جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

دروس عبر الخط:

الإحصاء 2

المستوى السنة الأولى ليسانس ميدان علوم اقتصادية

من إعداد: د/ لطفي مخزومي

السنة الجامعية 2021/2020

الفصل التمهيدي: التحليل التوفيقي

تمهيد:

يهتم التحليل التوفيقي بإعطاء عدد الطرق الممكنة للمجموعات ضمن شروط معينة من خلال بعض القواعد الرياضية التي تعمل على تبسيط واستنباط طرق أكثر فعالية لحساب عدد الحالات المواتية (الملائمة) وعدد الحالات الممكنة المرتبطة بتجربة ما، لهذا تتجلى ضرورة عرض تلك القواعد الرياضية للاستفادة منها في دراسة الاحتمالات وقوانينها، وعليه سنتناول في هذا الاطار العناصر التالية:

- التباديل.
- التراتيب.
- التوافيق.

1- المبدأ الأساسي في العد:

يعتمد هذا المبدأ على أنه اذا أمكن القيام بعمل ما بـ $\mathbf{n_1}$ طريقة مختلفة، وأمكن القيام بعمل آخر بـ $\mathbf{n_2}$ طريقة مختلفة، فانه يمكن القيام بالعمليتين معا في آن واحد بعدد من الطرق يساوي لـ($\mathbf{n_1 . n_2}$) طريقة مختلفة، ويمكن تعميم هذا المبدأ على أكثر من عاملين أي : $\mathbf{n_k} \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \mathbf{n_3} . \mathbf{n_1 . n_2}$.

مثال:

في مسابقة للتوظيف تقدم 03 مترشحين لمنصب مهندس دولة في الاعلام الآلي، 04 مترشحين لمنصب متصرف اداري، و5 مترشحين لمنصب مساعد اداري، علما أن عدد المناصب المفتوحة في كل تخصص هو منصب واحد، فما هو عدد الطرق الممكنة للتوظيف في هذه المناصب معا؟

لدينا:

$\mathbf{n_1 = 3}$: اي 03 طرق ممكنة للتوظيف في منصب مهندس دولة في الاعلام الآلي.

$\mathbf{n_2 = 4}$: اي 04 طرق ممكنة للتوظيف في منصب متصرف اداري.

$\mathbf{n_3 = 5}$: أي 05 طرق ممكنة للتوظيف في منصب مساعد اداري.

ومنه فعدد الطرق الممكنة للتوظيف في هذه المناصب معا هو: طريقة $\mathbf{n_1 . n_2 . n_3 = 3 * 4 * 5 = 60}$

2- التباديل:

أ- تباديل دون تكرار:

ان تبديلة مجموعة ما عدد عناصرها $\mathbf{n}$ هي جملة المجموعات الممكن تشكيلها من المجموعة نفسها، والتي تختلف عن بعضها البعض باختلاف ترتيب أحد هذه العناصر على الأقل. والتي يمكن التعبير عليها بمفهوم العاملي كما يلي :

$$\mathbf{P_n = n!}$$

مثال: ما هو عدد الطرق الممكنة التي يمكن بها وضع 5 كتب في رف المكتبة.

لدينا: $\mathbf{n = 5}$ اذن: طريقة $\mathbf{P_5 = 5! = 120}$

ب- تباديل مع التكرار:

يطلب في بعض الأحيان معرفة عدد تباديل مجموعة من العناصر يكون بعضها متماثلا (مكررا)، وفي هذه الحالة فان عدد التباديل المختلفة لـ $\mathbf{n}$ عنصر مختلف منها $\mathbf{n_1}$ عنصر من عناصر الصنف الأول و$\mathbf{n_2}$ من الصنف الثاني و.....$\mathbf{n_k}$ من الصنف الأخير هو :

$$\mathbf{P_n^{n_1,n_2,n_3,.....n_k} = \frac{n!}{n_1!.\, n_2!.\, n_3! \dots \dots \dots \dots n_k!}}$$

مثال:

ما هو عدد التباديل المختلفة التي يمكن تشكيلها من 6 أرقام حيث نأخذ العدد 1 مرتين، 2 ثلاث مرات، 3 مرة واحدة.

لدينا: $\mathbf{n = 6}$ و $\mathbf{n_1 = 2;\ n_2 = 3;\ n_3 = 1}$ ومنه:

$$\mathbf{P_n^{2,3,1} = \frac{6!}{2!.\, 3!.\, 1!} = 60}$$

ج- التباديل الدائرية:

اذا كنا بصدد تباديل عناصر مجموعة ما في وضعية دائرية فان عدد الطرق الممكنة لذلك هو:

$$\mathbf{P_n = (n-1)!}$$

مثال:

بكم طريقة يمكن لأربعة أشخاص الجلوس حول طاولة مستديرة لعقد اجتماع؟

$$\mathbf{P_4 = (4-1)! = 6}$$

3- التراتيب:

أ- تراتيب دون اعادة:

ان عملية سحب $\mathbf{k}$ عنصر مختلف دون اعادة من مجوعة مكونة من $\mathbf{n}$ عنصر مختلف يسمى ترتيبة دون اعادة (دون تكرار) اذا تميزت كل مجموعة عن الاخرى سواء بحسب طبيعة العناصر التي تتكون منه أو بحسب ترتيبها داخل المجموعة الجزئية أو بكليهما وتحسب عدد الطرق الممكنة كما يلي:

$$\mathbf{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

مثال:

ما هو عدد الكلمات الثنائية (مكونة من حرفين) الممكن تشكيلها من أحرف الاسم (زهير)، اذا كان لنا أن نستخدم الحرف مرة واحدة فقط.

$$\mathbf{A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12}$$

ب- التراتيب مع الاعادة:

ان السحب دون اعادة يسمح لنا بانتقاء العنصر الواحد من المجموعة الكلية أكثر من مرة، وفي هذه الحالة فان عد الطرق الممكنة لتشكيل $\mathbf{k}$ عنصر مختلف مع اعادة من مجوعة مكونة من $\mathbf{n}$ عنصر مختلف تحسب كما يلي:

$$\mathbf{A_n^k = n^k}$$

مثال:

قام ثلاثة أشخاص برمي 3 قطع نرد، ما هو عدد النتائج الممكنة؟ ما هو عدد النتائج التي تكون فيها النقاط على الأوجه مغايرة.

- عدد النتائج الممكنة يساوي عدد التراتيب مع الاعادة لثلاثة أوجه مختارة من بين 6 أوجه:

$$\mathbf{A_6^3 = 6^3 = 216}\text{نتيجة}$$

- عدد النتائج التي تكون بها النقاط على الأوجه مغايرة كلية تساوي عدد التراتيب دون اعادة:

$$\mathbf{A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 120}\text{ نتيجة}$$

4- التوافيق:

اذا كان ترتيب العناصر داخل المجموعة الجزئية المسحوبة من المجموعة الكلية غير مهم في عملية الاختيار، وانصب الاهتمام فقط على العناصر المكونة للمجموعة الجزئية، فإننا نكون بصدد ما يسمى بالتوفيقات.

أ- التوافيق دون اعادة:

اذا كان لدينا مجموعة من $\mathbf{n}$ عنصر مختلف وأردنا تشكيل جميع المجموعات الجزئية الممكنة والتي تتكون كل منها من $\mathbf{k}$ عنصر مختلف حيث أن: $\mathbf{n, k \in N^+,\ \ k \leq n}$.

فان المجموعات المحصلة تدعى بمتوافقات $\mathbf{k}$ لـ $\mathbf{n}$ عنصر مختلف اذا تميزت كل مجموعة عن الآخريات بحسب طبيعة العناصر التي تتكون منها فقط دون النظر الى ترتيبها ضمن المجموعة وتحسب عدد الطرق الممكنة في هذه الحالة بالطريقة التالية:

$$\mathbf{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

مثال:

يتكون أحد الأقسام بكلية الاقتصاد من 20 طالب وتود الادارة تكوين عدد من المجموعات من 5 طلاب لزيارة أحد المؤسسات الاقتصادية، فبكم طريقة يمكن للادارة تكوين هذه المجموعات.

نلاحظ أن الطالب له الحق في زيارة واحدة فقط، بمعنى أن الترتيب داخل المجموعة غير مهم ولكن المهم هو اختلاف كل مجموعة عن الأخرى بحسب طبيعة العناصر وبالتالي فنحن أمام توفيقة.

$$\mathbf{C_{20}^{5}} = \frac{\mathbf{20!}}{\mathbf{5!\,(20-5)!}} = \mathbf{15504}$$ طريقة

ب- التوافيق مع الاعادة:

في حالة تكرار العنصر نفسه في المجموعة فان عدد المتوافقات الممكن تشكيلها لـ $\mathbf{k}$ عنصر من $\mathbf{n}$ عنصر مختلف يمكن حسابها كما يلي:

$$\mathbf{K_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}}$$

مثال:

ما هو عدد العينات المكونة من ثلاث طلبة والتي يمكن سحبها مع الاعادة من مجموعة من الطلاب تضم 6 طلبة.

$$\mathbf{K_6^3 = C_{6+3-1}^3 = \frac{(6+3-1)!}{3!\,(6-1)!} = 56}$$

الفصل الثاني: مدخل للاحتمالات

تمهيد:

سنحاول من خلال هذا الفصل التطرق والتعريف بأهم المصطلحات المرتبطة بالاحتمالات والتجارب العشوائية، بالإضافة الى دراسة المفهوم التقليدي للاحتمال ومختلف العمليات والقواعد المرتبطة بنظرية الاحتمالات.

1ـ التجربة العشوائية أو الاحتمالية:

هي كل تجربة يمكن تكرارها أو تكون قابلة للتكرار(المشاهدة) عددا من المرات، وتكون نتائجها غير محددة سلفا لكونها تعتمد على الصدفة أو العشوائية .ومن أمثلة التجارب العشوائية:

- رمي قطعة نقد في الهواء مرة واحدة أو عدة مرات وملاحظة الوجه الذي سيظهر(الشعار أو القيمة).
- رمي قطعة نرد في الهواء مرة واحدة أو عدة مرات وملاحظة الرقم الذي سيظهر من بين الاوجه الستة.

2ـ فراغ امكانات التجربة:

تعتبر مجموعة النتائج الممكنة لأي تجربة عشوائيةE فراغ امكانات التجربة (مجموعة الأساس)، ونرمز له عادة في شكل مجموعة كما يلي:{... ...}=E، ويكون فراغ امكانات التجربة منته اذا كان عدد امكانات التجربة محدود .

مثال01: عند رمي قطعة نقد مرة واحدة فان فراغ امكانات التجربة هو:$\mathbf{E = \{P, F\}}$

حيث: **P** : القيمة ، **F** : الشعار.

مثال02: عند رمي قطعة نرد مرة واحدة فان فراغ امكانات التجربة هو:$\mathbf{E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$.

3ـ الحادث وأنواعه:

في أي تجربة عشوائية يسمى الاهتمام بتحقق نتيجة معينة أو عدة نتائج محددة من بين كل النتائج الممكنة حدثا عشوائيا ، فان تحققت هذه النتيجة يكون نجاحا، واذا لم تتحقق يكون فشلا ، ويرمز له بالرمز: $\mathbf{A = \{...\}}$ ، ويمكن أن نميز بيم الأنواع التالية من الحوادث :

3- 1- الحادث البسيط(الابتدائي):

نقول عن الحادث $\mathbf{A_i}$ أنه حادث بسيط اذا كان غير قابل للتجزئة أو هو مجموعة جزئية تحتوي على نتيجة واحدة أو ذات امكانية وحيدة، فظهور العدد5 عند رمي قطعة نرد هو حادث بسيط ونكتب $\mathbf{A} = \{5\}$

3- 2- الحادث المركب:

نقول عن الحادث $\mathbf{A_i}$ أنه حادث مركب اذا أمكن تفكيكه الى حوادث بسيطة، فمثلا اذا كان الحادث هو الحصول على رقم زوجي عند رمي قطعة نرد، فنكون بصدد حادث مركب من ثلاث حوادث بسيطة كما يلي:

$$\mathbf{A_i} = \{2, 4, 6\}$$

3- 3- الحادث الأكيد:

وهو الحادث الذي يجب أن يتحقق نتيجة القيام بتجربة عشوائية، وبالتالي فهو حادث يحوي جميع الحوادث البسيطة المرتبطة بهذه التجربة، فمثلا حصولنا على رقم أصغر أو يساوي 6 عند رمي قطعة نرد مرة واحدة هو حادث أكيد في كل تجربة عشوائية ونكتب $\mathbf{A_i} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3- 4- الحادث المستحيل:

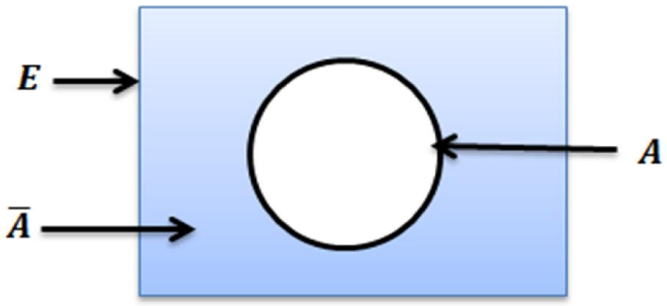
وهو الحادث الذي لايمكن أن يتحقق أبدا نتيجة التجربة العشوائية، وبالتالي فهو حادث لا يتضمن حادث أولي مرتبط بهذه التجربة ونرمز له بالرمز: ϕ(المجموعة الخالية)، فمثلا حصولنا على الرقم 9 عند رمي قطعة نرد هو حادث مستحيل ونكتب $\mathbf{A} = \phi$.

3- 5- الحادث المتمم (المعاكس):

نقول أنه لكل حادث $\mathbf{A}$ مرتبط بتجربة عشوائية $\mathbf{E}$ متمم يتكون من مجموعة الامكانات غير المحققة لـ $\mathbf{A}$ والمرتبطة بالتجربة $\mathbf{E}$، هذا الحادث الجديد نرمز له بالرمز: $\overline{\mathbf{A}}$ أو $\mathbf{C_A}$

أي: $\mathbf{C_A} = \overline{\mathbf{A}} = \{\mathbf{a_i} \in \mathbf{E};\ \mathbf{a_i} \notin \mathbf{A}\}$.

