .)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ وذلك لان $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \Longrightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V$

(جمع الاشعة عملية داخلية في V) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\quad \vec{u} \in V \Longrightarrow \lambda\ \vec{u} \in V$

(ضرب شعاع بعدد حقيقي عملية خارجية في V)

(3) $(\mathbb{R}^2, +, .)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ حيث

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

(4) $(E, +, .)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ حيث $E = \mathfrak{J}(I, \mathbb{R})$ مجموعة الدوال المعرفة من I نحو $\mathbb{R}$ و

$$\forall x \in I : (f + g)(x) = f(x) + g(x), (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

الفضاء الشعاعي الجزئي :

تعريف : ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$ نقول عن جزء F من E

انه فضاء شعاعي جزئي ل E اذا تحقق :

$F \neq \emptyset \quad (1)$

$\forall x, y \in F \Longrightarrow x + y \in F \quad (2)$

$\forall x \in F , \forall \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow x + y \in F \quad (3)$

نتيجة : ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$ نقول عن جزء F من E

انه فضاء شعاعي جزئي ل E اذا تحقق :

$F \neq \emptyset \quad (1)$

$\forall x, y \in F, \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda x + \mu y \in F \quad (2)$

امثلة :

(1) $\{0_E\}$ و E فضاءان جزئيان من E

(2)$\mathbb{R} \times \{0\}$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^2$ حيث $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$

وذلك لان $(0,0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ وبالتالي $\mathbb{R} \times \{0\} \neq \emptyset$ و

$\forall (x, 0), (y, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$\lambda(x, 0) + \mu(y, 0) = (\lambda x +, \mu y, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$

الاسس والابعاد : لنفرض في كل ما يلي ان E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$

المزج الخطي :

تعريف : نسمي مزجا خطيا للاشعة $x_1, x_2, \ldots x_n$ من الفضاء الشعاعي E

كل شعاع من الشكل : $\lambda_1 \, x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ حيث

$\lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

مثال : ليكن $E = \mathbb{R}^2$ وليكن الشعاع $(2,1)$ من E

لدينا الكتابة التالية $(2,1) = 2. (1,0) + 1. (0,1)$

الشعاع $(2,1)$ هو مزج خطي للشعاعين $(1,0),(0,1)$

العائلة المولدة :

تعريف : نقول ان العائلة $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ مولدة للفضاء الشعاعي E اذا كتب

كل شعاع من E كمزج خطي لهذه العائلة بمعنى

$$\forall x \in E, \exists \ \lambda_1, \quad \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \ :$$

$$x = \lambda_1 \, x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

ونكتب $E = \langle \ x_1, x_2, \dots x_n \ \rangle$

امثلة :

(1) $E = \mathbb{R}^2$ الشعاعان $(1,1),(1,0)$ يولدان الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$

ليكن $u = (x,y)$ من $\mathbb{R}^2$ يوجد α, β من $\mathbb{R}$ بحيث

$$u = (x,y) = \alpha\,(1,1) + \beta\,(1,0) = (\,\alpha + \beta, \alpha)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = x - y \\ \alpha = y \end{cases}$$

$$u = (x,y) = (x-y)(1,1) + y\,(1,0)$$

(1) $E = \mathbb{R}^3$ $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$u = (x,y,z) = (x,0,0) + (y,0,0) + (z,0,0) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

$$= x\,e_1 + ye_2 + ze_3$$

$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ اشعة مولدة للفضاء $\mathbb{R}^3$

وبالتالي $\mathbb{R}^3 = \langle\, e_1\,, e_2, e_3 \rangle$

الارتباط الخطي – الاستقلال الخطي :

(1) نقول عن الاشعة $x_1, x_2, \dots x_n$ من E انها مرتبطة خطيا اذا وفقط اذا وجد ت

الاعداد $\lambda_1, \quad \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ليست كلها معدومة بحيث يكون

$$\lambda_1 \, x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \quad = 0$$

(2) نقول عن الاشعة $x_1, x_2, \dots x_n$ من E انها مستقلة خطيا اذا وفقط اذا

وجد ت الاعداد $\lambda_1, \quad \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ بحيث تحقق

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

امثلة : في $\mathbb{R}^4$ الاشعة $u = (0,1,0,0), v = (0,0,1,0), w = (0,1,1,0)$

مرتبطة خطيا لان $\mathrm{u} + \mathrm{v} - \mathrm{w} = 0$

لتكن α, β, γ اعداد حقيقية بحيث $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

$$\alpha (0,1,0,0) + \beta(0,0,1,0) + \gamma(0,1,1,0) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \beta = -\gamma$$

$$\alpha(\mathrm{u} + \mathrm{v} - \mathrm{w}) = 0$$

اذا كان $\alpha \neq 0$ فان $u + v - w = 0$ ومنه ان الاشعة u, v, w مرتبطة خطيا

u, v, w مرتبطة خطيا

امثلة : في $\mathbb{R}^4$ الاشعة $u = (0,1,0,0), v = (0,0,1,0), w = (0,1,1,0)$

مرتبطة خطيا لان $u + v - w = 0$

لتكن α, β, γ اعداد حقيقية بحيث $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

(2) في $\mathbb{R}^3$ الاشعة $u = (6,2,4), v = (2,0,2), w = (1,1,0)$

مرتبطة خطيا لان $u - 2v - 2w = 0$

لتكن α, β, γ اعداد حقيقية بحيث $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

$$\alpha (6,2,4) + \beta(2,0,2) + \gamma(1,1,0) = 0$$

$$\begin{cases} 6\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \\ 4\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha = -\gamma \\ 2\alpha = -\beta \end{cases}$$

$$\alpha u - 2\alpha v - 2\alpha w = 0$$

$$\alpha(u-2v-2w)=0$$

لنفرض ان $\alpha \neq 0$ نجد $u-2v-2w=0$ ومنه الاشعة

u,v,w مرتبطة خطيا

(3) في $\mathbb{R}^3$ الاشعة $e_3 = (0,0,1), e_2=(0,1,0), e_1=(1,0,0)$

الاشعة e_1,e_2,e_3 مستقلة خطيا لانه من اجل α,β,γ اعداد حقيقية

$$\alpha e_1, +\beta+\gamma e_3 = 0 \Longrightarrow \alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,0,1)=0 \ \alpha,\beta,\gamma$$

$$\Longrightarrow (\alpha,\beta,\gamma\,)=0$$

$$\Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma \;\; =0$$

اساس الفضاء الشعاعي :

تعريف : ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ مجموعة الاشعة $\{\, x_1,x_2,\dots x_n \,\}$

تشكل اساسا للفضاء الشعاعي E اذا كانت

(1) الاشعة $\{\, x_1,x_2,\dots x_n \,\}$ مولدة ل E

(2) الاشعة $\{\, x_1,x_2,\dots x_n \,\}$مستقلة خطيا في E

امثلة :

(1) في $\mathbb{R}^n$ الاشعة $e_1=(1,0,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,0,\dots,0)$,

$e_n = (0,0,\dots,1)$ الاشعة $e_1,e_2,\dots,e_n$ تشكل اساس ل $\mathbb{R}^n$

لانه : اذا كانت

$$\lambda_1 e_1, +\lambda_2 e_2+\dots+\lambda_n e_n = 0 \Longrightarrow (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\,)=0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n \;=0$$

ومنه الاشعة $e_1,e_2,\dots,e_n$ تشكل مستقلة خطيا

$\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

$$x = x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n$$

ومنه $\mathbb{R}^n = \langle e_1,e_2,\dots,e_n\rangle$

(2) في $\mathbb{R}^2$ الشعاعان $v=(3,1)$ $u=(1,2)$ يشكلان اساس ل $\mathbb{R}^2$

$$\lambda_1 u+\lambda_2 v=0 \Longrightarrow (\lambda_1+3\lambda_2, 2\lambda_1+\lambda_2)=0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$$

ومنه الشعاعان u,v مستقلان خطيا

$\forall x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$

$$x=\lambda_1 u+\lambda_2 v \Longrightarrow (x_1,x_2)=(\lambda_1+3\lambda_2, 2\lambda_1+\lambda_2)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2=x_1\\ 2\lambda_1+\lambda_2=x_2\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\lambda_1=\dfrac{3x_2-x_1}{5}\\ \lambda_2=\dfrac{2x_1-x_2}{5}\end{cases}$$

ومنه $\mathbb{R}^2=\langle u,v\rangle$

نظرية : تكون مجموعة الاشعة $u_1,u_2,\dots,u_n$ اساس ل E اذا وفقط اذا كان كل شعاع من E يكتب بصورة وحيدة كمزج خطي للاشعة $u_1,u_2,\dots,u_n$

