جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

# محاضرات في الإحصاء 3

مطبوعة دروس مدعمة بتمارين وتطبيقات، موجهة للسنة الثانية علوم تجارية

من إعداد: د/ لطفي مخزومي

2019/2018

## الفصل الخامس: الاحصاء اللامعلمي.



## الفصل السادس: تمارين محلولة

# المقدمة

## مقدمة:

الإحصاء هو علم الذي يبحث في طريقة جمع البيانات عن الظواهر التي تحيط بنا سواء كانت علمية أو اقتصادية أو اجتماعية، وفي كيفية تسجيل هذه الحقائق والبيانات في صورة دقيقة، ثم وصفها بصورة سهلة تبين علاقات واتجاهات هذه الظواهر، وأخيرا يبحث في دراسة هذه العلاقات والاتجاهات ووضعها في صورة يسهل معها فهم الظواهر المراد دراستها.

كما يعرف علم الإحصاء بأنه علم اتخاذ القرارات في جميع نواحي الحياة، وذلك من خلال جمع ودراسة وتحليل البيانات المتوفرة واستخلاص النتائج عن الظواهر المدروسة المدروسة مما سبق يمكن تصنيف الإحصاء كعلم إلى قسمين رئيسيين هما:

**1 – الإحصاء الوصفي Statistique descriptive**: وهو ذلك الفرع من الإحصاء الذي يتناول طرق تنظيم وتلخيص وعرض البيانات في صورة مبسطة.

**2 – الإحصاء الاستدلالي Statistique inferentiel**: وهو ذلك الفرع من الإحصاء الذي يهتم بطرق الوصول إلى نتائج معينة أو توقعات ما عن المجتمع من خلال دراسة عينة من ذلك المجتمع.

فإذا كانت لدينا كمية كبيرة من البيانات العددية، فإن الإحصائي سيحاول أن يرتبها في صورة تجعل من السهل قراءتها وفهمها، وقد يتضمن هذا:

– تبويب البيانات وتقديمها في شكل جداول تكرارية، أو في شكل منحنيات بيانية ليسهل فهم معناها فورا.

– حساب بعض المقاييس أو المؤشرات الإحصائية مثل النسب أو المتوسطات.

وتدخل العمليات السابقة في نطاق الإحصاء الوصفي، أما الإحصاء الاستدلالي فهو يختص بـ:

– إجراء التنبؤات والتقديرات والاستنتاجات عن مجموعة من المتغيرات أكبر من تلك التي تمت ملاحظتها فعلا.

# الفصل الأول: توزيع المعاينة

### I- مقدمة:

لدراسة أي مشكلة علمية نحتاج إلى جمع كل ما يتعلق بتلك المشكلة من معلومات و تسمى مجموعة العناصر المتعلقة بتلك المشكلة المجتمع الاحصائي وتبدأ أي دراسة إحصائية بالبيانات المتوفرة عن الدراسة و التي يتم جمعها بعد أن يحدد الباحث أهداف الدراسة الاحصائية.

وتهدف نظرية العينات إلى دراسة العلاقات و الخصائص الموجودة لتوزيع متغيرة عشوائية لمجتمع و توزيعها في العينة المسحوبة من هذا المجتمع ، وحتى تكون العلاقات المدروسة مقبولة يجب احترام شروط سحب العينات و التي تعتمد اساسا على الاختيار العشوائي أي نعطي نفس الحظوظ لكل أفراد المجتمع.

### II- مفاهيم:

1. **المجتمع Population**: هو جميع العناصر المشتركة في الصفة التي تهم الباحث في دراسته، فقد يكون المجتمع مثلا عدد سكان مدينة، أو طلبة جامعة التكوين المتواصل، أو المساحات الزراعية في الجزائر أو إنتاج آلة معينة ... إلخ.
2. **المجتمعات اللامحدودة و المجتمعات المحدودة** :يجب التفريق بين العينات المسحوبة من مجتمعات كبيرة لا نهائية (غير محدودة )، وبين المجتمعات المحدودة، وذلك بسبب اختلاف خصائص توزيعات المعاينة، للعينات المسحوبة من المجتمعات الكبيرة عن تلك المسحوبة من المجتمعات المحدودة أو الصغيرة .

   فعند سحب عينة من المصابيح من انتاج مصنع معين، فإننا بلا شك نسحب من مجتمع كبير وهو انتاج المصنع ولكن عند سحب عينة من طلبة كلية العلوم الاقتصادية، فإننا بلا شك نسحب من مجتمع محدود، وكذلك عند سحب عينة مكونة من 10 مفردات من بين مجتمع مكون من مائة مفردة أكثر من مرة، وعندها يمكن اعتبار المجتمع غير محدود أو لا نهائي، أما إذا كان السحب بدون إعادة فيمكن اعتبار سحبها من مجتمع محدود.

3. **العينة Echantillon**: هي جزء من المجتمع تحت الدراسة مثل مجموعة من سكان مدينة، أو مجموعة من طلبة جامعة التكوين المتواصل، أو بعض المساحات الزراعية في الجزائر ...الخ.
4. **الظاهرة Phénomène**: هي صفة لعناصر تختلف من عنصر لآخر في شكل أو النوع أو الكمية، ويطلق على الصفة تحت الدراسة متغير variable مثل طول شخص ما، عدد الأخطاء الإملائية في بحث ما، سرعة سيارة بين مدنيين خلال أسبوع ... الخ.
5. **المتغير Variable**: هو الصفة تحت الدراسة كما أشرنا أعلاه أو هو الشيء الذي يمكن أن يأخذ قيما مختلفة في الظروف المختلفة (زمنية، مكانية، سياسية، اقتصادية ... الخ) فمثلا سعر التمر يختلف من يوم لآخر ويختلف في نفس السوق من سنة لأخرى.

### III- توزيع المعانية للوسط الحسابي:

إن توزيع المعانية للوسط يعبر عنه بتحديد القيمة المتوقعة للمتوسط الحسابي (Estimation) $E(\bar{x})$ وبالانحراف المعياري لمتوسطه $\sigma_{\bar{x}}$ لتوزيع أوساط العينة لكون الانحراف المعياري يدل على دقة وسط العينة كنقطة تقدير فهو عادة ما يسمى بالخطأ المعياري للوسط .

وتعطى العلاقة للقيمة المتوقعة و الخطأ المعياري للوسط بالعلاقتين التاليتين :

$$\mathbf{E}(\bar{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{\mu} \quad ؛ \quad \boldsymbol{\sigma}_{\bar{\boldsymbol{x}}}=\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$$

**مثال(1):**

لنفترض مجتمع كبير وسطه $\boldsymbol{\mu = 50}$ وانحرافه المعياري $\boldsymbol{\sigma = 12}$ حدد توزيع المعاينة الاوساط عينة حجمها $\boldsymbol{n = 36}$ بدلالة القيمة المتوقعة و الخطأ المعياري للعينة

**الحـــل:**

$$E(\bar{X}) = \mu = 50 \quad ؛ \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{36}} = 2$$

**ملاحظة:**

1. عند ما تكون العينة لمجتمع محدود يجب أن يتضمن معادلة الخطأ المعياري معامل التصحيح وتصبح علاقة الخطأ المعياري للوسط كمايلي:

$$\boldsymbol{\delta_{\bar{X}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

- تقصد بالمجتمع محدود (السحب دون ارجاع) عندما تكون: $\boldsymbol{n > 0.05N}$
- أما المجتمع غير المحدود (السحب بإرجاع ) N كبيرة جدا مقابل $n$ أي: $\boldsymbol{n \leq 0.05N}$

2. إذا كان الانحراف المعياري لمجتمع مجهول فإن الخطأ المعياري للوسط يمكن تقديره بإستعمال الانحراف المعياري للعينة:

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

**S**:الانحراف المعياري للعينة.

**مثال(02):**

عينة عشوائية حجمها 16 سحبت من مجتمع حجمه 900 وسطه الحسابي 20 وانحرافه المعياري 12. أوجد الوسط الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للوسط.

$$E(\bar{X}) = \mu = 20$$

نختبر ما اذاكان المجتمع محدود وذلك من خلال مقارنة $0.05N$ بحجم العينة.

بما أن $16 < 45 = 0.05(900)$ مجتمع غير محدود.

$$\delta_{\bar{X}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{16}} = 3$$

**مثال (03):**

أوجد الوسط الانحراف المعياري لتوزيع المعانية للوسط للمثال السابق اذاكان حجم العينة المسحوبة هو 64 .

$$E(\bar{X}) = \mu = 20$$

نختبر ما اذاكان المجتمع محدود وذلك من خلال مقارنة $0.05N$ بحجم العينة.

بما أن $64 > 45 = 0.05(900)$ مجتمع محدود.

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{12}{8} \cdot \sqrt{\frac{900-64}{900-1}} = 1.44$$

**مثال(04) :**

عينة عشوائية حجمها $n =$ سحبت من مجتمع حجمه 100، إذا علمت أن الانحراف المعياري للعينة $s = 57$

المطلوب:

أحسب الخطأ المعياري للتوزيع وسط المعاينة.

**الحل :**

$$\delta_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{57}{\sqrt{16}} \cdot \sqrt{\frac{100-16}{100-1}} = 13.12$$

**مثال (05):**

لدينا مجتمع إحصائي متقطع حجمه N=4 مفردات، مكون من القيم{0,2,4,6}:

الوسط الحسابي $\mu = \frac{0+2+4+6}{4} = 3$

التباين $\sigma^2 = \frac{(0-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2}{4} = 5$

لو فرضنا مثلا انه تم سحب جميع العينات الممكنة مع الاعادة ذات الحجم $n = 2$ ثم حسبنا $\bar{x}$ لكل عينة، فإن عدد العينات الممكن سحبها مع الاعادة يعطي بالعلاقة: $N^2 = 4^2 = 16$

و إن قيم $\bar{x}$ للعينات العشوائية المحسوبة تتأرجح بين (6،0).

| $\bar{x}$ | العينة | | رقم العينة | $\bar{x}$ | العينة | | رقم العينة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 4 | 9 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 2 | 4 | 10 | 1 | 2 | 0 | 2 |
| 4 | 4 | 4 | 11 | 2 | 4 | 0 | 3 |
| 5 | 6 | 4 | 12 | 3 | 6 | 0 | 4 |
| 3 | 0 | 6 | 13 | 1 | 0 | 2 | 5 |
| 4 | 2 | 6 | 14 | 2 | 2 | 2 | 6 |
| 5 | 4 | 6 | 15 | 3 | 4 | 2 | 7 |
| 6 | 6 | 6 | 16 | 4 | 6 | 2 | 8 |

وان الجدول الاحتمالي لتوزيع معاينة الاوساط الحسابية$\bar{x}_i$:

| $\bar{x}_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(\bar{x}_i)$ | 1/16 | 2/16 | 3/16 | 4/16 | 3/16 | 2/16 | 1/16 |

لو رسمنا المدرج التكراري، نلاحظ ان توزيع المعاينة للاوساط الحسابية ( $\bar{x}_i$) للعينات يمن أن يقترب وبشكل جيد من منحنى التوزيع الطبيعي والذي يرمز لمتوسطه بـ $\mu_{\bar{x}}$ و تشتته بـ $\sigma^2_{\bar{x}}$:

$$\mu_{\bar{x}} = \sum \bar{x}_i\, P(\bar{x}_i) = 0.(1/16) + 1.(2/16) + 2.(3/16) + 3.(4/16) + 4.(3/16) + 5.(2/16) + 6.(1/16) = 3$$

وهي نفس قيمة $\mu$ إذا:

$$E(\bar{x}) = \mu$$

لذلك نقول ان $E(\bar{x})$ هو تقدير غير متحيز لـ $\mu$

أي أن الوسط الحسابي لتوزيع معاينة الأوساط الحسابية هو تقدير غير متحيز للوسط الحسابي للمجتمع وذلك مهما كان عدد العينات المسحوبة منه عشوائيا.

ويحسب التباين من العلاقة:

$$\sigma^2_{\bar{x}_i} = \sum (\bar{x}_i - \mu_{\bar{x}})^2\, P(\bar{x}_i)$$
$$= (0-3)^2.(1/16) + (1-3)^2.(2/16) + (2-3)^2.(3/16) + (3-3)^2.(4/16) + (4-3)^2.(3/16) + (5-3)^2.(2/16) + (6-3)^2.(1/16) = 5/3$$

يمكن أن نلاحظ بسهولة أن توزيع معاينة الاوساط الحسابية لـ 64 عينة من الحجم $n = 3$ و مجتمع $N = 4$ مختارة مع الاعادة تكون أقرب الى التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_{\bar{x}}$=3 و تشتت $\sigma^2_{\bar{x}_i} = 5/3$، وكما نلاحظ فإن الوسط الحسابي $\mu_{\bar{x}}$ يساوي دوما متوسط المجتمع الذي سحبت منه العينات، أما بالنسبة للتشتت ($\bar{x}_i$) فهو يساوي دائما تشتت المجتمع الاصلي مقسوما على $n$ أي: $\sigma^2_{\bar{x}_i} = \sigma^2/n = 5/3$

**نظرية (01)**:

اذا كانت $X_1, X_2, \dots \dots . . X$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي وسطه $\mu$ وتباينه $\boldsymbol{\sigma^2}$ فإن المتغير $\boldsymbol{\bar{X} \backsim N(\mu \cdot \frac{\sigma^2}{n})}$ أي:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \text{ يخضع لتوزيع طبيعي معياري } \mathbf{N(0,1)}$$

**مثال(06)**:

إذا كان X متغيرا عشوائيا وسطه 185.6 وانحرافه المعياري 12.7.فما هو احتمال أن الوسط الحسابي لعينة حجمها 36 أخذت من هذا التوزيع يزيد عن 190.

$$p(\bar{X} > 190) = p\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{190-185.6}{12.7/_6}\right) = p\left(Z > \frac{4.4}{12.7/_6}\right) = p(Z > 2.07)$$

$$= 1 - p(Z \leq 2.07) = 1 - 0.9807 = 0.019$$

**نظرية** (02) :

اذا كان $X_1, X_2, \ldots \ldots . . X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu \cdot \sigma^2)$ (نجهل قيمة $\sigma^2$)

وإذا كان $\bar{x}$ وسط هذه العينة و $S^2$ تباينها فإن المتغير العشوائي:

$\frac{\bar{X}-\mu}{S/_{\sqrt{n}}}$ يخضع لتوزيع ستودنت بدرجة حرية $(n-1)$ في حالة حجم العينة صغير $(n < 30)$

ويخضع لتوزيع طبيعي في حالة حجم العينة كبيرة $(n \geq 30)$

**مثال** (07) :

اذا علمت أن علامات الاحصاء تخضع لتوزيع طبيعي وسطه 70 وأخذت عينة عشوائية حجمها 16طالبا ووجد أن الانحراف المعياري لعلاماتهم $S = 8$.

المطلوب:

أحسب احتمال أن يزيد وسط علامات العينة عن 74.

**الحل** :

$$p(\bar{X} > 74) = p\left(\frac{\bar{X}-\mu}{s/_{\sqrt{n}}} > \frac{74-70}{8/_{\sqrt{16}}}\right) = \mathrm{p}(\mathrm{t} > 2) = 1 - \mathrm{p}(\mathrm{t} \leq 2) == 1 - 0.975$$
$$= 0.025$$

### IV– توزيع المعاينة للفرق بين وسطي عينتين عشوائيتين:

عند سحب عينتان عشوائيتان مستقلتان حجم كل منها $n_2, n_1$ من مجتمعين كبيرين غير محدودين وسطهما $\mu_2, \mu_1$ وتباين تشتهما $\sigma_2^2, \sigma_1^2$ على التوالي فإن توزيع الفرق بين وسطين العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ هو تقريبا توزيع طبيعي وسطه:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$$

أما تباين الفرق هو :

$$\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

بحيث:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \sim N\left(\mu_1 - \mu_2 ; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

ومنه فإن:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

**ملاحظة:**

كلما كانت $n_2, n_1$ أكبر من 30 يكون التوزيع قريب جدا من التوزيع الطبيعي.