ويمكن التعبير عن الحادث المتمم عن طريق الشكل التالي:



وانطلاقا من تعريف الحادث المتمم يمكن استنتاج العلاقات التالية:

$$\mathbf{A \cap \bar{A} = \phi A \cup \bar{A} = E \bar{A} \cap E = \bar{A}\bar{A} \cup E = E}$$

قانوني ديمورقان : $\mathbf{\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}}$, $\mathbf{\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}}$.

3- 6- الحوادث المتنافية:

الحوادث المتنافية هي تلك الحوادث التي لا تقع في آن واحد، بحيث وقوع أحدها ينفي ويمنع وقوع الآخر، فمثلا عند القاء قطعة نقد فان ظهور القيمة يمنع ظهور الشعار والعكس صحيح أي: $\mathbf{P \cap F = \phi}$، وعلى هذا الأساس فان كل الحوادث البسيطة لأي تجربة عشوائية متنافية مثنى مثنى أي أن:

$$\mathbf{\forall i \neq j \; ; \; A_i \cap A_j = \phi}$$

3- 7- الحوادث المستقلة وغير المستقلة والشرطية:

نقول أن الحوادث مستقلة اذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر ولا يتأثر بوقوع الحادث الآخر، فمثلا عند رمي قطعة نقد مرتين فان نتيجة الرمية الأولى لا تتأثر ولا تؤثر في نتيجة الرمية الثانية وبالتالي فنحن أمام حادثين مستقلين. ونقول أن الحوادث غير مستقلة اذا كان وقوع أحدهما يؤثر بوقوع حادث آخر، أما اذا كان حادث مرتبط بتحقق أو عدم تحقق حدوث حادث آخر نقول أن هذا الأخير هو حادث شرطي ونسمي هذا النوع بالحوادث الشرطية .

3- 8- الحوادث الملائمة والممكنة:

تمثل الحوادث الملائمة النتائج أو الحالات التي تؤدي الى تحقيق الحادث الذي هو موضع اهتمامنا عند القيام بتجربة ما، أما الحوادث الممكنة فهي تمثل كل الحالات أو النتائج التي يمكن أن تظهر نتيجة القيام بتجربة معينة.

4. المدخل التقليدي لتعريف الاحتمال:

بافتراض أن الحادث $\mathbf{A}$ هو الحادث المرغوب(الملائم) والمرتبط بتجربة عشوائية $\mathbf{E}$ والذي يمكن أن يحدث بـ$\mathbf{m}$ طريقة والتي تمثل عدد الحالات الملائمة للحادث $\mathbf{A}$، وكانت $\mathbf{n}$ تمثل جميع الحالات الممكنة (بفرض أن كل الحالات لها نفس فرصة الوقوع) فان احتمال تحقق الحادث $\mathbf{A}$ والذي نرمز له بالرمز: $\mathbf{P(A)}$ يساوي $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$.

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة للحادث } \mathbf{A}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} \text{ أي:}$$

$$\mathbf{1 \leq m \leq n} \quad \text{حيث:}$$

وعلى العموم اذا كانت $\mathbf{E}$ تجربة عشوائية حوادثها البسيطة متكافئة وعددها $\mathbf{n}$ وكان $\mathbf{A}$ حادثا جزئيا أو مجموعة جزئية مرتبطة بهذه التجربة فإننا نعرف احتمال وقوع الحادث $\mathbf{A}$ بالعلاقة: $\mathbf{P(A)} = \frac{\text{عدد عناصر } \mathbf{A}}{\text{عدد عناصر } \mathbf{E}} = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{E}|}$.

حيث: $|\mathbf{A}|$ أصلي المجموعة $\mathbf{A}$ ، $|\mathbf{E}|$ أصلي المجموعة $\mathbf{E}$

مثال01: نرمي قطعة نرد مرة واحدة وبطريقة عشوائية، ما هو احتمال ظهور عدد زوجي؟

الاجابة:

لدينا :- فراغ امكانات التجربة (مجموعة الأساس) هو: $\mathbf{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- نعرف الحادث $\mathbf{A}$ ظهور العدد الزوجي $\mathbf{A} = \{2, 4, 6\}$

$$\mathbf{P(A)} = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{E}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

مثال02: ليكن لدينا 10طلبة منهم7اناث، واردنا اختيار فوج من 6طلبة للمشاركة فى احدى المسابقات، أحسب احتمال أن يكون ضمن الفوج أربعة طلبة اناث فقط.

الاجابة:

نرمز لحادث الحصول على أربعة اناث بـ: $\mathbf{A}$

- عدد الحالات الممكنة (عدد الطرق الممكنة لتشكيل فوج من 6طلبة من بين 10طلبة) تساوي: $\mathbf{C_{10}^6}$.

- عدد الحالات الملائمة(يكون ضمن الفوج المختار4 طلبة اناث) تساوي: $\mathbf{C_7^4 \times C_3^2}$.

وعليه:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ A}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{C_7^4 \times C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

5ـ خواص الاحتمال التقليدي:

1- الاحتمال قيمة عددية موجبة دوما أي: $\mathbf{1 \geq P(A) \geq 0}$

2- اذا كان $\mathbf{A}$ حادثا عشوائيا أكيدا أي عدد عناصر $\mathbf{A}$ يساوي عدد عناصر $\mathbf{E}$ فان احتمال تحققه يساوي الواحد

أي: $$\mathbf{P(A) = \frac{|A|}{|E|} = 1}$$

3- اذا كان $\mathbf{A}$ حادثا مستحيلا، أي عدد عناصر $\mathbf{A}$ هي المجموعة الخالية، فان احتمال تحققه يساوي الصفر أي:

$$\mathbf{P(A) = \frac{\phi}{|E|} = \frac{0}{|E|} = 0}$$

4- الحادث المتمم للحادث $\mathbf{A}$ هو $\overline{\mathbf{A}}$ ويرمز لاحتمال تحققه بـ $\mathbf{P(\overline{A})}$ وبما أن: $\mathbf{A \cup \overline{A} = E}$ يشكل حادثا أكيدا، والحادثان متنافيان فان: $\mathbf{P(A) + P(\overline{A}) = P(A \cup \overline{A}) = P(E) = 1}$

ومنه:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

6ـ القوانين الأساسية في نظرية الاحتمالات:

جمع الاحتمالات: نميز في قاعدة جمع الاحتمالات بين الحوادث المتنافية وغير المتنافية.

1- الحوادث المتنافية: اذا كان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ حادثان متنافين، فان تحقق اجتماعهما يساوي مجموع احتمالهما أي أن:

$$P\left(A \text{ أو } B\right) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: لنفرض أن لدينا صندوق به 5 كرات، 2 بيضاء و 1سوداء، 2 حمراء، وسحبنا كرة واحدة، فما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء أو سوداء.

الاجابة:- احتمال الحصول على كرة بيضاء هو $\mathbf{P(B)}$ ويساوي: $\mathbf{P(B) = \frac{2}{5}}$.

- احتمال الحصول على كرة سوداء هو $\mathbf{P(N)}$ ويساوي : $\mathbf{P(N) = \frac{1}{5}}$.
- واحتمال الحصول على كرة بيضاء أو سوداء هو $\mathbf{P(B \cup N)}$ ويساوي:

$$\mathbf{P(B \cup N) = P(B) + P(N) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}}$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة على $\mathbf{A_i}$ حادثا متنافيا حيث$(\mathbf{i \in 1 \dots \dots \dots . n})$

$$\mathbf{P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \dots \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots \dots \dots \dots . P(A_n)}$$

$$P(U_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

2- **الحوادث غير المتنافية:** اذا كان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ حدثين غير متنافيين (وقوع احدهما لا ينفي ولا يمنع وقوع الآخر)، فان احتمال وقوع أحدهما هو عبارة عن حاصل جمع احتمال وقوع كل منهما مع ابعاد احتمال وقوعهما معا في آن واحد أي أن:

$$P\left(A \text{ أو } B\right) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال: نلقي قطعة نرد مرة واحدة، ما هو احتمال الحصول على رقم يكون فردي أو يقبل القسمة على العدد3.

نضع:- الحادث $\mathbf{A}$ الحصول على عدد فردي حيث: $\mathbf{A = \{1, 3, 5\}}$.

- الحادث $\mathbf{B}$ الحصول على عدد يقبل القسمة على 3 حيث: $\mathbf{B = \{3, 6\}}$.

نلاحظ أن وقوع الحادث $\mathbf{A}$ لا ينفي ويمنع وقوع الحادث $\mathbf{B}$ وبالتالي فهما حادثين غير متنافيين.

اذن:

$$\mathbf{P(A) = \frac{3}{6}}\ , \qquad \mathbf{P(B) = \frac{2}{6}}\ , \mathbf{P(A \cap B) = \frac{1}{6}}$$

ومنه: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

ويمكن تعميم صيغة الجمع في حالة ثلاث أحداث غير متنافية كما يلي:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + (C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ضرب الاحتمالات: نميز في قاعدة الضرب بين الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.

- **الاحتمال الشرطي:** نستخدم في نظرية الاحتمالات الرمز $\mathbf{P(A / B)}$ الذي يقرأ احتمال تحقق الحادث **A** شرط تحقق الحادث **B** بصورة مسبقة، أو احتمال تحقق الحادث **A** علما ان الحادث **B** قد تحقق.

❖ اذا كان **A** و**B** مستقلين فان: $\mathbf{P(A / B) = P(A)\ ,\ P(B / A) = P(B)}$.

❖ اذا كان **A** و**B** غير مستقلين فان: $\mathbf{P(A / B) \neq P(A)\ ,\ P(B / A) \neq P(B)}$.

1- الحوادث المستقلة: ان احتمال وقوع حادثين مستقلين أو أكثر معا في آن واحد يساوي حاصل ضرب وقوع كل منهما ونعبر عنه بالعلاقة:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ويمكن تعميم مفهوم الاستقلالية على أكثر من حادثين شريطة أن يكون استقلالها محقق مثنى مثنى وعندها يكون:

$$\mathbf{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots\dots\dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots\dots\dots \times P(A_n)}$$

2- الحوادث غير المستقلة: اذا كان لدينا الحادثان **A** و**B** وكان وقوع **B** مشروطا بوقوع **A** فان احتمال وقوعهما معا يساوي جداء احتمال وقوع الأول باحتمال وقوع الثاني بعد وقوع الأول أي:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B / A) \quad \text{أو} \quad P(A \cap B) = P(B) \times P(A / B)$$

فاذا كان $\mathbf{P(B) \neq 0}$ فان الاحتمال الشرطي لوقوع الحادث **A** بعد معرفة وقوع الحادث **B** يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

واذا كان $P(A) \neq 0$ فان الاحتمال الشرطي لوقوع الحادث B بعد معرفة وقوع الحادث A يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

خواص الاحتمال الشرطي:

1- $P(E/A) = 1$، حيث: $P(E/A) = \frac{P(E \cap A)}{(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

2- $P(A/A) = 1$، حيث: $P(A/A) = \frac{P(A \cap A)}{(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

3- اذا كان A وB حادثان متنافيان أي $(A \cap B \neq \phi)$فان:

$$P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C)$$

حيث:

$$P(A \cup B/C) = \frac{P[(A \cup) \cap C]}{P(C)} = \frac{P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]}{P(C)}$$

وبما أن:$(B \cap C)$و$(A \cap C)$ هما حدثان متنافيان فان:

$$P(A \cup B/C) = \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$$

$$= P(A/C) + P(B/C)$$

مثال: نرمي قطعتي نرد مرة واحدة وبطريقة عشوائية ، ونعرف الحدثين العشوائيين التاليين:A مجموع النتيجتين الظاهرتين يساوي6 ، B احدى النتيجتين على الأقل هي رقم2.

المطلوب: أحسب $\mathbf{P(A)}$, $\mathbf{P(B)}$.

- اذا كان المجموع فعلا هو6 فما هو احتمال أن تكون احدى النتيجتين على الأقل هي رقم 2.
- اذا كانت احدى النتيجتين على الأقل فعلا هي رقم 2 فما هو احتمال أن يكون المجموع 6.

الاجابة:

لدينا فراغ امكانات التجربة(مجموعة الأساس) كالتالي:

$$\mathbf{|E| = 6^2 = 36, E = \{(1,1).(1,2).(1,3) \dots \dots \dots \dots \dots \dots (6,5).(6,6)\}}$$

حساب $\mathbf{P(A)}$:

$$\mathbf{A = \{(1,5).(5,1).(2,4).(4,2).(3,3)\}\ ,\quad |A| = 5}$$

ومنه:

$$\mathbf{P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{5}{36} = 0.138}$$

حساب $\mathbf{P(B)}$:

$$\mathbf{B = \{(1,2)(2,1)(2,2)(2,3)(3,2)(2,4)(4,2)(2,5)(5,2)(2,6)(6,2)\}\ , |B| = 11}$$

ومنه:

$$\mathbf{P(B) = \frac{|B|}{|E|} = \frac{11}{36} = 0.305}$$

- اذا كان المجموع فعلا هو 6 فاحتمال أن تكون احدى النتيجتين على الاقل رقم 2 معناه احتمال تحقق الحادث$\mathbf{B}$ علما أن الحادث $\mathbf{A}$ قد تحقق فعلا أي حساب: $\mathbf{P(B\ /\ A)}$.

لدينا: $\mathbf{P(B\ /\ A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$

و: $\mathbf{(A \cap B) = \{(2,4).(4,2)\}, |A \cap B| = 2}$

$$\mathbf{P(A \cap B) = \frac{2}{36} = 0.055}$$

ومنه: $\mathbf{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.055}{0.138} = 0.398}$

- اذا كانت احدى النتيجتين على الاقل هي فعلا2 فان احتمال أن يكون المجموع6 معناه احتمال وقوع الحادث**A** علما أن الحادث **B** قد تحقق فعلا أي حساب: $\mathbf{P(A / B)}$.

$$\mathbf{P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.055}{0.305} = 0.180}$$

7- الاحتمال الكلي:

في حالات كثيرة قد يكون وقوع حادث ما**A** مرتبطا بتجربة عشوائية **E**، لا يتحقق الا بتحقق احد الحوادث المتنافية$\mathbf{B_n}$ . . . . $\mathbf{B_1, B_2,}$ والتي تشكل تجزئة لمجموعة كلية أخرىΩ.