الاثبات :

لنفرض ان الاشعة $u_1,u_2,\dots,u_n$ اساس ل E وليكن x شعاع من E

$$x=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_nu_n \qquad (1)$$

لنفرض عبارة اخرى ل x

$$x=\lambda'_1u_1+\lambda'_2u_2+\cdots+\lambda'_nu_n \qquad (2)$$

من (1) و (2)ينتج

$$(\lambda_{1}-\lambda'_1)u_1+(\lambda_2-\lambda'_2)u_2+\cdots+\lambda_1(\lambda_n-\lambda'_n)u_n=0$$

$$\Longrightarrow (\lambda_{1}-\lambda'_1)=(\lambda_2-\lambda'_2)=\cdots=(\lambda_n-\lambda'_n)=0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1=\lambda'_1, \lambda_2=\lambda'_2,\dots,\lambda_n=\lambda'_n$$

لنفرض ان الشعاع x له كتابة وحيدة $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$

ولنبين ان الاشعة $u_1, u_2, \dots, u_n$ اساس ل E

من الفرض لدينا $E = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ فيكفي اثبات ان الاشعة $u_1, u_2, \dots, u_n$ مستقلة خطيا

ليكن

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0u_1 + 0u_2 + \cdots 0u_n$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

ومنه الاشعة $u_1, u_2, \dots, u_n$ مستقلة خطيا اذا الاشعة $u_1, u_2, \dots, u_n$ تشكل اساس ل E

ملاحظات :

(1) اذا الاشعة $u_1, u_2, \dots, u_n$ تشكل اساس ل E وكان x شعاع من E فان

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$$

والسلميات $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ تسمى مركبات الشعاع x بالنسبة للاساس $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

(2) في $\mathbb{R}^2$ اذا مثلنا هندسيا الشعاع $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ باختيار معلما للمستوي (o, i, j) فان الشعاعين $e_1 = (1,0)$ $e_2 = (0,1)$ يمثلان بشعاعي اساس المعلم $\vec{i}, \vec{j}$

اذا كان الشعاع $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ يرفق بالنقطة A فان

$$\overrightarrow{OA} = \lambda_1 \vec{i} + \lambda_2 \vec{j}$$

بعد الفضاء الشعاعي :

تعريف 1 : نفول عن فضاء شعاعي E انه ذو بعد منته اذا كان مولد بعدد منته من الاشعة

امثلة : - $\mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$ ذو بعد منته

- $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ ذو بعد منته

تعريف 2 : اذا كان E فضاء شعاعي بعد ه منته على الحقل $\mathbb{K}$ فان جميع اسس E

لها نفس عدد الاشعة يسمى هذا العدد ببعد E ونرمز له بالرمز $dimE$

امثلة : $dim\,\mathbb{R}^2 = 2$, $dim\,\mathbb{R}^3 = 3$, $dim\,\mathbb{R}^n = n$

ملاحظات :

(1) $dim(0_E) = 0$

(2) نسمي الفضاء الشعاعي ذو بعد 1 بالمستقيم الشعاعي

(3) نسمي الفضاء الشعاعي ذو بعد 2 بالمستوي الشعاعي

بعد جداء فضائين شعاعيين :

نظرية : اذا كان E و F فضائين شعاعيين ببعد ين منتهين علي الحقل $\mathbb{K}$ فان

$$dimE \times F = dimE + dimF$$

الاثبات :

يمكن التاكد ان $E \times F$ فضاء شعاعي علي الحقل $\mathbb{K}$ بالنسبة للعمليتين التاليتين

$$\forall (x,y),(x',y') \in E \times F : (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

$$\forall (x,y) \in E \times F, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

لنفرض ان $dimE = n, dimF = m$ ونبرهن ان $dimE \times F = n + m$

يكفي ان نبرهن ان $E \times F$ يقبل اساس عدد عناصره $n + m$

لتكن الجملة $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ تشكل اساس ل E و الجملة $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

تشكل اساس ل F

$$(x,y) = (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n \ , \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m)$$

حيث $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^{n+m}$

$$(x,y) = (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n \ ,0\ ) + (0,, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m)$$

$$= \lambda_1(u_1, 0) + \lambda_2(u_2, 0) + \cdots + \lambda_n(u_n, 0) + \alpha_1(0, v_1) + \alpha_2(0, v_2) + \cdots + \alpha_m(0, v_m)$$

يعني الجملة $\{(u_1, 0), (u_2, 0), \dots, (u_n, 0), (0, v_1), (0, v_2), \dots, (0, v_m)\}$ مولدة

ل $E \times F$

لنثبت ان $\{(u_1, 0), (u_2, 0), \dots, (u_n, 0), (0, v_1), (0, v_2), \dots, (0, v_m)\}$ تستقلة خطيا

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n \ , \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m) = (0,0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0 \\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0 \end{cases}$$

ومنه $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$

فالجملة $\{(u_1, 0), (u_2, 0), \dots, (u_n, 0), (0, v_1), (0, v_2), \dots, (0, v_m)\}$

اساس ل $E \times F$ ومنه $dimE \times F = n + m = dimE + dimF$

تمرين محلول 1 :

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ الاشعة $u_1 = (1,1,2)$ $u_2 = (1,-1,0)$ $u_3 = (0,0,-1)$

$u = (1,1,1)$

(1) ما هي مركبات الشعاع u بالنسبة للاساس القانوني ل $\mathbb{R}^3$

(2) بين ان $\{u_1, u_2, u_3\}$ تشكل اساس ل $\mathbb{R}^3$

(3) اوجد مركبات الشعاع u بالنسبة للاساس الجديد

الحل

$$u = (1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1) = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3$$

مركبات الشعاع u بالنسبة للاساس القانوني ل$\mathbb{R}^3$ هي 1,1,1 على الترتيب

(2) اثبات ان $\{u_1, u_2, u_3\}$ تشكل اساس ل $\mathbb{R}^3$

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : x = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$$

$$x = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x_1 \\ \alpha - \beta = x_2 \\ 2\alpha - \gamma = x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \beta = \dfrac{x_1 - x_2}{2} \\ \gamma = x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$$

ومنه $\mathbb{R}^3 = \langle u_1, u_2 , u_3 \rangle$

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

ومنه الاشعة u_1, u_2 , u_3 مستقلة خطيا

اذا الاشعة u_1, u_2 , u_3 تشكل اساس ل $\mathbb{R}^3$

(3)ايجاد مركبات الشعاع u بالنسبة للاساس الجديد

$$x = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2} u_1 + \frac{x_1 - x_2}{2} u_2 + (x_1 + x_2 - x_3) u_3$$

$$= 1.u_1 + 0.u_2 + 1.u_3$$

مركبات الشعاع u بالنسبة للاساس $\{u_1, u_2 , u_3\}$ هي $u(1,0,1)$

تمرين محلول 2 :

نعتبر في $\mathbb{R}^3$ الاشعة $v(1,-2,5)$ $v_3(2,-1,1)$ $v_2(1,2,3)$ $v_1(1,1,1)$

بين ان v مزج خطي للاشعة v_1, v_2, v_3

الحل

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \alpha(1,1,1) + \beta(1,2,3) + \gamma(2,-1,1)$$

$$= (\alpha + \beta + 2\gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, \alpha + 3\beta + \gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = -2 \\ \alpha + 3\beta + \gamma = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = -6, \beta = 3, \gamma = 2$$

وبالتالي $v = -6v_1 + 3v_2 + 2v_3$

تمرين محلول 3 :

ادرس ان كانت الاشعة التالية مستقلة في كل حالة من الحالات

(1) نعتبر في $\mathbb{R}^3$ الاشعة $v_2(3,4,5), v_1(1,2,3)$

$v_3(5,6), v_2(3,4), v_1 \Longrightarrow \alpha(1,2,3) + \beta(3,4,5) = 0$

(2) نعتبر في $\mathbb{R}^2$ الاشعة

الحل

(1) v_2, v_1 مستقلان خطيا $\Leftrightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \Longrightarrow \alpha(1,2,3) + \beta(3,4,5) = 0$$

$$\Longrightarrow (\alpha + 3\beta, 2\alpha + 4\beta, 3\alpha + 5\beta) = (0,0,0)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \\ 3\alpha + 5\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