**مثال(08):**

أخذت عينة حجمها 30 من توزيع وسطه 60 و تبانيه 15 وأخذت عينة و أخرى من توزيع أخر مستقل عن التوزيع الأول وسطه 75 وتبانيه25.

المطلوب:

أوجد كلا من : $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ ; $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$

**الحل :**

$$n_1 = n_2 = 30$$
$$\mu_1 = 60 \quad ; \quad \sigma_1^2 = 15$$
$$\mu_2 = 75 \quad ; \quad \sigma_2^2 = 25$$

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = 60 - 75 = -15$$

$$\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \frac{15}{30} + \frac{25}{30} = \frac{4}{3} = 1.33$$

**مثال(09):**

اذا كانت الأجور اليومية لعمال أحدى الشركات X تخضع التوزيع الطبيعي $X \sim N(5; 0.5)$ و كانت الاجور اليومية للعمال شركات أخرى Y تخضع للتوزيع طبيعي $Y \sim N(4; 0.25)$ أخذنا عينة من الشركات الأولى حجمها 20 وعينة من الشركات الثانية حجمها 10 .

المطلوب:

أوجد الاحتمال التالي :

$$p(\overline{X}-\overline{Y}\leq 0.75)$$

حيث $\overline{x}$ متوسط العينة الأولى و $\overline{y}$ متوسط العينة الثانية.

$$p(\overline{X}-\overline{Y}\leq 0.75)=\mathrm{p}\left(\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\leq\frac{0.75-(5-4)}{\sqrt{\frac{0.5}{20}+\frac{0.25}{10}}}\right)$$

**V- توزيع المعاينة للنسب:**

اذا أخذت عينة حجمها $n$ من مجتمع احصائي يخضع لتوزيع ذي الحدين الذي نسبته $\mathbf{p}$، ووجد أن النسبة في العينة هي $\overline{p}$ فان $\overline{p}$ يخضع تقريبا لتوزيع طبيعي وسطه $\mathbf{p}$ وتباينه $\frac{p(1-p)}{n}$.

**مثال** (**10**) :

إذا كان احتمال رسوب طالب هو 0.40 وأخذت عينة حجمها 25 طالبا أوجد الاحتمال التالي: $p(\overline{p}\leq 0.3)$

**الحل** :

نعلم أن $\overline{\phantom{p}}$ يخضع لتوزيع طبيعي:

$$\overline{p}\backsim N\left(p;\frac{p(1-p)}{p}\right)$$

$$\overline{p}\backsim N\left(0.4;\frac{0.4\times 0.6}{25}\right)$$

$$\overline{p}\backsim N(0.4;0.0096)$$

$$\mathrm{p}(\overline{p}\leq 0.3)=p\left(\frac{\overline{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\leq\frac{0.3-0.4}{0.0096}\right)=p(Z\leq -1.02)=0.5-p(Z\leq 1.02)$$

$$=0.5-0.3461=0.153$$

**VI– توزيع المعاينة للفرق بين نسبتين:**

اذا أخذت عينتان مستقلتان حجمها $n_1$ و $n_2$ من مجتمعين يخضع أولهما لتوزيع ذي الحدين ذو النسبة $p_1$ و الثاني لتوزيع ذي الحدين ذو النسبة $p_2$ فإن الفرق بين النسبيتين من العنتين $\overline{p}_1 - \overline{p}_2$ يخضع تقريبا لتوزيع طبيعي وسطه $p_1 - p_2$ وتباينه

$$\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$$

عندما تكون $n_1$ و$n_2$ كبيرة .

**VII– توزيع المعاينة للتباين:**

إذا كانت $X_1, X_2, \dots \dots . . X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

وكان $S^2$ تباين هذه العينة وكانت $\sigma^2$ معلومة فإن:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$$

**مثال** (**11**):

إذا كانت $x_1, X_2, \dots \dots . . X_{10}$ عينة عشوائية من توزيع $\mathrm{N}(\mu; 9)$ تباينها $\sigma^2$ أوجد قيمة $C$ :

$$\mathrm{p}(S^2 \le C) = 0.95$$

**الحل:**

$$\mathrm{p}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \frac{C\cdot(10-1)}{9}\right) = 0.95 \;\; \Rightarrow p(X^2 \le C) = 0.95$$

بالرجوع للجدول كاي تربيع بدرجة حرية 9 نجد:

قيمة $\mathrm{C} = 16.9$

# تمارين غير محلولة

**التمرين (01):**

أجريت دراسة على مؤسسة لقياس درجة الجودة .بها 800 وحدة بوسط حسابي قدره 16 وانحراف معياري قدره 8. للقيام بذلك أخذت عينة عشوائيا.

المطلوب:

أوجد الوسط الانحراف لتوزيع المعاينة للوسط الحسابي اذا كانت $n = \{70\ ;\ 50\ ;\ 30\}$

**التمرين (02):**

مجتمع مكون من 12000 عنصر بوسط 100 وانحراف معياري 60.

المطلوب: أوجد الوسط والخطأ المعياري لتوزيع المعاينة للوسط عندما يكون حجم العينة 100 ثم 900.

**التمرين(03):**

تنتج شركة منتوجين A و B و لدراسة مردود به إنتاجها فأخذت عينة حجمها20 وحدة من A يتوزيع وسطه 45 وتباينه 10 وذلك للمنتوج الأول .وكما أخذت عينة أخرى من المنتوج الثاني حجمها 60 ووسطها 40 و تبينها 25.

المطلوب:

حساب كلا من $\sigma_{\bar{X},\bar{Y}}$ ; $\mu_{\bar{x},\bar{Y}}$

**التمرين (04):**

الطاقة القصوى الانتاجيه لعمال مؤسسة لصناعة الافرشة ذات طراز الرفيع 600 و إذا عملت أن إنتاج العمال يخضع للتوزيع الطبيعي وسطه 67 و انحرافه 20 يوما .

المطلوب:

ماهو احتمال أن ينتج 50 عاملا من المؤسسة أكثر من طاقتها القصوى .

**التمرين رقم(05):**

اذا كان أعمار الموظفين في إحدى الدوائر الحكومية يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 30 و انحراف معياري قدره 9.

المطلوب: اوجد توزيع المعاينة لعينة عشوائية من 36 موظف.

**التمرين رقم(06)**:

لدى بنك محلي صغير 1450 حساب ادخار شخصي برصيد متوسط قدره 3000$ و انحراف معياري 1200$. اذا أخذ البنك عينة عشوائية من 100حساب.

المطلوب:

ما احتمال أن متوسط المدخرات لهذه الحسابات المئة سيكون أقل من 2800$ ؟

**التمرين رقم(07)**:

من مجتمع مكون من الأعداد الخمسة الآتية: 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 .

المطلوب:

- أوجد كلا من ($\mu$) و ($\sigma$).
- توزيع المعاينة النظري للوسط لحجم العينة 2.
- حساب كلا من $\bar{x}$ و $\sigma_{\bar{x}}$ .

**التمرين رقم (08)**:

بالنسبة لمجتمع مكون من 1000مفردة، بوسط $\mu = 50$ وانحراف معياري $\sigma = 10$ .

المطلوب:

ماهو الوسط والخطأ المعياري لتوزيع المعاينة للوسط العينة من حجم (25) و (81)؟

**التمرين رقم (09)**:

ما هو احتمال أن يقع $\bar{x}$ بين 49 و 50 لعينة عشوائية من 36 مفردة من مجتمع بمتوسط $\mu = 48$ و $\sigma = 12$ ؟

**التمرين رقم (10)**:

ما احتمال أن يقع متوسط عينة من 144 حسابات مدينين مسحوبة من مجتمع به 2000 من الحسابات بمتوسط 10000 $ وانحراف معياري 4000 $ بين 9500 $ و 10500 $؟

# الفصل الثاني: تقييم المقدر النقطي

**I– مقدمة :**

نحتاج أحيانا إلى معرفة بعض المقاييس الاقتصادية (أي التي تقيس الظواهر اقتصادية معينة)، ولا تكون لدينا الامكانيات الضرورية لإجراء عد شامل لكل وحدات المجتمع الاحصائي، وحتى نصل إلى قيم دقيقة ومؤكدة لهذه الظواهر نستعين بدراسة العينات إلا أنه مهما راعينا الدقة والأساليب العلمية الصحيحة في سحب العينات لا نستطيع أن نأكد أن القيم التي نصل إليها من هذه العينات تكون صحيحة وكاملة الدقة ومؤكدة تماما لهذا نقول أن النتائج التي نصل إليها تقديرات (Estimators) بينما نسمي مقايس المجتمع بالمعالم (Parameters) تسمى هذه التقديرات بالتقدير بنقطة (Point Estimation) حيث أن التقدير $\hat{\theta}$ هو عبارة عن اقتران يعتمد على مشاهدات العينة، ويلاحظ أن $\hat{\theta}$ لن تعطي قيمة مساوية للمعلمة $\theta$ بمعنى أنه لا يمكن أن تكون نتائج العينة نفس النتائج التي يمكن أن نصل إليها لو أجرينا العد الشامل بجمع كل المعلومات المطلوبة لجميع وحدات المجتمع الاحصائي لأنها تعتمد على المشاهدات في العينة فلو أخذنا عينة أخرى من المجتمع نفسه لحصلنا على قيمة أخرى لـ $\hat{\theta}$ وهذا يعود إلى ما يسمى بخطأ المعاينة وكلما كبر حجم العينة كلما قل هذا الخطأ واقترب التقدير من المعلمة. وعندما نقول أن نتائج العينات هي تقديرات نعلم أن لها درجه ثقة معينة وتبعا لكل درجة من درجات الثقة يكون هناك خطأ معين لهذه العينات. توضيحا لهذه الفكرة نقدم المثال التالي:

**مثال (01):**

لنفرض أن لدينا مجتمعا مكونا من خمس مشاهدات تمثل أوزان قطع من الذهب بالكيلو غرام 3،5،4،1،2 فإن متوسط وزن هذه القطع هو (المعلمة) $\mu = 3$ فإذا قمنا باختيار عينة مكونة من ثلاث قطع، ووجدنا جميع العينات الممكنة المختلفة والتي عددها عشرة عينات فسيكون لكل منها متوسط كمايلي:

3.33 ، 2.33 ، 2.67 ، 4 ، 2 ، 3.67 ، 3 ، 3.33 ، 2.67 ، 3

ولذلك لابد من وجود اختلاف مابين قيمة المعلمة وقيمة التقدير و لا نستطيع تحديد ذلك مسبقا. ولو اخترنا عينة من أربع مشاهدات لكانت متوسطات العينات الخمسة هي:

3 ، 3.5 ، 3.25 ، 2.75 ، 2.5

لاحظ أن قيم المتوسطات أقرب لمتوسط المجتمع (المعلمة) من المتوسطات عندما يكون حجم العينة ثلاثة.[1]

سنقوم باستعراض أهم صفات وخصائص التقديرات الجيدة.[2]

[1] سلمان محمد طشطوش "**أساسيات المعاينة الاحصائية**" دار الشروق للنشر والتوزيع،عمان، الاردن، الطبعة الأولى، 2001، ص 56.

[2] يقصد بالمقدر الجيد هو الذي تكون مفردات توزيعه العيني أو توزيع المعاينة له أكثر من معلمة المجتمع الأصلي المجهولة أي إختيار مقدر النقطة الذي يكون توزيعه العيني أكثر تركزا حول معلمة المجتمع الأصلي المجهول.

**II– خصائص التقدير الجيد:**[3]

**1. عدم التحيز:**

اذاكان $\hat{\theta}$ تقدير للمعلمة θ فإننا نقول بأن $\hat{\theta}$ هو تقدير غير متحيز للمعلمة θ اذا تحققت المعادلة التالية:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

أي يكون التقدير غير متحيزا اذاكان توقعه الرياضي يساوي قيمة المعلمة.

أما اذا تحققت المعادلة التالية: $E(\hat{\theta}) = \theta + A$

فإننا نقول بأن $\hat{\theta}$ هو تقدير متحيز للمعلمة θ وأن مقدار التحيز يساوي A. ويعرف المقدار

$$E(\hat{\theta} - \theta)^2 = MSE$$

على أنه متوسط مربع الخطأ($MSE$) وكلما قل هذا الاخير دل على جودة التقدير، حيث يمكن استخدامه للمقارنة بين المقدرات

فإذا كان التقدير غير متحيز فإن $MSE = Var(\hat{\theta})$

واذا كان التقدير متحيز فإن $MSE = (\hat{\theta}) + A^2$

**مثال(02):**

اذاكانت $x_1, x_2, \dots \dots \dots \dots . x_n$ عينة عشوائية من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه $\sigma^2$ والمطلوب اثبات ان $\bar{x}$ هو تقدير غير متحيز لمتوسط المجتمع μ.

**الحل:**

حيث أن:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

فإن

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i)$$

[3] فتحي أحمد عاروري " **المعاينة الاحصائية طرقها واستخداماتها**" شركة دار الأكاديميون للنشر والتوزيع، عمان، الاردن، الطبعة الاولى، 2015، ص 77.

$$E(\bar{x}) = \left(\frac{n\mu}{n}\right) = \mu$$

أي أن $\bar{x}$ هو تقدير غير متحيز لمتوسط المجتمع .

**مثال (03):**

اثبت أن $S^2$ هو تقدير غير متحيز لتباين المجتمع σ.

**الحل:**

لدينا: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

فإن $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n(\bar{x}-\mu)^2$

$$E(s^2) = \frac{1}{n-1}\left[E\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - nE(\bar{x}-\mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}[n\sigma^2 - \sigma^2]$$

$$= \sigma^2$$

أي أن هو $S^2$ تقدير غير متحيز للمعلمة $\sigma^2$.

**2. الاتساق:**

يعرف التقدير المتسق على أنه التقدير الذي تتناقص فيه دالة المخاطرة بزيادة حجم العينة. ونقول بأن $\hat{\theta}$ هو تقدير متسق للمعلمة $\theta$ اذا حقق الشرطين التاليين:

- ✓ أن يكون التقدير $\hat{\theta}$ غير متحيز للمعلمة $\theta$ .
- ✓ اذا كانت $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) \to 0$

أي أن التقدير المتسق هو تقدير غير متحيز وأن تباينه ينتهي إلى الصفر عندما يكبر حجم العينة. فإذا فرضنا بأن المخاطرة في اختيار مقدار ما يعتمد على عينة حجمها n من المشاهدات من المجتمع الذي معلمته $\theta$ ، حيث تقدير المعلمة $\hat{\theta}$ هو $\hat{\theta}n$ هي:

$$R\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2 = E\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2$$

ومنها فان تعريف المقدر المتسق يمكن وضعه في الصورة التالية:

$$\lim_{n\to\infty} R\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2 = 0$$

أو

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}_n-\theta\right)^2=0$$

ويمكن أن نعرف الاتساق بطريقة أخرى حيث يعرف المقدر المتسق على أنه المقدر الذي يحقق العلاقة التالية:

$$P\left(\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|>\delta\right)<\lambda$$

حيث $\lambda$ و $\delta$ هي قيم صغيرة جدا.

أي ان المقدر $\hat{\theta}$ هو مقدر متسق للمعلمة $\theta$ اذا كانت $\hat{\theta}$ تتقارب احتماليا من المعلمة $\theta$ كلما زاد حجم العينة $n$.

