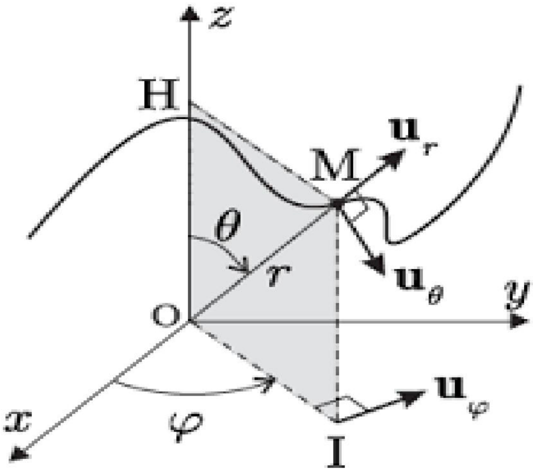
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

كلية التكنولوجيا

قسم الهندسة الكهربائية

مطبوعة دروس في مقياس فيزياء 1



للسنوات الأولى جامعي للسداسي الأول:

- علـــــوم التكنولوجيا .S.T.
- علـــــوم المادة .S.M.
- رياضيــات وإعلام آلي .M.I .
- علــوم طبيــعية وحيــاة .S.N.V.

إعداد: د. سليمانـي حمــزة.

السنة الجامعية: 2022/2021

يسعدني أن نضع بين أيدي الطلبة الأعزاء هذه المطبوعة التي تمس جانبا هاما في الفيزياء ألا و هو الميكانيـــك. حيث تمثــل مطبوعتنا هذه قفــزة نوعية في برامج السنة الأولى جامعي إذ تحتوي مقياس الميكانيــك: المحور الأول: مراجعة رياضية تخص الأشعة و ما تبعها، المحور الثـــاني: الحركيات، المحور الثالــث: الحركات النسبية، المحور الرابــع: الديناميــك، المحور الخامــس والأخيــر الطاقـــة و العمل، كما أن كل محور مرفـــوق بتماريـــن و حلها.

وأخيراَ بعد أن تقدمنا باليسير في هذا المجال الواسع، آملين أن ينال هذا العمل القبول كصدقة جارية.

طلبتي الأعزاء، يسعدني أن تطلعوا على هذه المطبوعة، فلكم مني كل الشكر والتقدير.

وفقني الله وإياكم لما فيه صالحنا جميعا، وصلى اللهم وسلم على سيدنا وحبيبنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين.

الأستاذ. سليمـــاني حمــزة.

الفهرس

الحساب الشعاعي

الحركيات

الحركات المركبة

الديناميك

الطاقة و العمل

الحساب الشعاعي

1/ الجداء السلمي:

أ/ تعريف:

هي مقادير فيزيائية يعبر عنها بقيمة عددية واحدة فقط في الوحدة المناسبة. فعندما نقول أن الزمن المستغرق للانتقال من نقطة الى أخرى هو t فلا نحتاج الى أي إضافة لأن المعني تحدد تماما. من هذه المقادير نذكر (الكتلة - الطول - الزمن- درجة الحرارة ...). أن العمليات التي تديرها هي العمليات التي تتحكم وتدير الأعداد الحقيقية من جمع وطرح وضرب و تقسيم، فيما يعرف بالحساب و يشكل رياضي نقول:

الجداء السلمي لشعاعين $\vec{U}, \vec{V}$ هو العدد الحقيقي الآتي: $\vec{U}.\vec{V}$ حيث:

$$\vec{U}.\vec{V} = U.V.Cos(U,V)$$

ب/ خصائص:

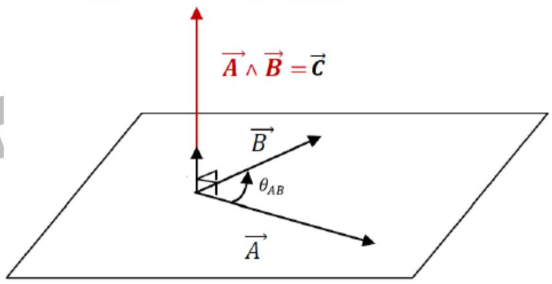
* **التناظر:** $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$
* **التوزيع:** $\vec{U}.(\vec{V}+\vec{W}) = \vec{U}.\vec{V} + \vec{U}.\vec{W}$
* **الجداء بعدد حقيقي:** $\lambda\vec{U}.\alpha\vec{V} = \lambda\alpha\vec{U}.\vec{V}$
* **التعامد:** $\vec{U} \perp \vec{V} \leftrightarrow \vec{U}.\vec{V} = 0$

جـ/ عبارة الجداء: في معلم متعامد و متجانس (Oxyz) الجداء السلمي للشعاعين:

$$V_1(x_1, y_1, z_1)\ ;\ V_2(x_2, y_2, z_2)$$

يكتب كالآتي: $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$

2/ الجداء الشعاعي:



أ/ تعريف: المقدار الشعاعي هو المقدار الذي له قيمة واتجاه ونحتاج لمعرفته إلى تحديد القيمة والاتجاه والفيزياء تتعامل مع هذا النوع من المقادير بشكل كبير فالسرعة والتسارع والقوة كلها مقادير شعاعية.

و بشكل رياضي الجداء الشعاعي لشعاعين U, V هو الشعاع $\vec{U}\wedge\vec{V}$ العمودي على المستوى المتشكل من $(\vec{U}, \vec{V})$ و الثلاثي $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{U}\wedge\vec{V})$ يكون مباشر, و طويلة الشعاع $\vec{U}\wedge\vec{V}$ هي:

$\|\vec{U}\wedge\vec{V}\| = U.V.sin(U,V)$. و هذه الطويلة تمثل مساحة متوازي الأضلاع ABCD.

ب/ خصائص:

- **ضد التناظر:**

$$\vec{U}\wedge\vec{V}=-\vec{V}\wedge\vec{U}$$

- **التوزيع:**

$$\vec{U}\wedge(\vec{V}+\vec{W})=\vec{U}\wedge\vec{V}+\vec{U}\wedge\vec{W}$$

- **الجداء بعدد حقيقي:**

$$\lambda\vec{U}\wedge\alpha\vec{V}=\lambda\alpha(\vec{U}\wedge\vec{V})$$

- **في معلم متعامد و متجانس**(O, i, j, k)**:**

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{0},\ \vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{0},\ \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$$

$$\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j},\ \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$$

- **الجداء الشعاعي المضاعف (قانون جيبس Gibbs):**

$$\vec{U}\wedge(\vec{V}\wedge\vec{W})=(\vec{U}\cdot\vec{W})\vec{V}-(\vec{U}\cdot\vec{V})\vec{W}$$

- **الجداء المختلط:**

$$(\bar{A},\bar{B},\bar{C})=\bar{A}\cdot(\bar{B}\wedge\bar{C})=x_1(y_2z_3-y_3z_2)+x_2(y_3z_1-y_1z_3)+x_3(y_1z_2-y_2z_1)$$

و الجداء المختلط يساوي قيمة المحدد A, B, C

$$(\bar{A},\bar{B},\bar{C})=\bar{A}\cdot(\bar{B}\wedge\bar{C})=\det(\bar{A},\bar{B},\bar{C})\equiv\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

و له نفس خواص المحدد:

$$(\bar{A},\bar{B},\bar{C})=-(\bar{B},\bar{A},\bar{C})=(\bar{C},\bar{A},\bar{B})$$

*

* يغير إشارته إذا تبادلا شعاعين منه:
* ينعدم إذا تماثل على الأقل شعاعان منه: مثلا $(\bar{A},\bar{A},\bar{C})=0$
* يمثل حجم متوازي الوجوه المتشكل من الأشعة A, B, C.

مشتق شعاع:

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{\mathrm{E}}=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{V}(t+h)-\vec{V}(t)}{h}$$

- **مشتق جداء شعاع بدالة:**

$$\left[\frac{d}{dt}f(t)\vec{V}\right]_{\mathrm{R}}=\frac{df}{dt}\vec{V}+f(t)\left(\frac{d}{dt}\vec{V}\right)_{\mathrm{R}}$$

- **مشتق جداء سلمي:**

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2)=(\frac{d}{dt}\vec{V}_1)_{\mathrm{R}}\cdot\vec{V}_2+(\frac{d}{dt}\vec{V}_2)_{\mathrm{R}}\cdot\vec{V}_1$$

مشتق جداء شعاعي:

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2)_{\mathrm{R}}=(\frac{d}{dt}\vec{V}_1)_{\mathrm{R}}\wedge\vec{V}_2+\vec{V}_1\wedge(\frac{d}{dt}\vec{V}_2)_{\mathrm{R}}$$

- **مشتق جداء مختلط:**

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3)=\left(\left[\frac{d}{dt}\vec{V}_1\right]_R,\vec{V}_2,\vec{V}_3\right)+\left(\vec{V}_1,\left[\frac{d}{dt}\vec{V}_2\right]_R,\vec{V}_3\right)+\left(\vec{V}_1,\vec{V}_2,\left[\frac{d}{dt}\vec{V}_3\right]_R\right)$$

- **مشتق جمع شعاعين:**

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_1+\vec{V}_2)_{\mathrm{R}}=(\frac{d}{dt}\vec{V}_1)_{\mathrm{R}}+(\frac{d}{dt}\vec{V}_2)_{\mathrm{R}}$$

- **مشتق شعاع بدلالة $\theta(t)$:**

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}[\theta(t)])_{\mathrm{R}}=(\frac{d}{d\theta}\vec{V})_{\mathrm{R}}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

3/ الكميات الفيزيائية الأساسية: هي كميات معرفة بذاتها، أي لا تعتمد على غيرها في التعريف مثل : الكتلة ، المسافة ، الزمن، الشحنة ، درجة الحرارة و غيرها.

المقدار	اسم الوحدة	رمز الوحدة	رمز البعد
الطول	المتر	M	L
شدة التيار	الامبير	A	I
الكتلة	الكيلوغرام	kg	M
الزمن	الثانية	s	T
درجة الحرارة	الكلفن	K	θ
كمية المادة	المول	Mol	N
شدة الاضاءة	الكانديلا	Cd	J

4/ العلاقات المثلثية:

علاقات أساسية:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1;\ 1 + \tan^2\alpha = 1 + \frac{1}{\sin^2\alpha};\ 1 + \cot^2\alpha = 1 + \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

- **قوانين الجمع:**

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta\ ;\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta.\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta\ ;\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \sin\beta.\cos\alpha$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}\quad ;\quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha.\tan\beta}$$

- **قوانين النسخ:**

$$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2.\cos^2\alpha - 1 = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\sin2\alpha = 2.\sin\alpha.\cos\alpha\ ;\ \tan2\alpha = \frac{2.\tan\alpha}{1 - \tan\alpha}\ ;\ \sin3\alpha = 3.\sin\alpha - 4.\sin\alpha$$

$$\cos3\alpha = -3.\cos\alpha + 4.\cos\alpha\ ;\ \tan3\alpha = \frac{3.\tan\alpha - \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

- **قوانين خطية:**

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos2\alpha}{2}\ ;\ \sin^2\alpha = \frac{1-\cos2\alpha}{2}\ ;\ \sin2\alpha = 2.\sin\alpha.\cos\alpha$$

- **قوانين تحويل الجداء إلى جمع:**

$$\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha.\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

- **عبارات بدلالة $\alpha/2$.**

$$1 + \cos\alpha = 2.\cos^2\alpha/2\ ;\ 1 - \cos\alpha = 2.\sin^2\alpha/2;\ \sin\alpha = 2.\sin\alpha/2.\cos\alpha/2$$

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ;\ \sin\alpha = \frac{2t}{1-t^2}\ ;\ \tan\alpha = \frac{2.t}{1-t^2} \Leftarrow t = \tan\alpha/2$$ نفرض أن:

$$\alpha \neq \pi + 2k\pi$$

- **قوانين تحويل الجمع إلى جداء:**

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

ويمكن كتابتها على شكل آخر بإستعمال العلاقات التالية:

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}\ ;\ y=\frac{\alpha-\beta}{2}\ ;\ \alpha=x+y\ ;\ \beta=x-y$$

- **قوانين التدويرات المشتركة:**

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\ ;\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\sin(\pi/2-\alpha)=\cos\alpha\ ;\ \cos(\pi/2-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\sin(\pi/2+\alpha)=\cos\alpha\ ;\ \cos(\pi/2+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\ ;\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

5/ مؤثرات و قوانين:

- **مؤثر غراديان: Opérateur gradient**

لتكن الدالة $f(x, y, z)$ ذات المتغيرات الكارتيزية الثلاثة x, y, z . بالتعريف:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

هو مؤثر الدالة f في النقطة $M(x, y, z)$ حيث i, j, k أشعة الوحدة الكارتيزية للمعلم المعتاد.

- **في الإحداثيات الإسطوانية:**

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

- **في الإحداثيات الكروية:**

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

- **مؤثر التباعد: Opérateur divergence**

ليكن الشعاع : $\vec{a}=a_x\,\vec{i}+a_y\,\vec{j}+a_z\,\vec{k}$ حيث مركباته دوال ذات المتغيرات x, y, z بالتعريف:

$$\text{div}\,\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

- **في الإحداثيات الإسطوانية:**

$$\text{div}\,\vec{a}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,a_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

- **في الإحداثيات الكروية:**

$$\text{div}\,\vec{a}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,a_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\,a_\theta)}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

- **مؤثر لابلاصيان: Opérateur Laplacien**

لتكن الدالة f(x, y, z) ذات ثلاثة متغيرات مستقلة x, y, z بالتعريف:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- **في الإحداثيات الإسطوانية:**

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- **في الإحداثيات الكروية:**

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

- **مؤثر الدوران: Opérateur rotationnel**

بالتعريف:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \vec{i}(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}) + \vec{j}(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}) + \vec{k}(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y})$$

- **في الإحداثيات الإسطوانية:**

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \frac{1}{r}[\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(r\, a_\varphi)]\vec{u}_r + (\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r})\vec{u}_\varphi + \frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(r\, a_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}]\vec{k}$$

- **في الإحداثيات الكروية:**

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}[\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\varphi r \sin\theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\, a_\theta)]\vec{u}_r + \frac{1}{r \sin\theta}[\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(a_\varphi r \sin\theta)]\vec{u}_\varphi + \frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(r\, a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}]\vec{k}$$

- **المؤثر نبلا:" L'opérateur " nabla**

بالتعريف:

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

كذلك:

$$\vec{\nabla} f = \overrightarrow{\mathrm{grag}}\, f \;;\; \vec{\nabla}\vec{a} = \mathrm{div}\,\vec{a} \;;\; \vec{\nabla}\wedge\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}$$

- **خصائص المؤثرات:**

- كل المؤثرات التي رأيناها خطية.
- بعض العلاقات:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = \overrightarrow{\text{grad}}(f)g + f\,\overrightarrow{\text{grad}}(g)$$

$$\text{div}(f\vec{a}) = (\overrightarrow{\text{grad}}\,f)\vec{a} + f\text{div}\,\vec{a}$$

$$\text{div}(\vec{a}\wedge\vec{b}) = (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a})\vec{b} - \vec{a}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{b})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{a}) = f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a} + (\overrightarrow{\text{grad}}\,f)\wedge\vec{a}$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a}) = 0\ ;\quad \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\,f) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{a}) - \Delta\vec{a}$$

التمــــارين

التمرين1: ليكن الشعاعان $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$. أحسب:

1/ طويلتيهما.

2/ الجداء السلمي $\vec{a}.\vec{b}$

3/ الزاوية المشكلة بينهما.

4/ الجمع $\vec{a}+\vec{b}$ و الطرح $\vec{a}-\vec{b}$.

5/ الجداء الشعاعي $\vec{a}\wedge\vec{b}$.

التمرين2: لدينا المعلم (O, i, j, k) و الشعاعان:

$$\vec{a}-\vec{b}=-\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k};\ \vec{a}+\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

1/ أوجد الشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$.

2/ أحسب طويلة كل من: $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b}$.

3 / مثل الأشعة $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b}$

4/ أحسب زوايا الأشعة $\vec{a},\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$.

5/ حدد إسقاط $\vec{a}$ على $\vec{b}$.

6/ أحسب مساحة الشعاعين $\vec{a},\vec{a}+\vec{b}$.

7/ أحسب الجداء المختلط $\vec{a}[\vec{b}\wedge(\vec{a}+\vec{b})]$ ماذا تمثل النتيجة.

التمرين3: لديك الأشعة التالية:

$$\vec{V}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}\ ،\ \vec{C}=2\vec{i}+0\vec{j}-\vec{k}\ ،\ \vec{W}=-3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

1/ أرسم الأشعة الثلاثة في معلم كارتري.

2/ أحسب Cos الزاوية α بين الشعاعين V, W.

3/ أحسب الجداء السلمي $\vec{W}.\vec{V}$

4/ أحسب الجداء الشعاعي $\vec{C}\wedge\vec{W}$.