ولنفرض أنه لدينا ثلاثة حوادث متنافية:$\mathbf{B_1, B_2, B_3}$ تشكل مجموعة كلية مأخوذة من مجموعة الأساس، وكان الحادث**A** ضمن مجموعة الأساس والذي لا يتحقق الا بتحقق أحد الحوادث الجزئية الثلاثة.

نلاحظ أن الحوادث $\mathbf{A \cap B_i}$ حوادث متنافية مثنى مثنى حيث: $\mathbf{i = 1, 2, 3}$ وحسب قاعدة جمع الاحتمالات نجد أن :

$$P(A) = P(A \cap B_1) \cup P(A \cap B_2) \cup P(A \cap B_3)$$

وبما أن الحوادث متنافية مثنى مثنى فان:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A \cap B_i)$$

وباستخدام قاعدة ضرب الاحتمالات على المقدار$\mathbf{P(A \cap B_i)}$نجد:

$$P(A) = P(B_1)P(A / B_1) + P(B_2)P(A / B_2) + P(B_3)P(A / B_3)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A / B_i)$$

ومنه فان صيغة الاحتمال الكلي تعطى بالعلاقة التالية:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)$$

مثال: لدينا اربعة صناديق متماثلة الاول والثاني بهما 3 كرات شوداء، 4 كرات بيضاء، الثالث به 9 كرات سوداء و5 كرات بيضاء، الرابع به كرة سوداء و6 كرات بيضاء. نسحب صندوق عشوائيا ثم نسحب منه كرة دون تحيز، أحسب احتمال أن تكون هذه الكرة سوداء.

الاجابة:لنرمز بـ: $\mathbf{B_i}$ لحادث سحب الصندوق $\mathbf{i}$ حيث: $\mathbf{i = 1, 2, 3, 4}$ و $\mathbf{A}$ لحادث الكرة المسحوبة سوداء.

ومنه فان: $P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i) \, . \, P(A \, / \, B_i)$

$$P(A) = P(B_1)P(A \, / \, B_1) + P(B_2)P(A \, / \, B_2) + P(B_3)P(A \, / \, B_3) + P(B_4)P(A \, / \, B_4)$$

$$P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{14} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{23}{56}$$

8ـ نظرية بايز:

تحتل نظرية بايز مكانا هاما في مفهوم الاحتمالات وهي تعتمد على مختلف القوانين السابقة، وهي تعالج كيفية حساب الاحتمالات الشرطية لحوادث متنافية تشكل مجموعة كلية ومرافقة لحادث $\mathbf{A}$.

لنفرض أن لدينا مجموعة الحوادث المتنافية $\mathbf{B_1, B_2, \dots \dots \dots, B_n}$، و$\mathbf{A}$ حادث ما يمكن أن يتحقق فقط بتحقق احدى الحوادث $(\mathbf{B_1, B_2, \dots \dots \dots, B_n})$ ونريد ان نحسب الاحتمالات الشرطية $\mathbf{P(B_i \, / \, A)}$، علما أن الاحتمالات $\mathbf{P(B_i)}$ معلومة.لدينا حسب قاعدة ضرب الحوادث غير المستقلة:

$$P(A \cap B_i) = P(A).P(B_i \, / \, A) = \; P(B_i)P(A \, / \, B_i)$$

أي أن: $P(A).P(B_i \, / \, A) = \; P(B_i)P(A \, / \, B_i) \dots \dots \dots 1$

بقسمة طرفي المعادلة 1 على $\mathbf{P(A)}$ علما أن $\mathbf{P(A) > 0}$ نجد: $\mathbf{P(B_i \, / \, A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)}}$وبما ان الحوادث $\mathbf{B_1, B_2, \dots \dots \dots, B_n}$ تحقق شروط الاحتمال الكلي فان:/ $\mathbf{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \, . \, P(A \, / \, B_i)}$

وبالتعويض ينتج لدينا: (علاقة بايز)

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A/B_i)}$$

مثال: قسم سكان أحد الأحياء الى ثلاث مجموعات بنسب 32٪، 42٪، 26٪، وأظهرت هذه النتائج رأيها بخصوص مشروع معين، فكان الموافقون على المشروع في كل مجموعة على الترتيب كما يلي: 85٪، 25٪، 60٪، سحبنا شخص من سكان الحي وسأل عن رأيه فكان موافقا على المشروع، فما هو احتمال أن يكون من المجموعة الثانية.

الاجابة: نعرف الأحداث التالية: **A** سحب شخص موافق على المشروع، $\mathbf{B_i}$ سحب شخص من المجموعة **i**.

- احتمال سحب شخص موافق على المشروع $\mathbf{P(A)}$:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) \, . \, P(A / B_i) = 0.32 \times 0.85 + 0.42 \times 0.25 + 0.26 \times 0.6$$
$$= 0.533$$

- احتمال أن يكون الشخص الموافق على المشروع من المجموعة الثانية $\mathbf{P(B_2 / A)}$:

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2). P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{0.42 \times 0.25}{0.533} = 0.19$$

الفصل الثالث: المتغيرات العشوائية

تمهيد:

ان نتائج جميع التجارب العشوائية تكون غير معروفة مسبقا الا أنها لا تخرج عن مجال معين من القيم، هذه النتائج تختلف باختلاف التجربة وبعدد مرات تكرارها.

فقد تكون نتائج التجربة نتائج كمية، مثلا عند القاء قطعة نرد مرة واحدة ونهتم بالرقم الظاهر على سطحها العلوي، فان النتيجة تكون كمية عددية ممثلة بأحد الارقام:1،2،3،4،5،6.

وقد تكون نتائج التجربة نتائج نوعية، فمثلا عند القاء قطعة نقدية مرة واحدة ونهتم بالنتيجة الظاهرة، هذه النتيجة قد تكون صورة أو كتابة، ونستطيع القول أن حصولنا على الصورة يمثل نجاحا يعبر عنه بالقيمة1، أما حصولنا على الكتابة يمثل فشلا ويعبر عنه بالقيمة 0

1ـ مفهوم المتغيرات العشوائية:

ان المتغير العشوائي**X** هو مجموعة مقادير أو قيم لنتائج تجربة عشوائية يكون تحققها مقترنا باحتمالات معينة.

المتغير العشوائي **X** هو دالة ذات قيم عددية معرفة على فضاء العينة (مجموعة الأساس)، أي أنه تطبيق مجاله فضاء العينة وقيمه هو مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية .

يرمز بالرمز **X** للدلالة على المتغير العشوائي، وبالرمز**x** للدلالة على القيمة العددية التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي.

مثال: عند رمي قطعة نقدية مرتين، ونعرف المتغير العشوائي **X** بأنه عدد الصور الظاهرة، وبالتالي يمكن التعبير عن قيم المتغير العشوائي من خلال الجدول التالي:

فراغ العينة	عدد الصور الظاهرة (**X**)
(ص ص) (FF)	2
(ك ك) (PP)	0
(ك ص) (FP)	1
(ص ك) (PF)	1

ومنه فالقيم التي يأخذها المتغير العشوائي $\mathbf{X}$ هي:$\{\mathbf{0, 1, 2}\}$.

اما احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي فهو بالشكل: $\mathbf{P(X = x_i)}$

$$P(X = 0) = P(PP) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = P(PF) + P(FP) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P(FF) = \frac{1}{4}$$

2- انواع المتغيرات العشوائية:

حسب طبيعة الظاهرة المدروسة يمكن تصنيف المتغيرات العشوائية الى نوعين :

- متغيرات عشوائية متقطعة(منفصلة).
- متغيرات عشوائية مستمرة (متصلة).

2- 1- المتغيرة العشوائية المتقطعة:

وهي المتغيرات التي تأخذ قيما صحيحة لا تقبل التجزئة ضمن مجال محدد من القيم.

مثال: $\mathbf{X}$: عدد الاولاد الذكور في الأسرة المكونة من 3أولاد $\mathbf{X = \{0, 1, 2, 3\}}$.

$\mathbf{X}$: عدد السيارات المباعة خلال فترة زمنية معينة.

2- 1- 1- التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية المتقطعة:

التوزيع الاحتمالي هو مجموعة القيم التي يمكن ان تاخذها المتغيرة العشوائية مع الاحتمالات المرتبطة بهذه القيم، ويعبر عنه بجدول او صيغة رياضية.

فاذا كانت المتغيرة العشوائية المتقطعة X تأخذ القيم:

$$X = \{X = x_1, X = x_2, X = x_3 = \cdots \ldots \ldots \ldots X = x_n\}$$

وكان $P(X = x_i) = P(x_i)$ هو احتمال أن المتغيرة العشوائية تأخذ القيمة $\mathbf{x_i}$، فيمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية المتقطعة $\mathbf{X}$ كما يلي:

X	x_1	x_2	x_3	.....	x_n	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	.....	$f(x_n)$	1

نعبر عن احتمال قيمة معينة بـ $P(X = x_i)$ وأيضا $f(x_i)$ وتسمى الدالة $f(x_i)$ بدالة الكثافة الاحتمالية والتي تحقق الشرطين التاليين :

$$* \sum f(x_i) = 1 \qquad * \ 0 \leq f(x_i) \leq 1$$

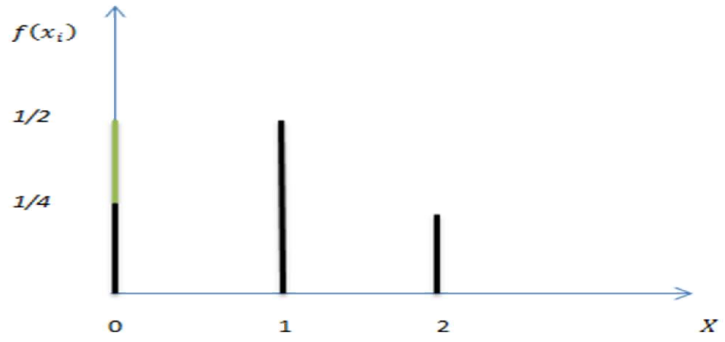
مثال: بالرجوع للمثال السابق والخاص بالمتغيرة العشوائية X التي تمثل عدد الصور الظاهرة في تجربة القاء قطعة نقدية مرتين، فيمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي لـ X كما يلي:

X	0	1	2	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

- **التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المتقطعة:**

يمكن تمثيل دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المتقطعة بيانيا برسم محورين متعامدين وتمثيل قيم المتغير العشوائي على المحور الافقي وتمثيل الاحتمالات على المحور العمودي ثم رفع كل قيمة من قيم المتغير بارتفاع الاحتمال المناظر لها.

مثال: تمثيل دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور الظاهرة عند القاء قطعة نقدية مرتين.



2- 1- 2- دالة التوزيع $F(x)$ للمتغيرة العشوائية المتقطعة:

اذا كان $\mathbf{X}$ متغيرا عشوائيا بدالة كثافة احتمالية $\mathbf{f(x)}$ فان دالة التوزيع لهذا المتغير العشوائي هي احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ قيمة أقل من أو تساوي قيمة معينة $\mathbf{x_i}$ ويعبر عنها بالصيغة الرياضية التالية :

$$F(x) = P(X \leq x_i)$$

ويمكن استنتاج دالة التوزيع من دالة الكثافة الاحتمالية $\mathbf{f(x_i)}$ كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \sum_{x \leq x_i}^{x} f(x_i)$$

فاذا كانت $\mathbf{X}$ تأخذ عددا منتهيا من القيم فان $\mathbf{F(x)}$ يمكن تعريفها كما يلي :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & , \quad x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & , \quad x_2 \leq x < x_3 \\ \dots & \\ f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n), & \quad x_n \leq x < +\infty \end{cases}$$

مثال: أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي $\mathbf{X}$ الذي يمثل عدد الصور الظاهرة عند القاء قطعة نقدية مرتين.

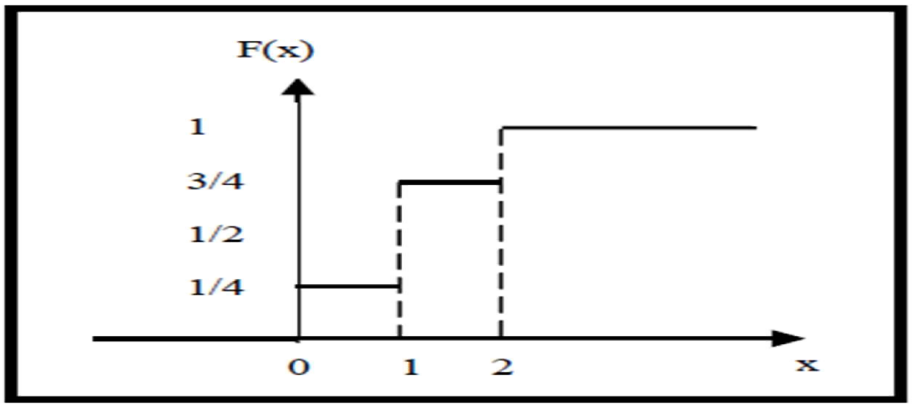
لدينا: جدول التوزيع الاحتمالي لـ $\mathbf{X}$ كما يلي:

$\mathbf{X}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\sum \mathbf{P(X = x_i)}$
$\mathbf{P(X = x_i)}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$	1

وبالتالي فان دالة التوزيع $\mathbf{F(X)}$ يمكن ادراجها كما يلي:

$$\mathbf{F(X)} = \begin{cases} \mathbf{0} & , \quad \mathbf{x < 0} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} & , \quad \mathbf{0 \leq x < 1} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} & , \quad \mathbf{1 \leq x < 2} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = \mathbf{1} & , \quad \mathbf{2 \leq x} \end{cases}$$

ويكون التمثيل البياني لدالة التوزيع كما يلي:



نلاحظ من الشكل البياني أن دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المتقطعة تأخذ شكل سلم، وهي لا تكون متناقصة في أي مجال، وأكبر قيمة ممكنة لها هي1 .

2- 2- المتغيرة العشوائية المستمرة (المتصلة):

هي متغيرة عشوائية تأخذ عددا لا متناهيا من القيم في مجال محدود ، أو هي تأخذ قيمة داخل هذا المجال، من أجل هذا فان وحدات قياس المتغيرة المستمرة تكون مستمرة كالزمن، الوزن، المسافة. نأخذ مثال عليها:

- الدخل الشهري لأحد الأشخاص؛
- أطوال 20 طالب في تخصص معين؛
- علامات 10 طلبة في مقياس معين.