**مثال(04)**:

إذا كانت $x_1, x_2, \dots \dots \dots \dots \dots . x_n$ عينة عشوائية من مجتمع لانهائي له توزيع طبيعي متوسطه $\mu$ وتباينه $\sigma^2$ .

المطلوب: اثبات ان $\bar{x}$ هو تقدير تقدير متسق.

**الحل**:

لقد اثبتنا في المثال السابق أن الوسط الحسابي $\bar{x}$ للعينة هو تقدير غير متحيز للوسط الحسابي للمجتمع $\mu$ أي أن:

$$E(\bar{x})=\mu$$

وتباينه

$$Var(\bar{x})=\frac{\sigma^2}{n}$$

اذا كان المجتمع غير محدود أو كانت المعاينة مع الاعادة وحيث أن:

$$\lim_{n\to\infty} Var(\bar{x})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n}=0$$

فإننا نقول بأن $\bar{x}$ هو تقدير متسق لمتوسط المجتمع $\mu$، و الاتساق يشير إلى عدم وجود فرق معنوي بين التقدير والمعلمة.

1. **الكفاءة النسبية**:

اذا قدرنا أكثر من تقدير للمعلمة فأن التقدير الذي له أقل تباين يعتبر تقديرا أكثر كفاءة.

وتعرف الكفاءة النسبية (R) بأنها

$$\frac{\text{تباين}\left(\text{التقدير الاول}\right)}{\text{تباين}\left(\text{التقدير الثاني}\right)}$$

فإذا كانت RE أقل من 1 فهذا يعني أن التقدير الأول أكثر كفاءة من الثاني أما اذا كانت RE أكبر من 1 فإن التقدير الثاني أكثر كفاءة من الأول، والتقدير الأكثر كفاءة يحتاج الى حجم عينة أصغر للحصول على كفاءة مساوية للتقدير الاخر.

**مثال(05):**

في المثال قمنا بتقدير متوسط المجتمع $\mu$ باستخدام الوسط الحسابي $\bar{x}$ والوسيط .

المطلوب:

اثبت أن الوسط الحسابي أكفئ من الوسيط.

**الحل:**

اثبتنا بان الوسط الحسابي $\bar{x}$ له توزيع طبيعي متوسطه $E(\bar{x}) = \mu$ ، وتباينه $Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$ ويمكن اثبات أن الوسيط له توزيع طبيعي تقاربي بتوقع $\mu$، أي أن :

$$E(Median) = \mu$$

$$Var(Median) = \frac{\sigma^2 \pi}{2n}$$

وبالتالي فان:

$$\frac{Var(\bar{x})}{Var(median)} = \left(\frac{\sigma^2}{n}\right) \Big/ \left(\frac{\sigma^2 \pi}{2n}\right)$$

$$\frac{Var(\bar{x})}{Var(median)} = \left(\frac{2}{\pi}\right) = 2/\frac{22}{7} = \frac{14}{22} = 0.637 < 7$$

ومنها نجد بأن الوسط الحسابي أكفئ من الوسيط.

### 1. الكفاية:[4]

يقال $\hat{\theta}$ ان التقدير كاف اذا تم استخدام جميع المعلومات الموجودة في العينة لتقدير المعلمة $\theta$، اي انه بتحديد قيم العينة فان مشاهدة $\hat{\theta}$ تغني عن هذه القيم.و التعريف الرياضي لذلك:

[44] سليمان محمد طشطوش، مرجع سبق ذكره، ص 60.

ان التقدير $\hat{\theta}$ يسمى تقديرا كافيا للمعلمة $\theta$ اذا وفقط اذا كانت لكل قيم $\hat{\theta}$ التوزيع الشرطي للمتغيرات $x_1, x_2 \dots \dots . x_n$ بمعلوماتية $\hat{}$ يساوي مقدار معين لا يعتمد على $\theta$ .

لتسهيل ذلك يمكن إيجاد تقدير كاف اذا استطعنا ان نجزئ التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرات $x_1, x_2 \dots \dots . x_n$ الى حاصل ضرب اقترانين احدهما يعتمد على $\left(\theta \text{ و } \hat{\theta}\right)$ والاخر يعتمد فقط على $x_1, x_2 \dots \dots . x_n$ اي:

$$f(x_1, x_2, \dots \dots . . x_n, \theta) = g(\hat{\theta}, \theta) * h(x_1, x_2, \dots \dots . . x_n)$$

وهذا يعني ان كل المعلومات المتوفرة عن $\theta$ في العينة قد تم تلخيصها في التقدير $\hat{\theta}$ هذه الخاصية من خواص التقدير الجيد.

فيما يلي مثال يوضح كيفية التثبت من ان التقدير يحقق خصائص التقدير الجيد.

**مثال(06)**:

لتكن $x_1, x_2, \dots \dots . . x_n$ عينة عشوائية من مجتمع له توزيع طبيعي بمتوسط $\mu$ وتباين $\sigma^2$. أثبت أن $\bar{x}$ هو تخصائص القدير يحقق جميع السابقة.

**الحل**:

تم إثبات أنه تقدير غير متحيز في المثال.

تم اثبات أنه تقدير متسق في مثال.

وسنقوم هنا بإثبات أنه تقدير كاف.

$$f(x_1, x_2, \dots \dots \dots . . x_n, \mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} EXP\left[-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n EXP\left[\frac{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

نعلم أن المقدار $\sum(x_i-\mu)^2 = \sum(x_1-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-\mu)^2$

$$f(x_1, x_2, \dots \dots \dots . . x_n, \mu) = \left\{EXP\left[\frac{-n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu)^2\right]\right\}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n EXP\left[-\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right]\right\}$$

$$= \mathrm{g}(\bar{x}, \mu) * h(x_1, x_2, \dots \dots \dots . . x_n)$$

يلاحظ أن المقدار في اليمين بين القوسين الكبيرين لا يعتمد على وانما على فهو يمثل بينما يعتمد المقدار الى يساره على و لذلك يمثل وعليه فإن التقدير في المجتمع الذي له توزيع طبيعي هو تقدير غير متحيز ومتسق وكاف.

### 2. تقدير غير متحيز أقل تباين:

إذا كان التقدير تقديرا غير متحيز وحقق العلاقة:

$$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{n.E\left[\frac{\partial \ln f(x)}{\partial \theta}\right]^2}$$

فإن التقدير يسمى تقديرا غير متحيز له أقل تباين و المثال التالي يوضح كيفية تحقق هذه الخاصية.

**مثال(07):**

بين أن $\bar{x}$ تقديرا غير متحيز له أقل تباين لـ μ لمجتمع له توزيع طبيعي.

**الحل:**

نعلم سابقا بأن $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$ وقد اثبتنا أن تقدر غير متحيز $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}EXP\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$

ومنها $\ln f(x) = -\ln\sigma\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$

والمشتقة الأولى بالنسبة لـ μهي:

$$\frac{\partial \ln f(x)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

و

$$E\left(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial \mu}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}$$

لذلك يصبح الطرف الأيمن للمعادلة السابقة هو:

$$= \frac{1}{n.E\left[\frac{\partial \ln f(x)}{\partial \mu}\right]^2} = \frac{1}{n\frac{1}{\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

وحيث ان هذه القيمة تتساوى مع $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$ و $\bar{x}$ تقدير غير متحيز لـ μ فإن$\bar{x}$ يعتبر تقديرا غير متحيز له أقل تباين للمعلمة μ.

**نظرية (01):**

لتكن $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ عينة حيث الوسط الحسابي يساوي $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ ، ونسبة صفة A هي P والانحراف المعياري. $S^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}$

فإن تقدير معالم المجتمع:

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 \ ; \ \hat{p} = p \ ; \ \hat{\mu} = \bar{x}$$

**مثال(08):**

عينة متكونة من 20 فاتورة أختيرت من مجتمع كبير :

12.53/22.27/13.8 /51.47/8.05/24.11/43.48/15.27/50.97/38.07/44.11/26.78/32.04/
62.93/22.20/19.05/43.16/58/11.47/8.06

المطلوب:

أوجد تقدير النقطة لمتوسط المجتمع و نسبة المجتمع و نسبة المجتمع لقيمة الفواتير الأكثر من 50 و الانحراف المعياري.

الحل:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{607.4}{20} = 3\ 03\ 7$$

$$S^2 = \frac{\sum(x_1 - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{5\ 7799\ 75}{20-1} = 3\ 0420$$

$$S = 17.44$$

$$p = \frac{4}{20} = 0.2$$

$$\widehat{\mu} = \overline{X} = 3\ 03\ 7$$

$$\widehat{\sigma}^2 = S^2 = 3\ 0420$$

$$\widehat{p} = p = 0.2$$

### III– طرق التقدير بنقطة:[5]

بعد الاشارة الى خصائص المقدر الاحصائي الجيد لابد من الاشارة الى وجود العديد من طرق التقدير بنقطة، والتي من أهمها:

**1. طريقة العزوم:**

تعتبر طريقة العزوم أقدم طرق التقدير، وكان اول من اشار اليها كارل بيرسون . تقوم فكرة هذه الطريقة في تقدير معالم المجتمع على حساب العزوم من دالة كثافة الاحتمال للمجتمع وحساب العزوم المقابلة لها من بيانات العينة العشوائية التي يتم سحبها من المجتمع محل الدراسة، والمساواة العزوم النظرية بما يقابلها من العزوم الفعلية كما يلي:

$$\mu'_r = m'_r$$

$$\mu_r = m_r$$

$\mu'_r$ العزوم النظرية من الدرجة $r$ حول الصفر.

$\mu_r$ العزوم النظرية من الدرجة $r$ حول التوقع.

$m'_r$ العزوم المحسوبة من الدرجة $r$ حول الصفر.

[5] فتحي أحمد عاروري، مرجع سبق ذكره، ص83-86.

$m_r$ العزوم المحسوبة من الدرجة $r$ حول الوسط الحسابي.

$r$ درجة العزم.

$$r = 1,2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{k}$$

### 2. طريقة الامكان الأكبر:

تعتبر طريقة الامكان الأكبر أهم طرق التقدير الاحصائي و أكثرها استخداما، وأكثر التقديرات الشائعة في نظرية الاحصاء مثل الوسط الحسابي والانحراف المعياري.......الخ هي التقديرات التي حصلنا عليها باستخدام طريقة الامكان الاكبر.

تقوم فكرة طريقة الامكان الاكبر على حساب دالة الامكان $L(x_1, x_2, \ldots \ldots . x_n, \theta)$ ، كما في المعادلة التالية:

$$L(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_1, \theta)$$

وتعتبر تقديرات الامكان الاكبر هي التقديرات التي تجعل من هذه الدالة نهاية عضمى(اذا توفرت في هذه الدالة شروط معينة ).

ونشير هنا الى أننا في كثير من الحالات نتعامل مع اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان الاكبر $\ln L(x_1, x_2, \ldots \ldots . x_n, \theta)$ حيث نقوم بحساب المعادلات التفاضلية الجزئية.

$$\frac{\ln L(x_1, x_2, \ldots\ldots. x_n, \theta)}{\partial \theta_i} = 0 \qquad\qquad i = 1,2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k$$

حيث تمثل عدد المعالم في دالة كثافة الاحتمال في دالة المتغير العشوائي وبحل هذه المعادلات نحصل على تقديرات الامكان الاكبر لهذه لمعالم.

وفي حالة عدم توفر الشروط اللازمة لمثل هذا الحل فإننا نستطيع استخدام المنطق لإيجاد مقدرات الامكان الاكبر لهذه المعالم.

### 3. طريقة المربعات الصغرى واستخدامها في تقدير معالم النماذج الاحصائية الخطية:

مهما كانت النماذج التي تستخدم في التعبير عن العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة فانها تقسم الى مجموعتين أساسيتين هما:

- نماذج تقريرية أو حتمية.
- نماذج احتمالية.

فإذا كان لدينا النموذج الاحتمالي الخطي البسيط

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

فان تقديرات المربعات الصغرى لمعالم هذا النموذج اذا توفرت في حد الخطأ عدد من الشروط:

$$E(\varepsilon_i) = 0$$

$$Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$$

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad i \neq j$$

$$N(\varepsilon_i, 0, \sigma^2)$$

هي التقديرات التي تجعل مجموع مربعات انحرافات القيم الفعلية(المشاهدة) عن القيم النظرية(الواقعة على خط الانحدار) أقل ما يمكن(نهاية صغرى).

$$A = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

حيث:

$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$$

وبمفاضلة $A$ بالنسبة لمعالم النموذج $\beta, \alpha$ ومساتها بالصفر

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على المعادلتين الطبيعيتين

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n\alpha + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على تقديرات لمعالم نموذج الانحدار حيث:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$$

وتعرف هذه الطريقة بنظرية جاوس–ماركوف، وتعمم هذه الطريقة على النماذج غير الخطية و النموذج الخطي العام.

# تمارين غير محلولة

**التمرين رقم (01):**

اذا كان لدينا المتغير العشوائي x له توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه $\sigma^2$ سحبنا منه عينة عشوائية حجمها $x_1, \quad _2, \dots \dots x_n, n$ .

المطلوب: أثبت أن الوسط الحسابي لهذه العينة $\overline{\phantom{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \quad i}{n}$ هو تقدير غير متحيز لمتوسط المجتمع μ .

**التمرين رقم (02):**

باستخدام البيانات من التمرين السابق.

المطلوب: أثبت أن $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$ هو تقدير متحيز لتباين المجتمع $\sigma^2$ وأوجد مقدار التحيز.

**التمرين رقم(03):**

تبين من خلال دراسات سابقة أن الانفاق منتظم على مستوى بنسبي بالسنة للسنة وذلك للدخل المتاح بينما النسبة الباقية من أيام السنة كان غير منتظم ولدراسة التقديرات المستقبلية لتوازن الانفاق والدخل المتاح أخذت عينة تتكون من 15 حالة من بين مئات الحالات حيث كان:

10/30.01/14.50/33/30.10/20.05/31/43.05/60/53/18/11.12/18/17

المطلوب

أوجد تقدير النقطة المتوسطة المجتمع و نسبة المجتمع لقيمة ملاحظات الانفاق الاكثر من 30 والانحراف المعياري.

**التمرين رقم (04):**

بين أن التقدير $\hat{p} = \frac{}{n}$ لتوزيع ذو الحدين هو تقدير له خصائص التقدير الجيد.

**التمرين رقم(05):**

لدينا $x$ متغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين حيث: $x \sim B(20, p)$

المطلوب:

قدم بطريقة العزوم تقدير لـ $P$

**التمرين رقم (06):**

لتكن $x \rightsquigarrow (\mu;\sigma^2)$. نسحب عينة ذات متوسط $\bar{x}$، وتباين $S^2$.

المطلوب:

قدم تقدير لـ $\mu$ و $\sigma^2$ بطريقة العزوم.

**التمرين رقم(07):**

ليكن $x \rightsquigarrow B(p)$ ، حيث النجاح هو وجود الخاصية A لدى فرد مسحوب عشوائيا من المجتمع. نريد تقدير $p$ من خلال عينة حجمها 2.

المطلوب:

ماهي القيمة $\hat{p}$ لـ $p$ التي تجعل النتيجة 0 ، 1 هي الأكثر احتمالا.

# الفصل الثالث: التقدير بمجال الثقة

**I– مقدمة:**

لاحظنا سابقا أن $\bar{X}$ تقدير لـ $\mu$ و بما أن أخذ العينات ينتج عنه أخطاء من انواع مختلفة تنشأ الحاجه الى أسلوب آخر لتقدير $\mu$ بمجال يحتوي على $\mu$ بإحتمال كبير.