التمرين4: تعطى إحداثيات النقاط D,C,B,A في المعلم المتعامد و المتجانس (O,X,Y,Z) كما يلي:

D(-3, -3,2), C(- 2,0,1), B(2, 2, -2) , A(1, -2,0)

1/ أوجد الأشعة: $\vec{V_1}=\vec{AB}$, $\vec{V_2}=\vec{CD}$

2/ أوجد الشعاع $\vec{V}$ حيث $\vec{V}$ عمودي على المستوي: $(\vec{V_1}, \vec{V_2})$.

3/ برهن أن $\vec{V_3}=\vec{J}-\vec{k}$ ينتمي إلى المستوى $(\vec{V_1}, \vec{V_2})$.

4/ إذا كان $\vec{V_3}=X.\vec{V_1}-Y.\vec{V_2}$ ، أوجد(X,Y) .

حل التمـــارين

التمرين1:

/1

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$a = \sqrt{9+16+25} = 7{,}07 \Rightarrow a = 7{,}07$$

$$b = \sqrt{1+4+36} = 6{,}40 \Rightarrow b = 6{,}40$$

/2

$$\vec{a}.\vec{b} = -3+8-30 = -25 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = -25$$

/3

$$\vec{a}.\vec{b} = a.b.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{a.b} = \frac{-25}{7{,}07.6{,}40}$$

$$= -0{,}55 \Rightarrow \alpha = 123{,}5°$$

/4

$$\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 11\vec{k}$$

الطريقة الثانية هندسية حيث يمكن الإجابة عن هذه الأسئلة برسم الأشعة في معلم.

/5

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (4.6+2.5)\vec{i} - (3.6-1.5)\vec{j} + (3.2+1.4)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = 34\vec{i} - 13\vec{j} + 10\vec{k}$$

التمرين2:

/1

$$\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = -\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$+ \quad 2\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k} \qquad \Rightarrow \vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$- \quad 2\vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k} \qquad \Rightarrow \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

/2

$$\|\vec{a}-\vec{b}\| = \sqrt{1+16+9} = 5{,}1$$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{9+4+1} = 3{,}74$$

$$a = \sqrt{1+1+4} = 2{,}45$$

$$b = \sqrt{4+9+1} = 3{,}74$$

3/ يمكن تمثيلها في معلم متعامد و متجانس.

/4

$$\vec{a}(\vec{a}+\vec{b}) = a\|\vec{a}+\vec{b}\|\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \vec{a}(\vec{a}+\vec{b}) = 3-2+2 = 3$$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| = 3{,}74 \qquad \Rightarrow \quad a = 2{,}45$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}(\vec{a}+\vec{b})}{a\|\vec{a}+\vec{b}\|} = \frac{3}{2{,}45.3{,}74} = 0{,}327 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 70{,}9°$$

و الآن نحسب الزاوية المحصورة بين الشعاعين: b , $a - b$

$$\vec{b}(\vec{a}-\vec{b}) = b\|\vec{a}-\vec{b}\|\cos\alpha \Rightarrow \vec{b}(\vec{a}-\vec{b}) = -2-12-3 = -17$$

حيث:

$$\|\vec{a}-\vec{b}\| = 5{,}1 \;;\; b = 3{,}74$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{b}(\vec{a}-\vec{b})}{b\|\vec{a}-\vec{b}\|} = \frac{-17}{3{,}74.5{,}1} = -0{,}89 \Rightarrow \alpha = 152{,}87°$$

/5

لنحسب طويلة الشعاع b ثم نحسب شعاع الوحدة للشعاع b و ليكن u

$$a = 2{,}45$$

$$\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$b = \sqrt{4+9+1} = 3{,}74$$

و منه شعاع الوحدة:

$$\vec{u} = \frac{\vec{b}}{b} = 0{,}53\,\vec{i} + 0{,}80\,\vec{j} - 0{,}26\,\vec{k}$$

إسقاط $\vec{a}$ على $\vec{b}$ هو:

$$\vec{a}.\vec{u} = 0{,}53.1 - 0{,}80.1 + 0{,}26.2 = 0{,}25$$

$$\vec{a}.\vec{u} = 0{,}25$$

/6

$$\vec a \wedge (\vec a + \vec b) = \vec a \wedge \vec a + \vec a \wedge \vec b = \vec a \wedge \vec b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -5\vec i + 5\vec j + 5\vec k$$

$$= 5(-\vec i + \vec j + \vec k)$$

المساحة التي يرسمها الشعاعان هي طويلة هذا الشعاع

$$\left\| \vec a \wedge (\vec a + \vec b) \right\| = 5\sqrt{1+1+1} = 8{,}66$$

/7

$$\vec a[\vec b \wedge (\vec a + \vec b)] = \vec a[\vec b \wedge \vec a + \vec b \wedge \vec b] = \vec a[\vec b \wedge \vec a] = \vec 0$$

لأن $\vec b \wedge \vec a$ // $\vec a$ ولنتحقق من هذه النتيجة من خلال معطياتنا

$$= -\vec a[\vec a \wedge \vec b] = -(\vec i - \vec j + 2\vec k).(-5\vec i + 5\vec j + 5\vec k)$$

$$= +5 + 5 - 10 = 0$$

الحركيات

علم الحركة أو حركيات النقطة المادية، هو ذلك الجزء من الميكانيك الذي يهتم بدراسة وتوصيف الحركة وتغيراتها بدلالة الزمن بصرف النظر عن مسبباتها كالقوى مثلا والتي تسمى تحريك النقطة المادية إن معرفة تغير موقع نقطة مادية ما بدلالة الزمن تقدم لنا وصفا كاملا لحركة تلك النقطة. نهتم هنا بالمقادير التي تصف حركة الجسم وهي: موضع الجسم ومساره وسرعته وتسارعه والتي نعينها بإحداثيات مختلفة.

1/ تعريف:

الحركيات هي علم يدرس حركة نقطة مادية دون التعرض لمسببات هذه الحركة (القوى).

النقطة المادية مثل الجسيم المتحرك والجسيم هو جسم طبيعي له كتلة و يفترض أن أبعاده الطبيعية متناهية في الصغر، فهو عبارة عن نقطة مادية لا أبعاد لها.

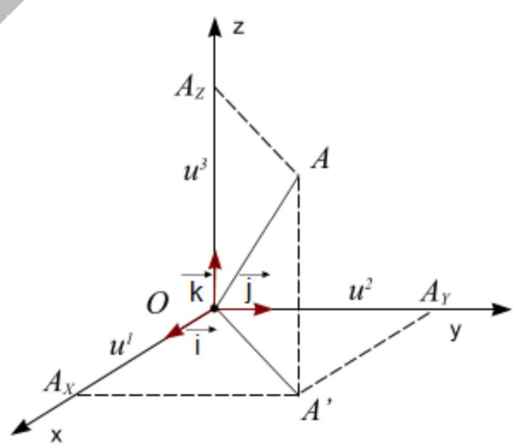
الحركة و السكون **مفاهيم نسبية**. لأننا لا نستطيع أن نقول عن جسم أنه يتحرك (ساكن) حركة (سكون) مطلق ومنه لا نستطيع دراسة حركة جسم إلا إذا أنسبناها إلى جملة مقارنة، رياضيا هي **المعلم**.

2/ المعالم:

1.2 المعلم الفضائي: هو معلم (O, i, j, k) يتكون من ثلاثة محاور متعامدة Ox, Oy, Oz تتلاقى في النقطة O.

أشعة وحدتها على الترتيب i, j, k و يكون المعلم متجانسا إذا كانت: $i = j = k = 1$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

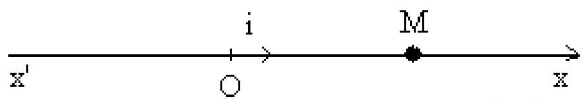


2.2 المعلم المستوي: هو معلم (O, i, j) يتكون من محورين متعامدين Ox, Oy تتلاقى في النقطة O.

حيث:

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

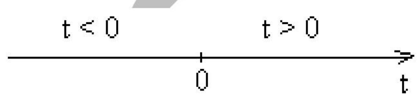
3.2 المعلم المستقيم: هو معلم (O, i) و هو عبارة عن محور موجه $x'Ox$.



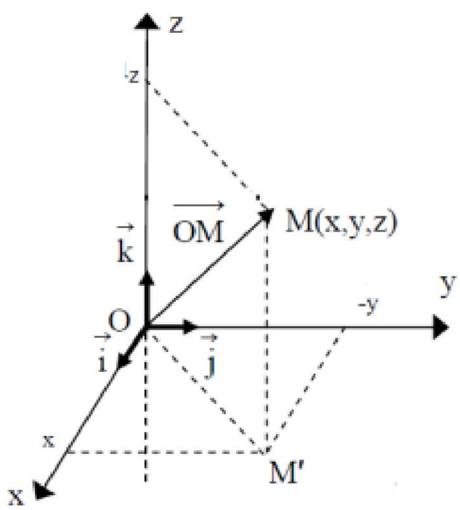
حيث نكتب:

$$\vec{OM} = x\vec{i}$$

4.2 معلم الزمن: هو زمن وقوع الحادثة أي كل موضع للجسم M يوافق لحظة زمنية t.



3/ جملة الإحداثيات و شعاع الموضع:



1.3 جملة الإحداثيات الكارتيزية:

يمكن كتابة شعاع الموضع في الإحداثيات الكارتيزية كما يلي:

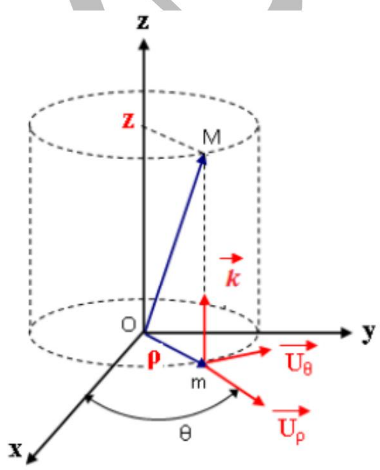
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z} = OM.\vec{u}$$

و يمكن كتابة شعاع الموضع: $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

حيث: $\overrightarrow{OM_x} = x.\vec{i}, \overrightarrow{OM_y} = y.\vec{j}, \overrightarrow{OM_z} = z.\vec{k}$

2.3 جملة الإحداثيات الإسطوانية:

يمكن كتابة شعاع الموضع في الإحداثيات الإسطوانية $\overrightarrow{OM} = r.\vec{u}_r + z.\vec{k}$



نربط الإحداثيات الكارتيزية بالإسطوانية حيث:

$$\vec{i} = \cos\varphi.\vec{u}_r - \sin\varphi.\vec{u}_\varphi$$
$$\vec{j} = \sin\varphi.\vec{u}_r + \cos\varphi.\vec{u}_\varphi$$

و منه شعاع الموضع يكتب في الإحداثيات الإسطوانية: $\overrightarrow{OM} = r.\cos\varphi.\vec{i} + r.\sin\varphi.\vec{j} + z.\vec{k}$

3.3 جملة الإحداثيات الكروية: يمكن كتابة شعاع الموضع في الإحداثيات الكروية

u_r شعاع الوحدة في الإتجاه OM

θ الزاوية المحصورة بين (Oz, OM)

φ الزاوية المحصورة بين المسقط (OM’, Ox)

$0 \leq r \leq +\infty$ و $0 \leq \theta \leq \pi$ و $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

نربط الإحداثيات الاكارتيزية بالإحداثيات الكروية:

$$x = r.\sin\theta.\cos\varphi$$
$$y = r.\sin\theta.\sin\varphi$$
$$z = r.\cos\theta$$

و تكتب أشعة الوحدة $(u_r, u_\theta, u_\varphi)$ و هي تشكل ثلاثي سطوح مباشر (أنظر الشكل): و تعرف جملة الإحداثيات الكروية (r, θ, φ) و أساسها $(O, u_r, u_\theta, u_\varphi)$.

$$\vec{u}_r = \sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}$$
$$\vec{u}_\theta = \cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \sin\theta.\vec{k}$$
$$\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}$$

نقوم باشتقاق شعاع الوحدة u_r :

$$\vec{u}_r = \sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}$$

و منه:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$$

نقوم باشتقاق شعاع الوحدة u_θ :

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \sin\theta.\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{u}_\varphi$$

نقوم باشتقاق شعاع الوحدة u_φ :

$$\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\,(\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta)$$

4.3 المسار: هو المحل الهندسي للنقاط التي تمر بهاالنقطة المادية أثناء حركتها. و معادلة المسار هي المعادلة الرابطة لإحداثيات النقطة M دون الزمن:

4/ السرعة:

1.4 السرعة الوسطية: السرعة الوسطية بين موضعين وفي الجملة الدولية S.I وحدة السرعة $[V] = m/s$ و يمكن أن تكون km/h

مميزاتها:

- حاملها: $\overrightarrow{MM'}$
- إتجاهها: نفس إتجاه $\overrightarrow{MM'}$
- شدتها:

$$\left\|\overrightarrow{V_m}\right\| = \frac{\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|}{\Delta t}$$

2.4 السرعة اللحظية: هي السرعة الوسطية عندما يؤول Δt إلى الصفر.

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \Rightarrow \vec{v}(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{v}(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

مميزاتها:

- نقطة التأثير: الموضع M في اللحظة t.
- الحامل: مماس عن المسار في الموضع M (في اللحظة t).
- الإتجاه: نفس إتجاه الحركة.
- الشدة: $\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

5/ التسارع: هو مقدار تغير السرعة في واحدة الزمن.

1.5 التسارع الوسطي: التسارع الوسطي بين لحظتين t_1, t_2 هو النسبة بينΔV و Δt.

و يمكـن كتابة التســارع الوسطي في الشكل الآتي:

$$\vec{a}_m(t) = \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

2.5 التسارع اللحظي: التسارع اللحظي هو التسارع الوسطي عندما يؤول dt إلى الصفر،

يمكن كتابته على الشكل الآتي:

$$\vec{a}(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

يمكن كتابة التسارع اللحظي في الإحداثيات الكارتيزية:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left| \begin{array}{l} \frac{d^2(x(t))}{dt^2}\vec{i} \\ \frac{d^2(y(t))}{dt^2}\vec{j} \\ \frac{d^2(z(t))}{dt^2}\vec{k} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \ddot{x}\,\vec{i} \\ \ddot{y}\,\vec{j} \\ \ddot{z}\,\vec{k} \end{array} \right.$$

1.2.5 السرعة والتسارع في الإحداثيات الإسطوانية:

كما رأينا في جملة الإحداثيات أعلاه يمكن كتابة شعاع السرعة في الإحداثيات الإسطوانية:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r + z\vec{k}) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{z}\vec{k}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$$

و منه في الإحداثيات الإسطوانية:

$$\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r} + z.\overrightarrow{k}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{u_\varphi} + \dot{z}.\overrightarrow{k}$$
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\overrightarrow{u_r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\,\overrightarrow{u_\varphi} + \ddot{z}.\overrightarrow{k}$$

و في الإحداثيات القطبية نعدم قيمة z في العلاقات أعلاه.

2.2.5 السرعة والتسارع في الإحداثيات الكروية:

شعاع الموضع:

$$\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r}$$

شعاع السرعة:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r(\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi}) = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi}$$

شعاع التسارع:

$$\begin{aligned}\vec{a} = {} & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\,\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\cos\theta + \\ & + r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\cos\theta)\,\overrightarrow{u_\theta} + (r^2\dot{\varphi}\sin\theta + r\,\ddot{\varphi}\sin\theta + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)\,\overrightarrow{u_\varphi}\end{aligned}$$

1.6 التسارع المماسي و التسارع الناظمي:

نفرض أن المتحــرك M يرســم المســار الموضح

في الشكل و نعلم معادلته الزمنيــة

$s(t) = MM'$ حيث: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$

في اللحظة t يكــون المتحرك في الموضع $M(t)$

و عندما يقطع جزء عنصــري من المسار ds خلال

زمن dt يمسح زاوية $d\alpha$ ، لإعتبار ds قوس من دائرة

مركزها C و نصف قطرها R حيث نكتب:

$ds = R.d\alpha$ حيث السرعة:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{T}$$

فالتسارع a هو:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{V^2}{R}.\vec{N}$$

و هي عبارة عن $\vec{a} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N} = a_T.\vec{T} + a_N.\vec{N}$ فبالمقارنة نجد مركبات التسارع في المعلم الفريني ألا و هي المركبات المماسية و الناظمية للتسارع.

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{t} \ ; \ \vec{a}_n = \frac{v^2}{OM}\vec{n}$$

ففي الحالات الخاصة:

- $a_T = 0$ معناه السرعة ثابتة في المقدار و الإتجاه فالحركة تكون دائرية منتظمة.
- إذا كــان $a_N = 0$ $(R \longrightarrow \infty)$ معنــاه السرعــة ثابتــة في المنحى فالحركة تكون مستقيمة.

في الحركات المستقيمة تكون متغيرة بإنتظام إذا كان a = ثابت و تكون الحركة متسارعة إذا كان : $a.v > 0$ و تكون متباطئة إذا كان : $a.v < 0$.