ومنه الشعاعان v_2, v_1 مستقلان خطيا

$$= \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \Longrightarrow \alpha(1,2) + \beta(3,4) + \gamma(5,6) = 0$$

$$\Longrightarrow (\alpha + 3\beta + 5\gamma, 2\alpha + 4\beta + 6\gamma) = (0,0)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \\ 2\alpha + 4\beta + 6\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \beta = -2\gamma \\ \alpha = -\gamma \end{cases}$$

ومنه الاشعة v_2, v_1 v_3 ليست مستقلة خطيا

التطبيقات الخطية

تعريف : ليكن F, E فضاءان شعاعيان على نفس الحقل $\mathbb{K}$ وليكن f تطبيق من E في F

نقول ان f تطبيق خطي من E في F اذا وفقط اذا تحقق

$$\forall\, x, y \in E\ f(x+y) = f(x) + f(y)\ (1)$$

$$\forall\, x \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \ f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad (2)$$

يقال عن f ايظا انه تماثل من E في F

امثلة :

(1) ليكن a ثابت حقيقي و f تطبيق من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ معرف كمايلي

$$f(x) = ax$$

هو تطبيق جطي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad f(\lambda x + \mu y) = a(\lambda x + \mu y)$$

$$= \lambda(ax) + \mu(ax)$$

$$= \lambda f(x) + \mu f(y)$$

(2) التطبيق f من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}$ المعرف كمايلي :

$$f(x, y) = x - y$$

هو تطبيق جطي

$$\forall\, (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$f\big(\lambda(x, y) + \mu(x', y')\big) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$$

$$= \lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y'$$

$$= \lambda(x - y) + \mu(x' - y')$$

$$= \lambda f(x, y) + \mu f(x', y')$$

$$E = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

$$f[(x, y, z)] = (x + 2y - 3z, 3x - y + 5z)$$

تعريف 2 : f تطبيق خطي من E في F اذا وفقط اذا تحقق

$$\forall\, x, y \ \in E\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(x)$$

الاثبات

اذا كان f تطبيق خطي فانه حسب (1) و (2)

$$\forall\, x, y \ \in E\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y)$$

$$= \lambda f(x) + \mu f(y)$$

اذا كان f تطبيق خطي فانه

$$\forall\, x, y \ \in E\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

باخذ $\lambda = \mu = 1$ نجد

$$\forall\, a, b \ \in E \ \ f(x + y) = f(x) + f(y)$$

باخذ $\mu = 0$ نجد

$$\forall\, x, by \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

ملاحظة

– نرمز لمجموعة التطبيقات الخطية بالرمز $L(E, F)$

تعريف 3 :

– نقول ان f منتشاكل من E في F اذا كان f تطبيق خطي تقابلي

– يقال عن f انه تماثل داخلي اذا كان f تطبيق خطي من E في E

– نسمي كل تشاكل من E في E تشاكلا ذاتيا

نتيجة : ليكن f تطبيق خطي من E في F لدينا

$f(0_E) = 0_F$ (1)

$\forall x \in E , f(-x) = -f(x)$ (2)

الاثبات :

(1) بوضع $\lambda = 0_E$ في العبارة (2) من التعريف 2 نجد

$$f(0_E) = 0_E f(x) = 0_F$$

(2) بوضع $\lambda = -1$ في العبارة (2) من التعريف 2 نجد

$$\forall x \in E , f(-x) = f\big((-1)x\big) = (-1)f(x) = -f(x)$$

العمليا ت على التطبيقات الخطية :

لتكن G, F, E فضاءات شعاعية على الحقل $\mathbb{K}$

(1)اذا كان g, f تطبيقان خطيان من E في F وكان λ عدد من $\mathbb{K}$ فان $f + g$ و λf

تطبيقان خطيان من E في F معرفين كمايلي

$$\forall x \in E, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall x \in E \ f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

(2)اذا كان f تطبيقا خطيا من E في F و g تطبيقا خطيا من F في G فان gof

تطبيقا خطيا من E في G

(3)$(L(E,F), +, .)$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$

(4) اذا كان f تشاكل من E في F فان f^{-1} تشاكل من F في E

صورة ونواة تطبيق خطي :

ليكن f تطبيق من الفضاء الشعاعي E في الغضاء الشعاعي F

(1) صورة التطبيق الخطي f هو المجموعة $f(E)$ والتي نرمز لها بالرمز Imf

$$Imf = \{y \in F / \exists x \in E, y = f(x)\} = f(E), \qquad Imf \subset F$$

(2) نواة f هي مجموعة العناصر x من E بحيث $f(x) = 0_E$ والتي نرمز لها

بالرمز $Kerf$ والمعرفة كمايلي

$$Kerf = \{ x \in E / f(x) = 0_F \} \subset E.$$
$$= f^{-1}\{0_F\}$$

امثلة :

(1) ليكن a ثابت حقيقي و f تطبيق من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ معرف كمايلي

$$f(x) = ax$$

اذا كان $a = 0$ فان $Kerf = \mathbb{R}$ $\quad Imf = \{0\}$

اذا كان $a \neq 0$ فان $Kerf = \{0\}$ $\quad Imf = \mathbb{R}$

(2)

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to f\big((x,y)\big) = x - y$$

تعيين $Kerf$

$$Kerf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x - y = 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x = y\}$$
$$= \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1,1), x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \langle (1,1) \rangle$$

تعيين Imf

$$Imf = \{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$
$$Imf = \{(x-y)1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$
$$= \langle 1 \rangle = \mathbb{R}$$

نظرية :

(1) $Kerf$ فضاء شعاعي جزئي من E

(2) Imf فضاء شعاعي جزئي من F

الاثبات :

(1) $f(0_E)=0_F$ معناه $0_E \in Kerf$ ومنه $Kerf \neq \emptyset$

$$\forall x,x' \in Kerf \Longrightarrow f(x+x') = f(x)+f(x') = 0_F$$

$$\Longrightarrow x+x' \in Kerf$$

$$\forall x \in Kerf \forall \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda x \in Kerf$$

ومنه $Kerf$ فضاء شعاعي جزئي من E

(2) $f(0_E)=0_F$ معناه $0_f \in Imf$ ومنه $Imf \neq \emptyset$

$$\forall y,y' \in Imf \Longrightarrow \exists x,x' \in E : y = f(x), y' = f(x')$$

$$\Longrightarrow y+y' = f(x)+f(x') = f(x+x'), x+x' \in E$$

$$\Longrightarrow y+y' \in Imf$$

$$\forall y \in fIm \forall \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x), \lambda x \in E$$

$$\Longrightarrow \lambda y \in Imf$$

ومنه Imf فضاء شعاعي جزئي من F

تمرين :

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \quad \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \rightarrow f\big((x,y)\big) = (2x-4y, x-2y)$$

(1) بين ان f تطبيق خطي

(2) عين $Kerf$ و Imf

الحل

$$\forall (x,y)(x',y') \in \mathbb{R}^2 , \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$f\big(\lambda(x,y)+\mu(x',y')\big) = f(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu x')$$

$$= \big(2(\lambda x+\mu x') - 4(\lambda y+\mu y'), (\lambda x+\mu x') - 2(\lambda y+\mu y')\big)$$

$$= \lambda(2x - 4y, x - 2y) + \mu(2x' - 4y', x' - 2y')$$

$$= \lambda f\big((x, y)\big) + \mu f\big((x', y')\big)$$

تعيين $Kerf$

$$Kerf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : f\big((x, y)\big) = (0,0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\}(2x - 4y, x - 2y) = (0,0)$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\}2x - 4y = 0\ , x - 2y = 0$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 2y\}$$

$$= \{(2y, y), y \in \mathbb{R}\} = \{y(2,1), y \in \mathbb{R}\} = \langle(2,1)\rangle$$

المولد بالشعاع $(2,1)$

تعيين Imf

$$Imf = \{f(x, y): (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$Imf = \{(2x - 4y, x - 2y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{(2x, x) + (-4y, -2y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= (x(2,1) - 2y(2,1) : (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

$$= \{(x - 2y)(2,1) : x - 2y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle(2,1)\rangle$$

المولد بالشعاع $(2,1)$

نظرية : ليكن f تطبيقا خطيا من E في F

(1) $Kerf = \{0_E\} \iff$ f متباين

(2) $Imf = F \iff$ f غامر

الاثبات :

(1) لنفرض ان f متباين و نعتبر $Kerf = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$