ويعتبر التقدير بفترة الذي اقترحه Neyman أحد أساليب الاستدلال الاحصائي من خلال أن تقع معلمة المجتمع الأصلي المجهولة بين قيمتين معننتين بإحتمال أو درجة ثقة معينة، وذلك بمعنى أن التقدير يكون صحيحا في حدود الاحتمال المذكور أو مستوى المعنوية الذي يمثل نسبة الخطأ المسموح به.

ويعتبر أسلوب التقدير بفترة وسيلة لتغلب على عيوب التقدير بنقطة وبخاصة إذا كانت القيمة المحسوبة والمستخدمة كتقدير لمعلمة المجتمع الأصلي المجهولة لا تنطبق تماما على معلمة المجتمع، فضلا عن ذلك فإن التقدير المتحصل عليه بقيمة واحدة يختلف من حيث الدقة من عينة الى اخرى.

ولذلك فإن هذا التقدير لا يكون صحيحا من حيث أنه لا يعطي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع الأصلي، وأهمية هذا التقدير يعتمد على حجم أخطاء المعاينة والتي يمكن تقديرها في صورة حدود أو فترات الثقة.

**II– مفاهيم:**

**1– فترات الثقة:**

هي المدى الذي تقع فيه القيمة الحقيقية لصفة خاصة بالمجتمع باحتمال معين ولذلك فهي طريقة لمعرفة دقة أي تقدير لمعالم المجتمع. وبالتالي فإن درجة إتساع حدود الثقة (الحد الأدنى والحد الأعلى) يبين درجات الدقة في تقدير أحد معالم المجتمع من العينة. فكلما ضاقت فترة الثقة كلما زادت دقة تقدير معالم المجتمع.

ان أكثر فترات الثقة استعملا هي 90 % , 95% , 99 %

**2– نهايتا الثقة:**

ترجح فترة الثقة أن المتوسط الحسابي للمجتمع الأصلي $\mu$ يقع فيها بإحتمال معين لها حدين ويسميان حدا الثقة، واحتمال وجود فإذا كان لدينا $[a , b]$ تكون فترة الثقة **95%** للوسط $\theta$ بالعلاقة التالية :

$$p(a < \theta < b) = 0.95$$

حيث العددان a,b سيسميان نهايتا الثقة.

المتوسط الحسابي للمجتمع الأصلي بين حدي الثقة يسمى معاملات الثقة أو القيم الحرجة.

**3- معامل الثقة:**

يقرره الباحث أو الإحصائي قبل قيامه بحساب فترة الثقة، وعادة ما تختار قيمة المعامل بين 90 %و 100% ولذلك إذا أنشأ إحصائي فترة ثقة واسعة، يستطيع القول بثقة كبيرة أو باحتمال كبير أن الاجراءات أو الطرق المستخدمة للحصول على فترة ثقة تؤدي بنا الى تأكيد صحة التقدير، هذا وقد وجد أن التقدير يكون قريبا جدا من الصحة في حالة العينات الكبيرة.

وما نؤكد عليه هنا أن درجة إتساع فترات الثقة تبين درجة الدقة في التقدير لأحد معالم المجتمع أي أن إتساع فترة الثقة يبين أهمية أخطاء المعاينة.

وهكذا فإن اختيار معامل الثقة أو أخطاء المعاينة يعتمد على تقدير الباحث وطبيعة موضوع الدراسة، فقد نختار 90% إحتمال ثقة لوقوع المتوسط الحسابي للمجتمع الأصلي $\mu$ بين حدي فترة الثقة أو مستوى الثقة، و في هذه الحالة قد تكون أخطاء المعاينة أو درجة عدم الصحة في التقدير 10%، وهكذا إذا إخترنا 95% كفترة ثقة أو مستوى ثقة فإن أخطاء المعاينة أو درجة عدم الصحة في التقدير 5 % وكذلك بإختيار 99% كفترة ثقة أو مستوى ثقة فإن أخطاء المعاينة أو درجة عدم الصحة في التقدير 1 %.

**4- مستوى المعنوية:**

ويطلق على إحتمال عدم وجود المتوسط الحسابي للمجتمع الأصلي داخل حدى فتر ة الثقة، فإذا اخترنا معامل ثقة 95 % فإن مستوى المعنوية 5 %.[1]

**III- مجال الثقة للمتوسط:**

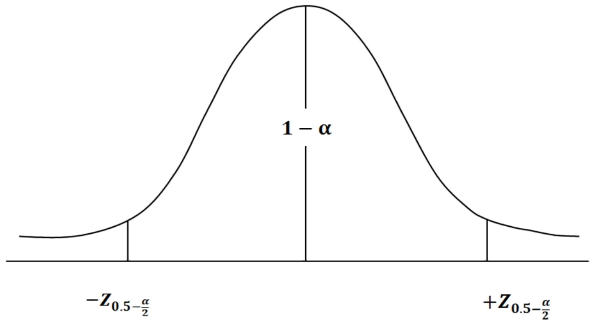
**1- الحالة الاولى: $\sigma^2$ معلومة**

**تذكير:**

إذا كان $X_1, X_2, \ldots \ldots . X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فإن $\bar{x}$ يخضع لتوزيع طبيعي $N(, \frac{\sigma^2}{n})$ أي $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

[1] محمد محمود مهدلي**" أساليب ومناهج علم الإحصاء"** دار المعرفة الجامعية، 2000، ص 149- 151.




ومنه:[2]

$$p\left(-Z \leq \frac{\bar{\mu}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z\right) = 1-\alpha$$

**مثال** (**01**):

أوجد قيمة $\boldsymbol{Z}$ المرافقة لثقة **90% , 95% , 99%**

$$(1-\alpha) = 0.90 \;\Rightarrow\; \alpha = 0.1 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.1}{2}} = Z_{0.45} = \frac{1.64+1.65}{2} = 1.645$$

$$(1-\alpha) = 0.95 \;\Rightarrow\; \alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

$$(1-\alpha) = 0.99 \;\Rightarrow\; \alpha = 0.01 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.01}{2}} = Z_{0.995} = \frac{2.57+2.58}{2} = 2.575$$

**نظرية**(**01**):

إذا كانت $\boldsymbol{X_1, X_2, \dots\dots X_n}$ عينة من $\mathbf{N(\mu, \sigma^2)}$ فإن مجال ثقة ل $\boldsymbol{\mu}$ في حالة $\sigma^2$ معلومة، بثقة $\mathbf{(1-\alpha)}$%

هي : $\left[\boldsymbol{\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\;\; ; \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right]$

أي :

$$(\mu \in)\;\; \boldsymbol{\bar{X} \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

**مثال**(**02**):

أخذت عينة حجمها 16 من $\mathbf{N(\mu, 5)}$ فوجد $\boldsymbol{\bar{X} = 14.5}$ .

المطلوب: أوجد مجال الثقة ل $\boldsymbol{\mu}$ بثقة **90%**

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

[2] علي يوسف خليفة **"الاحصاء الاقتصاد الزراعي"** منشأة المعارف ، الاسكندرية ، مصر، ص 127.

$$\mu \in \left[14.5 - 1.96 * \frac{5}{4} ; 14.5 + 1.96 * \frac{5}{4}\right]$$

$$\mu \in [12.05 ; 16.95]$$

**مثال(03):**

أوجد حجم العينة $n$ التي يجب أخذ ها من $\mathbf{N(\mu, 25)}$ للحصول على مجال ثقة طوله 4 بثقة $\mathbf{90}$%.

**الحل:**

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.645$$

لدينا:

$$\mu \in \left[\bar{X} - 1.645 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} \ ; \bar{X} + 1.645 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\left(\bar{X} + 1.645 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}}\right) - \left(\bar{X} - 1.645 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}}\right) = 4$$

$$1.645 \frac{5}{\sqrt{n}} + 1.645 \frac{5}{\sqrt{n}} = 4$$

$$2(1.645) \frac{5}{\sqrt{n}} = 4 \ \Rightarrow 1.645 \frac{5}{\sqrt{n}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{8.225}{\sqrt{n}} = 2 \ \Rightarrow 2\sqrt{n} = 8.225 \ \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{8.225}{2} = 4.1125 \ \Rightarrow n = 16.91 \simeq 17$$

دائما يقيم تقريب $\boldsymbol{n}$ إلى أكبر بقيمة طبيعية.

**2– الحالة الثانية : $\boldsymbol{\sigma^2}$ مجهولة.**

**نظرية (02):**

إذا كانت $\boldsymbol{X_1, X_2, \dots \dots . . X_n}$ $\boldsymbol{(30 > n)}$ عينة عشوائية من $\mathbf{N(\mu, \sigma^2)}$ فإن مجال الثقة لـ $\boldsymbol{\mu}$ في حالة $\boldsymbol{\sigma^2}$ مجهولة بثقة $\boldsymbol{(1-\alpha)}$% هو:

$$\left[\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{t}_{\left[1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right]} \frac{\boldsymbol{S}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} ; \bar{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{t}_{\left[1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right]} \frac{\boldsymbol{S}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right]$$

أي :

$$\boldsymbol{\mu} \in \left[\bar{X} \pm \boldsymbol{t}_{\left[1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right]} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

**مثال (04):**

أخذت عينة حجمها 16 من $N(\mu,\sigma^2)$ حيث $\bar{X} = 14.5$ و $S^2 = 25$.

المطلوب:

أوجد مجال الثقة بثقة $90\%$ للوسط الحسابي .

بما أن: $1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1$

$$t_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)} = t_{(0.95\ ,15)} = 1.753$$

$$\Rightarrow \mu \in \left[14.5 - 1.753 * \frac{5}{4}\ ;14.5 + 1.753 * \frac{5}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \mu \in [12.30\ ,16.69]$$

**نظرية** (**03**):

إذا كانت $X_1, X_2, \dots \dots .. X_n$ $(30 \leq)$ عينة عشوائية من $N(\mu,\sigma^2)$ فإن مجال ثقة $\mu$ في حالة $\sigma^2$ مجهول بثقة $(1-\alpha)\%$ هي:

$$\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

أي : $$\mu \in \left[\bar{X} \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

**مثال** (**04**):

إذا وسط وتباين عينة عشوائية حجمها 36 لعلامات تلاميذ البكالوريا هو على التوالي $2.6$ , $0.09$

المطلوب:

أحسب مجال الثقة اذا كانت الثقة $95\%$ , $99\%$ لوسط علامات التلاميذ ؟

**الحل**:

$$\bar{X} = 2.6 \qquad n = 36$$
$$S^2 = 0.09 \qquad 1-\alpha = 0.95$$

- عند مستوى ثقة **95**%

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$
$$\mu \in \left[2.6 - 1.96\,\frac{0.3}{6}\ \ ; 2.6 + 1.96\,\frac{0.3}{6}\right]$$
$$\mu \in [2.502\ \ ;\ \ 2.698]$$
$$2.502 \leq \mu \leq 2.698$$

- عند مستوى ثقة **99**%

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 0.995 = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$
$$\mu \in \left[2.6 - 2.575\,\frac{0.3}{6}\ \ ; 2.6 + 2.575\,\frac{0.3}{6}\right]$$
$$\mu \in [2.471\ \ , 2.728]$$
$$2.471 \leq \mu \leq 2.728$$

**I– مجال الثقة للفرق يبن متوسطين:**

**الحالة الاولى:** $\sigma_1^2\,,\sigma_2^2$ **معلومتان.**

**نظرية** (**04**):

إذا كانت $x_1, x_2, \dots\dots x_n$ عينة عشوائية من $N(\mu_1, \sigma_1^2)$

وكانت $x_1, x_2, \dots\dots x_n$ عينة عشوائية من $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

فإن مجال الثقة لـ $\mu_1 - \mu_2$ في حالة $\sigma_1^2\,,\sigma_2^2$ معلومتان بثقة $(1-\alpha)$%

$$\mu_1 - \mu_2 \in \left[\bar{X} - \bar{Y} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

**مثال**(**05**):

إذا كان معدل الدخل السنوي لأسر مدينة **A** بناء على عينة متكونة من 80 عائلة هو 16800 دج بإنحراف معياري قدره 500 دج و لمدينة B هو 1200 دج بإنحراف معياري 600 دج .

المطلو:

أوجد بثقة **99**% الفرق بين وسطي المجتمعين **A** و **B**.

A:

$n_1 = 80 \quad ; \ \bar{X} = 16800 \quad ; \sigma_1 = 500$

B:

$n_2 = 80 \quad ; \ \bar{Y} = 12000 \quad ; \sigma_2 = 600$

$(1-\alpha) = 0.99$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.01}{2}} = Z_{0.995} = \frac{2.57+2.57}{2} = 2.575$$

$$(\mu_1 - \mu_2) \in \left[(16800 - 12000 \pm 2.575\sqrt{\frac{(500)^2}{80} + \frac{(600)^2}{80}}\right]$$

$$(\mu_1 - \mu_2) \in [4800 - 224.85 \ ; 4800 + 224.85]$$

$[4575.4 \quad ; \quad 5024.85]$

**الحالة الثانية:** $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ **,** $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ **مجهولتان.**

**نظرية(05)**:

إذا كانت $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots \ldots . . x_n}$ عينة عشوائية من $\mathbf{N(\mu_1, \sigma_1^2)}$

و $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots \ldots . . x_n}$ عينة عشوائية من $\mathbf{N(\mu_2, \sigma_2^2)}$

فإن مجال الثقة لـ $\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2}$ في حالة $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ **,** $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ مجهولتان بثقة $\mathbf{(1-\alpha)}$%

$$\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2 \in \left[\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\left[1-\frac{\alpha}{2}\ ;\ n_1+n_2-2\right]} S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right]}$$

حيث :

$$\boldsymbol{S_c^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

**مثال (06):**

إذا كان $45 ; 37 ; 43 ; 25 ; 34$ عينة من $N(\mu_1, \sigma_1^2)$

و $39 ; 41 ; 35 ; 23 ; 31 ; 20 ; 29$ عينة من $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

المطلوب:

أوجد مجال الثقة لـ $\mu_1 - \mu_2$ بثقة $95\%$

**الحل:**

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{184}{5} = 36.8$$
$$S_1^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{252.8}{5-1} = 63.2$$
$$\bar{Y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{218}{7} = 31.14$$
$$S_2^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{Y})^2}{n-1} = \frac{368.79}{7-1} = 61.46$$

$$S_c^2 = \frac{(5-1)63.2 + (7-1)61.46}{5+7-2} = \frac{621.56}{10} = 62.156$$

$$\sqrt{S_c^2} = S_c = 7.88$$

ولدينا:

$$t_{(1-\frac{\alpha}{2}\ ; n_1+n_2-2)} = t_{(0.075\ ;10)} = 2.228$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in \left[36.8 - 31.14 \pm 2.228 \cdot 7.88\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}}\right]$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in 5.66 \pm 10.28$$

$$[-4.62\ ;\ 15.94]$$

**II– مجال الثقة للتباين :**

**نظرية(06):**

اذا كانت $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ و كان $S^2$ تباين هذه العينة فإن مجال ثقة التباين $\sigma^2$ بثقة $(1-\alpha)\%$ هو :

$$\boldsymbol{\sigma^2} \in \left[\frac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\boldsymbol{S^2}}{\boldsymbol{\chi^2_{\left[1-\frac{\alpha}{2},n-1\right]}}} \;;\; \frac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\boldsymbol{S^2}}{\boldsymbol{\chi^2_{\left[\frac{\alpha}{2},n-1\right]}}}\right]$$

**مثال**(**07**):

أخذ عينة حجمها 10 من $\mathbf{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma^2})$ فوجد أن $\boldsymbol{\sigma^2 = 117.12}$

المطلوب:

أوجد مجال للتباين بثقة **95**%.