2- 2- 1- التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية المستمرة:

هو مجموعة القيم التي يمكن أن تأخذها المتغيرة العشوائية المستمرة والاحتمالات الملحقة بها، ويسمى توزيعا كهذا بدالة الكثافة الاحتمالية، بحيث أن المساحة تحت هذا التوزيع تعطي الاحتمالات المناظرة للمجالات التابعة لها على المحور الأفقي، حيث أن تكامل دالة الكثافة الاحتمالية من a الى bحيث a<bيعطي احتمالا أن المتغير العشوائي سيأخذ أي قيمة في المجال من aالى b، ودونه لن يكون معرفا، وتكتب دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المستمرة على الشكل التالي :

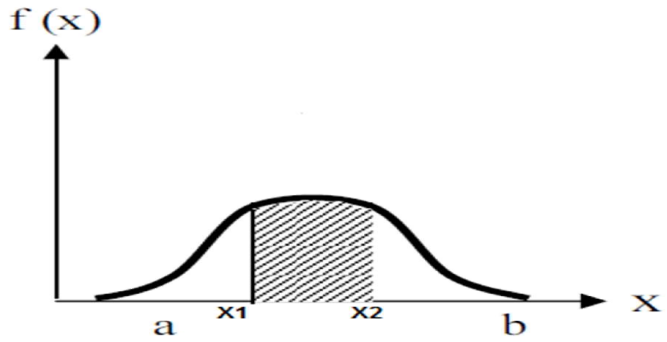
$$f(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in [a,b] \\ 0 & si \quad x \notin [a,b] \end{cases}$$

انطلاقا من هذا التعريف يمكننا أن نحسب قيمة الاحتمالات لأي مجال جزئي ينتمي الى مجال التعريف $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$، فاذا كان $[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]$ هو المجال الجزئي من مجال التعريف أي: $[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}] \subset [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

فان: $$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

ويمكن تمثيل هذا التوزيع بيانيا كما يلي:

$$\mathbf{P}[\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \mathbf{P}(\mathbf{x_1} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x_2})$$



حيث يعكس هذا الاحتمال المساحة المحصورة تحت المنحنى $\mathbf{f(x)}$ بين الخطين $\mathbf{X = x_1}$ وَ $\mathbf{X = x_2}$.

مثال:

لتكن لديك دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x & si \quad x \in [0,2] \\ 0 & si \quad x \notin [0,2] \end{cases}$$

المطلوب: حساب الاحتمال التالي $P(1 \leq X \leq 1.5)$

$$P(1 \leq X \leq 1.5)$$
$$= \int_1^{1.5} f(x)dx$$
$$= \int_1^{1.5} 0.5xdx = 0.5 \int_1^{1.5} xdx = 0.5\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{1.5} = 0.5\left[\frac{1.5^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right]$$
$$= 0.3125$$

- **خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المستمرة:**

- الخاصية الاولى: $\mathbf{f(x) \geq 0}$ بمعنى أن الاحتمال المقابل لأي مجال جزئي يكون موجبا.
- الخاصية الثانية: $\mathbf{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1}$ بمعنى أن تكامل دالة الكثافة الاحتمالية من اول مجال التعريف الى آخره تساوي 1.
- الخاصية الثالثة: احتمال أن تأخذ المتغيرة العشوائية المستمرة $\mathbf{X}$ القيمة المحددة $\mathbf{x}$ يساوي 0 أي: $\mathbf{P(X = x) = 0}$

مثال: بالرجوع للمثال السابق

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x & si \quad x \in [0,2] \\ 0 & si \quad x \notin [0,2] \end{cases}$$

لدينا: $\mathbf{f(x)}$ دائما موجبة أي أن الخاصية الأولى محققة.

وللتأكد من الخاصية الثانية نحسب $\mathbf{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_2^{+\infty} 0dx$$
$$= \int_0^2 0.5xdx = 0.5\int_0^2 xdx = 0.5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 1$$

نضع $\mathbf{x = 1}$:

$$P[X = 1] = \int_1^1 f(x)dx = \int_1^1 0.5xdx = 0.5\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^1 = 0\square$$

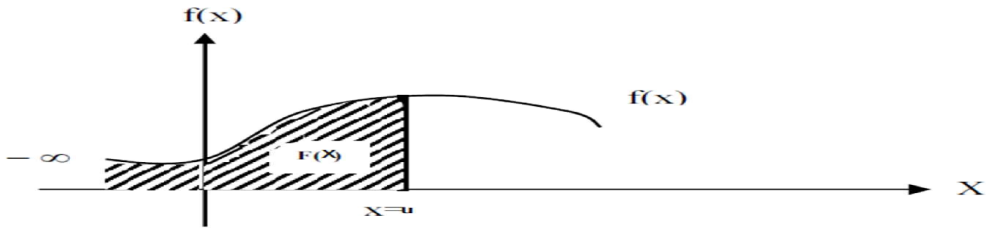
2- 2- 2- دالة التوزيع $\mathbf{F(X)}$ للمتغيرة العشوائية المستمرة:

تعريفها:

تعرف دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المستمرة كما يلي :

$$F(X) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

ويمكن توضيحها بيانيا من خلال الشكل البياني التالي:



خواصها:

تتميز دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المستمرة بالخواص التالية:

- $\lim_{x\to-\infty} F(X) = 0$ ، $\lim_{x\to+\infty}(X) = 1$ حيث أن $x \in]-\infty, +\infty[$.
- الدالة $F(X)$ دالة متزايدة بالنسبة للمتغير العشوائي x، أي أن لكل $x_1 < x_2$
$$F(x_1) \leq F(x_2)\square$$
- اذا كان $x_1 < x_2$ فان: $P[x_1 \leq X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1)$
- اذا كانت $F(x)$ هي دالة التوزيع للمتغير العشوائي المستمر فان:

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)\square$$

في حالة المتغيرة العشوائية المستمرة نهتم بحساب احتمال أن تقع X داخل مجال معين ولهذا فانه يمكن حساب هذا الاحتمال باستعمال دالة التوزيع عوضا عن حساب التكامل.

بفرض أن $[x_1, x_2]$ مجال جزئي من مجال التعريف $[a, b]$ فان:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P[X \leq x_2] - P[X \leq x_1] = F(x_2) - F(x_1)\square$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x & si \quad x \in [0,2] \\ 0 & si \quad x \notin [0,2] \end{cases}$$

- تحديد دالة التوزيع $\mathbf{F(X)}$:

$$F(X) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{x} 0.5udu = 0.5\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^x = 0.5\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{4}$$

- حساب الاحتمال $\mathbf{P[1 \leq x \leq 1.5]}$باستعمال دالة التوزيع:

$$P[1 \leq x \leq 1.5] = P[x \leq 1.5] - P[x \leq 1] = F(1.5) - F(1) = \frac{1.5^2}{4} - \frac{1^2}{4}$$
$$= 0.3125\square$$

- **العلاقة بين دالة الكثافة الاحتمالية $\mathbf{f(x)}$ ودالة التوزيع $\mathbf{F(X)}$:**

تدل هذه العلاقة على أن مشتقة دالة التوزيع ما هي الا دالة الكثافة الاحتمالية أي:$\mathbf{F(x) = f(x)}$

ودالة الكثافة الاحتمالية ما هي الا تفاضل دالة التوزيع: $\mathbf{f(x) = \frac{dF(x)}{dx}}$

مثال:

لتكن لديك دالة التوزيع التالية:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & si \quad x \in [0,2] \\ 0 & si \quad x \notin [0,2] \end{cases}$$

المطلوب: ايجاد دالة الكثافة الاحتمالية $\mathbf{f(x)}$

$$\mathbf{x \in [0,2]: \frac{dF(x)}{dx} = \frac{2.x}{4} = \frac{x}{2}} \qquad \mathbf{, x \notin [0,2]: \frac{dF(x)}{dx} = 0}$$

ومنه:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & si \quad x \in [0,2] \\ 0 & si \quad x \notin [0,2] \end{cases}$$

3ـ المميزات العددية للمتغيرات العشوائية:

نحتاج في بعض الأحيان الى معرفة بعض القيم العددية المميزة للمتغير العشوائي والتي تحدده بدقة، ومن خلالها يتم معرفة الخطوط الرئيسية للتوزيع محل الدراسة.

3- 1- التوقع الرياضي(الأمل الرياضي)

يعتبر من أكثر وأهم المميزات العددية استخداما لوصف مركز التوزيع الاحتمالي، والتوقع الرياضي للمتغير العشوائي $\mathbf{X}$ هو عبارة عن وسط حسابي مثقل بالقيم الاحتمالية المتعلقة بقيم هذا المتغير العشوائي، ويرمز له بالرمز $\mathbf{E(X)}$.

- **التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع:**

يعرف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع بالصيغة الرياضية التالية :

$$\mathbf{E(X)} = \frac{\sum \mathbf{x_i P_i}}{\sum \mathbf{P_i}}$$

وبما أن: $\sum \mathbf{P_i} = \mathbf{1}$ ينتج لدينا : $\mathbf{E(X)} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{P_i x_i}$

مثال:

ماهو العدد المتوقع لظهور الصورة عند رمي قطعة نقدية مرتين.

لدينا جدول التوزيع الاحتمالي لعدد مرات ظهور الصورة كما يلي:

$\mathbf{X}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\sum \mathbf{P(X = x_i)}$
$\mathbf{P(X = x_i)}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$	1
$\mathbf{X.P(X = x_i)}$	0	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}}$	1

$$\mathbf{E(X)} = \sum \mathbf{P_i x_i} = \mathbf{1}$$

- **التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر:**

يعرف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر بالصيغة الرياضية التالية:

$$\mathbf{E(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{xf(x)\,dx}$$

مثال:

لدينا دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \mathbf{six} \in [\mathbf{0,3}] \\ \mathbf{0six} \notin [\mathbf{0,3}] \end{cases}$$

- المطلوب: حساب $\mathbf{E(x)}$

$$\mathbf{E(x)} = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{3}} \mathbf{xf(x)dx} = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{3}} \mathbf{x}.\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\left[\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}}\right]_{\mathbf{0}}^{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

3- 2- خصائص التوقع الرياضي:

- اذا كان $\mathbf{x}$ متغير عشوائي موجب فان: $\mathbf{E(x) \geq 0}$
- التوقع الرياضي لعدد ثابت يساوي الثابت نفسه أي: $\mathbf{E(c) = c}$
- التوقع الرياضي لمتغير عشوائي مضروبا في ثابت $\mathbf{c}$ يساوي الثابت مضروبا في التوقع الرياضي للمتغير العشوائي أي: $\mathbf{E(cx) = c.E(x)}$
- التوقع الرياضي للتوقع الرياضي يساوي التوقع الرياضي نفسه أي: $\mathbf{E[E(x)] = (x)}$
- اذا كان لدينا $\mathbf{x}$ و$\mathbf{y}$ متغيرين عشوائيين مستقلين فان: $\mathbf{E(xy) = E(x).E(y)}$
- التوقع الرياضي لمجموع متغير عشوائي ومقدار ثابت يساوي الى التوقع الرياضي للمتغير العشوائي مضافا اليه المقدار الثابت أي: $\mathbf{E(x + c) = E(x) + c}$
- التوقع الرياضي لمجموع (الفرق) بين متغيرين عشوائيين يساوي مجموع (الفرق) بين توقعها الرياضي أي: $\mathbf{E(x \mp y) = E(x) \mp E(y)}$

3- 3- التباين والانحراف المعياري:

يدعى التوقع الرياضي لمربع انحراف قيم المتغير العشوائي $\mathbf{x}$ عن توقعه الرياضي بتباين $\mathbf{x}$ ويرمز له بالرمز $\mathbf{V(x)}$ أي:

$$\mathbf{V(x) = E[x - E(x)]^2}$$

أما الانحراف المعياري والذي نرمز له بالرمز $\boldsymbol{\sigma_x}$ فهو عبارة عن الجذر التربيعي لتباين المتغير العشوائي $\mathbf{x}$ أي:

$$\boldsymbol{\sigma_x = \sqrt{V(x)}}$$

باعتماد تعريف وخواص التوقع الرياضي نجد:

$$V(x) = E[x - E(x)]^2$$

$$= E[x^2 - 2x.E(x) + E(x)^2]$$

$$= E(x^2) - E\big(2x.E(x)\big) + E[E(x)]^2$$

$$= E(x^2) - 2.E(x).E[E(x)] + E(x)^2$$

$$= E(x^2) - 2.E(x).E(x) + E(x)^2$$

$$= E(x^2) - 2.E(x)^2 + E(x)^2$$

$$= E(x^2) - E(x)^2$$

- **حالة متغير عشوائي متقطع**:تباين المتغير العشوائي المتقطع يعطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$V(x) = \sum \big(x_i - E(x)\big)^2 . P_i = \sum x_i^2 . P_i - E(x)^2$$

- **حالة متغير عشوائي مستمر**:تباين المتغير العشوائي المستمر يعطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$V(x) = \int \big(x - E(x)\big)^2 . f(x)dx = \int x^2 f(x)\, dx - E(x)^2$$

3- 4- خواص التباين:

- تباين العدد الثابت يساوي 0 أي: $\boldsymbol{V(C) = 0}$.
- تباين متغير عشوائي مضروبا بع بعدد ثابت $\boldsymbol{C}$ يساوي مربع الثابت مضروبا في تباين المتغير العشوائي أي: $\boldsymbol{V(C.x) = C^2.V(x)}$.
- تباين متغير عشوائي زائد عدد ثابت $\boldsymbol{C}$ يساوي تباين المتغير العشوائي نفسه (أي أن التباين لا يتغير) ونكتب:

$$V(C + x) = V(x), \qquad V(C - x) = V(x) \ , V(ax + b) = a^2 V(x)$$

- تباين مجموع متغيرين عشوائيين مستقلين يساوي الى مجموع تباينهما أي:

$$V(x + y) = V(x) + V(y)$$

الفصل الرابع: التوزيعات الاحتمالية الأكثر استعمالا

تمهيد:

كثير من الظواهر التي تبدو مختلفة عن بعضها البعض، الا أنها متماثلة بسلوكها على سبيل المثال عند رمي قطعة نقد نحصل على رقم أو صورة وعند رمي زهرة نرد نحصل على عدد زوجي أو فردي، فالتجربتان تتميزان بكونهما تؤولان الى نتيجة واحدة من بين نتيجتين متنافيتين، وبالتالي فان كل هذه الظواهر تتبع قانون نظري معين يسمح بالوصول الى النتائج بطريقة أسرع على أساس الخصائص المميزة لهذه القوانين.