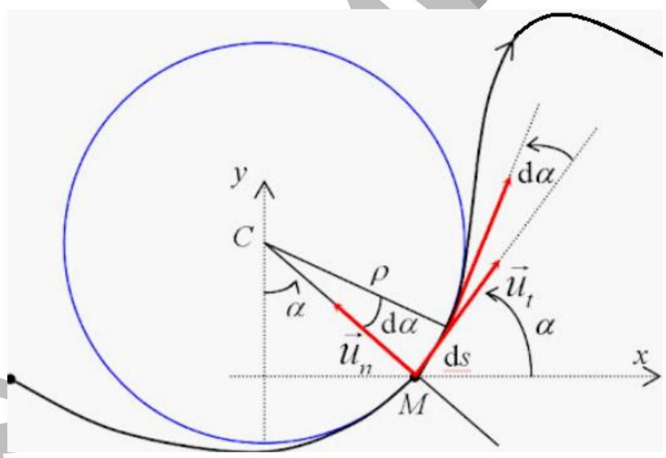
- إذا كان $a_T = 0$ و $a_N = 0$ السرعة ثابتة مقدارا و إتجاها و منحى فالحركة مستقيمة منتظمة.

2.6 نصف قطر الإنحناء:

من العلاقات السابقة نستطيع حساب نصف قطر الإنحناء:

$$a_N = \frac{v^2}{R} \Longrightarrow R = \frac{v^2}{a_N}$$

و يمكن حسابها بطريقة أخرى:



$$R = \frac{v^3}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|}$$

التمـــارين

<u>التمرين01</u>: نقطة مادية M تتحرك بالنسبة للمعلم $R(O, i, j, k)$ وفق الإحداثيات الزمنية التالية:

$$x = t + 2 \quad ; \quad y = 4.t^2 - 1$$

1/ أوجد معادلة مسارها. 2/ أكتب عبارة شعاع السرعة للنقطة M في لحظة t ثم إستنتج طويلتها.

3/ برهن أن تسارع الحركة ثابت ثم أحسب مركبتيه المماسية و الناظمية.

4/ أحسب قيمة نصف قطر انحناء المسار في ذروته.

<u>التمرين2</u>: متحـرك نقطـي يتحـرك على مستوى حسب المعادلـة في الإحداثيـات القطبيــة (r, θ):

$$r = \frac{a}{2}(1 + \cos\omega t)$$

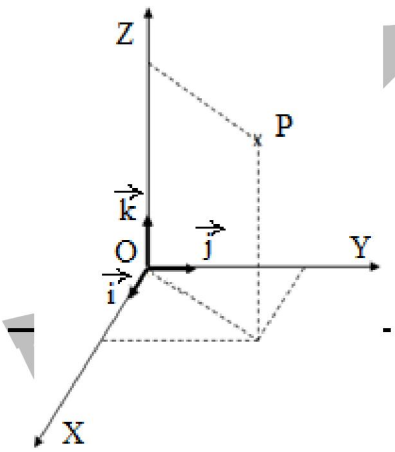
حيث: a طول معطى, ω ثابت, $\theta = \omega t$.

1/ حدد الإحداثيات الكارتيزية للمتحرك بدلالة الزمن.

2/ حدد الإحداثيات الكارتيزية لشعاع السرعة بدلالة الزمن.

3/ أكتب عبارتي شعاع السرعة و التسارع بدلالة الزمن في الإحداثيات القطبية.

<u>التمرين3</u>: نقطة P في معلم فضائي أنظر الشكل.

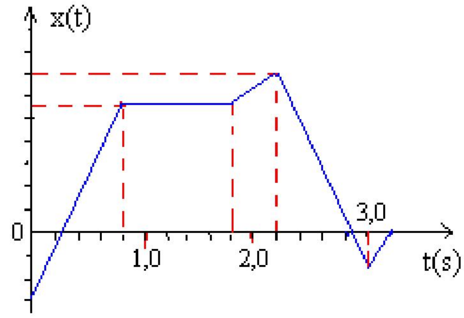


1- مثل المعلم الاسطواني والكروي في نفس المعلم .

2- إذا علمت أن مركبات $P(2 , 3, 4)$

مثل الشعاع $\overrightarrow{OP}$ ثم أكتب عبارته في المعلم الكارتزي.

3- أكتب عبارة الشعاع $\overrightarrow{OP}$ في المعلمين الأسطواني ثم الكروي.



التمرين4: يبين الشكل مواضع سيارة بدلالة الزمن, بين:

1/ في أي مجال زمني تتم الحركة في إتجاه المحور x الموجب.

2/ في أي لحظة تكون الحركة متباطئة أو متسارعة.

3/ متى يمر الجسم بالمبدأ، و متــى تنعدم السرعة.

التمرين5: جسم (A) يقوم بحركة اهتزازية على مسار مستقيم وفق المعادلة الآتية :

$$x(t) = 2.\sin(3.t + \pi)$$

1. أكتب عبارة السرعة و التسارع للجسم (A) ثم احسب قيمتيهما عند $t = \pi.s$.
2. أرسم المنحنى البياني للفاصلة $x(t)$.

التمرين6: نقطة مادية تقوم بحركة، في لحظة t كان شعاع موضعها:

$\overrightarrow{OM} = 2.\vec{i} - \vec{j} + 3.\vec{k}$. أكتب عبارة:

1/ $\overrightarrow{OM}$ في الإحداثيات الإسطوانية. 2/ أشعة الوحدة الإسطوانية $\vec{u}_r, \vec{k}$ في الإحداثيات الكارتيزية.

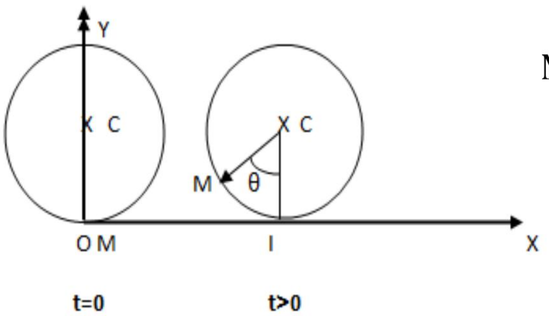
3/ $\overrightarrow{OM}$ في الإحداثيات الكروية. 4/ أشعة الوحدة الكروية $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$ في الإحداثيات الكارتيزية.

التمرين7: تتدحرج عجلة دون انزلاق على مسار مستقيم حيث M نقطة من العجلة موضوعة على المبدأ O، عند الزمن $t = 0$.

1/ ما هي المركبات الكارتزية للنقطة $M(t)$ بدلالة نصف القطر R والزاوية θ.

2/ أكتب عبارة شعاعي السرعة و التسارع بدلالة R و θ.

3/ أعطي قيمتي السرعة والتسارع عندما تلامس النقطة M للمحور Ox.



التمرين8: في لحظة t شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ لنقطة مادية يكتب: $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ كما يصنع زاوية 60 مع المحور Oz.

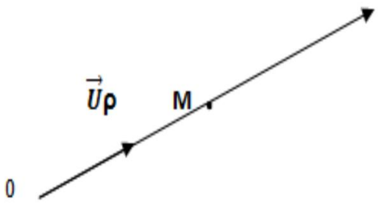
1/ إدا كان طول إسقاط $\overrightarrow{OM}$ على المستوى Oxy هو OM' = 2. إستنتج طويلة $\overrightarrow{OM}$.

2/ إدا كانت الزاوية المحصورة بين المحور Ox ، $\overrightarrow{OM}'$ هي 30. إستنتج قيمتي المركبتين: x ; y.

3/ أكتب عبارة شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$. ثم أحسب طويلته و قارنها مع قيمة السؤال 1.

التمرين9: نقطة مادية تتحرك على مسار مستقيم وفق المعادلة التالية: $\rho = 2a \cos\theta$

حيث ω, a ثوابت و $\theta = \omega t$.



1/ أكتب عبارة شعاع الموضع في المعلم القطبي.

2/ أكنب عبارتي شعاعي السرعة و التسارع.

3/ استنتج عبارتي شعاع السرعة والتسارع في المعلم الكارتزي.

التمرين10: نقطة مادية تتحرك على معلم اسطواني حيث المركبات هي $\rho = 5$, $\theta = 2t$ و $z = 3t$

1/ أكتب عبارة شعاع الموضع. 2/ أكتب عبارتي شعاعي السرعة والتسارع ثم احسب طويلتيهما.

حل التمـــارين

التمرين2:

/1 نسقط شعاع الموضع من الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الكارتيزية

$$x = \frac{a}{2}(1 + cos\omega t)cos\omega t$$

$$y = \frac{a}{2}(1 + cos\omega t)sin\omega t$$

/2 نقوم بإشتقاق شعاع الموضع للحصول على مركبات شعاع السرعة في الإحداثيات الكارتيزية

$$\dot{x} = -\frac{a}{2}\omega(sin\omega t + sin2\omega t)$$

$$\dot{y} = \frac{a}{2}\omega(cos\omega t + cos2\omega t)$$

/3 شعاع السرعة و التسارع في الإحداثيات القطبية يعطى:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \;;\quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$r = \frac{a}{2}(1 + cos\omega t) \Rightarrow \dot{r} = -\frac{a}{2}\omega sin\omega t\,;\, r\dot{\theta} = \frac{a}{2}\omega(1 + cos\omega t)$$

و منه:

$$\vec{v} = -\frac{a}{2}\omega sin\omega t\,\vec{u}_r + \frac{a}{2}\omega(1 + cos\omega t)\,\vec{u}_\theta$$

$$\ddot{r} = -\frac{a}{2}\omega cos\omega t \;;\; -r\dot{\theta}^2 = -\frac{a}{2}\omega^2(1 + cos\omega t)\;;$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} = -a\omega^2 sin\omega t$$

و منه:

$$\vec{a} = -\frac{a}{2}\omega^2(1 + 2cos\omega t)\vec{u}_r - a\omega^2 sin\omega t\,\vec{u}_\theta$$

التمرين3:

1- التمثيل نمثل أشعة الوحدة للمعلم الكروي و القطبي على نفس المعلم

2 - لدينا

x =2 , y = 3 , Z=4

المعلم القطبي يمثل ب ρ و θ حيث

تطبيق $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

المعلم الكروي يمثل ب ρ و θ و φ حيث

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + Z^2}$$

$$\cos\theta = \frac{Z}{\rho}$$

$$\cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

الحركات النسبية

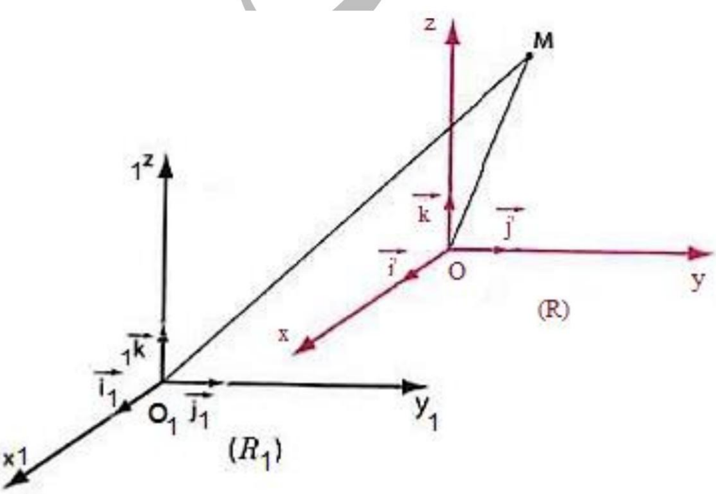
1/ تعريف: في الفيزياء، مبدأ النسبية هو شرط ينص على أن "قوانين الطبيعة تظهر لجميع المراقبين بنفس القوانين، إذا كان كل منهم في معلم يتحرك بالنسبة لمعلم آخر بحركة مستقيمة منتظمة". أي أنه لا توجد حالة حركة مطلقة تميّز مراقب ما عن غيره، وإنما يمكن دراسة حركة الأجسام بالنسبة لبعضها البعض، ولا يوجد "مختبر " مرجعي يميز عملية القياس. ويلعب هذا المبدأ دوراً أساسياً في دراسة الميكانيكا الكلاسيكية (مثل قوانين نيوتن للحركة) فكل الحركات التي درسناها سابقا ننسبها إلى معلم يعتبر ساكن في الكون و الآن سنقوم بدراستها و المعلم R يتحرك بالنسبة لمعلم آخر R_1 ساكن (يتحرك في الكون) فنلاحظ اختلاف: الموضع، المسار، السرعة، التسارع لنفس المتحرك في كل معلم.

2/ حقل السرعات: ليكن معلما مطلقا $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ و معلم متحرك $R(O, x, y, z)$ بالنسبة للمعلم (R_1), لتكن نقطة M تتحرك بالنسبة لـ $(R), (R_1)$.

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O_1O} + (x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k})$$

$$\vec{v}(M)/_{R_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)/_{R_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt}\right)/_{R_1} + (\dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k})$$

$$+ \left(x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\right)/_{R_1}$$



الشعاع $\vec{\omega}$ يسمى شعاع دوران لحظي لـ (R) بالنسبة لـ (R_1) في اللحظة t. نعوض هذه القيم في شعاع السرعة أعلاه

فنجد:

$$\vec{v}(M)/_{R_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt}\right)/_{R_1} + (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) + [x(\vec{\omega}\wedge\vec{i}) + y(\vec{\omega}\wedge\vec{j}) + z(\vec{\omega}\wedge\vec{k})]/_{R_1}$$

$$= \vec{v}(o)/_{R_1} + \vec{v}(M)/_{R} + \vec{\omega}\wedge(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$= \vec{v}(o)/_{R_1} + \vec{v}(M)/_{R} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

$$\vec{v}(M)/_{R_1} = \vec{v}(M)/_{R} + \vec{v}(o)/_{R_1} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

نسمى:

- السرعة النسبية $\vec{v}_r$ للنقطة المادية M بالنسبة للمعلم المتحرك R : $\vec{v}(M)/_{R}$.
- سرعة الجر $\vec{v}_e$ و هي سرعة المعلم المتحرك R بالنسبة للمعلم الساكن R_1، أو هي سرعة النقطة المادية M و هي ساكنة في المعلم المتحرك R بالنسبة للمعلم الساكن R_1: $\vec{v}(o)/_{R_1} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$.
- السرعة المطلقة $\vec{v}_a$ للنقطة المادية M بالنسبة للمعلم الساكن R_1: $\vec{v}(M)/_{R_1}$.

حيث:

$$\vec{v}(M)/_{R_1} = \vec{v}(M)/_{R} + \vec{v}(o)/_{R_1} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

أو: $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ و يسمى قانون تركيب السرعات.

3/ حالات خاصة:

* نفرض أن M ثابتة في المعلم R فسرعة M بالنسبة لهذا المعلم معدومة $\vec{v}(M)/_{R} = \vec{0}$

و منه علاقة سرعة النقطة M بالنسبة للمعلم R_1 تعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{v}(M)/_{R_1} = \vec{v}(o)/_{R_1} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

و هي تعبر عن سرعة الجر.

$$\vec{v}(M)/_{R_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)/_{R_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt}\right)/_{R_1} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_1O}\right)/_{R_1}$$

$$= \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM}\right)/_{R_1} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

* $\vec{\omega} = \vec{0}$ فحقل السرعات $\vec{v}(M)$ يكون منتظما كذلك:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0 \; ; \; \forall t \Longrightarrow \vec{i} = \vec{i_1} \; ; \; \vec{j} = \vec{j_1} \; ; \; \vec{k} = \vec{k_1}$$

و منه الحركة إنسحابية.

* نحسب مشتق شعاع $\vec{U}(t)$ الذي يتعلق بالزمن و معرف في المعلم المتحرك.

حيث:

$$\vec{U}(t) = X(t).\vec{i} + Y(t).\vec{j} + Z(t).\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{U}(t)}{dt}/_{R_1} = \frac{d}{dt}X(t).\vec{i} + \frac{d}{dt}Y(t).\vec{j} + \frac{d}{dt}Z(t).\vec{k} + X(t)\frac{d\vec{i}}{dt} + Y(t).\frac{d\vec{j}}{dt} + Z(t).\frac{d\vec{k}}{dt}$$

حيث:

$$\frac{d\vec{U}(t)}{dt}/_{R} = \frac{d}{dt}X(t).\vec{i} + \frac{d}{dt}Y(t).\vec{j} + \frac{d}{dt}Z(t).\vec{k}$$

$$X(t)\frac{d\vec{i}}{dt} + Y(t).\frac{d\vec{j}}{dt} + Z(t).\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_{R/R_1}\wedge\vec{U}(t)$$

و يمكن كتابة قانون بور بصفة عامة:

و منه قانون بور Bour

$$\frac{d\vec{U}(t)}{dt}/_{R_1} = \frac{d\vec{U}(t)}{dt}/_{R} + \vec{\omega}_{R/R_1}\wedge\vec{U}(t)$$

هذا القانون يربط مشتقات الشعاع $\vec{U}(t)$ في المعلمين $(R), (R_1)$.

4/ حقل التسارعات: حتى نبسط عبارة التسارع نأخذ النقطة M ثابتة في المعلم R.

$$\vec{a}(M) = \frac{d\,\vec{v}(M)}{dt}\Big/_{R_1} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}(0) + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right]\Big/_{R_1}$$

$$= \vec{a}(0) + \dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\omega}\wedge\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)\Big/_{R_1}$$

نعلم أن: $\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)\Big/_{R_1} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$ و منه علاقة شعاع التسارع نكتب:

$$\vec{a}(M) = \vec{a}(0) + \dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM})$$

العبارة أعلاه للتسارع في حالة ثبوت المبدأ O، هي نفسها العبارة التي شاهدناها في نهاية الدرس السابق للحركيات في تطبيق الحركة الدائرية.