**الحل**:

$$\chi^2_{[0.975\;;9]} = 19.02$$

$$\chi^2_{[0.025\;;9]} = 2.70$$

$$\sigma^2 \in \left[\frac{(10-1)\cdot 117.12}{2.7} \;;\; \frac{(10-1)\cdot 117.12}{19.02}\right]$$

$$\sigma^2 \in [55.41 \;;\; 390.4\;]$$

**III– مجال الثقة للنسبة بين تباينين**:

**نظرية**(**07**):

ليكن $\boldsymbol{S_1^2}$ تباين عينة $\boldsymbol{X_1, X_2, \ldots\ldots.. X_n}$ من توزيع $\mathbf{N}(\boldsymbol{\mu_1},\boldsymbol{\sigma_1^2})$

$\boldsymbol{S_2^2}$ تباين عينة $\boldsymbol{X_1, X_2, \ldots\ldots.. X_n}$ من توزيع $\mathbf{N}(\boldsymbol{\mu_2},\boldsymbol{\sigma_2^2})$

فإن مجال ثقة النسبة $\boldsymbol{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}$ بثقة $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})$% هو:

$$\boldsymbol{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \epsilon \left[\frac{S_2^2}{s_1^2}\;\; F_{\left[\frac{\alpha}{2}\,;\, n_1-1\;;\, n_2-1\right]} \;;\frac{S_2^2}{s_1^2}\;\; F_{\left[1-\frac{\alpha}{2}\,;\, n_1-1\;;\, n_2-1\right]}\right]}$$

**مثال**(**08**):

أخذت عينة حجمها $\boldsymbol{n_1 = 6}$ و $\boldsymbol{S_1^2 = 77.9}$ من $\mathbf{N}(\boldsymbol{\mu_1},\boldsymbol{\sigma_1^2})$

وعينة حجمها $\boldsymbol{n_2 = 8}$ و $\boldsymbol{S_2^2 = 194.2}$ من $\mathbf{N}(\boldsymbol{\mu_1},\boldsymbol{\sigma_2^2})$

المطلوب:

أوجد مجال ثقة $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ بثقة **95**%

$n_1 = 6 \quad ; \quad S_1^2 = 77.9$

$n_2 = 8 \quad ; \quad S_2^2 = 194.2$

$1 - \alpha = 0.95$

$F_{[0.025 \ ;5\ ;7]} = 0.15 \qquad ; \qquad F_{[0.975 \ ;5 \ ;7]} = 5.29$

$$\left[\frac{194.2}{77.9} \cdot 0.15 \ \ ; \ \ \frac{194.2}{77.9} \cdot 5.29\right]$$

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \in [0.373 \ ; \ 13.18]$$

# تمارين غير محلولة

**التمرين($\mathbf{01}$):**

لدراسة نسبة الاستثمار في دولة ما ،أخذت عينة حجمها 25 من $\boldsymbol{N(\mu\,, 30)}$ فوجد الوسط الحسابي لهذه العينة كان $\boldsymbol{\bar{X} = 18}$

المطلوب:

أوجد مجال الثقة للوسط الحسابي $\boldsymbol{\mu}$ بثقة $\mathbf{99\%\,,\,90\%}$

**التمرين($\mathbf{02}$):**

عينة عشوائية حجمها 12ووسطها 51.2 سحبت من مجتمع طبيعي تباتية 124.

المطلوب:

ايجاد فترة ثقة لوسط مجتمع عند مستوى معلمية $\boldsymbol{\alpha = 0.1}$ ; $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$

**التمرين($\mathbf{03}$):**

أخذت عينة عشوائية مكونة من 25مفردة ...لمتوسط 80 وانحراف معياري للعينة 30 من مجتمع يتبع توزيع طبيعي.

المطلوب : أوجد فترات الثقة الانسبة لوسط مجتمع عينة غير معلوم.

$\mathbf{90\%\,,\ 95\%\,,\,99\%}$

**التمرين($\mathbf{04}$):**

سحبت عينة عشوائية من بطاريات حجمها 10 و متوسط عمرها 5ساعات و انحرافها المعياري 1 ساعة من خط انتاج من المعروف أنه ينتج بطاريات عمرها موزع طبقا للتوزيع الطبيعي .

المطلوب:

أوجد مجال الثقة للمتوسط المجتمع كله بثقة $\mathbf{95\%}$

**التمرين(05)**:

يرغب مدير في تقدير متوسط عدد الدقائق التي يأخذها العامل للإنجاز عملية صناعية معينة في حدود $\pm 3$ دقيقة وبدرجة ثقة **90**% ويعلم المدير من خبرته الماضية ان الانحراف المعياري هو 15 د والحد الادنى للحجم العينة المطلوب اكبر من 30 عامل

المطلوب:

اوجد حجم العينة ؟

**التمرين(06)**:

يرغب باحث في تقدير متوسط الاجر الاسبوعي لعدة آلاف من العاملين بأحد المصانع في حدود $\pm$ **20** $ بثقة **99**% ويعرف الباحث من خبرته الماضية التوزيع الاسبوعي للعاملين ينبع التوزيع الطبيعي بإنحراف معياري قدره **40** $

المطلوب:

ما هو الحد الادنى للعينة المطلوبة.

**التمرين(07)**:

في مجموعتين متماثلتين من المرضى A وB تتكون من 50و100 شخص على الترتيب .المجموعة A أعطيت نوعا جديدا من الحبوب المنوعة و المجموعة B أعطيت نوعان معروفا من الحبوب. المجموعة A كان متوسط ساعات النوم هو 7.82 .بإنحراف معياري قدره 0.240 و المجموعة Bكان متوسط ساعات النوم هو 6.75 بإنحراف 0.3 .

-أوجد حدود الثقة للفرق بين متوسط ساعات النوم الناتجة من استخدام الحبوب الجديدة ؟

**%90 , %95 , %99**

**التمرين(08)**:

أخذت عينة حجمها 144 بوسط مقداره 100 وانحراف معياري مقداره 60.

المطلوب:

أوجد فترة الثقة 95% لوسط مجتمع غير معدوم؟

**التمرين(09):**

أخذت عينة عشوائية من 36 طالبا من مدرسة ثانوية متقدمين لامتحان قبول بالجامعة ووجد أن متوسط الدرجات في العينة هو 380 والانحراف المعياري للمجتمع هو 40.

المطلوب:

أوجد(التقدير) فترة الثقة للوسط غير معلوم عنده $\alpha = \%10$؟

**التمرين (10):**

أخذت عينة عشوائية حجمها 144 بمتوسط 300 وانحراف معياري 100.

المطلوب:

أوجد مجال الثقة لـ $\mu$ بمستوى معنوية 10 %

**التمرين (11):**

ترغب شركة في تقدير كتوسط عدد ساعات التشغيل لنوع عين من المصابيح الكهربائية في بدرجة ثقة **.95**% وتعرف الشركة من المعلومات السابقة عن هذا النوع من المصابيح الكهربائية أن $\sigma = 10$ ساعات. ما هو حجم العينة التي يجب أخذها؟.

**التمرين رقم (12):**

لدراسة ما تنفقه الأسرة على ايجار المساكن في احدى المناطق سحبنا عينة عشوائية حجمها n=100 أسرة من الأسر التي تسكن في مساكن مستأجرة فحصلنا على البيانات التالية:

| الايجار الشهري | عدد الاسر |
|---|---|
| 60-40 | 15 |
| 80-60 | 25 |
| 100-80 | 35 |
| 120-100 | 25 |
| 140-120 | 10 |
| المجموع | 100 |

فاذا علمنا من دراسات سابقة بان الايجار الشهري الذي تدفعه الأسرة في هذه المدينة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu$ و تباين

. $\sigma^2$=400

المطلوب:

تكوين فترة ثقة 95% لمتوسط الايجار الشهري للأسرة الواحدة في هذه المنطقة.

**التمرين رقم(13):**

أخذت عينة عشوائية من 36 طلبا من بين 500 طالب بمدرسة ثانوية، متقدمين لامتحان القبول بالجامعة. ووجد أن متوسط درجات العينة هو 380، والانحراف المعياري للمجتمع كله المكون من 500 طالب هو 40.

المطلوب:

أوجد فترة الثقة 95 % للوسط غير معلوم لدرجات في المجتمع كله.

**التمرين رقم (14):**

سحبت عينة عشوائية مكونة $n=9$ مصابيح كهربائية بمتوسط عمر 300 ساعة وانحراف معياري قيمته 45 ساعة.

المطلوب:

احسب مجال الثقة لمتوسط عمر المصابيح عند مستوى معنوية 5%.

**التمرين رقم(15):**

ترغب هيئة لاستطلاع الرأي العام أن تقدر بمستوى ثقة 90% نسبة الناخبين المتوقع أن يعطو أصواتهم لمرشح معين في حدود $\pm 0.06$ من النسبة الحقيقية بين الناخبين.

المطلوب:

ما هو الحد الادنى لحجم العينة إذا كانت استطلاعات أخرى تشير إلى أن نسبة المصوتين لهذا المرشح هي 0.3 ؟

**التمرين رقم(16):**

في عينة عشوائية حجمها 100 عامل من مصنع به 1200 عامل، وجد أن 70يفضلون الاشتراك في نظام للمعاشات كأفراد بدلا من الاشتراك في مشروع معاشات خاص بالشركة.

المطلوب:

أوجد فترة الثقة 95% لنسبة العاملين الذين يفضلون مشروعات معاشات فردية.

**التمرين رقم (17):**

في أي ظروف لا يمكننا استخدام التوزيع الطبيعي ولكن يمكننا استخدام توزيع t لايجاد فترات الثقة لوسط المجتمع غير المعلوم؟

**التمرين رقم (18):**

أخذت عينة من 400 جندي من بين 100000 مجند بالجيش في احدى السنوات، ووجد أن متوسط وزن المجند في العينة هو 85كيلوغرام و الانحراف المعياري لمجمع المجندين هو 20 كيلوغرام.

المطلوب:

أوجد فترة الثقة 90% لمتوسط الوزن في مجتمع المجندي.

**التمرين رقم (19):**

لدراسة نسبة السكان الذين يعانون من مرض ضغط الدم (الارتفاع في التوتر الشرياني) في احدى المناطق سحبنا عينة عشوائية من 500 شخص فوجد بان 60 شخصا يعانون من مشاكل في ضغط الدم.

المطلوب:

تكوين فترة ثقة 95 % لنسبة السكان الذين يعانون من ضغط الدم في هذه المنطقة.

**التمرين رقم (20):**

من عينة حجمها 450 فرد وجد أن المتوسط الحسابي لدخل الفرد اليومي هو 23.40 $، لتقدير الدخل اليومي للفرد في مجتمع ما كان الانحراف المعياري له 25$ للفرد في اليوم.

المطلوب:

تقدير المتوسط الحسابي للمجتمع بدرجة ثقة 95 % ثم 99 %.

**التمرين رقم** (21):

لتقدير متوسط استهلاك الطاقة الكهربائية للأسرة الواحدة لمجتمع ما – قريب من الاعتدال– أخذت عينة مكونة من 70 أسرة وجد أن المتوسط الحسابي لاستهلاك الأسر من الطاقة الكهربائية هو 240 كيلوات /ساعة في الشهر، بانحراف معياري قدره 65 كيلوات/ساعة.

المطلوب:

أوجد المتوسط الحسابي للمجتمع بدرجة ثقة 95 %؟

**التمرين رقم (22)**:

لدراسة نسبة الأمية بين الاناث (15 سنة فأكثر) في احدى المناطق، سحبنا عينة عشوائية من الإناث في هذه المنطقة حجمها 400 فتاة فكان عدد الاناث الاميات فيها 80 فتاة.

المطلوب:

تكوين فترة ثقة 95 % لنسبة الأمية بين الاناث في هذه المنطقة ؟

# الفصل الرابع: اختبار الفروض الاحصائية.

## I- مقدمة:

سنتناول من خلال هذا الفصل جانب اخر من أساليب الاستدلال الإحصائي والذي يتمثل في إجراء اختبارات الفروض الاحصائية المتعلقة بمعلمة من معالم المجتمع. وتبرز أهمية اختبارات الفروض في مجال اتخاذ قرار معين يتعلق بامكانية رفض وقبول فرضية تتعلق بمعلمة من معالم المجتمع. فعلى سبيل المثال إذا أردنا كتابة تقرير عما إذا كانت آلة معينة تعمل بصورة صحيحة أم لا، فإننا نستخدم اختبارات الفروض لتقرير ما إذا كانت نسبة المعيب في انتاج الآلة تتجاوز حدود السماح أم لا. و إذا أردنا تقرير عدم وجود اختلافات جوهرية بين نوعية مادة خام نحصل عليها من موردين مختلفين، فإننا نستخدم اختبارات الفروض على سبيل المثال، لتقرير ما اذا كان هناك اختلاف بين متوسطي كمية الشوائب في مقادير ثابتة من المادة الخام نحصل عليها من كلا الموردين. وبصفة عامة يمكن القول بأن مشاكل اختبارات الفروض الاحصائية تتعلق بوجود قيمة نظرية مفترضة لمعلمة من معالم المجتمع ونريد اختبار ما إذا كانت القيمة الحقيقية للمعلمة بتساوي هذه القيمة النظرية أم لا.

## II- مفاهيم توضيحية:

1- **الفرضية الاحصائية**: هي جملة حول المجتمع أو أكثر و غالبا ما تكون هذه الجملة حول المعالم المجتمع الاحصائي وتحدد ماذا كانت بيانات العينة تؤيد فرضية على المجتمع ، ولذلك الضروري أن نلاحظ قرب البيانات من الفرضية لنقرر ما اذا كانت الاختلافات بينهما ناجمة عن الصدفة أم عن عدم صحة الفرض.

2- **الفرضيات**: في أي مسألة لاختبار الفرضيات توجد فرضيتان هما الفرضية المبدئية أو فرض العدم والفرضية البديلة. وهما عبارتان متضادتان فإذا كانت احدى الفرضيتين صحيحة فيمكننا أن نستخلص منطقيا أن العبارة العكسية في الفرضية الأخرى يجب أن تكون خطاءه. يقسم مجال متغير دالة الاختبار الى منطقتين تسمى احدا هما منطقة القبول و الاخرى منطقة الرفض.

و يكون القرار برفض الفرضية $\boldsymbol{H_0}$ اذا اوقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة الرفض .

و يكون القرار بقبول الفرضية $\boldsymbol{H_0}$ اذا اوقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة القبول.

- الفرض العدم: وهو ذلك الفرض الذي يستهدف التحليل الاحصائي اختبار مدى صحته ويرمز له بـ $H_0$ .وسمى كذلك لإفتراض عدم وجود فرق معنوي بين قيمة المتغير العشوائي في ظل هذا الفرض وقيمته الحقيقية في المجتمع.[1]
- الفرض البديل: وهو ذلك الفرض الذي يختلف قيمته عن فرض العدم ويرمز له بـ $\boldsymbol{H_1}$ ويتضمن الفرض البديل العبارة التي نريد اختبار صحتها.[2]

[1] علي يوسف خليفة،" الاحصاءئ الاقتصادي الزراعي" منشأة المعارف، الاسكندرية، مصر، 2000، ص 118.
[2] إدوارد مينيكا و زوريانا كورزيجا تعريب ميسرور علي ابراهيم سرور، "الاحصاء في الادارة مع التطبيق على الحاسب الآلي" دار المريخ للنشر، ص 568.

**3- مستوى المعنوية**: يجري تحديده قبل اجراء التحليل الاحصائي للبيانات في ضوء أهمية رفض فرض العدم $H_0$ ومدى ما يمثله من أهمية بالنسبة لموضوع الدراسة، والتحديد المسبق له قبل اجراء التحليل الاحصائي والحصول على نتائجه يستهدف تلافي أي شكل من أشكال التحيز.