1ـ التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع:

1- 1- التوزيع المنتظم:

يعتمد قانون هذا التوزيع عندما يأخذ المتغير العشوائي $\mathbf{X}$ قيما مختلفة باحتمالات متساوية .

فاذا رمزنا لقيم المتغير العشوائي بـ $\mathbf{x_i}$ حيث $\mathbf{i = \{1, 2, 3, \dots \dots \dots \dots n\}}$ فان قانون التوزيع المنتظم يكتب بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{P(X = x_i) = \frac{1}{n};\ \forall i}$$

أي: $\mathbf{P(X = 1) = P(X = 2) = \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots P(X = n)}$

والتمثيل البياني لهذا التوزيع يكون كما يلي:

خواصه:

$$\forall \mathbf{i}: \mathbf{P_i > 0} \qquad , \qquad \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{P_i = 1}$$

مثال:

- رمي زهرة النرد: $P(X = x_i) = P_{x_i} = \frac{1}{6} \ , \ x_i = \{1,2,3,4,5,6\}$
- رمي قطعة نقدية: $P(X = x_i) = P_{x_i} = \frac{1}{2}, \ x_i = \{1,2\}$

تابع التوزيع:

تابع التوزيع للتوزيع المنتظم يعرف كما يلي:

$$F(X) = P(X \leq x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)$$

المميزات العددية للتوزيع المنتظم :

التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i . x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} . x_i = \frac{1}{n}(1) + \frac{1}{n}(2) + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{1}{n}(n)$$

$$= \frac{1}{n}(1 + 2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots + n)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{n+1}{2}$$

ومنه: $\mathbf{E(X) = \frac{n+1}{2}}$

التباين:

لدينا: $V(X) = E(x^2) - [E(x)]^2$

نقوم بحساب: $\mathbf{E(x^2)}$

$$E(x^2) = \sum_{i=1}^{n} P_i . x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} . x_i^2 = \frac{1}{n}(1^2) + \frac{1}{n}(2^2) + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{1}{n}(n^2)$$

$$= \frac{1}{n}(1 + 4 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots . + n^2)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

أما $\mathbf{\left(E(x)\right)^2}$ فتساوي: $\mathbf{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)^2}{4}}$

وبالتعويض نجد:

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}$$

$$= \frac{n+1}{12}(4n + 2 - 3n - 3)$$

$$= \frac{n+1}{12}(n-1)$$

$$= \frac{\mathbf{n^2 - 1}}{\mathbf{12}}$$

ومنه: $\mathbf{V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$

مثال:

عند رمي قعطة نرد متوازنة، فان عدد النقاط المسجلة على الوجه الذي تستقر عليه القطعة هو متغير عشوائي $\mathbf{X}$ ، وأن التوزيع الاحتمالي هو توزيع منتظم لان:

$$P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) \ldots \ldots \ldots \ldots . . P(X = 6)$$

أي: $P(X = x_i) = P_i = \frac{1}{6} \qquad , \forall i \leq 6$

ومنه: $E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$

$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12} = \frac{36 - 1}{12} = \frac{35}{12}$$

1- 2- توزيع برنولي:

نقول عن تجربة عشوائية أنها تجربة لبرنولي اذا كانت تقبل نتيجتين أو حدثين متنافيين $\mathbf{A}$ و $\overline{\mathbf{A}}$ ، فاذا تحقق الحدث $\mathbf{A}$ يكون نجاحا، و$\overline{\mathbf{A}}$ فشلا، ويأخذ المتغير العشوائي $\mathbf{X}$ القيمة 1 اذا تحقق الحدث $\mathbf{A}$، والقيمة 0 اذا تحقق الحدث $\overline{\mathbf{A}}$، ونرمز بالرمز $\mathbf{P}$ لاحتمال أن يأخذ المتغير العشوائي $\mathbf{X}$ القيمة 1(تحقق الحدث $\mathbf{A}$) وبالرمز $\mathbf{q = 1 - P}$ لاحتمال أن يأخذ المتغير $\mathbf{X}$ القيمة 0 (تحقق الحدث $\overline{\mathbf{A}}$) .

$\mathbf{X = \{X/X_1 = 0,\ X_2 = 1\} P(X = 1) = P}$, $\mathbf{P(X = 0)}$=1-$\mathbf{P = q}$

ونكتب: $\mathbf{X \to B(1.P)}$

أما المميزات العددية للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع برنولي فتكون كما يلي:

$$E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = 0.q + 1.P = P$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (0^2.q + 1^2.P) - P^2 = P - P^2 = P(1 - P) = P.q$$

مثال:

نرمي قطعة نقدية مرة واحدة، ونعرف المتغير العشوائي$\mathbf{X}$ الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة

$\mathbf{X = \{X/X_1 = 0,\ X_2 = 1\} P(X = 0) = P(ك) = 1 - P = q = 0.5}$,

$\mathbf{P(X = 1)}$=$\mathbf{P(ص) = P = 0.5}$

ومنه فان: $\mathbf{X \to B(1.\ 0,5)}$

اذن: $\mathbf{E(X) = P = 0.5}$ و $\mathbf{V(X) = P.q = 0.5.0.5 = 0.25}$

1- 3- توزيع ثنائي الحدين:

إذا تكررت تجربة برنولي n مرة، فإن المتغير X يمثل عدد مرات تحقق الحدث A، وبالتالي فهو يأخذ القيم التالية: $X = \{x/0.1.2.3...n\}$

فمثلا عند رمي وحدة نقدية n مرة وكان المتغير X هو عدد مرات ظهور الصورة، فإنه:

من أجل $n = 2$ نجد:

$$P(X=0)=P(\text{ك ك})=q\cdot q=q^2=0.25$$
$$P(X=1)=P(\text{ك ص})+P(\text{ص ك})=P\cdot q+q\cdot P=2(P\cdot q)=0.5$$
$$P(X=2)=P(\text{ص ص})=P\cdot P=P^2=0.25$$

من أجل $n=3$ نجد:

$$P(X=0)=P(\text{ك ك ك})=q\cdot q\cdot q=q^3$$
$$P(X=1)=P(\text{ك ك ص})+P(\text{ك ص ك})+P(\text{ص ك ك})=(P\cdot q\cdot q)+(q\cdot P\cdot q)+(q\cdot q\cdot P)=3(P\cdot q^2)$$
$$P(X=2)=P(\text{ك ص ص})+P(\text{ص ك ص})+P(\text{ص ص ك})=(P\cdot P\cdot q)+(P\cdot q\cdot P)+(q\cdot P\cdot P)=3(P^2\cdot q)$$
$$P(X=3)=P(\text{ص ص ص})=P\cdot P\cdot P=P^3$$

فمثلا من $P(X=2)=3(P^2\cdot q)$ نلاحظ أن:

- 2 هي قيمة المتغير العشوائي X.
- 1 هو 3- 2، أي عدد مرات تكرار التجربة العشوائية ناقص قيمة المتغير العشوائي.
- 3 هو عدد الطرق الملائمة للحصول على نجاحين من بين 3 ثلاث تجارب، ويمكن حسابه كمايلي: $C_n^x=\frac{n!}{x!(n-x)!}$

ومنه فاحتمال عدد ما x من النجاحات من بين n تجربة برنولية يحسب كمايلي :

$$P(X=x)=C_n^x\cdot P^x\cdot q^{n-x} \qquad x=0.1.2.3.....n$$

حيث: x عدد مرات النجاح، P: احتمال النجاح في التجربة الواحدة، $q=1-P$: احتمال الفشل، n: عدد مرات تكرار التجربة العشوائية. ويكتب قانون التوزيع الاحتمالي لتوزيع ثنائي الحدين كمايلي:

$$X\rightarrow B(n\,.\,P)$$

أما شروط تطبيق التوزيع ثنائي الحدين فهي :

- تجربة برنولي مكررة عدد محدد من المرات.
- احتمال النجاح في التجربة ثابت.
- التجارب مستقلة عن بعضها البعض.

ويمكن التعبير عن قانون توزيع ثنائي الحدين بصورة جدولية كما يلي:

$\mathbf{X}$	0	1	.....	$\mathbf{x}$	.....	$\mathbf{n}$
$\mathbf{P_i}$	$\mathbf{C_n^0.P^0.q^{n-0}}$	$\mathbf{C_n^1.P^1.q^{n-1}}$	.....	$\mathbf{C_n^x.P^x.q^{n-x}}$	.....	$\mathbf{C_n^n.P^n.q^{n-n}}$

مثال: في عائلة مكونة من 04 أولاد ، ما هو احتمال أن يكون بينهم 03 ذكور، ذكر واحد.

نضع: X متغير عشوائي يمثل عدد الأولاد الذكور في هذه العائلة

$$X = \left\{ x \middle/ 0.1.2.3.4 \right\} \qquad n = 4 \qquad P = 0.5 \qquad q = 1 - P = 0.5$$

ومنه: $X \to B(4\,.\,0.5)$

أما الاحتمال فيحسب بالعلاقة التالية: $P(X = x) = C_n^x \cdot P^x \cdot q^{n-x}$

$$P(X = 3) = C_4^3 \cdot (0.5)^3 \cdot (0.5)^{4-3} = 4 \cdot (0.5)^3 \cdot (0.5)^1 = 0.25$$
$$P(X = 1) = C_4^1 \cdot (0.5)^1 \cdot (0.5)^{4-1} = 4 \cdot (0.5)^1 \cdot (0.5)^3 = 0.25$$

أما المميزات العددية للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع ثنائي الحدين فهي : يمكن اعتبار المتغير العشوائي X مجموع متغيرات لتجربة برنولي مستقلة، أي: $X = X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n$ لها نفس المعلم P، وبالتالي نفس الأمل الرياضي ونفس التباين، ومنه نجد:

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots\cdots + E(X_n) = \sum P = nP$$
$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots\cdots + V(X_n) = \sum V(X) = \sum Pq = nPq$$

من المثال السابق يمكن استنتاج المميزات العددية للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأولاد الذكور في أسرة مكونة من 04 أولاد كمايلي:

$$E(X) = n \cdot P = 4 \cdot (0.5) = 2$$
$$V(X) = n \cdot P \cdot q = 4 \cdot (0.5) \cdot (0.5) = 1$$
$$\delta_X = \sqrt{1} = 1$$

تابع التوزيع لتوزيع ثنائي الحدين:

ان تابع التوزيع لتوزيع ثنائي الحدين يعطى بالعلاقة التالية:

$$F(X) = P(X \le x_i) = \sum_{i=1}^{n} C_n^{x_i} . P^n . q^{n-x_i}$$

واحتمال الحوادث من الشكل $(\mathbf{L \le X \le K})$ تحسب كما يلي:

$$P(L \le X \le K) = \sum_{L}^{K} P(X = x_i) = F(K) - F(L)$$

أما احتمال الحوادث من الشكل $(\mathbf{X \geq})$ فيمكن حسابها وفق العلاقة التالية:

$$P(X \geq K) = \sum_{x=k}^{n} C_n^x . P^x . q^{n-x} = 1 - F(K)$$

1- 4- التوزيع فوق الهندسي :

عند دراستنا لقانون توزيع ثنائي الحدين، لاحظنا أن عملية السحب كانت تتم مع الاعادة أما في بعض الحالات فانه لا يمكن اعادة الوحدة المسحوبة وبالتالي عمليات السحب لا تكون مستقلة، وفي هذه الحالة نلجأ الى تطبيق قانون آخر يسمى التوزيع الهندسي الزائد.

ويتعلق قانون التوزيع فوق الهندسي بثلاثة ثوابت هي:

- $\mathbf{N}$: عدد عناصر المجتمع أو أصلي المجموعة الكلية.
- $\mathbf{M}$: عدد عناصر المجتمع الذي ينصب عليه اهتمامنا.
- $\mathbf{n}$: حجم العينة المسحوبة بدون ارجاع.

أي أن التوزيع فوق الهندسي هو توزيع احتمالي يوافق تجربة برنولي نكررها n مرة بدون إرجاع، ونعتبر المتغير X عبارة عن مجموع n متغير عشوائي يتبع توزيع برنولي.

نفترض أننا نسحب n كرية من صندوق كريات وبدون إرجاع ، وأن الصندوق يحتوي على N كرية منهاM كرية بيضاء، فإن احتمال الحصول على x كرية بيضاء $(x \leq b)$ يمكن حسابه من خلال القانون الكلاسيكي للاحتمال (عدد الحالات الملائمة على عدد الحالات الممكنة) كمايلي :

$$\mathbf{P(X = x) = \frac{C_M^x . C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}}$$

تسمى هذه الصيغة بقانون التوزيع فوق الهندسي ويعرف كما يلي:$\mathbf{X \rightarrow H(N, M, n)}$

مثال : فوج من الطلبة مكون من 4 طلبة ذكور، 7 طلبة اناث، تم سحب وبصورة عشوائية، لجنة مؤلفة من 4 أفراد.

- عين جدول التوزيع الاحتمالي لعدد الذكور في اللجنة.

نلاحظ أن هذه التجربة (سحب لجنة) هي تجربة برنولي مكررة وبدون ارجاع أي هي تجربة فوق هندسية.