* نفرض الآن أن المتحرك M يتحرك في المعلمين:

$$\vec{v}(M)/_{R_1} = \vec{v}(M)/_{R} + \vec{v}(o)/_{R_1} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

$$\vec{a}(M)/_{R_1} = \frac{d\,\vec{v}(M)}{dt}\Big/_{R_1} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}(0) + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{v}(M)/_{R}\right]\Big/_{R_1}$$

$$= \vec{a}(0) + \dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\omega}\wedge\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)\Big/_{R_1} + \frac{d}{dt}(\dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k})$$

$$= \vec{a}(0) + \dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\omega}\wedge\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)\Big/_{R_1} + \ddot{x}.\vec{i} + \ddot{y}.\vec{j} + \ddot{z}.\vec{k}$$

$$+ \left(\dot{x}\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$$

لكن:

$$\dot{x}\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}\wedge(\dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k}) = \vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)/_{R}$$

و $\vec{a}(M)/_{R} = \ddot{x}.\vec{i} + \ddot{y}.\vec{j} + \ddot{z}.\vec{k}$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)\Big/_{R_1} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \left(x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\right) = \vec{v}(M)/_{R} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

* نسمي تسارع حركة M بالنسبة للمعلم (R): بالتسارع النسبي relatif حيث:

$$\vec{a}(M)/_{R} = \vec{a}_r(M) = \vec{a}_r$$

* نسمـي تسـارع حركـة المعلـم (R) بـالنسبـة لـ (R_1) بتسارع الجر $\vec{a}_e$ entraînement حيث:

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}(0) + \dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}) = \vec{a}_e$$

* نسمي تسارع حركة M بالنسبة للمعلم (R_1) بالتسارع المطلق absolue حيث:

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \vec{a}_a$$ و يسمى قانون تركيب التسارعات.

* نسمي المقدار $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)/_R$ بتسارع كوريوليس coriolis أو تسارع مكمل.

* نسمي سرعة M بالنسبة للمعلم (R) بالسرعة النسبية حيث:

$$\vec{v}(M)/_R = \vec{v}_r(M) = \vec{v}_r$$

* نسمي سرعة المعلم (R) بالنسبة للمعلم (R_1) بسرعة الجر حيث:

$$\vec{v}(o)/_{R_1} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM} = \vec{v}_e(M)/_{R_1} = \vec{v}_e$$

* نسمي سرعة M بالنسبة للمعلم (R_1) بالسرعة المطلقة حيث: $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$

* **ترميز:**

- نرمز M/R هي حركة M بالنسبة للمعلم (R).
- نرمز M/R_1 هي حركة M بالنسبة للمعلم (R_1).
- نرمز R/R_1 هي حركة المعلم (R) بالنسبة للمعلم (R_1).
- نسمي الحركات M/R, M/R_1, R/R_1 على الترتيب:
  الجر و المطلقة و النسبية.

5/ حالات خاصة:

أ/ نفرض أن M ثابتة في المعلم (R) ومنه: $2\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)/_R=\vec{0}\ ;\ \vec{a}(M)/_R=\vec{0}$

فالتسارع المطلق يأخذ الشكل: $\vec{a}(M)/_{R_1}=\vec{a}(0)+\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{OM}+\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM})$ و هي عبارة تسارع الجر حيث ينعدم التسارع النسبي و تسارع كريوليس.

* نفرض أن الحركة R/R_1 إنسحابية و منه:

$$\frac{d\vec{i}}{dt}=\frac{d\vec{j}}{dt}=\frac{d\vec{k}}{dt}=0 \Longrightarrow \vec{\omega}=\vec{0} \Longrightarrow \vec{a}(M)=\vec{a}(0)$$

* نفرض في لحظة t, $\vec{a}(0)=\vec{0}$ فإن التسارع $\vec{a}(M)=\vec{0}$ مهما كانـت M في هذه اللحظة t.

* نفرض الآن أن $\vec{a}(0)=\vec{0}$ مهما كان t , فإن:

$$\vec{a}(0)=\ddot{x}_0\vec{i}+\ddot{y}_0\vec{j}+\ddot{z}_0\vec{k}=\vec{0} \Rightarrow \ddot{x}_0(t)=\ddot{y}_0(t)=\ddot{z}_0(t)=0\ ;\ \forall t$$

$\Longleftarrow$ $x_0(t)\ ;\ y_0(t)\ ;\ z_0(t)$ دوال خطية في الزمن t

و منه حركة O مستقيمة و منتظمة سرعتها ثابتة $\vec{v}(o)=\vec{c}$

* **نظرية:** إذا كانـت $\vec{\omega}(t)=\vec{a}(0)=\vec{0}\ ;\ \forall t$ فـإن المسارات في المعلم (R_1) لكل النقاط M الثابتة في المعلم (R) و المرتبطة به، عبارة عن مستقيمات لحركات منتظمة. حيث في كل لحظة:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}(M)=\vec{v}(o)=\vec{c}\\ \vec{a}(M)=\vec{a}(0)=\vec{0}\end{array}\right\}\ \forall M\in(R)$$

ب/ نفرض نقطة من المعلم (R) ثابتة بالنسبة للمعلم (R_1)، يمكن أن نقبل أن هذه النقطة الثابتة هي O مبدأ المعلم (R) و منه: $\overrightarrow{O_1O} = cste$ ثابت و هذا معناه أن: $\vec{a}(0) = \vec{0}$

$$\vec{a}(M)/_{R_1} = \dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM})$$

و نتيجة التسارع أعلاه هي لحركة جسم صلب له نقطة ثابتة، و هي أيضا لحركة دائرية لنقطة مادية بالنسبة لمركزها O.

* لنفرض أن $\omega = cste$ في المعلم (R_1) و منه $\dot{\omega} = 0$ فالتسارع :

$$\vec{a}(M) = \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM})$$

فهو تسارع لحركة دورانية منتظمة لجسم صلب حول محور ثابت و هو أيضا لحركة دائرية منتظمة لنقطة مادية بالنسبة لمركزها O.

جـ/ نفرض أن حركة الجر لـ R/R_1 إنسحابية فسرعة الدوران $\omega = 0$ و منه:

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}_e(o)\ ;\ \vec{a}_e(M) = \vec{a}_e(o)\ ;\ \forall t$$

كذلك لا ننسى تسارع كوريوليس يكون معدوما مهما كان الزمن $2\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)/_R = \vec{0}$

في هذه الحالة نكتب:

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_e(o) + \vec{v}_r(M)$$
$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_e(o) + \vec{a}_r(M)$$

* نفرض أن الحركة الإنسحابية لـ R/R_1 مستقيمة و منتظمة إذن:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_a(M) = \vec{c} + \vec{v}_r(M)\\ \vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M)\end{array}\right\rangle \forall t$$

حيث $\vec{c}$ شعاع معلوم و لا يتعلق بالزمن.

كذلك تسارعات M في المعلمين $(R), (R_1)$ نفسها في كل لحظة.

* نفرض أن حركة الجر R/R_1 دورانية منتظمة فقط حول المحور O_1z_1، بعبارة أخرى النقاط $O,$ O_1 للمحورين Oz, O_1z_1 متطابقتان $\forall t$، رأينا هذه الحالة في بداية الدرس

حيث وجدنا:

$\vec{\omega} = \omega\vec{k}_1 = \omega\vec{k}$ حيث ω مقدار عددي ثابت فنجد:

$$\vec{v}_a(M) = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{v}_r(M) \quad \text{حيث} \quad \vec{v}(o) = \vec{0}$$

و منه:

$$\vec{a}_a(M) = \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}) + \vec{a}_r(M) + \vec{a}_c(M)$$

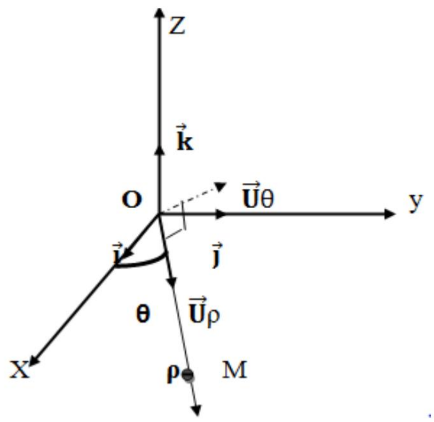
حيث

$$\vec{a}(0) = \dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$$

التمـــــارين

التمرين1: نقطة مادية M تتحرك على معلم قطبي ($O, \vec{u}\rho, \vec{u}\theta$) حيث شعاع الموضع: $\overrightarrow{OM} = \rho\, \vec{u}\rho$

والمعلم القطبي يتحرك بالنسبة لمعلم ساكن ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) حيث: $\rho = 3t^2$ و $\theta = 2t$. أحسب:



1- السرعة النسبية.

2- سرعة الجر.

3- السرعة المطلقة.

4- التسارع النسبي.

5- تسارع الجر.

6- تسارع كوريوليس.

7- استنتج التسارع المطلق.

التمرين2: في معلم R(O, i, j, k) , محور Ox’ يدور حول المحور Oz بسرعة زاوية ω ثابتة. متحرك M (OM = r) ينتقل على المحور Ox’ حسب القانون: $r = r_0.(\cos\omega t + \sin\omega t)$

حيث: r_0 ثابت. نعرف المعلم R’(O, i’, j’, k) المرتبط بالساق Ox’.

1/ حدد في لحظة t بدلالة: ω , r_0, أشعة الوحدة i’, j’, k.

أ/ سرعة النقطة M في المعلم R’ (السرعة النسبية) و سرعة الجر.

ب/ سرعة النقطة M في المعلم R (السرعة المطلقة) ثم طويلتها.

2/ حدد في لحظة t بدلالة: ω , r_0, أشعة الوحدة i’, j’, k.

أ/ تسارع النقطة M في المعلم R’ (التسارع النسبي) و تسارع الجر و تسارع كوريوليس.

ب/ تسارع النقطة M في المعلم R (التسارع المطلق), ثم طويلته.

3/ أ/ أكتب عبارة أشعة الوحدة R’(i’, j’, k’) بدلالة أشعة وحدة R(i, j, k).

ب/ حدد سرعة و تسارع M في المعلم R بدلالة r_0 , ω, أشعة الوحدة i, j, k.

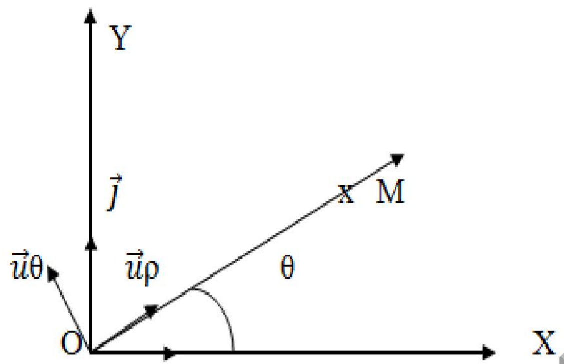
جـ/ أحسب طويلتي كل من هذه السرعة و التسارع ثم قارن كل منها مع سابقتها و ماذا تستنتج.

التمرين3: يسير قارب فوق مياه نهر حيث سرعة النهر موازية لضفتيه $V_1 = 2\ m/s$ ، هذا القارب يشق النهر شاقوليا بسرعة $V_2 = 2m/s$ من الضفة إلى الضفة الأخر.

1/ ما يمثل $V_1,\ V_2$.

2/ أحسب السرعة المطلقة للقارب ثم مثلها برسم توضيحي.

التمرين4: تتحرك نقطة مادية M على معلم قطبي $(O, \vec{u}\rho, \vec{u}\theta)$ حيث شعاع الموضع: $\overrightarrow{OM} = \rho\ \vec{u}\rho$ والمعلم القطبي يتحرك بالنسبة لمعلم ساكن $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث: $\rho = 2.t^2 + 1$ و $\theta = 3t^2$. أحسب:



1- السرعة النسبية.

2- سرعة الجر.

3- السرعة المطلقة.

4- التسارع النسبي.

5- تسارع الجر.

6- تسارع كوريوليس.

7- استنتج التسارع المطلق.

التمرين5: لدينا معلمين $R(O, x, y, z)$ ثابت و $R'(x', y', z')$ متحرك حيث المحورين Oz, Oz' منطبقين. R' يدور حول المحور Oz بالنسبة للمعلم R بسرعة زاوية ω ثابتة. نقطة مادية M تقوم بحركة منتظمة بسرعة $v_0.i'$ على المحور Ox' .

1/ حدد أشعة السرعة بدلالة أشعة وحدة $R'(i', j', k')$.

2/ حدد أشعة التسارعات a_r, a_e, a_c , ثم إستنتج التسارع المطلق.

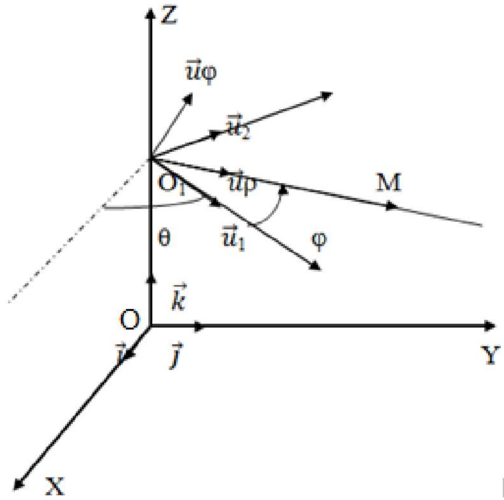
3/ أكتب عبارتي التسارع المماسي و الناظمي , ثم أحسب نصف قطر الإنحناء R_c.

4/ إستنتج شكل المسار.

التمرين6:

ليكن المعلم المطلق $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ومعلم نسبي $R_1(O_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{k})$ الذي يقوم بحركة انسحابية على المحور Oz وفق المعادلة التالية: $\overrightarrow{OO_1} = 2t\,\vec{k}$ وحركة دورانية حول نفس المحور بزاوية دوران $\theta = \omega_1 t$. نقطة مادية M تتحرك على ساق أفقي تدور حول المحور O_1z بزاوية $\varphi = \omega_2 t$

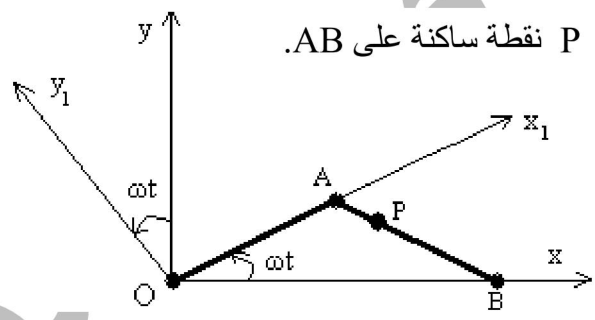
نفرض أن شعاع الموضع: $\overrightarrow{O_1M} = \rho\,\vec{u}\rho$. أحسب:



1/ السرعة النسبية
2/ السرعة الجر
3/ السرعة المطلقة
4/ التسارع النسبي
5/ تسارع الجر
6/ تسارع كوريو ليس
7/ التسارع المطلق

التمرين7: يتكون باب حافلة من قطعتين OA, AB متمفصلتين عند A. تدور القطعة OA حول النقطة O بسرعة زاوية ثابتة و تنزلق B على المحور Ox و لا تغادره.

نفرض OA = AB و AP = r حيث P نقطة ساكنة على AB.



1/ حدد المركبات الكارتيزية لشعاع موضع النقطة P في المعلمين R, R'.
2/ أكتب عبارة مسار النقطة P في المعلمين المتحرك و الساكن و ماذا يمثل كل منهما.
3/ أكتب عبارة شعاع السرعة المطلقة ثم أحسب طويلتها.

التمرين8: تدور قطعة AB طولها a حول محور Oz بسرعة زاوية ω ثابتة. تنطلق نقطة مادية M من منتصف القطعة AB في اللحظة $t = 0$ بحركة مستقيمة جيبية معادلتها:

$\overrightarrow{OM} = \frac{a}{2}(1 + \sin\omega t)\overrightarrow{u_r}$ بإستعمال الإحداثيات الإسطوانية: $(\overrightarrow{u_r};\overrightarrow{u_\theta};\overrightarrow{k})$ أكتب:

1/ عبارة شعاع السرعة و التسارع المطلقين و ذلك بإستعمال تركيب الحركات.

2/ عبارة شعاع السرعة و التسارع المطلقين و ذلك بإستعمال عبارة شعاع الموضع.