ويقصد بمستوى المعنوية (نسبة الخطأ): قيمة احتمال حدوث خطأ عندما نرفض فرض العدم $H_0$ صحيح. أو بمعنى آخر ان هذه القيمة هي وهي مخاطرة محتملة في رفض فرض العدم $H_0$ رغم صحته.

**4- لخطأ من النوع الأول و الخطأ من النوع الثاني**:

- الخطأ من النوع الأول: ويعرف على أنه رفض الفرض العدمي مع أنه صحيح ونرمز له بالرمز $\alpha$ ويسمى مستوى المعنوية.[3]
- الخطأ من النوع الثاني: ويسمى أيضا خطأ القبول ويقع عندما يتم قبول الفرض العدمي مع أنه غير صحيح ونرمز له بالرمز$\beta$.[4]

و في جميع الأحوال فإننا نرغب أن نجعل كلا من $\alpha$ و $\beta$ أقل ما يمكن. ولكن نقص أحدهما يؤدي الى زيادة الاخر ولا يمكن أن ينقصا معا الا بزيادة حجم العينة.

**5- خطوات اجراء الاختبار**

يمكن اجراء اختبار الفروض بأكثر من طريقة، وسوف نشير هنا الى كيفية اجراء الاختبار باستخدام الدالة الاختبارية.

- الخطوة الاولى: تحديد الفرض الصفري ( أو العدم ) وهو الفرض الجاري اختباره $H_0$ و الفرض البديل $H_1$
- الخطوة الثانية : اختبار أو اعطاء قيمة معنوية $\alpha$

مثلا: $\alpha = \%10\ ,\ \ \alpha = \%1\ \ ,\ \ \alpha = \%5$

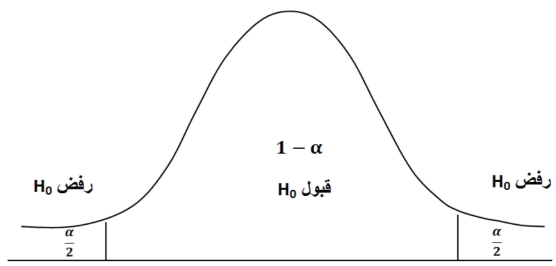
لو اعتبرنا مثلا نريد اختبار $H_0: \mu = \mu_0$ المعنوية $\alpha$ أي بثقة $1 - \alpha$ فالفرض البديل له ثلاث حالات كالاتي :

- ✓ الحالة الأولى: $\boldsymbol{H_1: \mu \neq \mu_0}$

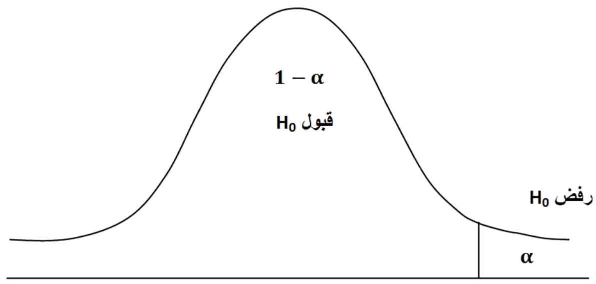
---

[3] فتحي أحمد عاروري، مرجع سبق ذكره، ص 77.

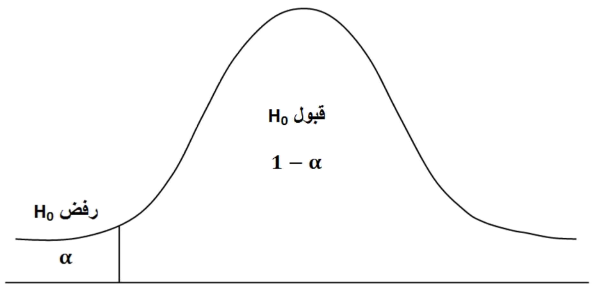
[4] www.statisticssolutions.com/nom-parametric-analysis-mcnemars-test/




✓ الحالة الثانية: $H_1: \mu > \mu_0$




✓ الحالة الثانية: $H_1: \mu < \mu_0$




- تحديد دالة الاختبار
- حساب قيمة دالة الاختبار من بيانات العينة
- تقرير رفض أو قبول $H_0$
- صياغة الفرض العدمي والفرض البديل.
- تحديد مستوى المعنوية.
- حساب المقدر غير المتحيز للمعلمة.
- تحديد دالة الاختبار.

## III– اختبارات الفروض الاحصائية المتعلقة بمعلمة واحدة من معالم المجتمع:

### 1– اختبارات الفروض الاحصائية المتعلقة بمتوسط مجتمع:

بعد عرضنا للأسس والمفاهيم العامة لإجراء اختبارات الفروض الاحصائية وذكرنا أن أي اختبار يشمل على خمسة مراحل أساسية. وسوف نقوم الآن بتطبيق أساليب الاختبارات حين تكون معلمة الاختبار هي متوسط المجتمع $\mu$ وأن هناك ادعاء أو افتراض نظري بأن هذا المتوسط يساوي $\mu_0$.

- **الحالة الأولى: إذا كان $\sigma$ معلومة.**

**نظرية (01):**

اذا كانت $x_1, x_2, \dots \dots . . x_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ وكانت $^2$ معلومة فإن دالة الاختبار هي:

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \backsim N(0, 1)$$

و اذا كانت $H_0: \mu = \mu_0$

وكانت $H_1: \mu \neq \mu_0$ فإننا نرفض $H_0$ عند مستوى معنوية $\alpha$ اذا كان $|Z_c| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

أو وكانت $H_1: \mu > \mu_0$: فإننا نرفض $H_0$ عند مستوى معنوية $\alpha$ اذا كان : $Z_c > Z_{1-\alpha}$

أو وكانت: $H_1: \mu < \mu_0$ فاننا نرفض $H_0$ عند مستوى معنوية $\alpha$ اذا كان: $Z_c < -Z_{1-\alpha}$

**مثال(01):**

اذا كانت : $x_1, x_2, \dots \dots . . x_n$ عينة عشوائية من $N(\mu, 9)$ حيث $\sum x_i = 360$ اختبر $H_0: \mu = 8$ مقابل $H_1: \mu \neq 8$ بثقة $90\%, 99\%, 95\%$

**الحل :**

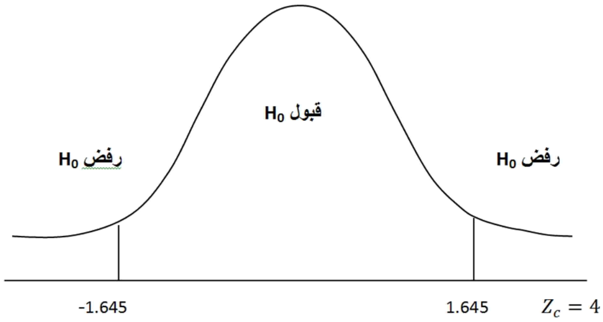
$H_0: \mu = 8$

$H_1: \mu \neq 8$

$\bar{X} = {}^{360}/_{36} = 10$

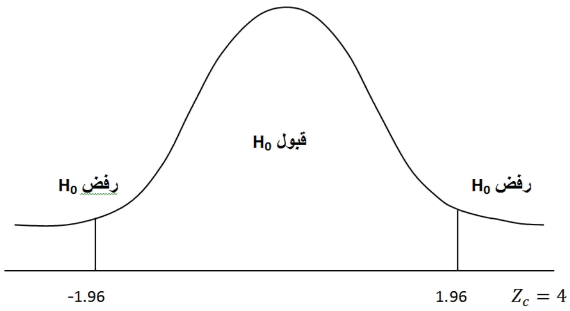
$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{10 - 8}{3/\sqrt{36}} = \frac{2}{3/6} = 4$$

- 90% : $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.645$



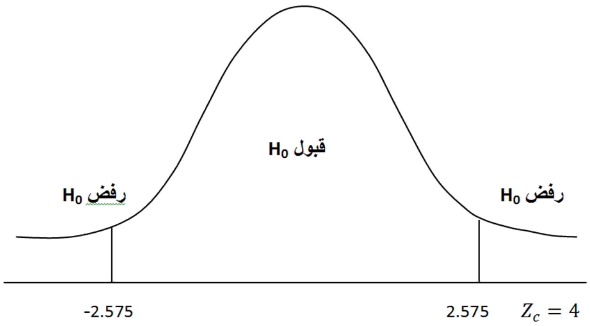

بما أن $Z_c$ وقعت في منطقة الرفض لـ $H_0$ فإننا نقبل $H_1$ عند مستوى معنوي 10% .

- 95% : $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$




بما أن $Z_c$ وقعت في منطقة الرفض لـ $H_0$ فإننا نقبل $H_1$ عند مستوى معنوي 5%.

- 99% : $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.575$




بما أن $Z_c$ وقعت في منطقة الرفض لـ $H_0$ فإننا نقبل $H_1$ عند مستوى معنوي 1%.

- **الحالة الثانية: إذا كان $\sigma^2$ مجهولة.**

**نظرية** ($02$):

اذا كانت $x_1, x_2, \dots\dots x_n$ $(n < 30)$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu, \sigma)$ وكانت $\sigma^2$ مجهولة فإن دالة الاختبار هي:

$$T_c = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

واذا كانت $H_0: \mu = \mu_0$

وكانت $H_1: \mu \neq \mu_0$.. فإننا نرفض $H_0$ على مستوى معنوية $\alpha$ اذا كان: $|T_c| > t_{\left[1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right]}$

او وكانت $H_1: \mu > \mu_0$ فإننا نرفض $H_0$ مستوى معنوية $\alpha$ اذا كان: $T_c > t_{[1-\alpha, n-1]}$

او وكانت $H_1: \mu < \mu_0$ فإننا نرفض $H_0$ مستوى معنوية $\alpha$ اذا كان: $T_c < -t_{[1-\alpha, n-1]}$

**مثال**($02$):

اذا كانت $x_1 \dots\dots X_{16}$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu, \sigma)$ بحيث أن $S^2 = 16$ ; $\overline{X} = 70$

المطلوب:

اختبر $\mu = 65$ مقابل $H_1: \mu \neq 65$ بثقة $90\%$ , $95\%$ , $99\%$.

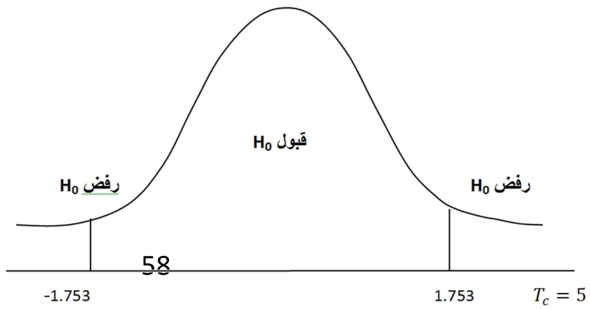
**الحل:**

$$H_0: \mu = 65$$
$$H_1: \mu \neq 65$$

$$T_c = \frac{70 - 65}{4/4} = 5$$

- الحالة الاولى: $(1 - \alpha) = 90\%$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}, \; n-1} = t_{0.95, \; 15} = 1.753$$



نرفض$H_0$ ونقبل$H_1$ عند مستوى معنوية $10$%.

- الحالة الثانية: $(1-\alpha) = 95\%$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}\,,\ n-1} = t_{0.975\,,\ 15} = 2.131$$

نرفض $H_0$ ونقبل $H_1$ عند مستوى معنوية $5$%.

- الحالة الثالثة: $(1-\alpha) = 99\%$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}\,,\ n-1} = t_{0.995\,,\ 15} = 2.947$$

نرفض $H_0$ و نقبل $H_1$عند مستوى معنوية $1$%

**مثال (03):**

نفس معطيات المثال (01) مع تغير الفرض البديل $H_1: \mu > 65$

**مثال(04):**

نفس معطيات المثال(01) مع تغيير الفرض البديل $H_1: \mu < 65$

## 2- اختبار الفروض الاحصائية المتعلقة بنسبة في المجتمع:

يشترط لإجراء الاختبار أو الاستدلال عن النسبة في المجتمع الأصلي أن يكون حجم العينة المسحوبة من المجتمع الأصلي كبير بدرجة كافية، وذلك حتى نتمكن من الحصول على تقدير أكثر دقة كلما أمكن للنسبة، ولكي يقترب ء من التوزيع الطبيعي، ولإجراء الاختبار أو الاستدلال عن النسبة في المجتمع الأصلي $p$ نفترض أن فرض العدم $H_0$ صحيح، يجرى الاختبار أو الاستدلال بصوره المختلفة (ذو الطرفين أو ذو الطرف الايمن أو ذو الطرف الأيسر)، وتأخذ إحصائية الاختبار المطلقة والمحسوبة الصيغة التالية:

$$Z_c = \frac{\bar{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

حيث أن:

$\bar{p}$ : النسبة للخاصية المعنية في العينة.

$p$ : النسبة المفترضة للخاصية المعنية في المجتمع الأصلي.

وصور الاختبار أو الاستلال للفروض الإحصائية هي:

- الاختبار أو الاستدلال ذو الطرفين:

$$H_0: P = P_0$$
$$H_1: P \neq P_0$$

- الاختبار أو الاستدلال ذو الطرف الأيمن:

$$H_0: P \leq P_0$$
$$H_1: P > P_0$$

- الاختبار أو الاستدلال ذو الطرف الأيسر:

$$H_0: P \geq P_0$$
$$H_1: P < P_0$$

**مثال(05)**:

سحبت عينة حجمها 200 سيدة لدراسة مدى موافقتهن على ما جاء بقانون الأحوال الشخصية الجديد، وقد بلغت نسبة السيدات التي أبدت عدم موافقتهن 20%.

المطلوب:

اختبر أن نسبة عدم الموافقة في مجتمع السيدات لا تختلف عن 10% عند مستوى معنوية 1%.

**الحل**:

نلاحظ أولا أن المسألة تتعلق بتوزيع ذي الحدين ولكن بما أن $n > 30$ و $np > 5$ و$n(1-p)$ فإنه يمكن استخدام التوزيع الطبيعي.

- صياغة الفروض:

$$H_0: p = 0.1$$
$$H_1: p \neq 0.1$$

- من خلال صياغة الفروض الاحصائية فإن الاختبار أو الاستدلال ذو طرفين وبالرجوع لجدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.01}{2}} = Z_{0.995} = 2.58$$

- حساب احصائية الاختبار:

$$Z_c = \frac{\bar{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} = \frac{0.2-0.1}{\sqrt{0.1(1-0.1)/200}} = 5$$

- اتخاذ القرار:

نتخذ القرار الاحصائي بقبول أو رفض فرض العدم $H_0$، ويعتمد ذلك على قيمة إحصائية الاختبار المطلقة والمحسوبة $|Z_c|$ إما أن تقع في منطقة الرفض $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ أو في منطقة القبول $(1-\alpha)$، وبما أن قيمة احصائية الاختبار $|Z_c| = 5$ أكبر من قيمة $Z$ الجدولية $Z_T = 2.575$، فإننا نرفض فرض العدم القائل بأن النسبة للسيدات التي لا توافقن على ما جاء بقانون الأحوال الشخصية الجديدة في المجتمع الأصلي $p = 0.1$ ، ونقبل الفرض البديل$H_1$

القائل بأن النسبة للسيدات التي لا توافقن على ما جاء بقانون الأحوال الشخصية الجديد في المجتمع الأصلي $p$ تختلف أو لا تساوي بالزيادة أو النقصان (0.1) عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.01$).