لدينا $Ker f \ni 0_E$ لان $f(0_E) = 0_F$ او لان $Ker f$ فضاء شعاعي جزئي من E

ومنه $\{0_E\} \subset Ker f$

$$\forall x \in Ker f \Longrightarrow f(x) = 0_F = f(0_E)$$

$$\Longrightarrow x = 0_E \quad (\text{لان } f \text{ متباين})$$

$$\Longrightarrow x \in \{0_E\}$$

ومنه $Ker f \subset \{0_E\}$ وبالتالي $Ker f = \{0_E\}$

وعليه f متباين $\Longrightarrow Ker f = \{0_E\}$ (1)

عكسيا لنفرض ان $Ker f = \{0_E\}$

$$\forall x, y \in E\ , f(x) = f(y) \Longrightarrow f(x - y) = 0_F \quad (\text{لان } f \text{ خطي})$$

$$\Longrightarrow x - y \in Ker f = \{0_E\}$$

$$\Longrightarrow x = y$$

وبالتالي f متباين

وعليه $Ker f = \{0_E\} \Longrightarrow$ f متباين (2)

من (1) و (2) نستنتج ان f متباين $\Longleftrightarrow Ker f = \{0_E\}$

(2) اذا كان f غامر فان $f(E) = F$ اي $Imf = F$ والعكس صحيح

تمرين :

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \to \quad \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \to f\big((x, y)\big) = (x, x, y)$$

(1) بين ان f تطبيق خطي

(2) هل f متباين ؟ هل f غامر ؟

الحل

$$(x, y)(x', y') \in \mathbb{R}^2\ , \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$f\big(\lambda(x, y) + \mu(x', y')\big) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu x')$$

$$= (\lambda x + \mu x', \lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$$
$$= (\lambda x, \lambda x, \lambda y) + (\mu x', \mu x', \mu y')$$
$$= \lambda f\big((x, y)\big) + \mu f\big((x', y')\big)$$

ومنه f تطبيق خطي

(2) حتى يكون متباين يكفي ان نبرهن ان $Kerf = \{0_{\mathbb{R}^2}\} = \{(0,0)\}$

$$Kerf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f\big((x, y)\big) = 0_F = (0,0,0)\}$$
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, x, y) = (0,0,0)\}$$
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0, y = 0\}$$
$$= \{(0,0)\}$$

ومنه f تطبيق متباين

– حتى يكون غامر يكفي ان نبرهن ان $Imf = \mathbb{R}^3$

ناخذ مثال مضاد لدينا $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ لكن $(1,2,3) \notin Imf$

ومنه f ليس تطبيق غامر

التطبيقات الخطية والفضاءات الشعاعية ذات البعد المنته :

ليكن E فضاء شعاعي بعده n وليكن

نظرية : اذا كان $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ اساس ل E وكانت $v_1, v_2, \dots, v_n$ اشعة من F

فانه يوجد تطبيق خطي وحيد f من E في F بحيث يكون $f(u_i) = v_i$ مع $1 \leq i \leq n$

الاثبات : ليكن x و y شعاعان من E حيث $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ و

$y = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_n u_n$ و $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ سلميات من $\mathbb{K}$

وليكن f تطبيق من E في F بحيث $f(x) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ و

$f(y) = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$

ولنبين ان f تطبيق خطي

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E: f(\alpha x + \beta y) =$$

$$= f(\ \alpha\lambda_1 u_1 + \alpha\lambda_2 u_2 + \cdots + \alpha\lambda_n u_n + \beta\mu_1 u_1 + \beta\mu_2 u_2 + \cdots + \beta\mu_n u_n)$$
$$= f\big((\ \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1)u_1 + (\ \alpha\lambda_2 + \beta\mu_2)u_2 + \cdots + (\ \alpha\lambda_n + \beta\mu_n)u_n\big)$$
$$= (\ \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1)v_1 + (\ \alpha\lambda_2 + \beta\mu_2)v_2 + \cdots + (\ \alpha\lambda_n + \beta\mu_n)v_n$$
$$= \alpha(\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) + \beta(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n)$$
$$= \alpha f(x) + \beta f(y)$$

لاثبلت الو حدانية نفرض ان g تطبيق خطي من E في F بحيث يكون

$g(u_i) = v_i$ مع $1 \leq i \leq n$

من اخل كل x من E يكون لدينا $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ سلميات من $\mathbb{K}$ وبمان g تطبيق خطي من E في F فان

$$g(x) = g(\ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n)$$
$$= \ \lambda_1 g(u_1) + \lambda_2 g(u_2) + \cdots + \lambda_n g(u_n)$$
$$= \ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = f(x)$$

فمن اخل كل x من E يكون $g(x) = f(x)$

نظرية :

اذا كان $B = \{\ u_1, u_2\ , \dots, u_n\}$ اساس ل E وكانت $v_1, v_2\ , \dots, v_n$ اشعة من F

وكان f تطبيقا خطيا من E في F بحيث $f(u_i) = v_i$ مع $1 \leq i \leq n$ فان

(1) يكون التطبيق f متباين اذا وفقط اذا كانت الاشعة $v_1, v_2\ , \dots, v_n$ مستقلة خطيا

(2) يكون التطبيق f غامر اذا وفقط اذا كانت الاشعة $v_1, v_2\ , \dots, v_n$ مولدة ل F

(3) يكون التطبيق f تقابلا اذا وفقط اذا كانت الاشعة $v_1, v_2\ , \dots, v_n$ اساسا ل F

الاثبات :

(1) – اذا كانت الاشعة $v_1, v_2\ , \dots, v_n$ مستقلة خطيا

$$x \in\ Kerf \Longrightarrow f(x) = 0_F$$
$$\Longrightarrow\ =\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_F$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0_E$$

ومنه $Kerf = \{0_E\}$ اذن f متباين

– لنفرض ان f متباين وليكن $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_F$

فينتج ان $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n) = 0$

وبمان f متباين فان $Kerf = \{0_E\}$ ومنه $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0$

وبمان $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ اساس ل E ينتج $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

وبالتالي الاشعة $v_1, v_2, \dots, v_n$ مستقلة خطيا في F

(2) اذا كانت الاشعة $v_1, v_2, \dots, v_n$ مولدة ل F, فكل شعاع y من F يمكن كتابته

على الشكل التالي : $y = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$

ومنه $y = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n)$

معناه $y \in Imf$ اي f غامر

اذا كان f غامر لنفرض y من F يوجد x من E بحيث $y = f(x)$ ولما كان

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$$

فيكون

$$y = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

معناه ان الاشعة $v_1, v_2, \dots, v_n$ مولدة ل F,

تمرين محلول 1 :

ليكن $\{e_1, e_2\}$, $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ الاساسين القانونيين للفضائين الشعاعيين $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ على الترتيب

عين التطبيق الخطي من في الذي يحقق $f(e_1) = 2e'_2 + e'_3$, $f(e_2) = e'_2 - e'_1$

الحل

نعلم ان $e_1 = (1,0)$ $e_2 = (0,1)$ $e'_1 = (1,0,0), e'_2 = (0,1,0), e'_3 = (0,0,1)$

$$, f(e_1) = 2e'_2 + e'_3 = 2(0,1,0) + (0,0,1) = (0,2,1)$$

$$f(e_2) = e'_2 - e'_1 = (0,1,0) - (1,0,0) = (-1,1,0)$$

من اجل (x, y) من $\mathbb{R}^2$ يكون لدينا

$$f\big((x,y)\big) = f(xe_1 + e_2y)$$
$$= xf(e_1) + yf(e_2)$$
$$= x(0,2,1) + y(-1,1,0)$$
$$= (-y, 2x + y, x)$$

وبالتالي التطبيق الخطي f معرف كمايلي

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \quad \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \rightarrow f\big((x,y)\big) = (-y, 2x + y, y)$$

رتبة تطبيق خطي :

ليكن F, E فضائين شعاعيين ببعديين منتهيين على الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيقا خطيا من E في F

تعريف : نسمي بعد $f(E)$ برتبة التطبيق الخطي f ونرمز له بالرمز $rg(f)$ ونكتب

$$rg(f) = dim(Imf)$$

نظرية : اذا كان f تطبيقا خطيا من E في F فان

$$dim(E) = dim(Kerf) + rg(f)$$

الاثبات

اذا كان $Kerf = \{0_E\}$ فان f متباين وبالتالي f تقابل من E في $f(E)$ ومنه

$$dim(E) = dim\big(f(E)\big) = rg(f)$$

اذا كان $Kerf \neq \{0_E\}$. لنفرض ان الاشعة $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ اساس ل $Kerf$

و الاشعة $v_1, v_2, \dots, v_p$ اساس ل $f(E)$. كما نفرض ان $u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{n+p}$ اشعة