حل التمـــــارين

التمرين1:

1- حساب السرعة النسبية

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{U}\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U\theta}$$

لدينا شعاع سرعة الدوران $\vec{\omega}$ عمودي على المستوي المشكل من $\vec{U}\rho$; $\vec{U}\theta$ $\quad \vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{k}$

$$\vec{V}_r = \dot{\rho}\;\vec{U}\rho$$

$$\vec{V}_r = 6t\;\vec{U}\rho$$

و منه: $V_r = \dot{\rho} = 6\,t$

2- حساب سرعة الجر $\vec{V}_e$

$$\vec{V}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} \qquad \vec{V}_e = \rho\,\dot{\theta}\,\vec{U}\theta$$

$$\vec{V}_e = 6\,t^2\,\vec{U}\theta$$

و منه: $V_e = 6\,t^2$

3 - استنتاج السرعة المطلقة

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

$$\vec{V}_a = 6t\;\vec{U}\rho + 6\,t^2\,\vec{U}\theta$$

$$V_a = \sqrt{V_r^{\,2} + V_e^{\,2}}$$

4) - حساب التسارع النسبي

$$\vec{a}_r = \ddot{\rho}\,\vec{U}\rho \quad \text{ومنه} \quad \vec{a}_r = 6\,\vec{U}\rho$$

- شدة التسارع النسبي $a_r = 6$

5)- حساب تسارع الجر

لدينا

$$\vec{a}_e = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{a}_e = 2\,\vec{k} \wedge 2\,\vec{k} \wedge 3t^2\;\overrightarrow{U\rho}$$

$$\vec{a}_e = -12\,t^2\;\overrightarrow{U\rho}$$

6)- حساب تسارع كوريوليس

$$\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r \qquad \vec{a}_c = 4\vec{k} \wedge 6t\ \vec{U}_\rho \quad \text{ومنه} \quad \vec{a}_c = 24t\ \vec{U}_\theta$$

7) - التسارع المطلق

بجمع التسارعات الثلاثة نجد التسارع المطلق

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

التمرين2:

1/ أ/ إحداثيات M في المعلم 'R:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} x' = r \\ y' = 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' = r_0(\cos\omega t + \sin\omega t) \\ y' = 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_{M/R'} = \begin{vmatrix} \dot{x}' = r_0\omega(-\sin\omega t + \cos\omega t) \\ \dot{y}' = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{v}_{M/R'} = r_0\omega(-\sin\omega t + \cos\omega t)\,\vec{i'}$$

سرعة الجر هي سرعة نقطة ثابتة 'M في 'R تنطبق في الزمن t مع M , و يحسب في R.

حيث:

$$\vec{v}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{OM'}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d(r\vec{i'})}{dt}\right)_R = r\left(\frac{d\vec{i'}}{dt}\right)_R = r\omega\,\vec{j'}$$

$$\vec{v}_e = r\omega\,\vec{j'}$$

حيث: r بعد 'M عن O و هو مقدار ثابت

ب/ التسارع المطلق يعطى بالعلاقة:

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M/R'} + \vec{v}_e = r_0\omega(-\sin\omega t + \cos\omega t)\,\vec{i'} + r\omega\,\vec{j'}$$

$$\vec{v}_{M/R} = r_0\omega\left((\cos\omega t - \sin\omega t)\,\vec{i'} + (\cos\omega t + \sin\omega t)\,\vec{j'}\right)$$

و منه طويلة شعاع السرعة المطلقة:

$$\left\|\vec{v}_{M/R}\right\| = r_0\omega\sqrt{(\cos\omega t - \sin\omega t)^2 + (\cos\omega t + \sin\omega t)^2}$$

$$= r_0\omega\sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t - 2\sin\omega t.\cos\omega t + \cos^2\omega t + \sin^2\omega t + 2\sin\omega t.\cos\omega t}$$

$$\Rightarrow \left\|\vec{v}_{M/R}\right\| = r_0\omega\sqrt{2}$$

2/ أ/ التسارع النسبي للنقطة M.

$$\vec{a}_{M/R'} = \left(\frac{d\vec{v}_{M/R'}}{dt}\right)_{R'} = \frac{d}{dt}\left[r_0\omega(-\sin\omega t + \cos\omega t)\,\vec{i'}\right]$$

$$= r_0\omega^2(-\cos\omega t - \sin\omega t).\vec{i'} = -r_0\omega^2(\cos\omega t + \sin\omega t)\,\vec{i'} = -r.\omega^2.\vec{i'}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{M/R'} = -r.\omega^2.\vec{i'}$$

* تسارع الجر:

النقطة المنطبقة 'M تقوم بحركة دائرية منتظمة مركزها O, تسارع جرها في هذه الحالة:

$$\vec{a}_e = -\omega^2\overrightarrow{OM} = -r\omega^2.\vec{i'}$$

كما يمكن إيجاد تسارع الجر من العلاقة:

$$\vec{a}_e = \vec{a}(0) + \dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM})$$

حيث: $\vec{a}(0) = 0\ ;\ \dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{OM} = 0$ فإن:

$$\vec{a}_e = \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM})$$

$$\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r.\omega\vec{j'} \Rightarrow \vec{a}_e = \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & r.\omega & 0 \end{vmatrix} = -r.\omega^2.\vec{i'}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_e = -r.\omega^2.\vec{i'}$$

* تسارع كوريوليس:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{M/R'}$$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{M/R'} = \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x}' & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{x}'\omega\vec{j'}$$

لكن: $\dot{x}' = r_0\omega(-\sin\omega t + \cos\omega t)$ و منه:

$$\vec{a}_c = 2\dot{x}'\omega\vec{j'} = 2r_0\omega^2(-\sin\omega t + \cos\omega t)\vec{j'}$$

$$\vec{a}_c = 2r_0\omega^2(\cos\omega t - \sin\omega t)\vec{j'}$$

ب/

التسارع المطلق يعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_{M/R} = -r.\omega^2.\vec{i'} - r.\omega^2.\vec{i'} + 2r_0\omega^2(\cos\omega t - \sin\omega t)\vec{j'}$$

$$= -2r.\omega^2.\vec{i'} + 2r_0\omega^2(\cos\omega t - \sin\omega t)\vec{j'}$$

$$\vec{a}_{M/R} = -2r_0\omega^2\left((\cos\omega t + \sin\omega t).\vec{i'} + (\sin\omega t - \cos\omega t)\vec{j'}\right)$$

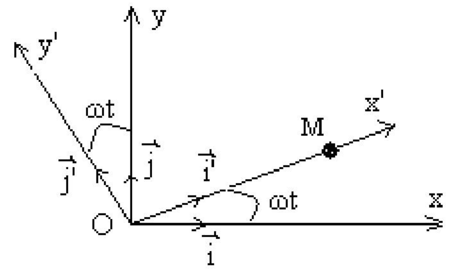
و منه طويلة شعاع التسارع:

$$\|\vec{a}_{M/R}\| = 2r_0\omega^2\sqrt{(\cos\omega t + \sin\omega t)^2 + (\sin\omega t - \cos\omega t)^2}$$

$$= 2r_0\omega^2\sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t + 2.\sin\omega t.\cos\omega t + \sin^2\omega t + \cos^2\omega t + \cos^2\omega t - 2.\sin\omega t.\cos\omega t}$$

$$\|\vec{a}_{M/R}\| = 2\sqrt{2}.r_0\omega^2$$

أ/3 إيجاد العلاقة بين أشعة وحدة R' و أشعة وحدة R حيث من الشكل نلاحظ الآتي:



$$\vec{i'} = \cos\omega t.\,\vec{i} + \sin\omega t.\,\vec{j}$$
$$\vec{j'} = -\sin\omega t.\,\vec{i} + \cos\omega t.\,\vec{j}$$
$$\vec{k'} = \vec{k}$$

ب/ من الأجوبة السابقة لدينا:

$$\vec{v}_{M/R} = r_0\omega\Big((\cos\omega t - \sin\omega t)\vec{i'} + (\cos\omega t + \sin\omega t)\vec{j'}\Big)$$
$$\vec{a}_{M/R} = -2r_0\omega^2\Big((\cos\omega t + \sin\omega t).\vec{i'} + (\sin\omega t - \cos\omega t)\vec{j'}\Big)$$

نعوض أشعة الوحدة فيها فنجد:

* نبدأ بشعاع السرعة:

$$\vec{v}_{M/R} = r_0\omega\Big((\cos\omega t - \sin\omega t)(\cos\omega t.\,\vec{i} + \sin\omega t.\,\vec{j}) + (\cos\omega t + \sin\omega t)(-\sin\omega t.\,\vec{i} + \cos\omega t.\,\vec{j})\Big)$$
$$= r_0\omega\Big((\cos\omega t - \sin\omega t)\cos\omega t + (\cos\omega t + \sin\omega t)(-\sin\omega t)\Big)\vec{i} + r_0\omega\Big((\cos\omega t - \sin\omega t)\sin\omega t + (\cos\omega t + \sin\omega t)\cos\omega t\Big)\vec{j}$$
$$= r_0\omega\Big((\cos^2\omega t - \sin^2\omega t - 2\sin\omega t.\cos\omega t)\vec{i} + (\cos^2\omega t - \sin^2\omega t + 2\sin\omega t.\cos\omega t)\vec{j}\Big)$$
$$\vec{v}_{M/R} = r_0\omega\,[(\cos 2\omega t - \sin 2\omega t)\vec{i} + (\cos 2\omega t + \sin 2\omega t)\vec{j}\,]$$

* نبدأ بشعاع التسارع:

$$\vec{a}_{M/R} = -2r_0\omega^2\Big((\cos\omega t + \sin\omega t).\vec{i'} + (\sin\omega t - \cos\omega t)\vec{j'}\Big)$$
$$= -2r_0\omega^2\Big((\cos\omega t + \sin\omega t)(\cos\omega t.\,\vec{i} + \sin\omega t.\,\vec{j}) + (\sin\omega t - \cos\omega t)(-\sin\omega t.\,\vec{i} + \cos\omega t.\,\vec{j})\Big)$$
$$= -2r_0\omega^2\Big((\cos\omega t + \sin\omega t)\cos\omega t + (\sin\omega t - \cos\omega t)(-\sin\omega t)\Big)\vec{i} - 2r_0\omega^2\Big((\cos\omega t + \sin\omega t)\sin\omega t + (\sin\omega t - \cos\omega t)\cos\omega t\Big)\vec{j}$$
$$= -2r_0\omega^2\Big((\cos^2\omega t - \sin^2\omega t + 2\sin\omega t.\cos\omega t)\vec{i} + (\sin^2\omega t - \cos^2\omega t + 2\sin\omega t.\cos\omega t)\vec{j}\Big)$$
$$\vec{a}_{M/R} = -2r_0\omega^2[(\cos 2\omega t + \sin 2\omega t)\vec{i} + (\sin 2\omega t - \cos 2\omega t)\vec{j}\,]$$

جـ/
لنحسب طويلة السرعة:

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = r_0\omega\,[(\cos2\omega t - \sin2\omega t)\,\vec{i} + (\cos2\omega t + \sin2\omega t)\,\vec{j}\,]$$

$$\left\|\overrightarrow{v}_{M/R}\right\| = r_0\omega\sqrt{(\cos2\omega t - \sin2\omega t)^2 + (\cos2\omega t + \sin2\omega t)^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{v}_{M/R}\right\| = \sqrt{2}\,.\,r_0\omega$$

لنحسب طويلة التسارع:

$$\overrightarrow{a}_{M/R} = -\,2r_0\omega^2[(\cos2\omega t + \sin2\omega t)\,\vec{i} + (\sin2\omega t - \cos2\omega t)\,\vec{j}]$$

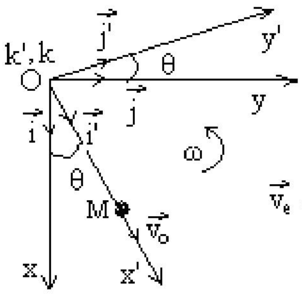
$$\left\|\overrightarrow{a}_{M/R}\right\| = 2r_0\omega^2\sqrt{(\cos2\omega t + \sin2\omega t)^2 + (\sin2\omega t - \cos2\omega t)^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{a}_{M/R}\right\| = 2\sqrt{2}\,.\,r_0\omega^2$$

<u>النتيجة</u>: نلاحظ أن طويلتي شعاع السرعة أو التسارع هي نفسها في المعلمين, فطولها لا يتغير و إنما إحداثياتها تتغير من معلم لآخر.

التمرين5:

1/ شعاع الموضع:



$$\overrightarrow{OM} = r.\vec{i'} = v_o.t.\vec{i'}$$

السرعة النسبية:

$$\Rightarrow \vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big/_R = v_o.\vec{i'} \;\Rightarrow\; \vec{v}_r = v_o.\vec{i'}$$

سرعة الجر:

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$$= \omega.\vec{k}\wedge v_o.t.\vec{i'} \Rightarrow \vec{v}_e = \omega.v_o.t.\vec{j'}$$

السرعة المطلقة:

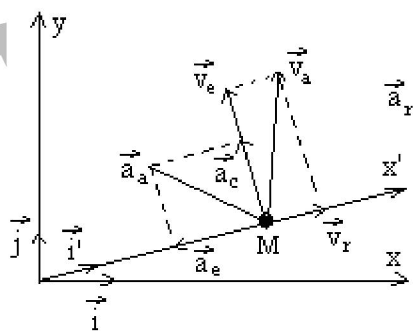
$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e = v_o.\vec{i'} + \omega.v_o.t.\vec{j'}$$

و يمكن حسابها:

$$\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big/_{R'} = \frac{d\,v_o.t.\vec{i'}}{dt} = v_o.\vec{i'} + v_o.t\,\frac{d\,\vec{i'}}{dt} = v_o.\vec{i'} + \omega.v_o.t.\vec{j'}$$

$$\Rightarrow \|\vec{v}_a\| = v_o.\sqrt{1+\omega^2.t^2}$$

2/ مركبات التسارع:



التسارع النسبي:

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt} = 0$$

تسارع الجر:

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM})$$

حيث: $\dfrac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = 0\;;\;\dot{\omega} = 0$

و منه:

$$\vec{a}_e = \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{OM})\ ;\ \vec{\omega}\wedge\vec{OM} = \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ 0 & 0 & \omega \\ v_o.t & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega.v_o.t.\vec{j'}$$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega}\wedge\omega.v_o.t.\vec{j'}$$

$$= \omega^2 v_o.t.\vec{k'}\wedge\vec{j'} = -\omega^2 v_o.t.\vec{i'} \Rightarrow \vec{a}_e = -\omega^2 v_o.t.\vec{i'}$$

تسارع كوريوليس:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r = 2\begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ 0 & 0 & \omega \\ v_o & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\,\omega.v_o.\vec{j'} \Rightarrow \vec{a}_c = 2\,\omega.v_o.\vec{j'}$$

التسارع المطلق:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c = -\omega^2 v_o.t.\vec{i'} + 2\,\omega.v_o.\vec{j'}$$

$$\|\vec{a}_a\| = \omega.v_o\sqrt{4+\omega^2.t^2}$$

/3 التسارع المماسي:

$$a_t = \frac{dv_a}{dt} = \frac{d}{dt}v_o\cdot\sqrt{1+\omega^2.t^2} = \frac{\omega^2 v_o.t}{\sqrt{1+\omega^2.t^2}}$$

التسارع الناظمي:

$$a_N^2 = a_a^2 - a_t^2 = \omega^2 v_o^2(4+\omega^2.t^2) - \frac{\omega^4 v_o^2 t^2}{1+\omega^2.t^2}$$

$$a_N = \omega.v_o.(4+\omega^2.t^2 - \frac{\omega^2 t^2}{1+\omega^2.t^2})^{1/2} = \frac{\omega.v_o.(2+\omega^2.t^2)}{\sqrt{1+\omega^2.t^2}}$$

من ناحية أخرى التسارع الناظمي:

$$a_N = \frac{\omega.v_o.(2+\omega^2.t^2)}{\sqrt{1+\omega^2.t^2}} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2\sqrt{1+\omega^2.t^2}}{\omega.v_o.(2+\omega^2.t^2)} = \frac{v_o.(1+\omega^2.t^2)^{3/2}}{\omega.(2+\omega^2.t^2)}$$

و منه نصف قطر الإنحناء:

$$\Rightarrow R = \frac{v_o.(1+\omega^2.t^2)^{3/2}}{\omega.(2+\omega^2.t^2)}$$

/4 شكل المسار حلزوني لأن $r = v.t$ كذلك $\theta = \omega.t$.

الديناميك

1- تعريف: الميكانيك الكلاسيكي هو دراسة الحركات و القوى التي سببتها، على عكس ما رأينا سابقا في علم الحركيات الذي يهتم بدراسة حركة الأجسام بدلالة الزمن دون التطرق إلى مسبباتها. وقد وضع إسحاق نيوتن القوانين الفيزيائية الأساسية كبرى لعلم الديناميكا والتي تعرف باسم قوانين نيوتن للحركة في معالم محددة تدعى المعالم الغاليلية.

للميكانيك النيوتني 3 مبادئ كبرى:

- المبدأ الأساسي للتحريك.
- مبدأ العطالة.
- مبدأ الفعل و رد الفعل.

2- المعالم الغاليلية: هي معالم يطبق فيها مبدأ العطالة، حيث نقطة مادية تخضع لقوة دائما تساوي الشعاع المعدوم، تمتاز هذه النقطة المادية بحركة مستقيمة منتظمة (ح.م.م) أو سكون. فالمعالم الغاليلية معالم عطالية.

1-2 المعلم الهليومركزي (معلم كبلر):

هو معلم مبدأه مركز الشمس و محاوره الثلاث موجهة نحو ثلاثة نجوم نعتبرها ثابتة بالنسبة للشمس خلال مدة زمنية طويلة.