وبذلك نستنتج أن النسبة في المجتمع الأصلي $p$ تختلف عن 0.1 ومن ثم فإن احصائية العينة $\bar{p}$ لاتشير إلى النسبة في المجتمع الأصلي $p$ ، وعليه فإن الفرق بين $(\bar{p} - p)$ فرقا جوهريا حقيقيا باحتمال خطأ من النوع الأول $\alpha$ قيمته 0.01.

### 3- اختبارات الفروض الاحصائية المتعلقة بتباين مجتمع:

لإجراء الاختبار حول تباين المجتمع $\sigma$ حول ادعاء أو افتراض نظري بأن هذا التباين يساوي $\sigma_0$. يكون الاختبار كمايلي:

- صياغة الفروض:

$\boldsymbol{H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2}$ مقابل $\boldsymbol{H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2}$

$\boldsymbol{H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2}$ مقابل $\boldsymbol{H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2}$

$\boldsymbol{H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2}$ مقابل $\boldsymbol{H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2}$

- القرار:

نرفض $H_0$ ونقبل $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ عند مستوى معنوية $\alpha$ إذا لم تتحقق:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left[1-\frac{\alpha}{2};n-1\right]}} < \sigma_0^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left[\frac{\alpha}{2};n-1\right]}}$$

نرفض $H_0$ ونقبل $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ عند مستوى معنوية $\alpha$ إذا تتحقق: $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{[1-\alpha;n-1]}} > \sigma_0^2$

نرفض $H_0$ ونقبل $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ عند مستوى معنوية $\alpha$ إذا تتحقق: $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{[\alpha;n-1]}} < \sigma_0^2$

## IV- اختبارات الفروض الاحصائية لمعالم مجتمعين:

نتناول في هذا العنصر بعض أساليب الاستدلال الاحصائي والتي تناسب ما يسمى بالدراسات المقارنة حيث يكون لدينا مجتمعين نهتم بعقد مقارنات بين معالمها المتناظرة. فعلى سبيل المثال قد نهتم بمقارنة درجات الطلاب والطالبات في امتحان معين، أو مقارنة درجات نفس المجموعة من الطلبة في امتحانين مختلفين. و كمثال آخر قد نهتم بمقارنة تأثيرات نوعين من الدواء على الحالة الصحية للمرضى بمرض معين أو مقارنة الحالة الصحية للمرضى قبل وبعد تناول دواء معين.

**1- اختبار الفروض لمتوسط مجتمعين**:

اذا أردنا اجراء مقارنة بين مستوى القيم في مجتمعين مستقلين فيمكن اجراء هذه المقارنة من خلال مقارنة متوسطي المجتمعين. وإذا تعذر استخدام أسلوب الحصر الشامل لجمع بيانات من كافة مفردات المجتمعين، فإن المقارنة تبنى على أساس الوسط الحسابي لكل من عينتين عشوائيتين مسحوبتين من مجتمعي الدراسة مع تطبيق أساليب الا ستدلال الاحصائي.

وتكون صياغة الفروض كما يلي :

$$\boldsymbol{H_0: \mu_1 = \mu_2} \quad \text{أو} \quad \boldsymbol{H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0}$$

$$\boldsymbol{H_1: \mu_1 \neq \mu_2} \quad \text{أو} \quad \boldsymbol{H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0}$$

أما احصائية الاختبار فهي:

$$\boldsymbol{Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}}$$

**مثال(07)**:

ترغب مديرة أن تحدد عند مستوى معنوية 5 % ما إذا كان الأجر بالساعة للعمال نصف المهرة متساويا في مدينتين. لعمل ذلك، فإنها تأخذ عينة عشوائية من الأجر بالساعة من كل من المدينتين ووجدت أن $\bar{x}_1 = 600\ \$$ و $\bar{x}_2 = 540\ \$$ ، $s_1 = 200\ \$$ و$s_2 = 180\ \$$ وذلك لعينتين من حجم $n_1 = 40$ و $n_2 = 54$.

**الحل**:

- صياغة الفروض:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{أو} \quad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{أو} \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

- هذا اختبار ذو طرفين وباستخدام مستوى معنوية 5 % فإن قيم Z الحرجة هي $Z_{1-\frac{0.05}{2}} = \mp 1.96$
- دالة الاختبار الاحصائي هي:

$$Z_c = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(600-540)-(0)}{\sqrt{\frac{200^2}{40}+\frac{180^2}{54}}} = 1.5$$

- القرار: بما أن قيمة $Z_c$ تقع داخل منطقة القبول، فإننا نقبل $H_0$ أي $H_0: \mu_1 = \mu_2$ عند مستوى معنوية 5 %.

**مثال (08):**

في دراسة حول متوسط عمر المرأة عند الزواج الأول في إحدى الدول، سحبت عينتين من مدينتين عشوائيتين فكانت النتائج في الجدول الموالي:

| المؤشر / العينة | العينة الأولى | العينة الثانية |
| --- | --- | --- |
| حجم العينة | $n_1 = 248$ | $n_2 = 225$ |
| متوسط عمر المرأة عند الزواج الأول | $\bar{x}_1 = 24$ | $\bar{x}_2 = 26$ |
| الانحراف المعياري حول عمر المرأة عند الزواج(بالسنوات) | $s_1 = 3$ | $s_2 = 4$ |

المطلوب:

باستخدام هذه المعلومات هل هناك فرقا بين متوسط أعمار النساء المتزوجات في هاتين المدينتين؟

**الحل:**

- صياغة الفرضية:

$H_0: \mu_1 - \mu_{2=}0$
$H_1: \mu_1 - \mu_{2=}0$

- باستخدام مستوى دلالة 1 % واختبار ذي طرفين، فإن قيم Z الحرجة هي $Z_{1-\frac{0.01}{2}} = \mp 2.575$ .
- دالة الاختبار الإحصائي:

$$Z_c = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(24-26)-(0)}{\sqrt{\frac{3^2}{248}+\frac{4^2}{225}}} = 6.45$$

- القرار: بما أن قيمة $Z_c$ تقع داخل منطقة الرفض، فإننا نرفض $H_0$ أي $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى معنوية 1%.

**ملاحظة:**

إذا كان المجتمعان يتبعان التوزيع الطبيعي وكانت كل من $n_1$ و $n_2$ أصغر من 30 وافترضنا أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ وكلاهما غير معلوم، فإن توزيع المعاينة للفرق بين وسطي يتبع توزيع ستيودنت بدرجات حرية $n_1 + n_2 - 1$ .[5]

[5] دومينيك سالفاتور، ترجمة سعدية حافظ منتصر "**ملخصات شوم نظريات ومسائل في الاحصاء والاقتصاد القياسي**" الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، ص 102.

**مثال(09):**

يرغب الاتحاد الامريكي لطب الاسنان في اختبار أي معجون من بين معجوني أسنان أفضل في محاربة التسوس. أخذت عينة عشوائية من 21 شخصا من مستعملي كل من المعجونين موضع الاختبار. ووجد أن متوسط عدد الفجوات للمجموعة الأولى على مدى 10 سنوات هو 25 بانحراف معياري 5 وبالنسبة للمجموعة الثانية، متوسط عدد الفجوات 23 بانحراف معياري 5 بافتراض أن توزيع الفجوات طبيعي لمستعملي المجموعة الأول والمعجون الثاني، وأن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ حدد ما إذا كانت $\mu_1 = \mu_2$ عند مستوى معنوية 10%.

**الحل:**

- صياغة الفرضية:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 = \mu_2$

- لدينا المجتمعين يتبعا التوزيع الطبيعي ولكن كلا من $n_1$ و $n_2$ أقل من 30 ومن المفترض أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (ولكنهما غير معلومين)، فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسط يتبع توزيع ستيودنت بدرجات حرية $n_1+n_2-2$. وحيث أنه من المفترض أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (فيمكننا استخدام $s_1^2$ و $s_2^2$ كتقدير لـ $\sigma_1^2$ و $\sigma_2^2$ على التوالي).
- $S^2$ متوسط مرجح القيم $s_1^2$ و $s_1^2$ .

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{20(5)^2+20(5)^2}{21+21-2} = 20.5$$

$$T_c = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1}+\frac{s^2}{n_2}}} = \frac{(25-23)-(0)}{\sqrt{\frac{20.5}{21}+\frac{20.5}{21}}} = 1.42$$

- باستخدام مستوى دلالة 10 % واختبار ذي طرفين، فإن قيم t الحرجة هي $t_{(1-\frac{0.01}{2},40)} = \mp 1.684$ .
- القرار: بما أن قيمة $_c$ تقع داخل منطقة القبول، فإننا نقبل $H_0$ أي $H_0: \mu_1 = \mu_2$ عند مستوى معنوية 10 %.

### 2– اختبار الفروض للفرق بين نستين في مجتمعين:

تستهدف العديد من الدراسات حساب نسب المفردات في مجتمعات الدراسة التي تحقق خواص معينة ومقارنة النسب المتناظرة في مجتمعات الدراسة التي تحقق خواص معينة ومقارنة النسب المتناظرة في المجتمعات المختلفة. وسنتناول

في هذا العنصر اختبار الفروض الخاصة بمعنوية الفرق بين نسبتين في مجتمعين مستقلين. وتبنى هذه الفروض على نسبتي عينتين عشوائيتين مسحوبتين من مجتمعي الدراسة.

- ويكون صياغة الفروض كمايلي:

$$\boldsymbol{H_0: p_1 = p_2} \quad \text{أو} \quad \boldsymbol{H_0: p_1 - p_{2=}0}$$

$$\boldsymbol{H_1: p_1 = p_2} \quad \text{أو} \quad \boldsymbol{H_1: p_1 - p_{2=}0}$$

- وتكون احصائية الاختبار كالتالي:

$$\boldsymbol{Z_c = \frac{(\overline{p}_1-\overline{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}}$$

حيث $\overline{p}$ متوسط مرجح للنسبتين $\overline{p}_2$ و $\overline{p}_1$ ويتم حسابه كمايلي:

$$\boldsymbol{\overline{p} = \frac{n_1\overline{p}_1+n_2\overline{p}_2}{n_1+n_2}}$$

- القرار: ويتم تحديد القيمة الحرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري. وتحدد نتيجة الاختبار بمقارنة القيمة المطلقة لإحصاء الاختبار بالقيمة الحرجة، فإذا زادت عنها نرفض الفرض العدمي ونقبل الفرض البديل.[6]

**مثال(10)**:

اذا افترضنا أننا استطلعنا آراء عينة عشوائية من 200 طالب وعينة عشوائية من 150 طالبة عن مدى التزامهم بحضور جميع المحاضرات أثناء تواجدهم داخل الحرم الجامعي، فوجد أن 124 طالبا و105 طالبة يلتزمون بحضور جميع المحاضرات.

المطلوب:

اختبر صحة الادعاء بأنه ليس هناك اختلاف بين نسبة الحضور للإناث والذكور عند مستوى معنوية 5%؟

**الحل**:

- صياغة الفروض:

$$H_0: p_1 = p_2 \quad \text{أو} \quad H_0: p_1 - p_{2=}0$$
$$H_1: p_1 = p_2 \quad \text{أو} \quad H_1: p_1 - p_{2=}0$$

[6] لبيبة حسب النبي العطار وعادل محمود حلاوة، "مقدمة في أساليب التحليل الإحصائي" الدار الجامعية لطبع والنشر والتوزيع، الاسكندرية، مصر، 2000، ص 325.

- باستخدام مستوى دلالة 5 % واختبار ذي طرفين، فإن قيم Z الحرجة هي $Z_{1-\frac{0.05}{2}} = \mp 1.96$ .
- حساب احصائية الاختبار $Z_c$ لكن قبل ذلك يجب حساب $\bar{p}_2$ و $\bar{p}_1$ ثم حساب $\bar{p}$ :

$$\bar{p}_1 = \frac{124}{200} = 0.62$$

$$\bar{p}_2 = \frac{105}{150} = 0.70$$

ثم حساب متوسط مرجح للنسبتين $\bar{p}$ :

$$\bar{p} = \frac{n_1\bar{p}_1 + n_2\bar{p}_2}{n_1+n_2} = \frac{105+124}{150+200} = 0.65$$

$$Z_c = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.62-0.70}{\sqrt{0.65(1-0.65)\left(\frac{1}{150}+\frac{1}{200}\right)}} = 1.55$$

- القرار: بما أن قيمة $c$ تقع داخل منطقة القبول، فإننا نقبل $H_0$ أي $H_0: p_1 = p_2$ ونستنتج عند مستوى معنوية 5 %.

### 3- اختبار الفروض بتساوي تباين مجتمعين:

اذا فرضنا أن شخص ما أراد أن يستخدم إحصائية ستيودنت للمقارنة بين متوسطي انتاجية مصنعين للورق مثلا. ولكن لديه شك في صحة الفرض بتساوي تبايني إنتاجية آلات المصنعين. ومن ثم لابد من استخدام أسلوب إحصائي لاختبار صحة الفرض.[7]

والأسلوب الاحصائي الذي يستخدم في هذه الحالة هو عمل استدلال احصائي عن النسبة بين تبايني المجتمعين وليس الفرق كما هو الحال في اختبار تساوي متوسطي مجتمعين وبالتالي تكون الفروض الاحصائية كمايلي:

- اختبار من طرفين:

$$\boldsymbol{H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2}$$

$$\boldsymbol{H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2}$$

- اختبار من الطرف الايمن:

$$\boldsymbol{H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2}$$
$$\boldsymbol{H_1: \sigma_2^2 > \sigma_1^2}$$

[7] أسامة عبد العزيز حسن ولبيبة حسب النبي العطار " أساسيات الإستدلال الاحصائي" الدار الجامعية، الاسكندرية، مصر، 2001، ص 277.

- اختبار من الطرف الأيسر:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1: \sigma_2^2 < \sigma_1^2$$

- وسوف نعتمد في الاختبار على النسبة بين تبايني العينتين $S_1^2$ و $S_2^2$ وبالتالي تكون احصائية الاختبار كمايلي:

$$F_c = \frac{S_2^2}{S_1^2}$$

- ويكون القرار كمايلي:

نرفض $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ونقبل :

$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ بمستوى معنوية α اذا لم تتحقق $F_{\left[\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1\right]} \leq \frac{S_2^2}{S_1^2} \leq F_{\left[1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1\right]}$

$H_1: \sigma_2^2 > \sigma_1^2$ بمستوى معنوية α اذا كان $\frac{S_2^2}{S_1^2} > F_{[1-\alpha, n_2-1, n_1-1]}$

$H_1: \sigma_2^2 < \sigma_1^2$ بمستوى معنوية α اذا كان $\frac{S_2^2}{S_1^2} < F_{[\alpha, n_2-1, n_1-1]}$

**مثال(11)**:

لتكن لدينا بيانات العينتان كمايلي:

$n_1 = 6 \qquad S_1^2 = 77.9$

$n_2 = 10 \qquad S_2^2 = 194.2$

المطلوب:

اختبر $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ مقابل $H_1: \sigma_2^2 > \sigma_1^2$ بثقة 95%.

الحل:

- الفروض:

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1: \sigma_2^2 > \sigma_1^2$

- حساب احصائية دالة الاختبار:

$$F_c = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{194.2}{77.9} = 2.49$$

- عند مستوى معنوية 5 % تكون احصائية فيشر كمايلي: $F_{[1-\alpha,n_2-1,n_1-1]} = F_{[(0.95,9,5]} =$ 10.16
- القرار:

نقبل $H_0$ أي أن $H_1^2 = \sigma_2^2$ بمستوى معنوية 5 % .