من E تحقق $f(u_{n+i}) = v_i$ من اجل $1 \leq i \leq p$

لاجل ذالك نفرض ان (1) $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} + \cdots + \lambda_{n+p} u_{n+p} = 0$

وبمان f خطي فان (2) $f\big(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} + \cdots + \lambda_{n+p} u_{n+p}\big) = 0$

وبمان $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ شعاع من $Kerf$ فان

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n) = 0 \quad (3)$$

من العلاقتين (2)و (3) وكون f خطي فان $\lambda_{n+1} v_{n+1} + \lambda_{n+2} v_{n+2} + \cdots + \lambda_{n+p} v_p = 0$

وبمان الاشعة $v_1, v_2, \ldots, v_p$ اساس ل $f(E)$ فان $\lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \cdots = \lambda_{n+p} = 0$

فتصبح العلاقة (1) كمايلي $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0$

وبمان $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ اساس ل $Kerf$ فان $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

وبالتالي اذا تحقق (1) ينتج ان $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \cdots = \lambda_{n+p} = 0$

وهذاا يعني ان الاشعة $u_1, u_2 \ldots, u_n, \ldots, u_{n+p}$ مستقلة خطيا

لناخذ الان شعاع كيفي x من E ولنفرض ان $y = f(x)$ وبمان الاشع $v_1, v_2, \ldots, v_p$ اساس ل

$f(E)$ فيمكن ان نكتب $y = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p$ وبفرض

$x' = \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_2 u_{n+2} + \ldots + \alpha_p u_{n+p}$ نجد $y = f(x')$ وبالتالي $f(x - x') = 0$

$x - x' \in Kerf$ فيكتب الشعاع $x - x'$ على الشكل التالي

$x - x' = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n$ وهذا يؤدي الى

$$x = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n + \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_2 u_{n+2} + \ldots + \alpha_p u_{n+p}$$

وهذا يعني ان الاشعة $u_1, u_2 \ldots, u_n, \ldots, u_{n+p}$ مولدة ل E فهي تشكن اساسا ل E مما يعني ان

$dim(E) = dimKerf + dim(f(E))$ اي $dim(E) = dimKerf + rg(f)$

نتيجة :

f متباين $\Leftrightarrow dim(E) = rg(f)$

f غامر $\Leftrightarrow dim(F) = rg(f)$

الاثبات

f متباين $\Leftrightarrow Kerf = \{0_E\} \Leftrightarrow dimKerf = 0 \Leftrightarrow dim(E) = rg(f)$

f غامر $\Leftrightarrow f(E) = F \Leftrightarrow dim(F) = rg(f)$

تمرين محلول1 :

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \ \rightarrow \quad \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \rightarrow f\big((x,y)\big) = (3x-4y, x-y)$$

(1) بين ان f تطبيق خطي

(2) عين $Kerf$ و $Im\, f$ ثم $rg(f)$

الحل :

$$(x,y)(x',y') \in \mathbb{R}^2 , \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$f\big(\lambda(x,y) + \mu(x',y')\big) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$$

$$= (3(\lambda x + \mu x') - 4(\lambda y + \mu y'), \lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y')$$

$$= \lambda(3x - 4y, x - y) + \mu(3x' - 4y, x' - y')$$

$$= \lambda f\big((x,y)\big) + \mu f\big((x',y')\big)$$

ومنه f تطبيق خطي

$$Kerf = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f\big((x,y)\big) = 0_F = (0,0) \big\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (3x-4y, x-y) = (0,0) \}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y = 0 \}$$

$$= \{(0,0)\}$$

$$Imf = \big\{f\big((x,y)\big) / \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\}$$

$$= \{(3x-4y, x-y) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$= \{(3x,y) + (-4y,y) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{x(3,1) + y(-4,1)(x,y) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \langle (3,1), (-4,1) \rangle$$

ومنه $$rg(f) = dim(Imf) = 2$$

تمرين محلول 2

ليكن التطبيق الخطي f معرف كمايلي

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \quad \to \quad \mathbb{R}^3$$

$$(x,y) \to f\big((x,y)\big) = (-y, 2x+y, x)$$

(1) بين ان Imf مستوي شعاعي يطلب تعيين معادلة ديكارتية له

(2) هل f متباين ؟ علل

الحل

عين Imf

$$Imf = \{f\big((x,y)\big) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{(-y, 2x+y, x) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{(0,2x,x) + (-y,y,0) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{x(0,2,1) + y(-1,1,0) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \langle (0,2,1), (-1,1,0) \rangle$$

ومنه $dim(Imf) = 2$ اذن Imf مستوي شعاعي

تعيين المعادلة الديكارتية للمستوي الشعاعي Imf

$$f\big((x,y)\big) = (X,Y,Z) \Leftrightarrow (-y, 2x+y, x) = (X,Y,Z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = -y \\ Y = 2x+y \\ Z = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X + 2Z - Y = 0$$

$$dim(\mathbb{R}^2) = dimkerf + rgf \Longrightarrow dimkerf = dim(\mathbb{R}^2) - rgf = 0 \ (2)$$

$$\Longrightarrow kerf = \{0_{\mathbb{R}^2}\} = \{(0,0)\}$$

$$\Longrightarrow \quad f \text{متباين}$$

سلسلة تمارين رقم 3حول (العماليات الداخلية –

الفضاء الشعاعي – المطبيقات الخطية '

(1)العمليات الداخلية

التمرين الاول :

لتكن مجموعة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ المزودة بالعملية $*$ والمعرفة كمايلي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}, \qquad x * y = x + 2y$$

(1)بين ان العملية $*$ داخلية في $\mathbb{Z}$

(2)ادرس خصائص هذه العملية

التمرين الثاني :

لتكن مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المزودة بالعملية التجميعية $*$ والمعرفة كمايلي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \ , \qquad x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

بين ان $(\mathbb{R},*)$ زمرة تبدلية في $\mathbb{R}$

التمرين الثالث :

لتكن مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المزودة بالعملية $*$ والمعرفة كمايلي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \ , \qquad x * y = \ln(e^x + e^y)$$

(1) بين ان العملية $*$ داخلية

(2) ادرس خصائص هذه العملية

التمرين الرابع :

لتكن المجموعة $E = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ المزودة بالعملية $*$ والمعرفة ب

$$\forall\, x, y \in E \ , \qquad x * y = xy - 2x - 2y + 6$$

(1) ا ثبت انه اذا كان $y \neq 2$ و $x \neq 2$ فان $xy - 2x - 2y + 6 \neq 2$

ماذا تستنتخ ؟

(2) بين ان $(E,*)$ زمرة تبدلية

التمرين الخامس :

نعرف على $\mathbb{R}$ العملية الداخلية $*$ كمايلي

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \;\; a * b = \frac{1}{2}(ab + a + b - 1)$$

(1)حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية

$$x * 5 = 2, \qquad (-2) * x = 0, \qquad x * x = 2$$

(2) تحقق ان $*$ تبدلية وتجميعية في $\mathbb{R}$

(3) اوخد العنصر الحيادي للعتلية $*$ في $\mathbb{R}$

(4) هل كل عنصرمن $\mathbb{R}$ يقبل نضير بالنسبة للعملية $*$ في $\mathbb{R}$

(5) عين Ω مجموعة العناصرمن $\mathbb{R}$ التي تقبل نضير بالنسبة للعملية $*$

(2) الفضاءات الشعاعية

التمرين الاول :

اثبت ان الاشعة $u = (1,1,1)$ $v = (1,2,3)$ $w = (2,-1,1)$ تولد $\mathbb{R}^3$

التمرين الثاني :

لتكن الاشعة $u = (0,-1,1)$ $v = (-1,0,1)$ $w = (1,-1,0)$ من $\mathbb{R}^3$

(1) اثبت ان هذه الاشعة مستقلة خطيا مثنى مثنى

(2) هل $\{u, v, w\uparrow\}$ مستقلة خطيا ؟ ماهو بعد الفضاء الشعاعي الجزئي الذي تولده هذه الاشعة

التمرين الثالث :

اثبت ان التوابع f, g, hالمعرفة ب :

$$f(x) = x, g(x) = sinx\, , h(x) = cosx$$

مستقلة خطيا في $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

التمرين الرابع :

ليكن E الفضاء الشعاعي الجوئي من $\mathbb{R}^3$ والمولد بالاشعة التالية

$c = (-1,1,-3,0) b = (1,2,0,1) a = (2,1,3,1)$

عين اساسا ل E وكذا بعد E

(3) التطبيقات الخطية

التمرين الاول :