و يعتبر هذا المعلم غاليلي إلى حد كبير لأنه ساكن طيلة تجربتنا، حيث تدور الشمس حول مركز مجرتنا بحركة دائرية تقريبا و دورها 240 مليون سنة تقريبا، و يعتمد دراسة حركة الكواكب و المذنبات و بعض المركبات الفضائية. اسمه مشتق من كلمة Hélio و تعني الشمس.

2-2 معلم كوبرنيك: هو معلم كبلر سوى أن مركزه مركز مجرتنا.

3-2 المعلم المركزي الأرضي: هو معلم مبدأه مركز الأرض و محاوره الثلاث موازية لمحاور كوبرنيك، و لا تدور مع دوران الأرض .

و يعتبر هذا المعلم غاليلي أقل دقة لأن مركزه يدور حول الشمس و لا يقوم بحركة مستقيمة و لكن في زمن معين نعتبر قوس حركته مستقيم
و أن حركته بالنسبة لمعلم كوبرنيك مستقيمة منتظمة،
و يعتبر معلم غاليلي و هو عطالي لدراسة حركة القمر
و الأقمار الصناعية التي تدور حول الأرض و بعض الحركات الأرضية.

4-2 المعلم السطحي الأرضي:

هو معلم مرتبط بالأرض مثل المخبر و نعتبره غاليلي أقل دقة مقارنة بسابقيه و لكنه عطالي لدراسة معظم الحركات خلال مدد زمنية قصيرة جدا بالنسبة لمدة دوران الأرض حول نفسها.

5-2 المعلم العطالي أو الغاليلي: - هو معلم تطبق فيه قوانين نيوتن.

- لا يوجد معلم عطالي مطلق, كل معلم يتحرك ح.م.م

بالنسبة لمعلم آخر نعتبره ساكنا خلال مدة الدراسة يعتبر معلما عطاليا. و يعرف أيضا أنه المعلم الذي يكون فيه مبدأ العطالة محقق.

4- مبدأ العطالة:

هو مقاومة الجسم الساكن للحركة ومقاومة الجسم المتحرك للسكون أو تغيير اتجاهه، وهو خاصية مقاومة الجسم المادي لتغيير حالته من السكون إلى الحركة بسرعة منتظمة على خط مستقيم ما لم تؤثر عليه قوة تغير من حالته.

5- مفهوم كمية الحركة:

كمية الحركة هي مقدار شعاعي لها نفس اتجاه السرعة، وهو مقدار يربط بين عنصرين يميزان الحالة الحركية للجسم وهما كتلته ، وسرعته.

لتكن نقطة مادية M كتلتها m ، سرعتها v ، في معلم غاليلـــي R ، كمية حركة M هي المقدار الشعاعي $\vec{P}$ حيث:

$$\vec{P} = m.\vec{v}$$

6- المبدأ الأساسي للتحريك(م.أ.ت):

في أية جملة مرجعية غاليلية R، تكون محصلة القوى المؤثرة في نقطة مادية مساوية إلى مشتق كمية الحركة لهذه النقطة المادية بالنسبة للزمن في تلك الجملة.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m.\vec{v})}{dt} = m.\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}.\frac{dm}{dt}$$

إذا كانت كتلــة النقطة المادية ثابتة خلال الحركــة فإن: $\frac{dm}{dt} = 0$ و منه:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m.\vec{v})}{dt} = m.\frac{d\vec{v}}{dt} = m.\vec{a}$$ حيث: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$

a: تسارع النقطة المادية. و منه: $\vec{F} = m.\vec{a}$

في هذه الصيغة لقانون نيوتن الثاني يتناسب تسارع الجسم ، تناسب طرديا مع مجموع القوى المؤثرة فيه.

من مميزات القانون الثاني لنيوتن:

- لا يصلح إلا في معلم عطالي.
- عند تطبيق هذا القانون على الأجسام المادية يجب اعتبارها نقاطا مادية لا أبعاد لها.
- يصلح هذا القانون ويعطي نتائج جيدة فقط على الأجسام التي لها سرعة صغيرة قياسا بسرعة الضوء.

6- مبدأ الفعل و رد الفعل: إذا أثرت نقطـة A في نقطة B بقوة $\vec{F}_{A\to B}$, تــرد بدورهــا النقطة B على النقطة A بقوة $\vec{F}_{B\to A}$ بحيث :

$$\vec{F}_{A\to B} + \vec{F}_{B\to A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$$

7- تعريف قوة:

هي مقدار شعاعي إذا أثر في جملة، تحركت هذه الأخيرة أو تشوهت. و هي نوعان:

1-7 قوى بعدية:

و هي قوى ناتجة عن تأثير الجمل فيما بينها، حيث المسافة الفاصلة بين الجمل معتبرة. مثل:

- قوى الجذب العام: لتكن نقطتان ماديتان متعادلتــان كهربائيا، كتلتهما على الترتيــب m_1, m_2 قريبتان من بعضهما، فإنهمــا يتبادلان قوى تجاذب، قيمة كل منهما تعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{F} = G.\frac{m_1.m_2}{d^2}.\frac{\vec{r}}{r} = G.\frac{m_1.m_2}{d^2}.\vec{u}$$

حيث: $\vec{u}$ شعاع وحدة حامله: $\vec{F}$. $G = 6,67.10^{-11} N.m^2/kg^2$

- قوى كهروستاتية:

لتكــن شحنتــان كهربائيتــان q_1, q_2 تفصلهما مسافة صغيــرة، فيتبادلان قوى، شدة كل منهما تعطى حسب قانون كولوم:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{d^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = 9.10^9.\frac{q_1\cdot q_2}{d^2}.\frac{\vec{r}}{r} = 9.10^9.\frac{q_1\cdot q_2}{d^2}.\vec{u}$$

- <u>قوى مغناطيسية</u>:

نقطة $M(x, y, z)$ في معلم R، إذا تحركت في حقل مغنطيسي B،
تخضع إلى قوة مغناطيسية تعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{F} = q.\vec{v}\wedge\vec{B}$$

2-7 قوى تلامسية:

و هي قوى ناتجة عن تلامس جملتين لبعضهما، حيث المسافة بينهما صغيرة جدا أقل من 1 µm. مثل: قوى الإحتكاك، قوى التماسك، الروابط الكيميائية، التأثيرات النووية، ...

8- إنحفاظ كمية الحركة:

1-8 مركز العطالة:

1-1-8 لجسم صلب:

جسم صلب خاضع لمجموعة من القوى، إذا كانت محصلة هذه القوى تساوي الشعاع المعدوم فإن الجسم يكون ساكنا أو متحركا، حيث توجد فيه نقطة وحيدة G مرتبطة بالجسم لها الخصائص التالية:

- تأخذ G ح.م.م بالنسبة للأرض.
- إذا كان الجسم ساكنا بالنسبة للأرض فإن G تكون ساكنة أيضا.

نسمي G مركز عطالة الجسم. و يمكن أن نسميه مركز الكتلة (الثقل).

2-1-8 لجملة مادية:

لدينا $\sum$ من الأجسام الصلبة كتلها $m_1, m_2, m_3, \ldots$ مركز عطالة كل جسم على الترتيب: $G_1, G_2, G_3, \ldots$ ، فإن مركز عطالة هذه الجملة المادية G يحقق العلاقة التالية:

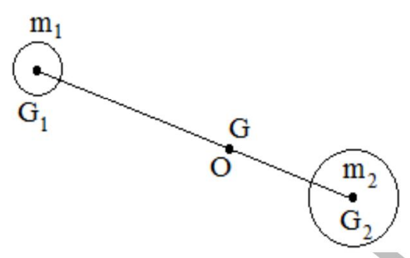
$$\vec{OG} = \frac{m_1.\vec{OG_1} + m_2\vec{OG_2} + m_3\vec{OG_3} + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

حيث: O نقطة لا على التعيين من الفضاء و نسميها المبدأ. هذه العلاقة تمثل أيضا مركز الأبعاد المتناسبة.

2-8 كمية الحركة:

1-2-8 لنقطة مادية: كما رأينا أعلاه، كمية الحركة $\vec{P}$ لنقطة مادية في اللحظة t هــي مقدار شعاعي عبارة عن جداء كتلة النقطة المادية m في شعاع سرعتهــا $\vec{v}$.

حيث: $\vec{P} = m.\vec{v}$



هذه العلاقة صحيحة إذا كانت سرعة النقطة المادية أقل بكثير من سرعــة الضــوء في الخلاء.

2-2-8 لجملة مادية:

كمية الحركة $\vec{P}$ لجملة مادية تتكون من $\sum$ من النقاط المادية $A_1, A_2, A_3, \dots$, كتــلهــا $m_1, m_2, m_3, \dots$ سرعها فــي اللحظة t على الترتيب: $v_1, v_2, v_3, \dots$, مركز عطالة الجملة G , نختار نقطة من الفضاء O و نعتبرها المبدأ، حيث كمية حركة الجملـة هي $\sum$ كميات حركات نقاطها المادية المشكلــة لهــا.

حيث كل $G_1, G_2, G_3, \dots$ توافق و على الترتيــب: $A_1, A_2, A_3, \dots$ لأنها نقــاط مادية. و منه نكتب علاقة مركز العطالة كالآتي:

$$M.\overrightarrow{OG} = m_1.\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + m_3\overrightarrow{OA_3} + \dots = \sum_{i=1}^{n} m_i.\overrightarrow{OA_i}$$

و منه:
$$\vec{P} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i.\overrightarrow{OA_i}\right) = \frac{d}{dt}(M.\overrightarrow{OG}) = M\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$

لكن: $\vec{v}_G = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ و منه: $\vec{P} = M.\vec{v}_G$

حيث: $\vec{v}_G$ هو شعاع السرعة في اللحظة t لمركز عطالة الجملة المادية. و منه كمية حركة جملة مادية صلبة أو غير صلبة في لحظة t هي جداء كتلتها في شعاع سرعة مركز عطالتها.

3-8 إنحفاظ كمية الحركة:

1-3-8 لجسم صلب:

الجسم يخضع لـ $\sum$ قوى خارجية محصلتها تساوي الشعاع المعدوم , فإن شعاع كمية حركته مقدار ثابت مهما كان الزمن. و يكون مركز عطالة هذا الجسم الصلب في ح.م.م أو سكون.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\vec{F}_i = M.\vec{a}_G = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{0} \Rightarrow v_G = cste$$

$$\Rightarrow P = M.v_G = cste$$

2-3-8 لجملة مادية:

الجملة المادية شبه معزولة $\sum_{i=1}^{\infty}\vec{F}_i = \vec{0}$ فإن كمية حركتها بالنسبة للأرض هي شعاع ثابت (محفوظة) مهما كان الزمن t ، القوى الداخلية لا تأثر في حركة G.

شعاع كمية حركة الجملة $\vec{p}$ ثابت مقدارا و إتجاها و منحى، و منه كمية حركة الجملة محفوظة. بينما كمية الحركة للنقاط المادية المكونة للجملة على حدا فهي تتغير في المنحى و الطويلة، فهي ليست محفوظة.

مثال: يمكن تحديد بعد مركز عطالة الجملة G تتكون من جسمين مركزي عطالتي الجسمين G_1, G_2 و كتلتيهما $m_1 = 2.m_2$.

و نلاحظ خلال الحركة يحافظ G على هذه المسافة حيث: $GG_2 = 2.GG_1$.

يمكن الاستفادة من إنحفاظ كمية الحركة في حل التمارين مثل التصادم، حيث نكتب كمية حركة الجملة قبل التصادم و بعد التصادم.

كمية حركة الجملة في أي لحظة t هي:

$$\vec{P} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$$

الجملة محفوظة إذن:

$$\vec{P_i} = \vec{P_f} \Rightarrow m_1\vec{v}_{1_i} + m_2\vec{v}_{2_i} = m_1\vec{v}_{1_f} + m_2\vec{v}_{2_f} \quad ----- ①$$

كما يمكن الإستفادة من إنحفاظ الطاقة الحركية حيث:

$$E_c = \frac{1}{2}m.v^2$$

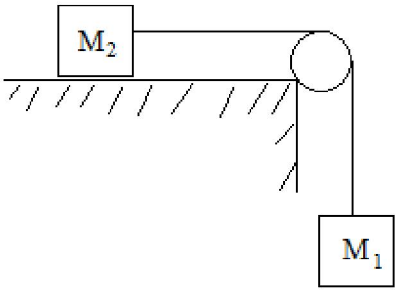
$$E_{c_i} = E_{c_f} \Rightarrow \frac{1}{2}m.v_{1_i}^2 + \frac{1}{2}m.v_{2_i}^2 = \frac{1}{2}m.v_{1_f}^2 + \frac{1}{2}m.v_{2_f}^2 \quad --②$$

من المعادلتين 1 و 2 يمكن استخراج مميزات الجسمين: كتلة، سرعة، ...

التمـــارين

<u>التمرين1:</u> جسم M_1 يجر أثناء سقوطه جسم ثاني M_2 بواسطة خيط عديم الامتطاط يمرعلى محز بكرة مهملة الكتلة، حيث الجسم الثاني يعاني قوة احتكاك تساوي عشر ثقله.

المعطيات: $m_1= m_2 = 200g$, $g = 10\ m/s^2$, $f =P_2/10$ ، أحسب:



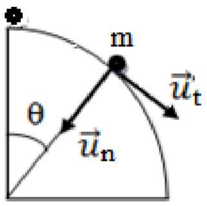
1- تسارع الجملة

2- توتر الخيط

3- سرعة الجسمين عند $t =2s$

4- تسارع M_1 , M_2 عند انقطاع الخيط

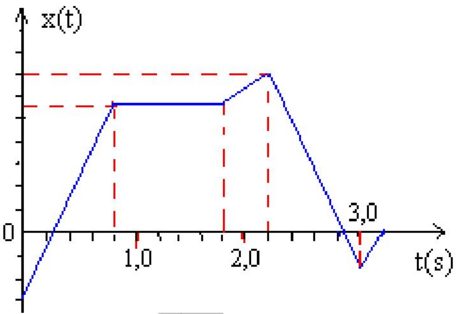
<u>التمرين2:</u> كرية من حديد كتلتها m تنزلق على مسار دائري بدون سرعة ابتدائية انطلاقا من الشاقول



1/ مثل القوى المؤثرة على الكرية.

2- عين الزاوية θ عند نقطة مغادرة الكرية المسار الدائري.

<u>التمرين3:</u> يبين الشكل مواضع سيارة بدلالة الزمن, بين:



1/ في أي مجال زمني تتم الحركة في إتجاه المحور x الموجب.

2/ في أي لحظة تكون الحركة متباطئة أو متسارعة.

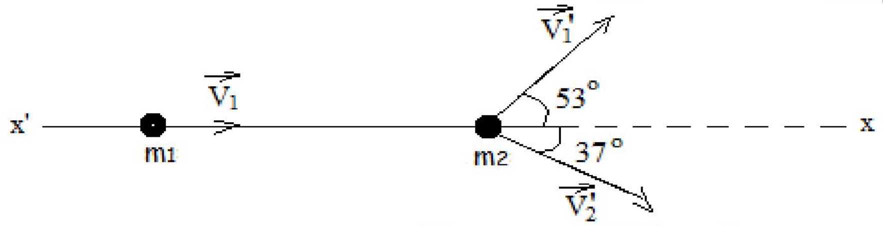
3/ متى يمر الجسم بالمبدأ، و متــى تنعدم السرعة.

<u>التمرين4:</u> ندفع جسم بقوة 3N خلال 0.5s ، أحسب قيمة التغير في كمية الحركة I للجسم، ثم إستنتج قيمة السرعة النهائية للجسم حيث كتلته 100g.

التمرين5: تصل سرعة طائرة كتلتها 36000kg إنطلاقا من السكون إلى مغادرة الأرض 700 km/h، يطبق محركيها قوة أثناء الصعود متوسطها 70000N .

إذا أهملنا مقاومة الهواء، أحسب قيمة الزمن اللازم لصعود الطائرة.

التمرين6: كرة بليار كتلتها $m_1 = 1kg$ سرعتها 3m/s تسير على المحور x'Ox تضرب كرة ثانية $m_2 = 2kg$ كانت ساكنة على نفس المحور. الزوايا التي تصنعها السرعتين النهائيتين للكرتين بالنسبة للمحور بعد التصادم كما في الشكل.



1/ أحسب قيمة السرعتين النهائيتين.

2/ هل التصادم مرن.

التمرين7: سيارة كتلتها m تسير وفق خط مستقيم Ox بسرعة v ثابتة , تصطدم بشاحنة متوقفة في طريقها كتلتها M , فتلتصق السيارة بالشاحنة و تشكل كتلة واحدة بعد التصادم على المحور Ox.

1/ حدد سرعة الجملة الجديدة (سيارة + شاحنة) بعد التصادم.

حيث: v = 120km/h, m = 1500kg, M = 3000kg .

2/ بين نوع التصادم.

<u>التمرين8</u>: جسم M_1 يجر أثناء سقوطه جسم ثاني M_2 بواسطة خيط عديم الامتطاط يمرعلى محز بكرة مهملة الكتلة.