نضع $\mathbf{X}$ متغير عشوائي يمثل عدد الطلبة الذكور في اللجنة ويأخذ القيم التالية:

$$\mathbf{X} = \left\{ {}^{\mathbf{X}}/_{\mathbf{0,1,2,3,4}} \right\} \qquad , \quad \mathbf{X} \to \mathbf{H(11,4,4)}$$

$$\mathbf{P(X=0)} = \frac{\mathbf{C_4^0 . C_7^4}}{\mathbf{C_{11}^4}} = \mathbf{0.106}, \mathbf{P(X=1)} = \frac{\mathbf{C_4^1 . C_7^3}}{\mathbf{C_{11}^4}} = \mathbf{0.424}, \mathbf{P(X=2)} = \frac{\mathbf{C_4^2 . C_7^2}}{\mathbf{C_{11}^4}} = \mathbf{0.38}$$

$$\mathbf{P(X=3)} = \frac{\mathbf{C_4^3 . C_7^1}}{\mathbf{C_{11}^4}} = \mathbf{0.0848}, \mathbf{P(X=4)} = \frac{\mathbf{C_4^4 . C_7^0}}{\mathbf{C_{11}^4}} = \mathbf{0.0030}$$

ومنه جدول التوزيع الاحتمالي يمكن تشكيله كما يلي:

x_i	0	1	2	3	4	$\sum P_i$
P_i	0.106	0.424	0.38	0.0848	0.00303	1

نلاحظ أن: $\sum P_i = 1$ و$\forall i$ ' $P_i \geq 0$

المميزات العددية للمتغير العشوائي الخاضع للتوزيع فوق الهندسي:

التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X الخاضع للتوزيع فوق الهندسي يعطى بالعلاقة التالية:

$$E(X) = n\left(\frac{M}{N}\right) = n.P$$

التباين:

تباين المتغير العشوائي X الخاضع للتوزيع فوق الهندسي يعطى بالعلاقة التالية:

$$V(X) = \frac{N-n}{N-1}.n.P.q$$

مثال:

حساب التوقع الرياضي والتباين الخاص بعدد الطلبة الذكور في اللجنة (أنظر المثال السابق مباشرة)

$$E(X) = n\left(\frac{M}{N}\right) = 4\left(\frac{4}{11}\right) = 4 \times 0.36 = 1.45$$

$$V(X) = \frac{N-n}{N-1}.n.P.q = \frac{11-4}{11-1} \times 4 \times 0.36 \times 0.64 = 0.64$$

قاعدة تقارب:

نلاحظ أنه توجد علاقة تقارب بين التوزيع فوق الهندسي وتوزيع ثنائي الحدين، في حالة N كبير جدا (يؤول إلى $+\infty$) فإن $\left[\frac{N-n}{N-1}\right]$ تؤول إلى 1. فيعطي التوزيع فوق الهندسي نتائج قريبة من نتائج توزيع ثنائي الحدين، ويصبح السحب بدون إرجاع مطابقا للسحب بإرجاع ويمكن اجراء عملية التقريب ابتداءا من $\left(\boldsymbol{n < \frac{N}{10}}\right)$.

1- 5- التوزيع الهندسي:

إذا كررنا تجربة برنولي إلى غاية الحصول على النتيجة أو تحقق الحدث المطلوب (نجاح مرة واحدة)، فإن المتغير X الذي يمثل عدد مرات تكرار التجربة بما فيها المرة التي حصل فيها النجاح يتبع التوزيع الهندسي.

فإذا كان P هو احتمال النجاح و كان q هو احتمال الفشل، فإن احتمال الحصول على النتيجة المطلوبة عند التجربة رقمX يعطى بالعلاقة التالية: $P(X = x) = P \cdot q^{x-1}$ حيث: $X = \{x / 1.2.3.4.....\}$

أما المميزات العددية لهذا التوزيع فهي: $V(X) = \frac{q}{P^2}$ $E(X) = \frac{1}{p}$

مثال: نرمي وحدة نقدية إلى غاية الحصول على صورة، ما هو احتمال أن يتطلب ذلك 04 رميات.

$P = 0.5$ $q = 0.5$ $X = \{x / 1.2.3.4.....\}$

$P(X = 4) = P(\text{ص ك ك ك}) = P \cdot q^{4-1} = (0.5) \cdot (0.5)^3 = 0.0625$

1- 6- توزيع بواسون:

فى الحياة العملية احيانا ما نقابل بعض الظواهر التى ينطبق عليها شروط توزيع ثنائي الحدين و لكن هذه الحوادث تكون نادرة الوقوع و هذا يعنى أن احتمال النجاح يكون صغير جدا أي يقترب من الصفر، و يكون احتمال الفشل كبير أىأنة يقترب من الواحد، ولهذا فقد استطاع بواسون أن يشتق جبريا قانون خاص بالاحتمالات الصغيرة انطلاقا من قانون توزيع ثنائي الحدين أطلق عليه بتوزيع أو قانون بواسون، هذا

الاخير له تطبيقات واسعة حيث يمثل عدد الحوادث النادرة الوقوع في وحدة قياسية معينة كالزمن، المسافة ، الحجم وكأمثلة عن ذلك نذكر مثلا:

- عدد المكالمات الهاتفية خلال فترة زمنية محددة.
- عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من كتاب معين.
- عدد الحوادث التي تقع على طريق معين خلال فترة زمنية.
- عدد الزباين الذي يصلون الى محطة البنزين في ساعة ما.

و بذلك تكون شروط هذا التوزيع كالآتي:-

- أن تكون احتمال النجاح ثابت و كذلك احتمال الفشل فى كل محاولة و يرمز لهما بالرمز p, q على التوالى.

-- أن يكون احتمال النجاح صغيرا و يقترب من الصفر و احتمال الفشل يقترب من الواحد الصحيح.

- أن تكون عدد المحاولات كبيراجدا حيث أن $= n\,p = \lambda$ مقدار ثابت.

قانون توزيع بواسون:

اذا كان $\boldsymbol{X}$ متغيرا عشوائيا يمثل حدثا معينا نادر الحدوث في زمن أو مسافة أو مساحة وبمعدل وليكن $(\boldsymbol{\lambda})$، فوجود أن احتمال حدوث هذا الحدث عدد $\boldsymbol{x}$ مرة يتبع العلاقة الاحتمالية التالية :

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!} \quad / \; x = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots;; \;\; \lambda > 0$$

حيث: $\boldsymbol{x}$: العدد المعين من النجاحات.

$\boldsymbol{P(X = x)}$: احتمال عدد $\boldsymbol{x}$ من النجاحات.

$\boldsymbol{\lambda}$: متوسط عدد النجاحات في وحدة القياس (زمن، مسافة، حجم.....).

$\boldsymbol{e}$: أساس نظام اللوغاريتم الطبيعي أو : 2.71828.

نلاحظ أن هذا التوزيع معرف فقط في المعلمة $\boldsymbol{\lambda}$ أي يكفي معرفة $\boldsymbol{\lambda}$ لتطبيق هذا التوزيع ويعرف كما يلي:
$\boldsymbol{X \rightarrow P(\lambda)}$

مثال:

اذا علمت أن معدل المكالمات الهاتفية التي تتلقاها احدى الادارات هو مكالمتان كل خمس دقائق.

أوجد: - احتمال عدم استقبال ولا مكالمة خلال الخمس دقائق القادمة.

- احتمال استقبال مكالمة واحدة على الأقل خلال الخمس دقائق القادمة.

الحل:

نفرض أن $\boldsymbol{X}$ متغير عشوائي يمثل عدد المكالمات التي تستقبلها هذه الادارة خلال 5 دقائق، نلاحظ أن $\boldsymbol{X}$ يتبع توزيع بواسون بمعدل $\boldsymbol{\lambda = 2}$ وبالتالي فان دالة كثافة هذا المتغير كما يلي:

$$\boldsymbol{P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!} \quad / \quad x = 0, 1, 2,\ldots\ldots,\propto}$$

ومنه نجد:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2}.2^{0}}{0!} = 0.135$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.135 = 0.865$$

المميزات العددية للمتغير العشوائي الخاضع لتوزيع بواسون:

التوقع الرياضي:

ان التوقع الرياضي للمتغير العشوائي الخاضع لتوزيع بواسون هو معلمة هذا التوزيع أي :

$$E(X) = \lambda$$

البرهان:

لدينا: $E(X) = \sum P_i.x_i$

وبالتعويض بقيمة $\boldsymbol{P_i}$ بدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بواسون نجد:

$$E(X) = \sum \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}.x_i = e^{-\lambda}\sum \frac{\lambda^{x}.x_i}{x_i(x_i - 1)!}$$

بالاختزال يصبح لدينا:

$$E(X) = e^{-\lambda}\sum \frac{\lambda^{x}}{(x_i - 1)!}$$

لنفرض أن $\boldsymbol{y = x - 1}$ أي أن $\boldsymbol{x = y + 1}$ نقوم بالتعويض على هذا الأساس في الطرف الأخير فنجد:

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^{y+1}}{y!} = e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^y . \lambda}{y!} = \lambda . e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^y}{y!}$$

ولدينا المقدار $\sum \frac{\boldsymbol{\lambda^y}}{\boldsymbol{y!}}$ ليس سوى عبارة عن سلسلة أسية تحسب كما يلي:

$$\sum \frac{\lambda^y}{y!} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{\lambda^y}{y!} \ldots \ldots = e^{\lambda}$$

وعليه فان:

$$E(X) = \lambda . e^{-\lambda} . e^{\lambda} = \lambda . e^{-\lambda+\lambda} = \lambda . e^{0} = \lambda$$

اذن: $$E(X) = \lambda$$

التباين:

ان تباين توزيع بواسون يساوي أيضا معلمة هذا التوزيع أي:

$$\boldsymbol{V(X) = \lambda}$$

البرهان:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

نقوم بحساب $\boldsymbol{E(X^2)}$:

$$E(X^2) = \sum x_i^2 . P_i = \sum x_i^2 . e^{-\lambda} . \frac{\lambda^x}{x!} = \sum [x_i^2 - x_i + x_i] . e^{-\lambda} . \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum [x_i(x_i - 1) + x_i] . e^{-\lambda} . \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum x_i(x_i - 1) . e^{-\lambda} . \frac{\lambda^x}{x!} + \sum x_i . e^{-\lambda} . \frac{\lambda^x}{x!}$$

نلاحظ ان الطرف الثاني ما هو الا عبارة عن $\boldsymbol{E(X)}$ أي λ ، أما الطرف الأول فيمكن حسابه كما يلي:

$$\sum x_i(x_i-1).e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}.\sum\frac{x_i(x_i-1).\lambda^x}{x_i(x_i-1).(x_i-2)!}$$

بعد اجراء عملية الاختزال نجد الطرف الأول يساوي:

$$e^{-\lambda}.\sum\frac{\lambda^x}{(x_i-2)!}$$

ولنضع $\boldsymbol{y=x-2}$ أي: $\boldsymbol{x=y+2}$ ونقوم بعملية التعويض فنجد:

$$e^{-\lambda}.\sum\frac{\lambda^x}{(x_i-2)!}=e^{-\lambda}.\sum\frac{\lambda^{y+2}}{y!}=e^{-\lambda}.\sum\frac{\lambda^y.\lambda^2}{y!}=e^{-\lambda}.\lambda^2.\sum\frac{\lambda^y}{y!}$$

ولدينا سابقا $\left(\sum\frac{\lambda^y}{y!}=\boldsymbol{e^{\lambda}}\right)$ومنه:

$$e^{-\lambda}.\sum\frac{\lambda^x}{(x_i-2)!}=\lambda^2.e^{-\lambda}.e^{\lambda}=\lambda^2.e^{-\lambda+\lambda}=\lambda^2.e^0=\lambda^2$$

ومنه لدينا: $E(X^2)=\lambda^2+\lambda$ أما $[E(X)]^2=\lambda^2$

بالتعويض في علاقة $\boldsymbol{V(X)}$ نجد:

$$V(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

مثال: التوقع الرياضي والتباين للمثال السابق يساوي: $\boldsymbol{\lambda=2}$

تابع التوزيع لتوزيع بواسون:

ليكن $\boldsymbol{X}$ متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون يأخذ قيمة أكبر من $\boldsymbol{x}$ فان تابع التوزيع في هذه الحالة يعطى بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{F(X)=P(X>x)=\sum_{x=x+1}^{\infty}e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}}$$

الا أن عملية الحساب هنا طويلة لذا نلجأ الى الحساب عن طريق المتمم أي:

$$\boldsymbol{P(X\leq x_i)=\sum_{x=0}^{x_i}e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}}$$

ومنه تصبح دالة التوزيع كما يلي:

$$F(X) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x_i) = 1 - \sum_{x=0}^{x_i} e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$

توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ثنائي الحدين:

ليكن $\boldsymbol{X}$ متغيرا عشوائيا يتبع توزيع ثنائي الحدين أي: $\boldsymbol{X \rightarrow B(n,P)}$، فاذا كانت $\boldsymbol{n}$ تتزايد بصورة كبيرة غير منتهية، و الاحتمال $\boldsymbol{P}$ صغير جدا أي يؤول الى الصفر، بحيث أن الجداء $\boldsymbol{(n.P)}$ يساوي مقدار ثابت وليكن λ، ففي هذه الظروف يمكن تقريب توزيع ثنائي الحدين الى توزيع بواسون ذو المعلمة λ.وبصورة عامة يمكن تقريب X الخاضع لتوزيع ثنائي الحدين الى توزيع بواسون بمعدل $(\lambda = n.P)$ عندما يكون: $n \geq 30$ و $n.P \leq 5$

$$B(n,P) \xrightarrow{n.P \geq 5, n \geq 30} P(\lambda)$$

مثال:

اذا كانت نسبة الانتاج المعيب في انتاج أحد المصانع هي 1٪ وكانت هذه السلعة تعبأ في صناديق كل صندوق يسع 300 وحدة، فأوجد احتمال أن يكون في أحد هذه الصناديق 3 وحدات معيبة.

الحل:

نفرض أن X متغير عشوائي يمثل عدد الوحدات المعيبة في كل صندوق، نلاحظ أن X يتبع توزيع ثنائي الحدين أي: $X \rightarrow B(300,0.01)$ حيث n كبيرة جدا و P احتمال صغير جدا.

فانه يمكن اعتماد قانون توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ثنائي الحدين نظرا لتوفر الشروط التالية:

$$n = 300 > 30 \ , \ n.P = 300 \times 0.01 = 3 \leq 5 \ , \lambda = n.P = 3$$

ومنه احتمال أن يكون في أحد هذه الصناديق 3 وحدات معيبة يساوي:

$$P(X = 3) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-3}.3^3}{3!} = 0.224$$

2ـ التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر:

2- 1- التوزيع الطبيعي:

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة وأكثرها استخداما في نظرية الاحتمالات كون أن معظم الظواهر تتبع هذا القانون أو تؤول اليه اذا توفرت شروط معينة، ويوجد هذا التوزيع تحت صيغتين مختلفتين هما:

- التوزيع الطبيعي العام.
- التوزيع الطبيعي المعياري.