ليكن التطبيق الخطي f معرف كمايلي

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \quad \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \rightarrow f\big((x, y, z)\big) = (x, x - y, y - z)$$

(1) بين ان f تطبيق خطي

(2) عين $Kerf$ و Imf

التمرين الثاني :

ليكن التطبيق الخطي f معرف كمايلي

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \quad \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow f\big((x, y, z)\big) = (-x + y + z, x - y + z)$$

و التطبيق الخطي g المعرف كمايلي

$$g: \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \quad \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \rightarrow f\big((x, y, z)\big) = (y, x, x + y)$$

(1) بين ان التطبيقين f و g خطيين

(2) عين $Kerf$ و Imf و $Kerg$ و Img و rgf و $rg(g)$

(3) عين gof fog

التمرين الثالث :

ليكن $\{e_{1,} e_2, e_3\}$ الاساس القانوني للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ و نعتبر $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ من $\mathbb{R}^3$ حيث

عين التطبيق الخطي من في الذي يحقق $e'_1 = e_1$ $, e'_2 = e_1 + 2e_2,$ $e'_3 = 2e_2 + 3e_3$

(1) بين ان $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ اساس ل $\mathbb{R}^3$

(2) ليكن f التطبيق الخطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ الذي يحقق

$$f(e_3) = e'_3 \quad , f(e_2) = e'_2 \; f = (e_1) = e'_1$$

(3) هل f تقابلي ؟ علل ثم عين عبارته

التمرين الرابع :

ليكن H المجموعة الجزئية من $\mathbb{R}^3$ المعرفة ب :

(1) بين ان H فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

(2) اوجد بعد H

التمرين الخامس

ليكن التطبيق الخطي f معرف

$$f : \quad \mathbb{R}^2 \to \quad \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \to f\big((x, y)\big) = (2x - 4y, x - 2y)$$

و التطبيق الخطي g المعرف كمايلي

$$g : \quad \mathbb{R}^2 \to \quad \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \to g\big((x, y)\big) = (3x - 4y, x - y)$$

(1) عين $Kerf$ و Imf بين يعديهما .هل f متباين ؟ هل f غامر ؟

(2) بين ان g تقابلي عين g^{-1} استنتج يعدي $Kerg$ و Img

الحلول

التمرين الاول :

لتكن مجموعة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ المزودة بالعملية $*$ والمعرفة كمايلي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}, \qquad x * y = x + 2y$$

(1)بين ان العملية $*$ داخلية في $\mathbb{Z}$

(2)ادرس خصائص هذه العملية

الحل

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}, \qquad x + 2y \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \forall\, x, y \in \mathbb{Z}, \qquad x * y \in \mathbb{Z}$$

ومنه ان $*$ داخلية في $\mathbb{Z}$

(2)

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}, \qquad x * y = x + 2y \neq y + 2x = y * x$$

ومنه ان $*$ ليست تبديلية في $\mathbb{Z}$

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}, \quad (x * y) * z = (x + 2y) * z = x + 2y + 2z \quad (a)$$

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}, \quad x * (y * z) = x * (y + 2z) = x + 2y + 4z \quad (b)$$

$a \neq b$ ومنه ان $*$ ليست تجميعية في $\mathbb{Z}$

$$\forall\, x \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}\; x * c = x, c * x = x$$

$$x * c = x \Leftrightarrow x + 2c = x \Leftrightarrow c = 0$$

اذا كان $c = 0$ فان ,

$$c * x = x \Leftrightarrow 0 + 2x = x, \forall x \in \mathbb{Z}$$

وهذا تناقض ومنه ان $*$ لا تقبل عنصرحيادي في $\mathbb{Z}$ وكل عنصر لا يقبل عنصرنضير

التمرين الثاني :

لتكن مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المزودة بالعملية التجميعية $*$ والمعرفة كمايلي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

بين ان $(\mathbb{R},*)$ زمرة تبدلية في $\mathbb{R}$

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \sqrt[3]{y^3 + x^3} = y * x$$

ومنه ان $*$ تبديلية في $\mathbb{R}$

العنصر الحيادي

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists e \in \mathbb{R}\; x * e = x$$

$$x * e = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + e^3} = x \Leftrightarrow x^3 + e^3 = x^3$$

$$\Leftrightarrow e = 0$$

ومنه ان 0 هو العنصر الحيادي للعملية $*$ في $\mathbb{R}$

العنصر النضير

$$\forall\, x, x' \in \mathbb{R} \quad x * x' = 0$$

$$x * x' = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + x'^3} = x \Leftrightarrow x^3 + x'^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x' = -x$$

ومنه ان كل عنصر يقبل عنصرنضير للعملية $*$ في $\mathbb{R}$

ومنه ان $(\mathbb{R},*)$ زمرة تبديلية

التمرين الثالث :

لتكن مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المزودة بالعملية $*$ والمعرفة كمايلي

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}\;, \qquad x * y = ln(e^x + e^y)$$

(1) بين ان العملية $*$ داخلية

(2) ادرس خصائص هذه العملية

الحل

(1) $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad ln(e^x + e^y) \in \mathbb{R} \Longrightarrow \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad x * y \in \mathbb{R}$

ومنه ان $*$ داخلية في $\mathbb{R}$

(2)

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \;\; x * y = ln(e^x + e^y) = ln(e^y + e^x) = y * x$$

ومنه ان $*$ تبديلية في $\mathbb{R}$

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x * y) * z = ln(e^x + e^y) * z = ln\left(e^{ln(e^x+e^y)} + e^z\right)$$
$$= ln(e^x + e^y + e^z) \qquad (a)$$

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x * (y * z) = x * (ln(e^x + e^y)) = (ln\left(e^x + e^{(ln(e^y+e^z))}\right)$$
$$= ln(e^x + e^y + e^z) \qquad (b)$$

$a = b$ ومنه ان $*$ تجميعية في $\mathbb{R}$

العنصر الحيادي

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists e \in \mathbb{R}\; x * e = x$$

$$x * e = x \Leftrightarrow ln(e^x + e^y) = x \Leftrightarrow e^x + e^e = e^x$$

$$\Leftrightarrow e^e = 0$$

وهذا مستحيل ومنه العملية $*$ لا تقبل عنصر حيادي في $\mathbb{R}$ وان كل عنصر من $\mathbb{R}$ ليس له نضير

بالنسبة للعملية $*$

التمرين الرابع :

لتكن المجموعة $E = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ المزودة بالعملية $*$ والمعرفة ب

$$\forall\, x, y \in E \quad , \qquad x * y = xy - 2x - 2y + 6$$

(1) ا ثبت انه اذا كان $y \neq 2$ و $x \neq 2$ فان $xy - 2x - 2y + 6 \neq 2$

ماذا تستنتج ؟

(2) بين ان $(E,*)$ زمرة تبدلية

الحل

(1) نستعمل البرهان بعكس النقيض اي نبرهن انه اذا كان $xy - 2x - 2y + 6 = 2$

فان $y = 2$ و $x = 2$

$$xy - 2x - 2y + 6 = 2 \Longrightarrow \; xy - 2x - 2y + 4 = 0$$

$$\Longrightarrow \; (x - 2)(y - 2) = 0$$

$$\Longrightarrow x-2=0 \ \vee y-2=0$$

$$\Longrightarrow x=2 \vee y=2$$

ومنه نستنتج ان $*$ عملية داخلية في $E = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$*$ تبدلية في $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\forall x,y \in E \quad x*y = \ xy-2x-2y+6 = \ yx-2y-2x+6 = y*x$$

ومنه العنلية $*$ تبدلية في $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$*$ تجميعية في $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\forall \ x,y\ ,z \in \ \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad (x*y)*z = (\ xy-2x-2y+6)*z$$

$$= (\ xy-2x-2y+6)z-2(xy-2x-2y+6)-2z+6$$

$$= xyz-2xz-2yz+6z-2xy+4x+4y-12-2z+6$$

$$= xyz-2xz-2yz-2xy+4x+4y+4z-6 \qquad (a)$$

$$\forall \ x,y\ ,z \in \ \mathbb{R} \setminus \{2\}, \ \ x*(y*z) = x*(yz-2y-2z+6)$$

$$= x(yz-2y-2z+6)-2x-2(yz-2y-2z+6)+6$$

$$= xyz-2xz-2yz-2xy+4x+4y+4z-6 \qquad (b)$$

$a=b$ ومنه ان $*$ ل تجميعية في $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