المعطيات: $m_1 = 150g$; $m_2 = 200g$, $g = 10\ m/s^2$ ، أحسب:

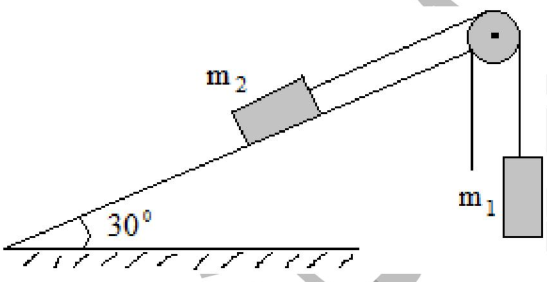
1/ في أي إتجاه تتحرك الجملة.

2 / تسارع الجملة

3/ توتر الخيط أجب عن السؤالين 2 و 3 في الحالتين:

أ/ المستوى المائل أملس.

ب/ المستوى المائل خشن يبدي قوة احتكاك تساوي عشر الثقل الموضوع فوقه.



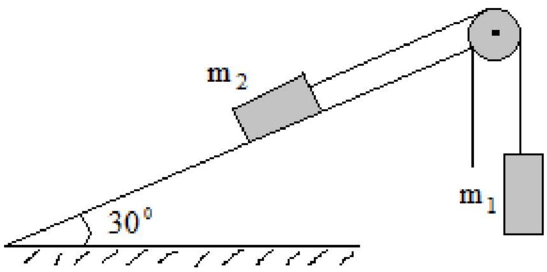
<u>التمرين9</u>: جسم M_1 يجر أثناء سقوطه جسم ثاني M_2 بواسطة خيط عديم الامتطاط يمرعلى محز بكرة مهملة الكتلة.

المعطيات: $m_1 = 200g$; $m_2 = 200g$, $g = 10\ m/s^2$ ، أحسب:

1/ في أي إتجاه تتحرك الجملة.

2 / تسارع الجملة

3/ توتر الخيط



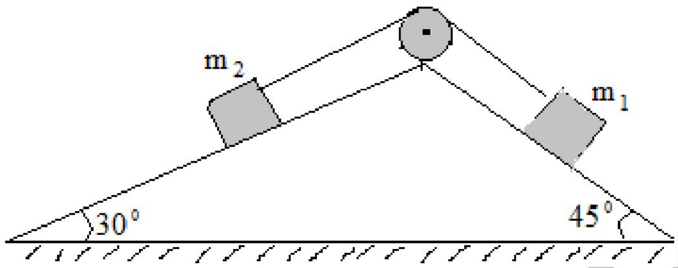
التمرين10: جسمين M_1 و M_2 يجر أحدهما الآخر أثناء نزوله بواسطة خيط عديم الامتطاط يمر على محز بكرة مهملة الكتلة، المستويين أملسين.

المعطيات: $m_1 = 100g \; ; \; m_2 = 200g \; , \quad g = 10 \; m/s^2$ ، أحسب:

1/ في أي إتجاه تتحرك الجملة.

2/ تسارع الجملة

3/ توتر الخيط



التمرين11: جسم M_1 يجر أثناء سقوطه جسم ثاني M_2 بواسطة خيط عديم الامتطاط يمر على محز بكرة مهملة الكتلة.

المعطيات: $m_1 = 100g \; ; \; m_2 = 200g \; , \quad g = 10 \; m/s^2$ ، أحسب:

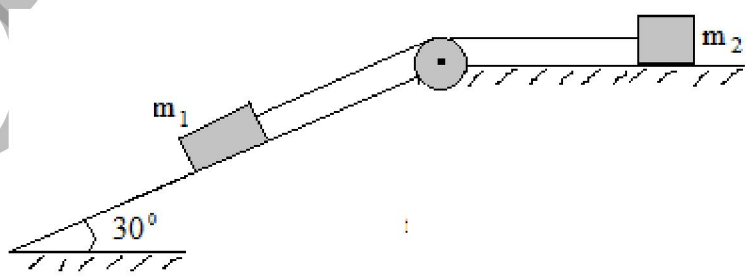
1/ تسارع الجملة

2/ توتر الخيط

أجب عن السؤالين 2 و 3 في الحالتين:

أ/ المستوى المائل أملس.

ب/ المستوى المائل خشن يبدي قوة احتكاك تساوي عشر الثقل الموضوع فوقه.



التمرين12: جسمين M_1 و M_2 يجر أحدهما الآخر أثناء نزوله بواسطة خيط عديم الامتطاط يمر على محز بكرة مهملة الكتلة.

المعطيات: $m_1 = 100g$; $m_2 = 200g$, $m_3 = 300g$; $g = 10\ m/s^2$ ،

أحسب:

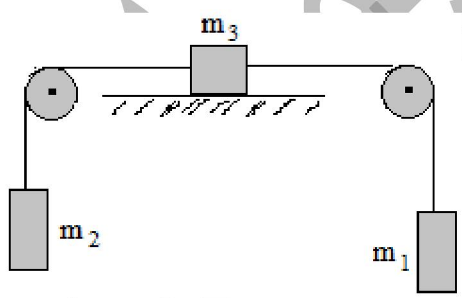
1/ تسارع الجملة

2/ توتر الخيط

أجب عن السؤالين 2 و 3 في الحالتين:

أ/ المستوى المائل أملس.

ب/ المستوى المائل خشن يبدي قوة احتكاك تساوي عشر الثقل الموضوع فوقه.



حل التمـــارين

<u>التمرين1:</u>

/1

$$\left.\begin{array}{l} P_1 - T = m_1 a \\ T - f = m_2 a \end{array}\right) \Longrightarrow a = \frac{P_1 - f}{m_2 + m_1} = 4{,}5\ m/s$$

/2

$$T = m_1 (g - a) = 0.2(10 - 4.5) = 1{,}1\ N$$

/3 بمأن التسارع ثابت و الحركة مستقيمة: $V = a.\ t = 4{,}5.2 = 9\ m/s$.

/4 عند انقطاع الخيط لكل جسم تسارع ز منه:

الجسم 1: يسقط سقوط حر، تسارعه: $a_1 = g = 10\ m/s^2$

الجسم 2: يتباطئ إلى أن يتوقف تحت تأثير الاحتكاك و منه:

$a_2 = - f/m_2 = - 1\ m/s^2$

<u>التمرين3:</u>

/1 الحركة تكون في الإتجاه + للمحور Ox عند: $t \in [0; 0{,}8]U[1{,}8; 2{,}2]U[3; 3{,}2]s$

/2 تكون الحركة متباطئة أو متسارعة عند اللحظات: $t = 0{,}8 ; 1{,}8 ; 2{,}2 ; 3\ s$.

/3 تمر السيارة بالمبدأ تقريبا عند اللحظات: $t = 0{,}3 ; 2{,}9 ; 3{,}2\ s$.

و تنعدم السرعة في المجال: $t \in [0{,}8 ; 1{,}8]s$ و في اللحظات: $t = 2{,}2 ; 3\ s$.

<u>التمرين4:</u>

التغير في كمية الحركة : $I = F.\Delta t = 3.\ 0{,}5 = 1{,}5\ N.s$.

السرعة النهائية للجسم: $I = P_2 – P_1 = P_2 \Longrightarrow I = m.V \Longrightarrow V = P/m =$

$1{,}5/0{,}1 = 15\ m/s$

$V = 15\ m/s$

التمرين5:

لحساب الزمن اللازم للصعود: لأن: $P_i = 0$; $I = F.\Delta t = P_f - P_i = P_f = m.V$

$\Longrightarrow \Delta t = m.V/F = 36000.700/3{,}6.70000$

$\Longrightarrow \Delta t = 100s = 1min40s$

الطاقة و العمل

I- الطاقة: لا يمكن تعريف الطاقة في قانون واحد لأن لها أشكال عدة.

1/ أشكال الطاقة: هناك شكلان على المستوى العياني و هما:

أ/ الطاقة الحركية: هي طاقة لها علاقة بحركة الجسم أي بسرعته $\vec{v}$، و كتلته m في معلم معين و نرمز لها بالرمز E_c . و هي نوعان:

- طاقة حركية إنسحابية حيث: $E_c = \frac{1}{2} m.v^2$، وحدتها الجول (J)، حيث: m(kg), v(m/s).
- طاقة حركية دورانية حيث: $E_c = \frac{1}{2} J_{(\Delta)} . \dot{\alpha}^2$, $\dot{\alpha}$ (rd/s) السرعة الزاوية للجسم, $J_{(\Delta)}$(kg.m²) عزم عطالة الجسم بالنسبة لمحور الدوران (Δ)

ب/ الطاقة الكامنة:

* هي طاقة لها علاقة بالموضع (التأثيرات المتبادلة بين الأجسام) و نرمز لها بالرمز E_p.

* نقول عن قوة أنها محفوظة، إذا وجدت دالة موضع وحيدة تسمى طاقة كامنة E_p، حيث العمل العنصري لهذه القوة يكتب: $dW = - dE_p$. الجدير بالذكر أن القوى التي تتدرج (مشتقة) من الطاقة الكامنة تسمى قوى محفوظة، لأن عملها يتحول إلى طاقة كمون الجسم.

في هذه الحالة العمل لا يتعلق بالطريق المتبع و لكن بنقطتي الإنطلاق و الوصول:

$$W_{AB} = \int_{AB} dW = -\int_{AB} dE_p = E_p(A) - E_p(B)$$

- نقول عن قوة أنها محفوظة إذا كان عملها لا يتعلق بالطريق المتبع.
- عمل قوة محفوظة على مسار مغلق معدوم.
- الطاقة الكامنة تعرف بتقريب ثابت.

- على بعد واحد x : $\vec{F} = -\frac{dE_P}{dx}.\vec{u_x}$

- بصفة عامة: $rot\,\vec{F_c} = \vec{0} \longrightarrow \vec{F_c} = -\overrightarrow{grad}\,E_P$ نقول أن القوة مشتقة من طاقة كامنة. و نميز نوعين:

- **الطاقة الكامنة الثقالية:**

هي طاقة يخزنها جسم نتيجة وجوده بجوار الأرض، و نرمز لها بالرمز E_{pp} .

حيث: $E_{pp} = m.g.h + cste$, وحدتها الجول (J)، $m(kg), g(m/s^2), h(m)$.

مثال: قوة الثقل لو نختار محور Oz متجه نحو الأعلى فإن الطاقة الكامنة الثقالية تكتب:

$E_{pp} = m.g.h + cste$ حيث m كتلة الجملة، g تسارع الجاذبية يفرض ثابت، إذا تغير اتجاه المحور نحو الأسفل تتغير إشارة المقدار mgh.

$$\begin{aligned} W &= \vec{P}.\overrightarrow{AB} = \vec{P}.(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{P}.\overrightarrow{AC} + \vec{P}.\overrightarrow{CB} = \vec{P}.\overrightarrow{AC} \\ &= P.AC.\cos 0 = P.h = m.g.h \end{aligned}$$

عمل قوة الثقل لا يتعلق بالطريق المتبع بل بالمسافة الشاقولية بين نقطتي الإنطلاق و الوصول.

و يكون العمل موجبا عند النزول و يكون سالبا عند الصعود.

$$W = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = P.AB.\cos\alpha = P.AC = P.h = m.g.h$$

- **الطاقة الكامنة المرونية:** هي طاقة تتعلق بمقدار تشوه الجسم المرن و نرمز لها بالرمز E_{pe} .

حيث: $Ep(\ell) = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + cste$

مثال: قوة إرجاع نابض ثابت مرونته k و طوله وهو فارغ ℓ_0.

جـ/ الطاقة الميكانيكية:

في معلم غاليلي، جملة M تحت تأثير قوى محفوظة مشتقة من طاقة كامنة E_p و لقوى غير محفوظة، نعرف الطاقة الميكانيكية E_m ،حيث: $E_m = E_c + E_p$.

نظرية الإستطاعة الميكانيكية: $dE_m/dt = P_{n.c}$

$P_{n.c}$ إستطاعة القوى الغير محفوظة. و بتكامل نظرية الإستطاعة الميكانيكية نحصل على نظرية الطاقة الميكانيكية: $\Delta E_m = W_{n.c}$. و منه:

نص نظرية الطاقة الميكانيكية: في معلم غاليلي، إن التغير في الطاقة الميكانيكية لجملة على مسار معطى يساوي إلى المجموع **الجبري** لأعمال كل القوى الخارجية (القوى الغير محفوظة) المؤثرة في الجملة.

* إذا كانت كل القوى محفوظة أو القوى الغير محفوظة لا تعمل فإن الطاقة الميكانيكية ثابتة أي التغير في الطاقة الميكانيكية معدوم. و هو تكامل أول للحركة.

و هناك شكل واحد على المستوى المجهري هو:

د/ الطاقة الداخلية: هي طاقة تتعلق بالحالة المجهرية للجسم أي بالطاقة الحركية للجسيمات المكونة لهذا الجسم و مختلف التأثيرات بين هذه الجسيمات (الطاقة الكامنة الميكروسكوبية).

2/ أنماط تحويل الطاقة: تتحول الطاقة من جسم إلى جسم آخر وفق أربعة سبل أو أنماط مختلفة:

أ/ تحويل ميكانيكي و نرمز له بالرمز W_m . يتحقق هذا التحويل بواسطة قوى عندما تنتقل نقاط تأثيرها.

ب/ تحويل كهربائي و نرمز له بالرمز W_e. يتحقق هذا التحويل عندما يعبر تيار كهربائي دارة كهربائية.

جـ/ تحويل بالإشعاع و نرمز له بالرمز E_r . يحدث هذا التحويل عندما يرسل أو يستقبل جسم إشعاعا كهرومغناطيسيا (الضوء المرئي أو غير المرئي). لا يحتاج هذا التحويل إلى وسط مادي لأن الإشعاع الكهرومغناطيسي ينتشر في الفراغ.

د/ تحويل حراري و نرمز له بالرمز Q . يحدث عادة هذا التحويل عندما تتلامس أجسام ليس لها نفس درجة الحرارة.

3/ مبدأ إنحفاظ الطاقة:

أ/ نص مبدأ إنحفاظ الطاقة:

الطاقة لا تخلق و لا تفنى بل تتحول.

ب/ معادلة إنحفاظ الطاقة:

عندما تنتقل جملة معينة من الحالة 1 في اللحظة t_1 إلى الحالة 2 في اللحظة t_2 يمكن لطاقتها أن تتغير. يكون هذا التغير ناتجا عن تحويلات طاقوية مع الوسط الخارجي. تكتب معادلة الإنحفاظ كما يلي:

الطاقة الإبتدائية للجملة + الطاقة المستقبلة(المكتسبة) – الطاقة المقدمة (المفقودة) = الطاقة النهائية للجملة.

- نفرض أن الطاقة المكتسبة موجبة، و الطاقة المفقودة سالبة.
- الجمل التي لا تتبادل الطاقة مع الوسط الخارجي أي لا تسقبل و لا تقدم طاقة تسمى جملا معزولة طاقويا. و تكتب معادلة إنحفاظ الطاقة:

الطاقة الإبتدائية للجملة = الطاقة النهائية للجملة.

II- الإستطاعة:

إستطاعة قوة $\vec{F}$ التي تؤثر على نقطة مادية M ، سرعتها $\vec{v}$ في معلم معطى، هي:

$P = \vec{F}.\vec{v}$ هي مقدار جبري ويعطى بالواط watt.

$P > 0$ معناه القوة محركة.

$P < 0$ معناه القوة معيقة.

$$\frac{dE_c}{dt} = P$$

III- العمل:

إذا أثرت قوة F على جسم فنقلته من نقطة A إلى أخرى B فنقول أن القوة قد قامت بعمل. نعرف العمل العنصري (الموافق لانتقال صغير) ونرمز له بالرمز δW للقوة F أثناء انتقال النقطة M انتقالا عنصريا dr بالعلاقة التالية: $dW = \vec{F}.\vec{v}.dt = \vec{F}.\vec{dr}$

و نكتب: $dW = \vec{dr}.\vec{F} = dx.F_x + dy.F_y + dz.F_z$ هو مقدار جبري، يعطى الجول (J).

- الإستطاعة و العمل عموما يتعلقان بالمعلم.
- لا توجد بالضرورة علاقة بين القوة و سبب حدوث الإنتقال.

نظرية الطاقة الحركية:

$$\Rightarrow E_{CB} - E_{CA} = \int_A^B \vec{dr}.\vec{F} = W_{A \to B} \;;\; E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} m.v^2 \quad \text{حيث}$$

بهذه الخطوات الرياضية نكون قد برهنا على نص الطاقة الحركية.

نص الطاقة الحركية:

إن التغير في الطاقة الحركية لجملة كتلتها ثابتة بين الموضعين A, B (بين اللحظتين t_A, t_B) يساوي إلى المجموع **الجبري** لأعمال كل القوى الداخلية و الخارجية (القوى المحفوظة و الغير محفوظة) المؤثرة في هذه الجملة.

5/ عمل قوة ثابتة:

عندما تنتقل نقطة تأثير قوة $\vec{F}$ ثابتة وفق مسار مستقيم $\vec{AB}$ فعمل هذه القوة يكتب:

$$W_{AB}(F) = \vec{F}.\vec{AB} = F.AB.\cos\alpha$$

حيث: α الزاوية بين الشعاعي $\vec{F}, \vec{AB}$. الوحدات: F(N), AB(m), W(J).