- تعريف قانون التوزيع الطبيعي العام:

يعرف تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي الطبيعي X وفق الصيغة الرياضية التالية :

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

حيث أن:

x : يمثل المتغير العشوائي الطبيعي وهو معرف ضمن المجال $]-\infty\ ,\ +\infty[$.

e: مقدار ثابت وهو أساس اللوغاريتم الطبيعي ويساوي 2.7183.

π: مقدار ثابت ويساوي 3.1416.

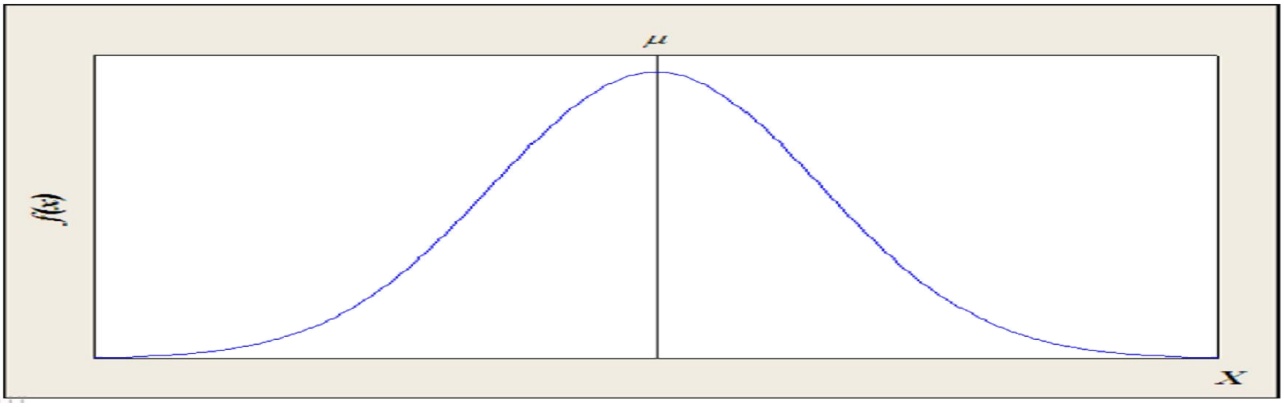
μ: وسط حسابي وهو مقدار ثابت يعكس المتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي المدروس.

σ: مقدار ثابت حقيقي وموجب، يعكس الانحراف المعياري لتوزيع المجتمع الاحصائي المدروس.

وبالتالي فان المتغير العشوائي X يخضع للتوزيع الطبيعي يكتب باختصار على الشكل التالي:

$$X\sim N(\mu,\sigma)$$

ويمثل بيانيا كما يلي:



- **خصائص التوزيع الطبيعي العام:**

ان تابع التوزيع لمتغير طبيعي يعرف بوسطه الحسابي μ وانحرافه المعياري σ ويرمز له بالرمز $N(\mu,\sigma)$، يلبي الشرطان الضروريان لكل التوزيعات الاحتمالية:

الشرط الأول: $\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x)} \geq \boldsymbol{0}$

الشرط الثاني: $\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)\,dx} =$

نلاحظ أن الشرط الأول محقق دوما لانه مهما كانت القيمة المعطاة لـ $\boldsymbol{x}$ فان مربعها دوما موجب أي: $\boldsymbol{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 > 0}$ وذلك بغض النظر عن قيمة المعلمة μ.

ولدينا التابع $\boldsymbol{f(x)}$ هو من الشكل:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

نلاحظ أن $\boldsymbol{f(x)}$ موجب دوما وذلك لان:

- $\boldsymbol{e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} > 0}$ ($\boldsymbol{(x-)^2 > 0}$ و $\boldsymbol{2\sigma^2 > 0}$ لان التباين موجب دوما من التعريف).
- $\boldsymbol{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} > 0}$ (σ موجب و $\boldsymbol{\sqrt{2} > 0}$).

أما بالنسبة للشرط الثاني أي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)\,dx} = 1\square$$

لدينا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

ولحساب هذا التكامل نستعمل طريقة تحويل المتغير أي: $\boldsymbol{t = \frac{x-\mu}{\sigma}}$

ولتحديد حدود التكامل الجديدة بالنسبة لـ $\boldsymbol{t}$ نجد عندما:

$\boldsymbol{x \to +\infty}$ فان $\boldsymbol{t \to +\infty}$ و$\boldsymbol{x \to -\infty}$ فان $\boldsymbol{t \to -\infty}$

وأيضا:

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma} \Longrightarrow x - \mu = \sigma t; dx = \sigma . dt$$

بالتعويض نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} . \sigma . dt = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} . dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} . dt$$

نلاحظ أن التكامل $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} . dt}$ هو احدى التكاملات الشهيرة ويدعى بتكامل آيار بواسون ويساوي $\boldsymbol{\sqrt{2\pi}}$ وبالتالي نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \sqrt{2\pi} = 1$$

أي أن الشرط الثاني محقق أيضا وبالتالي فالتوزيع الطبيعي هو دالة كثافة احتمالية.

المميزات العددية للمتغير العشوائي الخاضع للتوزيع الطبيعي:

التوقع الرياضي:

ان التوقع الرياضي للمتغير العشوائي $\boldsymbol{X}$ الخاضع للتوزيع الطبيعي يساوي المعلمة الاولى لهذا التوزيع أي: $\boldsymbol{E(X) = \mu}$.

البرهان:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x.\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

بتحويل المتغير نضع: $\boldsymbol{t = \frac{x-\mu}{\sigma}}$

وبالتالي:

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma} \Longrightarrow x - \mu = \sigma t; dx = \sigma.dt$$

بالتعويض نجد:

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t\sigma + \mu).e^{-\frac{t^2}{2}}.\sigma.dt$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma t.e^{-\frac{t^2}{2}}.dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \mu.e^{-\frac{t^2}{2}}.dt \right]$$
$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}.dt$$
$$= 0 + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}.\sqrt{2\pi} = \mu$$

التباين:

ان تباين المتغير العشوائي $\boldsymbol{X}$ الخاضع للتوزيع الطبيعي يساوي المعلمة الثانية لهذا التوزيع مربعة أي:
$$\boldsymbol{V(X) = \sigma^2}$$

البرهان:

لدينا: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

حيث: $[E(X)]^2 = \mu^2$ نقوم بحساب $E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

باجراء التحليل السابق (تبديل المتغير) وبعد التعويض وتبسيط العلاقة نجد:

$$E(X^2) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 . e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \mu^2$$

لحساب هذا التكامل، نكامل بالتجزئة مع اجراء التحويل التالي:

$$E(X^2) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-te^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \mu^2 = 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} . \sqrt{2\pi} + \mu^2$$
$$= \sigma^2 + \mu^2$$

ومنه:

$$V(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

تابع التوزيع للمتغير العشوائي الطبيعي:

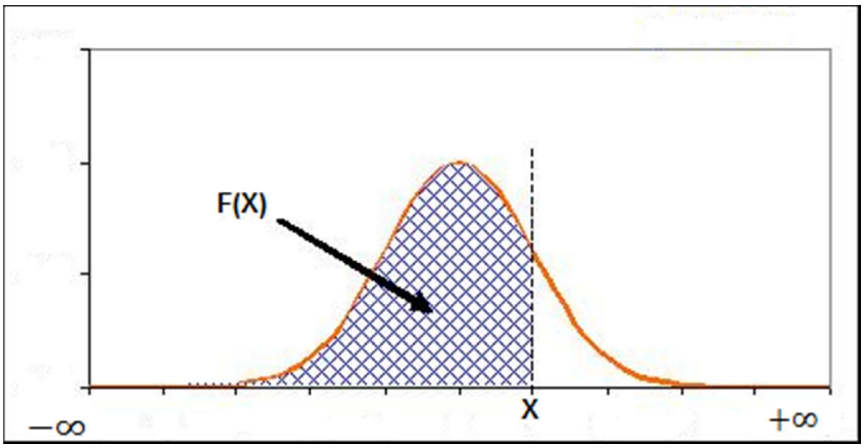
نعرف أن:

$$F(X) = P(X \leq x)$$

ومنه:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

ويعكس هذا التابع المساحة الاجمالية تحت المنحنى المقابل لـ $\boldsymbol{f(x)}$ والمحصورة بين $-\infty$ و $\boldsymbol{x}$ وهي تمثل بيانيا كما يلي:



ولحساب المساحة المحصورة بين نقطتين $\boldsymbol{x_1}$ و $\boldsymbol{x_2}$ يعني ايجاد احتمال أن يتردد المتغير العشوائي بين هاتين النقطتين أي:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_2}^{x_1} f(x)\, dx = \int_{x_2}^{x_1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

ان حساب هذا التكامل يحتاج الى ايجاد التابع الأصلي لـ $e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ وهذا غير ممكن الا بشكل تقريبي، ولهذا نختار الحالة التي يكون فيها $\mu=0$ و $\sigma=1$ لتكون معيارا لحساب الاحتمالات في كل الحالات ويسمى هذا التوزيع الموحد بالتوزيع الطبيعي المعياري.

2- 2- قانون التوزيع الطبيعي المعياري:

التوزيع الطبيعي المعياري هو التوزيع الذي يكون وسطه الحسابي يساوي الصفر ($\mu=0$) وانحرافه المعياري يساوي الواحد ($\sigma=1$)، ويتم التحول من القانون الطبيعي العام الى القانون الطبيعي المعياري كما يلي :

$$X \sim N(\mu,\sigma) \Leftrightarrow Z=\frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

ويعرف تابع الكثافة للمتغير العشوائي المعياري Z كما يلي:

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \qquad -\infty<z<\infty$$

وهذا التوزيع بدوره يتمتع بما يتمتع به قانون التوزيع الطبيعي العام.

تابع التوزيع الطبيعي المعياري:

ان تابع التوزيع الطبيعي المعياري يعطى بالشكل التالي: $F(Z)=P(Z\leq z)$

ومنه:

$$F(z)=P(Z\leq z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{\frac{-u^2}{2}}du$$

ان احتمال الحادثة $(X\leq x)$ هو نفس احتمال الحادثة $(Z\leq z)$، حيث أن قيمة Z محسوبة من العلاقة $Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ وهناك جداول احصائية توضح قيمة $F(Z)$ من أجل أي قيمة لـ $(z\geq 0)$ وتسمى بجداول التوزيع الطبيعي المعياري، وأن كل قيمة لـ $F(Z)$ ما هي الا احتمال أن يقع المتغير العشوائي المعياري ضمن المجال $[-\infty,\ z]$ وهي أيضا احتمال أن يقع المتغير العشوائي الطبيعي x ضمن المجال $\left[-\infty,\frac{x-\mu}{\sigma}\right]$.

ويمثل تابع التوزيع الطبيعي المعياري بيانيا كما يلي:

خصائص قانون التوزيع الطبيعي المعياري:

- $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$
- $F(-\infty) = 0$
- $F(+\infty) = 1$
- $F(0) = 0.5$

ولاستخراج قيم $F(Z)$ من جداول التوزيع الطبيعي نشير الى أن قيم Z واردة في العمود الأول والسطر الأول، حيث أن العمود الأول يتضمن قيم Z الصحيحة وذات المرتبة الواحدة بعد الفاصلة، أما السطر الأول فيتضمن قيم Z ذات المرتبة الثانية بعد الفاصلة وفي نقطة التقائهما نحصل على أي على $P(Z \leq z)$.

مثال: لايجاد قيمة التابع $F(Z)$ لما $Z = 1.57$ نبدأ بالبحث عن القيمة 1.5 في العمود الاول ونتحرك في السطر المناظر لهذا العمود حتى نحصل على العمود 0.05، وتكون القيمة التي نحصل عليها هي القيمة الواقعة في السطر المقابل لـ 1.6 والعمود المقابل لـ 0.05 وهي: 0.9418 وهي موضحة في الجدول التالي:

	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.							.		
.							.		
1.00							.		
1.10							.		
1.20							.		
1.30							.		
1.40							.		
1.50	.	.	.	.	.	.	0.9418		
.									

أما اذا كانت z سالبة فان $P(Z \leq -z) = P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - F(z)$

2- 3 - تقريب توزيع ثنائي الحدين الى التوزيع الطبيعي:

في حالة n كبيرة يمكن اعتبار توزيع ثنائي الحدين كتقريب جيد للتوزيع الطبيعي. ويعطي التوزيعان نتائج أكثر تقاربا كلما كانت n كبيرة أكثر.

ويمكن التقريب وفق الصيغة التالية:

$$B(n,P) \rightarrow N\left(nP, \sqrt{nPq}\right)$$

$$n \longrightarrow \infty$$

ونكتب:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(a \le z \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-z^2/2}dz, \qquad z = \frac{x-np}{\sqrt{npq}}$$

والقاعدة العملية للتقارب هي: $n.P \geq 5$ و $n.P \geq 5$

وتوجد قواعد أخرى متبعة للتقريب منها:

- $nPq \geq 10$
- $n \geq 20$, $nq \geq 10$, $nP \geq 10$

2- 4- تقريب توزيع بواسون الى التوزيع الطبيعي:

بما أنه توجد علاقة تربط توزيع بواسون بتوزيع ثنائي الحدين، وتوجد علاقة تربط توزيع ثنائي الحدين بالتوزيع الطبيعي فانه من المنطقي أن نقول توجد علاقة تربط توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي، ويتحقق ذلك عندما تكون λ كبيرة جدا أي: $\lambda \rightarrow \infty$. ويمكن التقريب وفق الصيغة التالية:

$$P(\lambda) \rightarrow N\left(\lambda, \sqrt{\lambda}\right)$$

$\lambda \rightarrow \infty$

ونكتب:

$$\lim_{\lambda\longrightarrow\infty} P\left(a \le \frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{\frac{-z^2}{2}}dz$$

والقاعدة العملية للتقارب هي عندما تتجاوز المعلمة λ للمقدار 15 أي ($\lambda \geq 15$) فيما يعتمد بعض الاحصائيين كشرط للتقرب ($\lambda \geq 10$).