العنصر الحيادي

$$\forall x \in \ \ \mathbb{R} \setminus \{2\}, \exists e \in \ \mathbb{R} \setminus \{2\} \ x*e = x$$

$$x*e = x \Leftrightarrow xe-2x-2e+6 = x \Leftrightarrow xe-3x-2e+6 = 0$$

$$\Leftrightarrow e(x-2) = 3(x-2)$$

$$\Leftrightarrow e = 3, \qquad x \neq 2$$

ومنه العملية $*$ تقبل عنصر حيادي $e=3$ في $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

العنصر النضير

$$\forall \ x,x' \in \ \ \mathbb{R} \setminus \{2\} \ : \ x*x' = 0$$

$$x*x' = 3 \Leftrightarrow xx'-2x-2x'+6 = 3 \Leftrightarrow x'(x-2) = 2x-3$$

$$\Leftrightarrow x' = \frac{2x-3}{x-2}$$

ومنه ان كل عنصر يقبل عنصرنضير للعملية $*$ في $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

ومنه ان $(\mathbb{R} \setminus \{2\}, *)$ زمرة تبديلية

التمرين الخامس :

نعرف على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ العملية الداخلية $*$ كمايلي

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}: \ x * y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1)$$

(1)حل في $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ المعادلات التالية

$$x * 5 = 2, \qquad (-2) * x = 0, \qquad x * x = 2$$

(2) تحقق ان $*$ تبدلية وتجميعية في $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(3) اوخد العنصر الحيادي للعتلية $*$ في $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(4) هل كل عنصرمن $\mathbb{R}$ يقبل نضير بالنسبة للعملية $*$ في $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(5) عين Ω مجموعة العناصرمن $\mathbb{R}$ التي تقبل نضير بالنسبة للعملية $*$

الحل

$$x * 5 = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(5x + x + 5 - 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \ 5x + x + 4 = 4$$

$$\Leftrightarrow \ 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ x = 0$$

$$(-2) * x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-2x + x - 2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ -x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ x = -3$$

$$x * x = 2 \ \ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 + x + x - 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow\ x^2+2x-5=0$$

$$\Leftrightarrow\ x=-1+\sqrt{6}\ \vee x=-1-\sqrt{6}$$

(2) تحقق ان $*$ تبدلية وتجميعية في $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$\forall x,y\in\ \mathbb{R}\setminus\{-1\}:\ x*y=\frac{1}{2}(xy+x+y-1)$$

$$=\frac{1}{2}(yx+y+x-1)=y*x$$

ومنه ان $*$ تبدلية في $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$\forall\ x,y\,,z\in\ \mathbb{R}\setminus\{-1\}\,,\quad (x*y)*z=\frac{1}{2}\big((x*y)z+(x*y)+z-1\big)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(xy+x+y-1)z+\frac{1}{2}(xy+x+y-1)+z-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(xyz+xz+yz+z+xy+x+y-1)-1\right)\quad (a)$$

$$\forall\ x,y\,,z\in\ \mathbb{R}\setminus\{-1\}\,,\ \ x*(y*z)=\frac{1}{2}(x(y*z)+x+(y*z)-1)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\frac{1}{2}(yz+y+z-1)+x+\frac{1}{2}(yz+y+z-1)-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(xyz+xz+yz+z+xy+x+y-1)-1\right)\qquad (b)$$

$a=b$ ومنه ان $*$ ل تجميعية في $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

العنصر الحيادي

$$\forall x\in\ \ \mathbb{R}\setminus\{-1\}\ ,\exists e\in\ \ \mathbb{R}\setminus\{-1\}\ x*e=x$$

$$x*e=x\Leftrightarrow\frac{1}{2}(xe+x+e-1)=x\Leftrightarrow\frac{1}{2}(xe-x+e-1)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)(e-1)=0$$

$$\Leftrightarrow e=1,\qquad x\neq-1$$

ومنه العملية $*$ تقبل عنصر حيادي $e = 1$ في $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

العنصر

$$\forall\, x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : x * x' = 1$$

$$x * x' = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(xx' + x + x' - 1) = 1 \Leftrightarrow xx' + x + x' - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x'(x+1) = 3 - x$$

$$\Leftrightarrow x' = \frac{3-x}{x+1}$$

ومنه ان كل عنصر يقبل عنصرنضير للعملية $*$ في $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

ومنه ان $(\mathbb{R} \setminus \{-\},*)$ زمرة تبديلية

(2) الفضاء الشعاعي

التمرين الاول :

اثبت ان الاشعة $u = (1,1,1)$ $v = (1,2,3)$ $w = (2,-1,1)$ تولد $\mathbb{R}^3$

الحل

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} : (x,y,z) = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w$$

$$(x,y,z) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,2,3) + \alpha_3(2,-1,1)$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3\ , \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3\ , \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3\ )$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = x \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = y \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = x \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 = x - y \\ -2\alpha_2 + \alpha_3 = x - z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = x \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 = x - y \\ -5\alpha_3 = -x + 2y - z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x + y - z \\ \alpha_2 = \frac{1}{5}(-2x - y + 3z) \\ \alpha_3 = \frac{1}{5}(x - 2y + z) \end{cases}$$

بمان $dim\mathbb{R}^3 = 3$ فان الاشعة u, v, w تشكل اساسا ل $\mathbb{R}^3$

التمرين الثاني :

لتكن الاشعة $u = (0, -1,1)$ $v = (-1,0,1)$ $w = (1, -1,0)$ من $\mathbb{R}^3$

(1) اثبت ان هذه الاشعة مستقلة خطيا مثنى مثنى

(2) هل $\{\uparrow u, v, w\}$ مستقلة خطيا ? ماهو بعد الفضاء الشعاعي الجزئي الذي تولده هذه الاشعة

الحل

اثبات ان الشعاعين $u = (0, -1,1)$ $v = (-1,0,1)$مستقلين خطيا

$$\alpha_1 u{+}\alpha_2 v = 0 \Leftrightarrow \alpha_1(0, -1,1) + \alpha_2(-1,0,1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\alpha_2, -\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

ومنه ان الشعاعين $u = (0, -1,1)$ $v = (-1,0,1)$ مستقلين خطيا

بنفس الطريقة نثبت ان u و w مستقلين خطيا وكذلك v وw مستقلين خطيا

(2) نلاحظ ان $v + u + w = 0$ ومنه ان $\{\uparrow u, v, w\}$ ليست مستقلة خطيا

$$S = \{a \in \mathbb{R}^3 : a = \alpha_1 u{+}\alpha_2 v + \alpha_3 w\}$$

$$= \{a \in \mathbb{R}^3 : a = \alpha_1 u{+}\alpha_2 v + \alpha_3(-u - v)\}$$

$$= \{a \in \mathbb{R}^3 : a = (\alpha_1 - \alpha_3)u(\alpha_2 - \alpha_3)v\}$$

u, v مولدان ل S ومستقلان خطيا اذا $\{u, v\}$ اساس ل S وعليه $\dim S = 2$

التمرين الثالث :

اثبت ان التوابع f, g, hالمعرفة ب :

$$f(x) = x, g(x) = sinx\ , h(x) = cosx$$

مستقلة خطيا في $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

الحل

$$\alpha_1 f{+}\alpha_2 g + \alpha_3 h = 0$$

$$\alpha_1 x+\alpha_2 sinx+\alpha_3 cosx=0$$

من اجل $x=0, x=\pi, x=\frac{\pi}{2}$

$$\alpha_1 0+\alpha_2 sin0+\alpha_3 cos0=0$$

$$\alpha_1 \pi+\alpha_2 sin\pi+\alpha_3 cos\pi=0$$

$$\alpha_1 \frac{\pi}{2}+\alpha_2 sin\frac{\pi}{2}+\alpha_3 cos\frac{\pi}{0}=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

ومنه ان التوابع $\{f, g, h\}$ مستقلة خطيا

التمرين الرابع :