في حالة عمل قوة ثابتة (ثقل جسم مثلا) لا يتعلق العمل بالطريق المتبع.

نأخذ أمثلة عن عمل قوة ثابتة:

- عمل قوة الثقل: كما رأيناه في الطاقة الكامنة الثقالية.
- عمل قوة كهربائية:

$$\underset{A\to B}{W}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{AB} = q.\vec{E}.\vec{AB} = q.E.x = q.U_{AB} = q.(V_A - V_B)$$

عمل قوة كهربائية لا يتعلق بالطريق المتبع، و إشارته تتعلق بإشارة q, U_{AB}.

- عمل قوة الإحتكاك: إذا كان جسم أثناء انتقاله يعاني قوة إحتكاك ثابتة و معاكسة لسرعته، فإن عمل هذه القوة دائما مقاوم.

$$\underset{A\to B}{W}(\vec{f}) = \vec{f}.\vec{AB} = f.AB.\cos\pi = -f.AB$$

$$\underset{A\to B}{W}(\vec{f}) = -f.AB$$

التمـــــارين

التمرين1: تخضع نقطة مادية لقوة $\vec{F} = (2x+1)\vec{i} + 2y\vec{j}$, حيث تنتقـل من النقطة $O(0, 0)$ إلى النقطة $B(2, 4)$، أحسب عمل القوة عندما تسلك النقطة المادية المسارات التالية:

أ/ OAB حيث: $A(2, 0)$.

ب/ OCB حيث: $C(0, 4)$.

جـ/ OB. ماذا تستنتج.

التمرين2: لتكن النقطتان $A(a, 0, 0), B(0, b, 0)$ في المعلم $R(O, x, y, z)$ حيـث:

a, b ثابتان موجبان, قـوة F نقطة تطبيقهـا $M(x, y, 0)$ عبارتهـا:

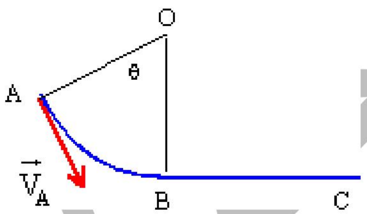
$$\vec{F} = -x.y.\vec{i} + y^2.\vec{j}$$

أحسب العمل المنجز من طرف هذه القوة, إذا انتقلت النقطة M على:

1/ القطعة AB , من A إلى B.

2/ المسار المغلق ABA , حيث ترسم القطعة AB , من A إلى B , ثم من B إلى A.

3/ المسار المغلق ABA , حيث ترسم القطعة AB , ثم الخط المنكسر OA, OB.



التمرين3: جسم نقطي كتلته m يسلك الطريق ABC ,

الجزء AB قوس من دائرة مركزه O ,

نصف قطره r يحصر الزاوية θ.

الجزء BC قطعة مستقيمة أفقية.

الإحتكـاك مهمـل على الجزء AB , و موجـود على الجزء BC و يوافق قـوة ثابتـة f علـى نفـس حامـل شعـاع السرعـة V نقـذف الجسم من النقطة A بسرعـة V_A , مماسيـة علـى المسـار.

1/ تكلم عن تغير الطاقة الحركية و الكامنة خلال الحركة.

2/ ماذا نقول عن الطاقة الميكانيكية, في أي شكل صرفة الطاقة الضائعة.

3/ أكتب عبارة السرعة عند النقطة B بدلالة r, g, V_A, θ . أحسب قيمة V_A.

4/ بين طبيعة الحركة في الجزء BC.

5/ أكتب عبارة قوة الإحتكاك بدلالة $V_B, V_C, d = BC$. أحسب قيمة f.

ت.ع: $m = 100g, r = 1,5m, V_C = V_B = 2m/s, \theta = 60° ; BC = 2m$.

<u>التمرين4</u>: جسم صلب كتلته 80kg موجود أسفل مستوى مائل 30° عن الأفق عند النقطة A , نريد رفعه إلى الأعلى بواسطة محرك مربوط بحبل موازي للمستوى المائل, نطبق قوة جر ثابتة F = 520N فيصل الجسم إلى الأعلى عند النقطة B بسرعة 2,20m/s عندما يقطع مسافة 6,5m.

1/ أحسب تغير الطاقة الحركية للجسم: $\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A)$.

2/ مثل القوى الخارجية المؤثرة على الجسم.

3/ أحسب المجموع الجبري لأعمال قوتي الثقل و الجر.

4/ هل هذا المجموع يساوي ΔE_c , أشرح.

5/ أحسب العمل المبذول من طرف المحرك خلال 5min.

6/ أحسب الإستطاعة المبذولة من طرف المحرك.

<u>التمرين5</u>: سيارة كتلتها m = 900kg تسير بسرعة 100km/h, تفرمل فجأة و توقف العجلات الأربعة عن الدوران. نفرض أنها توصل توقفها على مسار مستقيم أفقي على الطريق, فتقف على مسافة 97,0m من بداية الفرملة خلال زمن 6,54s .

1/ أحسب الطاقة الحركية الإبتدائية للسيارة , في أي معلم أنسبت.

2/ نفرض أن قوى إحتكاك الإطارات مع الطريق f ثابتة و على نفس حامل شعاع السرعة و معاكسة له في الإتجاه. مثل القوى الخارجية المؤثرة على السيارة و حدد قيمة f.

3/ أحسب الإستطاعة المتوسطة لهذه القوة f خلال الفرملة.

التمرين6: في المستـوى Oxy , نقطــة مادية كتلتها m , تتحــرك وفـق المسـار المعرف كالآتــي: $\overrightarrow{OM} = 2.a.\cos\omega t.\vec{i} + a.\sin\omega t.\vec{j}$, a, ω ثابتان موجبان.

1/ حدد مسار الحركة.

2/ حدد أشعة السرعة و التسارع ثم تحقق من أن القوة المؤثرة على النقطـة الماديــة أنها مركزيــة.

3/ أكتب عبـارة الطاقــة الحركية للنقطـة المادية بدلالة الزمــن , ثم إستنتــج قيمتهــا العظمى.

4/ أ/ نستعمل الإحداثيات الإسطوانية , أحسب العمل عندما تنتقل النقطة المادية مــن A(2a, 0) إلى B(0, a).

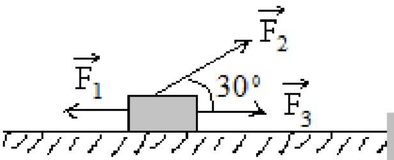
ب/ أوجد هذه القيمة بإستعمال نظرية الطاقة الحركية.

5/ حدد عبارة الإستطاعة اللحظية و أحسب العمل عندما تقـوم النقطة الماديـة بدورة كاملة. ماذا تستنتــج.

6/ أكتب عبارة الطاقة الميكانيكية للنقطة المادية , ماذا تستنتج.

التمرين7: يعاني جسم صلب لثلاثة قوى ثابتة في الجهة والشدة خلال الحركة وفق مسار أفقي ومستقيم.

1/ حدد في أي إتجاه تتحرك الجملة.



2/ أحسب العمل المنجز من طرف كل قوة أثناء إنتقال طوله 1م.

محددا أيها المحرك و المعيق حيث: $F_3 = 1N$, $F_2 = 4N$, $F_1 = 2N$

3/ أحسب مجموع أعمال هذه القوى.

التمرين8: سيارة كتلتها m تتحرك على طريق أفقي ومستقيم تحت تأثير قوة جر شدتها F، قوة الاحتكاك f

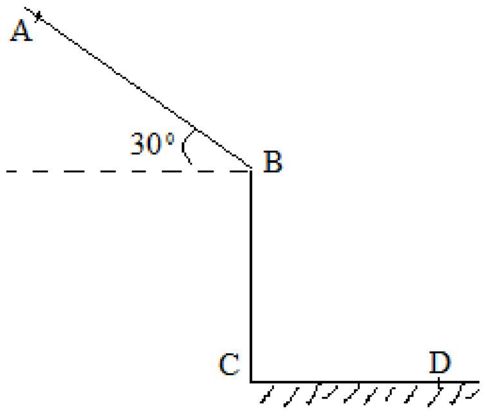
1/ مثل القوى المأثرة على السيارة.

2/ أحسب عمل كل قوة عندما تتحرك السيارة مسافة 100م.

3/ أحسب مجموع أعمال هذه القوى.

حيث: $m = 2000kg ; F = 3000N ;$

التمرين9: ينطلق جسم كتلته m من النقطة A بدون سرعة ابتدائية على مستوى مائل طوله 2م وزاوية ميله 30°، قوة الاحتكاك f .



1/ مثل القوى المطبقة على الجسم أثناء نزوله.

2/ أحسب عمل كل قوة مؤثرة على الجسم.

3/ أحسب الطاقة الحركية للجسم عند الموضع B.

4/ إستنتج سرعة الجسم عند هذه النقطة.

5/ يسقط الجسم على النقطة D بسرعة v، أحسب الطاقة الحركية للجسم عند هذه النقطة.

6/ إستنتج قيمة الارتفاع BC.

ت.ع: $m = 80\ kg ;\ f = 0{,}5\ N ;\ g = 10\ m/s^2 ;\ v = 10\ m/s$

حل التمـــارين

التمرين1:

1/ عمل القوة على المسار OAB :

$$\vec{F} = (2x+1).\vec{i} + 2y.\vec{j} \; ; \; A(2,0) \; ; \; B(2,4) \; ; \; O(0,0)$$

$$W = \vec{F}.(\vec{OA} + \vec{AB}) = \vec{F}.\vec{OA} + \vec{F}.\vec{AB} = 2(2x+1) + 8y$$

حيث:

$$\vec{OA} = 2.\vec{i} \; ; \quad \vec{AB} = 4.\vec{j}$$

$$\Rightarrow W = 2(2x+1) + 8y$$

2/ عمل القوة على المسار OCB :

$$W = \vec{F}.(\vec{OC} + \vec{CB}) = \vec{F}.\vec{OC} + \vec{F}.\vec{CB} = 2(2x+1) + 8y$$

حيث:

$$\vec{OC} = 4.\vec{j} \; ; \; \vec{CB} = 2.\vec{i}$$

$$\Rightarrow W = 2(2x+1) + 8y$$

3/ عمل القوة على المسار OB :

$$W = \vec{F}.\vec{OB} = 2(2x+1) + 8y$$

حيث:

$$\vec{OB} = 2.\vec{i} + 4.\vec{j}$$

$$\Rightarrow W = 2(2x+1) + 8y$$

نلاحظ أن العمل يحافظ على نفس القيمة لأن نقاط الإطلاق و الوصول نفسها رغم إختلاف الطريق , فهو لا يتعلق بالطريق المتبع.

التمرين2:

1/ عمل القوة على المسار AB :

$$\vec{F} = -x.y.\vec{i} + y^2.\vec{j} \; ; \; A(a,0,0) \; ; \; B(0,b,0)$$

$$W = \vec{F}.\vec{AB} = a.xy + b.y^2$$

حيث:

$$\vec{AB} = -a.\vec{i} + b.\vec{j}$$

$$\Rightarrow W = a.xy + b.y^2$$

2/ عمل القوة على المسار المغلق ABA :

$$W = \vec{F}.(\vec{AB} + \vec{BA}) = \vec{F}.\vec{0} = 0$$

حيث:

$$\vec{AB} = -a.\vec{i} + b.\vec{j} \; ; \; \vec{BA} = a.\vec{i} - b.\vec{j}$$

$$\Rightarrow W = 0$$

/3 عمل القوة على المسار المغلق ABA :

$$W = \vec{F}.(\vec{AB} + \vec{BO} + \vec{OA}) = \vec{F}.\vec{0} = 0$$

حيث:

$$\vec{AB} = -a.\vec{i} + b.\vec{j} \; ; \; \vec{BO} = -b.\vec{j} \; ; \; \vec{OA} = a.\vec{i}$$

$$\Rightarrow W = 0$$

نلاحظ أن عمل قوة على مسار مغلق مهما كان شكله أو طوله , يكون معدوما.

التمرين6:

/1 شعاع الموضع

$$\vec{OM} = \begin{vmatrix} x = 2a.\cos\omega t \\ y = a.\sin\omega t \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{x}{2} = a.\cos\omega t \\ y = a.\sin\omega t \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = a^2$$

مسار الحركة عبارة عن قطع ناقص أنصاف محوريه (2,1).

/2 الإحداثيات الكارتيزية لشعاع السرعة:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \dot{x} = -2a\omega.\sin\omega t \\ \dot{y} = a\omega.\cos\omega t \end{vmatrix}$$

الإحداثيات الكارتيزية لشعاع التسارع:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \ddot{x} = -2a\omega^2.\cos\omega t = -\omega^2.x \\ \ddot{y} = -a\omega^2.\sin\omega t = -\omega^2.y \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{a} = -\omega^2.\vec{OM} = \omega^2.\vec{MO}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = m.a = m\omega^2.\vec{MO}$$

نلاحظ أن القوة تتجه دائما نحو المركز O فهي قوة مركزية.

/3

$$E_c = \frac{1}{2}m.v^2 = \frac{1}{2}m.a^2.\omega^2.(4.\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)$$

$$= \frac{1}{2}m.a^2.\omega^2.(1 + 3.\sin^2\omega t) \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}m.a^2.\omega^2.(1 + 3.\sin^2\omega t)$$

القيمة العظمى للطاقة الحركية هي: حيث: $\sin\omega t = 1$

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2}m.a^2.\omega^2 4 = 2\,m.a^2.\omega^2 \Rightarrow E_{c_{max}} = 2\,m.a^2.\omega^2$$

4/ أ/

$$W = \int_{2a}^{a} \vec{F}.d\vec{r} = -m\omega^2.r.dr = -m\omega^2.\frac{r^2}{2}\Big|_{2a}^{a} = -m\omega^2.(\frac{a^2}{2} - 4.\frac{a^2}{2})$$

$$= -m\omega^2.(\frac{a^2}{2} - 2a^2) = \frac{3}{2}m\omega^2.a^2 \Rightarrow W = \frac{3}{2}m\omega^2.a^2$$

ب/ نعلم أن:

$$E_c = \frac{1}{2}m.a^2.\omega^2.(1 + 3.\sin^2\omega t)$$

الطاقة الحركية عند A :

$$A(2a, 0) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \sin\omega t = 0 \Rightarrow E_{c_A} = \frac{1}{2}m.a^2.\omega^2$$

الطاقة الحركية عند B :

$$B(0, a) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \cos\omega t = 0 \Rightarrow \sin\omega t = 1 \Rightarrow E_{c_B} = 2m.a^2.\omega^2$$

و منه نطبق نظرية الطاقة الحركية عند النقطتين A, B :

$$E_{c_B} - E_{c_A} = W \Rightarrow W = 2m.a^2.\omega^2 - \frac{1}{2}m.a^2.\omega^2 = \frac{3}{2}m\omega^2.a^2$$

و منه نحصل على نفس القيمة للعمل بطريقتين.

$$\Rightarrow W = \frac{3}{2}m\omega^2.a^2$$

5/ نعلم أن:

$$\vec{F} = m\omega^2.\overrightarrow{OM} = m\omega^2.(2a.\cos\omega t.\vec{i} + a.\sin\omega t.\vec{j})$$

$$\vec{v} = -2a\omega.\sin\omega t.\vec{i} + a\omega.\cos\omega t.\vec{j} = a\omega.(-2\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j})$$

و منه الإستطاعة اللحظية:

$$P = \vec{F}.\vec{v} = -ma^2\omega^3.(2\cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j})(-2\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j})$$

$$P = ma^2\omega^3.(-4\cos\omega t.\sin\omega t + \cos\omega t.\sin\omega t) = 3ma^2\omega^3.\cos\omega t.\sin\omega t$$

$$\Rightarrow P = 3ma^2\omega^3.\cos\omega t.\sin\omega t$$

العمل عندما تقوم النقطة المادية بدورة كاملة:

حيث: $\theta = \omega t$

$$W = \int P.dt = 3ma^2\omega^3.\int \cos\omega t.\sin\omega t\,dt = 3ma^2\omega^2.\int \cos\theta.\sin\theta.d\theta =$$

$$= 3ma^2\omega^2.\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0 \Rightarrow W = 0$$

العمل معدوم في دائرة و منه القوة F محفوظة.

6/ الطاقة الكامنة:

$$E_p = \frac{1}{2} m.\omega^2.r^2$$

حيث:

$$r^2 = OM^2 = a^2.(4\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = a^2.(3\cos^2\omega t + 1)$$

$$E_p = \frac{1}{2} m.\omega^2 a^2.(3\cos^2\omega t + 1)$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m.a^2.\omega^2.(1 + 3.\sin^2\omega t) + \frac{1}{2} m.a^2.\omega^2.(1 + 3.\cos^2\omega t) + cste$$

$$= \frac{5}{2} m\omega^2.a^2 + cste \Rightarrow E_m = \frac{5}{2} m\omega^2.a^2 + cste$$

فهي طاقة ميكانيكية ثابتة لا تتعلق بالزمن ⇦ الجملة محفوظة (معزولة ميكانيكيا).