جامعة الوادي

كلية العلوم الإقتصادية و التجارية و علوم التسيير

السنة أولى ل.م.د

سلسلة تمارين رقم (1): مفاهيم أساسية للإحتمالات

التمرين الأول:

1) يتكون فوج من 10 طلبة تم استدعاءهم إلى اجتماع، بكم طريقة يمكنهم الجلوس في صف به 10 مقاعد؟ و بكم طريقة يمكنهم الجلوس حول طاولة مستديرة؟.
2) بكم طريقة يمكن ترتيب الحروف الواردة في الكلمات: MISSISSIPI - MATHEMATIQUE -FORMIDABLE
3) يتم اختيار بالقرعة 3 طلبة من بين طلبة فوج لحضور اجتماع مع رئيس القسم. ما هو عدد الحالات الممكنة إذا كان عدد الطلبة الفوج 20 طالبا؟
4) يتكون مجلس إداري من 30 فردا من بينهم 18 رجلا و12 نساء، نريد تشكيل لجنة من 05 أفراد على أن تكون هذه اللجنة مكونة من رجلين و امرأتين على الأقل. المطلوب حساب عدد الإمكانيات أن:

- ✓ يكون كل عضو في المجلس الإداري يمكن أن يكون عضوا في اللجنة.
- ✓ رجلان رفضا الدخول ضمن اللجنة.
- ✓ السيد X والسيدةY رفضا أن يكونا ضمن اللجنة.

التمرين الثاني:

من أجل تلبية رغبات إحدى المستشفيات بكمية معينة من الدم، تم سحب وبطريقة عشوائية 6 أسماء من قائمة تحتوي على أسماء 20 شخص موزعين كما يلي: 12 لديهم الفصيلة B و8 لديهم الفصائل الأخرى.

1. ما هو عدد القوائم المكونة من 6 أسماء التي يمكن تكوينها؟.
2. ما هو عدد القوائم المختلفة التي تحتوي على 6 أشخاص كلهم من الفصيلة B؟.
3. ما هو احتمال الحصول على 6 أشخاص كلهم من الفصيلة B ؟.
4. ما هو احتمال الحصول على 6 أشخاص من بينهم شخص واحد من الفصيلة B ؟.

التمرين الثالث:

نلقي قطعة نقدية متوازنة ثلاث مرات على التوالي، نسجل F عند ظهور الصورة و P عند ظهور كتابة.

1- أكتب المجموعة الأساسية لعدد الحالات الممكنة؟

2- عبر عن الأحداث التالية من خلال مجموعات جزئية من المجموعة الأساسية:

3- A: الحصول على صورتين فقط. B: الحصول على صورتين على الأقل.

4- عبر بمجموعات عن الأحداث التالية: $A \cup B, A \cap B, \overline{B}, \overline{A}$

5- أحسب الاحتمالات التالية:

$P(A \cup B), P(A \cap B), P(A), P(\bar{A}), P(B), P(\bar{B})$

التمرين الرابع:

نلقي قطعة نقود وحجر نرد معا:

1. أكتب المجموعة الأساسية لعدد الحالات الممكنة (فضاء العينة Ω) ؟
2. عبر عن الأحداث التالية من خلال مجموعات جزئية من المجموعة الأساسية:
3. A: الحصول على صورة مع عدد زوجي.
4. B: الحصول على كتابة مع عدد فردي.
5. عبر عن الأحداث التالية: وقوع A أو B ، وقوع Aو B .
6. أحسب احتمال وقوع A أو B ، وقوع A و B.

التمرين الخامس:

فيما يلي التوزيع التكراري لعينة عشوائية حجمها 100 من خريجي كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير لجامعة الوادي، حسب التخصص ونوع المهنة:

المهنة / التخصص	قطاع حكومي	قطاع خاص	عمل حر	$\sum$
ع التسيير	15	5	10	30
ع تجارية	8	17	10	35
ع اقتصادية	12	10	13	35
$\sum$	35	32	33	100

فإذا اختير أحد الخريجين بطريقة عشوائية، أحسب احتمال:

1. أن يكون من خريجي قسم العلوم الاقتصادية ويعمل بالقطاع الخاص.
2. أن يكون ممن يعملون بالقطاع الحكومي أو من خريجي قسم العلوم تجارية..
3. أن يكون من خريجي قسم العلوم تجارية أو من خريجي قسم العلوم الاقتصادية.
4. إذا علم أن الفرد من خريجي قسم العلوم تجارية، فما احتمال أن يكون مما يعملون عملا حرا.

التمرين السادس:

في كلية العلوم الاقتصادية وجد أن نسبة النجاح في مادة الرياضيات هي 85% وفي مادة الإحصاء هي 75% كما وجد أن نسبة النجاح بالنسبة للمادتين 70%.

1) أحسب احتمال أن يكون طالب ما ناجحا في الإحصاء علما أنه ناجح في الرياضيات؟
2) أحسب احتمال أن يكون طالب ما ناجحا في الرياضيات علما أنه ناجح في الإحصاء؟
3) أحسب احتمال أن يكون طالب ما ناجحا في الإحصاء أو في الرياضيات أو في المادتين معا؟
4) أحسب احتمال أن يكون طالبراسب في كلا المادتين معا؟
5) أحسب احتمال أن يكون طالب ناجحا في إحدى المادتين و راسب في الأخرى؟

التمرين السابع:

يفترض أن تصل طائرتان إلى مطار الوادي في وقت واحد من أجل إمكانية تبادل الركاب والبريد، إحدى الطائرتين تقلع من مطار الجزائر العاصمة و الأخرى من مطار سطيف، قدر احتمال تأخر الطائرة الأولى بـ 0,3، و احتمال تأخر الطائرة الثانية بـ 0,1، ولنفترض أن تأخر طائرة الجزائر العاصمة (A) مستقل عن تأخر طائرة سطيف (B).

1) أحسب احتمال تأخر الطائرتين؟
2) أحسب احتمال أن تتأخر الطائرة الأولى وتصل الثانية في الوقت المحدد؟
3) أحسب احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في الوقت المحدد؟

التمرين الثامن:

ترغب شركة إعلامية في شراء حقوق البث التلفزيوني للألعاب الأولمبية، وترتبط حظوظها في الحصول على العقد بالمدينة التي ستحظى بتنظيم اللعاب. هناك ثلاث مدن متنافسة على احتضان الألعاب حظوظها كالتالي: المدينة (A): 0.4 المدينة(B): 0.3 ، المدينة(C):0.3.

- في حالة فوز المدينة (A) فاحتمال الحصول على الصفقة قدر بـ 0.2.
- في حالة فوز المدينة (B) فاحتمال الحصول على الصفقة قدر بـ 0.6.
- في حالة فوز المدينة (C) فاحتمال الحصول على الصفقة قدر بـ 0.5.

– أحسب احتمال حصول الشركة الإعلامية على حقوق البث التلفزيوني؟

التمرين التاسع:

في دراسة إحصائية لإحدى الدول تبين أنه في كل 1000 شركة صغيرة تعلن 10 منها الافلاس كل سنة، و في كل 1000 شركة كبيرة تعلن 02 الافلاس في كل سنة.

✓ فإذا كان لدينا شركة أعلنت إفلاسها، أحسب احتمال ان تكون هذه الشركة صغيرة، علما ان احتمال ان تعلن شركة صغيرة بالإفلاس هو 0.7.

التمرين العاشر:

في إحدى المصانع المصابيح الكهربائية إذا كانت الآلات M_1 وM_2 و M_3 تصنع على الترتيب 0.30 و 0.30 و 0.40 من مجموع الإنتاج و إذا كان 1% و 3% و 2% من إنتاج الآلات إنتاج معيب، سحب مصباحا عشوائيا منإنتاج أحد الأيام:

1) أحسب احتمال أن يكون معيب؟
2) فإذاوجد أنه معيب فما هو:

✓ احتمال أن يكون من إنتاج الآلة M_1 ؟
✓ احتمال أن يكون من إنتاج الآلة M_2 ؟
✓ احتمال أن يكون من إنتاج الآلة M_3 ؟

جامعة الوادي

كلية العلوم الإقتصادية و التجارية و علوم التسيير

السنة أولى ل.م.د

سلسلة تمارين رقم (2) المتغيرات العشوائية

التمرين الأول:

في صندوق توجد سبع قاروات ماء معدني منها أربع زجاجات من نوع إفري (I) والباقي ماء سعيدة (S)، سحبنا قارورتين من الصندوق بطريقة عشوائية، لنفترض أن X متغير عشوائي يدل على عدد القارورات من نوع إفري المسحوبة.

1) أكتب التوزيع الاحتمالي لـX ، ومثله بيانياً؟.
2) أوجد دالة التوزيع $F(X)$ ومثلها بيانياً؟
3) ما هو إحتمال أن نسحب قارورة إفري على الأقل؟.

التمرين الثاني:

نختار عشوائيا عائلة لديها 4 أطفال من مجتمع تتعادل فيه نسبة المواليد من الجنسين. نرمز بـ X لعدد الأولاد و Y لعدد البنات.

1) أكتب التوزيع الإحتمالي لكل من X و Y.
2) أحسب دالة التوزيع لـ X و Y. ثم أحسب عن طريق $F(X)$ إحتمال ولدين على الأكثر.

التمرين الثالث:

نسحب 3 كريات بدون إرجاع من صندوق يحتوي 5 كريات بيضاء و 3 حمراء. نرمز بـ X لعدد الكريات البيضاء و بـ Y لعدد الكريات الحمراء.

1) أكتب التوزيع الإحتمالي لكل من X و Y ثم أحسب $E(X)$ و $E(Y)$.
2) أحسب $F(X)$ و$F(Y)$.
3) أحسب $P(X \leq 3)$، $P(1 < X \leq 3)$ و $F(Y = 3)$

التمرين الرابع:

قناصان يرمي كل واحد منهما طلقة على هدف، الأول يصيب الهدف بإحتمال قدره 0.45 والثاني يصيبه بإحتمال قدره 0.7 ، وليكن لدينا المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد المرات التي يصيب فيها الهدف من طرف القناص الأول والمتغير Y يمثل نفس الشيء بالنسبة للقناص الثاني.

1) أوجد التوزيع الاحتمالي لكل من X و Y .
2) ليكن لدينا $Z = X - Y$ أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Z.
3) أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي Z ومثله بيانياً.
4) أحسب التوقع الرياضي و الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي Z.

التمرين الخامس:

لتكن X متغيرة عشوائية دالة كثافتها معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ cx & 0 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

أحسب c، $F(X)$، $E(X)$ ، $V(X)$ ، $P\left({}^{1}/_{2} < X \leq {}^{3}/_{2}\right)$، $P(X > 1)$.

التمرين السادس:

لتكن دالة التوزيع المعرفة كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 1 & x \geq 3 \\ cx^3 & 0 \leq x < 3 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

أحسب $f(x)$، c، $P(X < 1)$، $P(1 < X \leq 2)$.

التمرين السابع:

لتكن دالة الكثافة الإحتمالية المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-3x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

أحسب c، $F(X)$، $E(X)$ ، $V(X)$ ، $P(X < 2)$، $P(1 < X \leq 3)$، $P(X > 1)$ و $P(X \leq -1)$.

التمرين الثامن:

لتكن دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية X المعرفة كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

أحسب $f(x)$، $E(X)$، $E(X^2)$، $V(X)$، $P(X > 2)$، $P(-3 < X \leq 4)$

التمرين التاسع:

تمثلت تقديرات قسم المبيعات بمؤسسة ما لسعر البيع الوحدوي لأحد أصناف المنتج كما يلي:

سعر البيع	2500	5000	8500
الإحتمال	0.50	0.35	0.15

إذا كانت التكاليف المتغيرة للوحدة هي 4000 و.ن هل تقترح الإقدام على عملية إنتاج هذا الصنف من المنتج؟

التمرين العاشر:

ليكن X وY متغيرتان عشوائيتان مستقلتان، حيث: $E(X) = 8/3$ و $E(Y) = 30/8$، و لتكن $Z = X * Y$ و $W = 3X + 2Y$

1) أحسب $E(Z)$، $E(X + 5)$، $E(Y - 3)$، $E(W)$، $E\big(Y - E(Y)\big)$
2) أحسب $V(W)$، $V(X - 10)$، $V(X + 5)$ إذا علمت أن $V(X) = V(Y) = 5$

جامعة الوادي

كلية العلوم الإقتصادية و التجارية و علوم التسيير

السنة أولى ل.م.د

سلسلة تمارين رقم (3) : التوزيعات الاحتمالية

التمرين الأول:

نختار عشوائيا عائلة لديها 4 أطفال في مجتمع تكون نسبة المواليد فيه من الذكور 0.4 ، ونرمز بـ X للمتغير الذي يمثل عدد الأولاد.

1) ماهي قيم التي يأخذها المتغير X ، و أي توزيع يتبع.
2) أحسب إحتمال لدى العائلة ولدين على الأكثر.
3) أحسب إحتمال لدى العائلة أكثر من ولدين.
4) أحسب العدد المتوقع لذكور في هاته العائلة.

التمرين الثاني:

إذا كانت نسبة الوحدات المعيبة في انتاج نوع من المصابيح الكهربائية هي 0.02 و أن عدد الوحدات المعيبة يتبع توزيع بواسون، نفرض أننا سحبنا عينة عشوائية من عشرة مصابيح، المطلوب:

1. ايجاد قانون التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير.
2. احتمال الحصول على مصباح واحد معيب.
3. احتمال الحصول على مصباح معيب على الاكثر.
4. أوجد العدد المتوقع للمصابيح المعيبة في العينة.

التمرين الثالث:

إذا كان الدخل السنوي للأسر في أحد مناطق يتبع توزيع طبيعي متوسطه 20 ألف دينار، وتباينه900 دينار والمطلوب:

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.
2- كتابة شكل دالة الكثافة الاحتمالية.
3- ما هي نسبة الأسر التي يقل دخلها عن 15 ألف دينار.
4- ما هي قيمة دخل الأسرة ذات نسبة 0.975 ؟

التمرين الرابع:

لنفرض أن مستوى هيموجلوبين الدم في أحد المجتمعات البشرية يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 16 وانحراف معياري 0.9.

1. إذا اخترنا أحد الأشخاص بشكل عشوائي فما هو احتمال أن يكون مستوى هيموجلوبين الدم لديه أكبر من 14.
2. ماهي نسبة الأشخاص الذين مستوى هيموجلوبين الدم لديهم أكبر من 14.
3. ما هي نسبة الأشخاص الذين يتراوح مستوى هيموجلوبين الدم لديهم من 14 إلى 18.