ليكن E الفضاء الشعاعي الجوئي من $\mathbb{R}^3$ والمولد بالاشعة التالية

$$c=(-1,1,-3,0) b=(1,2,0,1) a=(2,1,3,1)$$

عين اساسا ل E وكذا بعد E

$$\alpha_1 a+\alpha_2 b+\alpha_3 c=0 \Leftrightarrow \alpha_1(2,1,3,1)+\alpha_2(1,2,0,1)+\alpha_3(-1,1,-3,0)=0$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, 3\alpha_1-3\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2)=(0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0 \\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0 \\ 3\alpha_1-3\alpha_3=0 \\ ,\alpha_1+\alpha_2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0 \\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_3=\alpha_1 \\ ,\alpha_2=-\alpha_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1(a-b+c)=0\ , \alpha_1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c)=0$$

$$\Leftrightarrow b=a+c$$

ومنه الاشعة a, b, c مرتبطة خطيا وعليه فان $dimE<3$

$$E=\{v \in E^4 : v=\alpha_1 a+\alpha_2 b+\alpha_3 c\}$$

$$= \{v \in E^4 : v = \alpha_1 a + \alpha_2(a + c) + \alpha_3 c\}$$

$$= \{v \in E^4 : v = (\alpha_1 + \alpha_2)a + (\alpha_3 + \alpha_2)c\}$$

ومنه$\{a, b\}$ مولدة لE

$$\alpha_1(2,1,3,1) + \alpha_2(1,2,0,1) = 0 \Leftrightarrow (2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, 3\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

ومنه $\{a, b\}$ مستقلين خطيا وعليه $\{a, b\}$ اساس ل E و $\mathrm{dimE} = 2$

(3) التطبيقات الخطية

التمرين الاول :

ليكن التطبيق الخطي f معرف كمايلي

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \quad \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \rightarrow f\big((x, y, z)\big) = (x, x - y, y - z)$$

(1) بين ان f تطبيق خطي

(2) عين $Kerf$ و Imf

الحل

(1)اثبات ان f تطبيق خطي

$$\forall (x, y, z)(x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda, \mu, \in \mathbb{R}$$

$$f\big(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')\big) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$$

$$= (\lambda x + \mu x', \lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y', \lambda y + \mu y' - \lambda z - \mu z')$$

$$= \lambda(x, x - y, y - z) + \mu(x', x' - y', y' - z')$$

$$= \lambda f\big((x, y, z)\big) + \mu f\big((x', y', z')\big)$$

ومنه f تطبيق خطي

$$Kerf = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f\big((x, y, z)\big) = 0_F = (0,0,0)\big\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, x - y, y - z) = (0,0,0)\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y = z = 0\}$$

$$= \{(0,0,0)\}$$

$$Imf = \{f((x,y,z))/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\{(x, x-y, y-z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{(x,x,0) + (0,-y,y) + (0,0,-z) +/ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{x(1,1,0) + y(0,-1,1) + z(0,0,-1) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \langle (1,1,0), (0,-1,1), (0,0,-1) \rangle$$

ومنه $dim(Imf) = 3$

التمرين الثاني :

ليكن التطبيق الخطي f معرف كمايلي

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \quad \mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z) \rightarrow f((x,y,z)) = (-x+y+z, x-y+z)$$

و التطبيق الخطي g المعرف كمايلي

$$g: \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \quad \mathbb{R}^3$$

$$(x,y) \rightarrow g((x,y)) = (y, x, x+y)$$

(1) بين ان التطبيقين f و g خطيين

(2) عين $Kerf$ و Imf و $Kerg$ و Img و rgf و $rg(g)$

(3) عين gof fog

الحل

(1)اثبات ان f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$

$$\forall (x,y,z)(x',y',z') \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda, \mu, \in \mathbb{R}$$

$$f(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$$

$$= (-\lambda x - \mu x' + \lambda y + \mu y' \lambda z + \mu z', \lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y' + \lambda z + \mu z')$$

$$= \lambda(-x + y + z) + \mu(x' - y' + z')$$

$$= \lambda f\big((x, y, z)\big) + \mu f\big((x', y', z')\big)$$

ومنه f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$

– اثبات ان g تطبيق خطي من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}^3$

$$\forall (x, y)(x', y') \in \mathbb{R}^2 , \forall \lambda, \mu, \in \mathbb{R}$$

$$g\big(\lambda(x, y) + \mu(x', y')\big) = g(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$$

$$= (\lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x', \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y')$$

$$= \lambda(y, x, x + y) + \mu(x', y', x' + y')$$

$$= \lambda g\big((x, y)\big) + \mu g\big((x', y')\big)$$

ومنه g تطبيق خطي

$$Kerf = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f\big((x, y, z)\big) = 0_F = (0,0)\big\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (-x + y + z, x - y + z) = (0,0)\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y, z = 0$$

$$Kerf = \{(x, x, 0), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1,0), x \in \mathbb{R}\}$$

وعليه فان $Kerf$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$ مولد بالشعاع $(1,1,0)$ اذن $dimkerf = 1$

$$Imf = \big\{f\big((x, y, z)\big) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big\}$$

$$\{(-x + y + z, x - y + z) \ / \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{(-x + y + z, -(-x + y) + z) \ / \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \big\{\big((-x + y)(1, -1) + z(1,1)\big) \ / \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big\}$$

يمكن التاكد بسهولة ان الشعاعين $(1,1)$ $(1, -1)$ مستقلين خطيا وبالتالي اساس ل Imf

وعليه فان Imf هو الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^2$ المولد بالشعاعين $(1,1)$ $(1, -1)$ اذن

$$dim(Imf) = 2$$

$$dim\mathbb{R}^3 = dimkerf + rgf \Longrightarrow rgf = dim\mathbb{R}^3 - dimkerf = 3 - 1 = 2$$

$$Kerg = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, g\big((x,y)\big) = 0_F = (0,0,0)\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (y,x,x+y) = (0,0,0)\}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0$$

$$Kerg = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

ومنه $dimkerg = 0$

$$Img = \{g\big((x,y)\big)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\{(y,x,x+y) \;/\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{x(1,0,1) + y(0,1,1) \;/\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

يمكن التاكد بسهولة ان الشعاعين (1,0,1) (0,1,1) مستقلين خطيا وبالتالي اساس ل Img

وعليه فان Img هو الفضاء الشعاعي الجزئي من $\mathbb{R}^2$ المولد بالشعاعين (1,0,1) (0,1,1) اذن

$$dimImg = rgg = 2$$

(3) تعين gof fog

$$(gof)(x,y,z) = g\big(f(x,y,z)\big) = g(-x+y+z, x-y+z)$$

$$= (x-y+z, -x+y+z, 2z)$$

ومنه

$$gof: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z) \longrightarrow (x-y+z, -x+y+z, 2z)$$

$$(fog)(x,y,z) = f\big(g(x,y,z)\big) = f(y,x,x+y)$$

$$= (-y+x+x+y, y-x+x+y)$$

$$= (2x, 2y)$$

ومنه

$$fog: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longrightarrow (2x, 2y)$$

التمرين الثالث :

ليكن $\{e_{1,}e_2,e_3\}$ الاساس القانوني للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ و نعتبر الاشعة e'_1,e'_2,e'_3 من $\mathbb{R}^3$ حيث

$$e'_3 = 2e_2 + 3e_3 \quad , e'_2 = e_1 + 2e_2, e'_1 = e_1$$

(1) بين ان $\{e'_1,e'_2,e'_3\}$ اساس ل $\mathbb{R}^3$

(2) ليكن f التطبيق الخطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ الذي يحقق

$$f(e_3) = e'_3 \quad , f(e_2) = e'_2 \; f = (e_1) = e'_1$$

(3) هل f تقابلي ؟ علل ثم عين عبارته

الحل

(1) اثبات ان $\{e'_1,e'_2,e'_3\}$ اساس ل $\mathbb{R}^3$

$$\forall \alpha,\beta,\delta \in \mathbb{R} : \alpha\, e'_1 + \beta\, e'_2 + \delta\, e'_3 = 0$$

$$\alpha\, e'_1 + \beta\, e'_2 + \delta\, e'_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha e_1 + \beta(e_1 + 2e_2) + \delta(2e_2 + 3e_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)e_1 + (\beta + 2\delta)e_2 + 3\delta e_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + 2\delta = 0 \\ 3\delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \delta = 0$$

ومنه الاشعة من $\mathbb{R}^3$ e'_1,e'_2,e'_3 مستقلة خطيا

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; (x,y,z) = \alpha\, e'_1 + \beta\, e'_2 + \delta\, e'_3$$

$$= (\alpha + \beta)e_1 + (\beta + 2\delta)e_2 + 3\delta e_3$$

$$= (\alpha + \beta, \beta + 2\delta, 3\delta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \beta + 2\delta = y \\ 3\delta = z \end{cases}$$

ومنه$\mathbb{R}^3$ مولد بالاشعة e'_1,e'_2,e'_3 وعليه فهي تشكل اساس ل $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \alpha = x - y + 2\dfrac{z}{3} \\ \beta = y - 2\dfrac{z}{3} \\ \delta = \dfrac{z}{3} \end{cases}$$