# تمـــارين غير محلولة

## التمرين رقم (01):

أرادت إحدى الشركات الكبرى المنتجة للسيارات أن تخبر ما إذا كان النوع الجديد من المحركات يتلائم مع المعايير الجديدة لتلوث البيئة والتي تشترط أن يكون متوسط معدل ذرات الكربون في العادم المنبعث من هذا النوع من المحركات أقل من 20 جزء في المليون. ولتحقيق هذا الهدف قامت الشركة بانتاج 10 محركات من هذا النوع وحسب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لمعدل ذرات الكربون في العادم فكانا على الترتيب 17,1 و 3 جزء في المليون.

المطلوب:

هل تؤيد هذه البيانات الفرض بأن النوع الجديد من المحركات يتلائم مع معايير تلوث البيئة بمستوى معنوية 1 % ؟

**التمرين رقم (02):**

سحبت عينة عشوائية مكونة من 6 طلاب من طلبة السنة الثانية بوحدة التعليم باللغة الانجليزية وكانت درجاتهم في امتحان مادة الاحصاء هي: 11، 13، 9، 16، 11، 12 وعلى فرض أن توزيع درجات الطلبة في هذه المادة كان توزيع طبيعيا.

المطلوب:

هل تؤيد هذه البيانات الفرض بأن متوسط درجة الطالب في هذه المادة يختلف عن 13(استخدام مستوي معنوية $\alpha = 5\%$)؟

**التمرين رقم (03):**

تستخدم آلة معينة في أحد المصانع لإنتاج نوع معين من المسامير على أساس أن يكون متوسط طول المسمار مساويا بوصة واحدة، واذا اختلف عن أساس أن يكون غير مطابق لمواصفات الزبائن وبالتالي عدم شرائه، ولتفادي ذلك تم اختيار عينة عشوائية مكونة من 50 مسمار من انتاج هذه الآلة. وحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري فكانا على الترتيب 1.02 و 4 بوصة.

المطلوب:

فهل تشير بيانات هذه العينة الى اختلاف متوسط طول المسمار عن بوصة واحدة، إستخدم مستوى معنوي $\alpha = 1\%$.

**التمرين(04):**

قامت احدى شركات الأدوية بتركيب دواء جديد مسكن للآلم، أدعت أن هذا الدواء أكثر فعالية من الدواء المنتشر حاليا بالصيدليات والذي يترتب عليه شعور بالراحة بعد وقت متوسطه يساوي 3,5 دقيقة. ولتأكد من صحة هذا الادعاء تم تجربة الدواء الذي انتجته الشركة على عينة عشوائية مكونة من 50 مريض، ووجد أن المتوسط الحسابي والانحرا المعياري للوقت اللازم حتى يضهر أثر الدواء ويشعر المريض بالراحة هما على الترتيب 2,8 و 1,1 دقيقة.

المطلوب:

هل تؤيد بيانات العينة ادعاء الشركة المنتجة بأن الدواء الجديد يؤدي الى الشعور بالراحة في وقت أقل عند مسوى معنوية 10% ؟

**التمرين(05)**:

يعرف مركز تجنيد الجيش من الخبرة الماضية أن وزن المجند يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري قدره 12 كلغ، ويرغب مركز التجنيد أن يختبر عند مستوى معنوية 1 **%** ما إذا كان متوسط وزن مجندي هذا العام أكبر من 80 كلغ ولهذا أخذت عينة عشوائية من 36 مجند حيث وجد أن متوسط الوزن في العينة 85 **%** كلغ.

المطلوب:

قم باجراء هذا الاختبار.

**التمرين(06)**:

افترض أن 50 % من 60 مصنعا في إقليم معين A تخضع لمعايير مكافحة التلوث بينما 40 % فقط من40 مصنعا في إقليم B تخضع لنفس المعايير. هل نسبة المصانع التي تخضع لمعايير مكافحة التلوث أكبر معنويا في إقليم B عنها في اقليم A عند مستوى معنوية 5 % ثم 10% ؟

**التمرين (07)**:

بفرض أن أعمار العمال في الصناعة الغذائية تتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري قدره 6 سنوات، سحبت عينة عشوائية من 25 عامل من إحدى الصناعات الغذائية فوجد أن الانحراف المعياري للأعمار في العينة يساوي 5.

المطلوب:

هل تدل هذه البيانات على أن تباين أعمار العمال بهذه الصناعة يختلف عن تباين أعمار العمال في الصناعات الغذائية عند مستوى دلالة 5 %.

**التمرين(08):**

رغب مدير الأفراد في إحدى الشركات معرفة إذا كان لطريقتين مختلفتين في التدريب نفس التأثير، سحبت عينتان مستقلتان من عمال هذه الشركة عشوائيا وتم تدريب كل منهما بطريقة مختلفة وبعد إنتهاء مدة التدريب أجرى لهما امتحانا موحدا لقياس مستوى العمال، فحصلنا على البيانات الآتية:

$$\boldsymbol{n_1 = 18, \quad \bar{X}_1 = 80, \quad S_1^2 = 36}$$

$$\boldsymbol{n_2 = 12, \quad \bar{X}_2 = 85, \quad S_2^2 = 34}$$

المطلوب:

اختبر الفرض القائل بأن هاتين الطريقتين بالتدريب متساويتان عند مستوى معنوية 5% وتحت افتراض أن التوزيع التكراري للمجتمعين طبيعيا والتباينات متساوية.

**التمرين (09):**

لنفرض أننا سحبنا عينتين عشوائيتين من مجتمعين إحصائيين مستقلين وحصلنا على البيانات التالية:

العينة الأولى: $\boldsymbol{n_1 = 12 \ , \ \bar{x}_1 = 85 \ , S_1 = 4}$

العينة الثانية: $\boldsymbol{n_2 = 10 \ , \ \bar{x}_2 = 85 \ , S_2 = 5}$

المطلوب:

اختبر الفرض القائل بأن تبايني المجتمعين متساويين عند مستوى دلالة 5%.

# الفصل الخامس: الاختبارات اللامعلمية

## I- مقدمة:

في بعض الحالات قد لا تتوافر في المجتمع موضع الدراسة أن يكون توزيع هذا المجتمع له توزيع طبيعي أو يقترب منه، لذلك فإن استخدام الاختبارات المعلمية في مثل هذه الحالات قد يؤدي إلى نتائج غير دقيقة، كذلك يفترض أن تكون بيانات الظاهرة موضع الدراسة دقيقة، ولكن في بعض الأحيان يتعذر أخذ قياسات عددية دقيقة على بعض الظواهر، لذلك فإننا نستخدم طرق غير معلمية لا تعتمد على شروط معينة تتعلق بتوزيع المجتمع ولا تحتاج إلى قياسات دقيقة.

مزايا استخدام الاختبارات غير المعلمية:

- سهولة العمليات الحسابية المستخدمة.
- لا تحتاج إلى شروط كثيرة لذلك فإن إمكانية إساءة استعمالها قليلة جداً.
- تستخدم عندما لا تتحقق الشروط اللازمة لتطبيق الاختبارات المعلمية مثل أن يكون توزيع المجتمع طبيعياً.
- تستخدم في حالة صعوبة الحصول على بيانات دقيقة.
- لا يتطلب استخدامها معرفة دقيقة في مجال الرياضيات أو الإحصاء.
- لا تشترط استخدامها أن يكون حجم العينات كبيراً، لذلك فإن عملية جمع البيانات في هذه الحالة توفر الوقت والمجهود والتكلفة.

## II- اختبار حسن المطابقة: ( مقارنة توزيع نظري بتوزيع تجريبي):

تعمد الدراسات الاحصائية على فرض نموذج احصائي تخضع له المشاهدات المتوافرة و يسمى بالتوزيع النظري مثلا :نقول أن عدد الذكور في المجتمع مقابل الاناث هو النصف – أجور العمل تخضع لتوزيع طبيعي

–عدد حوادث السيارات تخضع لتوزيع بواسن – عدد المصابيح الكبر الصالحة التي ينتجها مصنع تخضع مثلا لتوزيع ذي الحدين …

والسؤال المطروح في مثل هذه الحالات هو كيف يمكن التأكد من المشاهدات المتوفرة من عينة تخضع لحسن المطابقة لهذا النموذج الاخير النظري والمشاهدات تسمى بالتوزيع النظري والتجريبي وذلك باستعمال دالة اختبار $\chi^2$

**نظرية(01):**

إذا كان لدينا جدول تكراري (تجريبي) تكراراته $\theta_i$ $(i = 1, 2 \ldots k)$ و أردنا اختبار الفرضية القائلة بأن هذا التوزيع التجريي $\chi^2$ يخضع لتوزيع نظري تكراراته:

$$C_i = np_i$$

ترفض هذه الفرضية إذا كانت:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\theta_i - c_i)^2}{c_i} > \chi^2_{[1-\alpha, k-1-m]}$$

حيث $m$ عدد المعالم المقدرة من البيانات والتي قد تكون $(\lambda, X, \sigma)$

**ملاحظة:**

لتطبيق هذا الاختبار يجب أن يكون $\frac{c_i}{\theta_i} \geq 5 \;;\; \forall_i$ واذا لم تتحقق في بعض الفئات نقوم بدمج الفئات مع بعضها.

**مثال**$(01)$:

الجدول التالي يوضح عدد المشاهدات (التكرارات) من الآلات المعطلة في اليوم.

| عدد الآلات المعطلة | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 4 | 9 | 15 | 11 | 5 | 4 | 1 | 1 |

المطلوب:

هل هذه القيم متطابقة مع قانون براسون بثقة **95**%.

**الحل:**

$H_0$: هناك تطابق بين هذه النتائج وقيم براسون.

$H_1$: ليس هناك تطابق بين هذه النتائج وقيم براسون

| عدد الآلات المعطلة $x_i$ | التكرار $\theta_i$ | $x_i\,n_i$ | $p_i$ | $C_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 0 | 0.082 | 4.1 |
| 1 | 9 | 9 | 0.205 | 10.25 |
| 2 | 15 | 30 | 0.256 | 12.81 |
| 3 | 11 | 33 | 0.213 | 10.67 |
| 4 | 5 | 20 | 0.133 | 06.67 |
| 5 | 4 | 20 | 0.066 | 03.33 |
| 6 | 1 | 6 | 0.027 | 1.39 |
| 7 | 1 | 7 | 0.009 | 0.49 |
| المجموع | 50 | 125 | | |

$$\bar{X} = \lambda = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{125}{50} = 2.5$$

$$p(x=0) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \frac{e^{-2.5} \cdot 2.5^0}{0!} = 0.082$$

$$p(x=1)=p(x=0)\frac{2.5}{1}=0.205$$

$$\vdots$$

$$p(x=7)=p(x=6)\frac{2.5}{7}$$

$$C_i=n\cdot P_i$$

$$C_0=50*0.082$$

$$\vdots$$

$$C_7=50*0.009$$

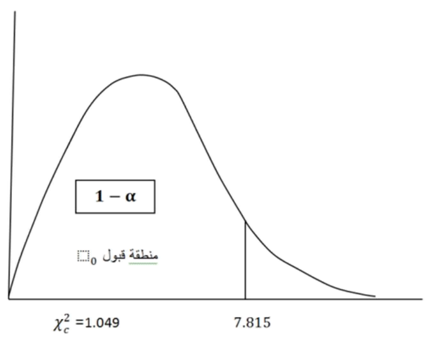
قبل حساب $\boldsymbol{\chi^2}$ يجب ان نكون الفيئات تحقق الشرط $\boldsymbol{5} \geq \begin{matrix}\boldsymbol{c_i}\\ \boldsymbol{\theta_i}\end{matrix}$

| $\boldsymbol{\theta_i}$ | $\boldsymbol{C_i}$ |
| --- | --- |
| 13 | 14.35 |
| 15 | 12.81 |
| 11 | 10.67 |
| 5 | 6.67 |
| 6 | 5.21 |

$$\chi_c^2=\frac{\sum(\boldsymbol{\theta_i}-\boldsymbol{C_i})^2}{\boldsymbol{C_i}}=\frac{(13-14.35)^2}{14.35}+\frac{(15-12.81)^2}{12.81}+\frac{(11-10.67)^2}{10.67}$$

$$+\frac{(5-6.67)^2}{6.67}+\frac{(6-5.21)^2}{5.21}=1.049$$

$$\chi_{0.95}^2=\chi_{5-1-1=3}^2=7.815$$



ومنه نقبل $H_0$ اي هناك تطابق .

**III– اختبار الاستقلال:**

في كثير من المسائل العلمية نقوم بتصنيف مجموعة من المشاهدات وفق أسلوبين مثلا نصنف عدد عمال شركة وفق المهارة ووفق المستوى التعليمي وقد نصف مجموعة من الشركات وفق الربح السنوي من جهة وأجور العمال من جهة أخرى و السؤال المطروح، هل هناك علاقة بين الربح و الاجور؟

**نظرية**(02):

اذا صنف مجموعة من المشاهدات وفق اسلوبين أحدهما X و الثاني Y في جدول توافق قيمه $\theta_{ij}$ حيث

$i = 1 \ldots . L\,; j = 1 \ldots . C$ يسمى بجدول الاقتران.

و أردنا اختبار الفرضية $H_0$ فإن X و Y مستقلان مقابل$H_1$ : أنهما غير مسقلني فإننا نرفض$H_0$ المستوى $\alpha$ اذا كان:

$$\chi_c^2 = \sum_{ij} \frac{(\theta_{ij} - C_{ij})^2}{C_{ij}} > x^2_{[1-\alpha\ ;(k-1)\ ;(c-1)]}$$

حيث : $C_{ij} = \frac{n_i \cdot n_j}{n}$

$n_i$ :مجموع مشاهدات السطر$i$

$n_j$ :مجموع مشاهدات العمود $j$

$n$ العد الكلي للمشاهدات

**مثال**(02):

في مسح احصائي لـ 100 شركة حيث قسمت الأجور الصنفين مرتفع ومنخفض وقسمت ارباح الشركات الى صنفين مرتفع ومنخفض.

المطلوب:

هل هناك علاقة بين الأرباح و الأجور بثقة **95**%.

| الأجر / الربح | مرتفع | منخفض | المجموع |
|---|---|---|---|
| **مرتفع** | 37 | 31 | 68 |
| **منخفض** | 11 | 21 | 32 |
| **المجموع** | 48 | 52 | 100 |

**الحل**:

$H_0$: هناك علاقة بين الربح والاجر

$H_1$ : ليس هناك علاقة بين الربح والاجر

$$C_{ij} = \frac{n_i \cdot n_j}{n} =$$

$$C_{11} = \frac{68 \cdot 48}{100} = 32.64 \qquad C_{12} = \frac{68 \cdot 52}{100} = 35.36$$

$$C_{21} = \frac{32 \cdot 48}{100} = 15.36 \qquad C_{22} = \frac{32 \cdot 52}{100} = 16.64$$

$$\chi_c^2 = \sum \frac{(\boldsymbol{\theta_{ij}} - \boldsymbol{C_{ij}})^2}{\boldsymbol{C_{ij}}} = \frac{(37-32.64)^2}{32.64} + \frac{(31-35.36)^2}{35.36} + \frac{(11-15.36)^2}{15.36} + \frac{(21-16.64)^2}{16.64} = 3.48$$

$$\boldsymbol{\chi^2_{[1-\alpha,\ (2-1)(c-1)]} = \chi^2_{[0.95,\ (2-1)(2-1)]} = 3.8\ 4\ 1}$$

القرار:

تقبل $H_0$ ونرفض $H_1$ ان هناك علاقة بين الارباح و الاجور عند مستوى دلالة **5**%

# تمارين غير محلولة

**التمرين رقم (01):**

يعطي الجدول الموالي عدد حوادث المرور في الطرق السيار:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 6 | 3 | 10 | 8 | 12 | 3 |

المطلوب:

هل تتطابق هذه القيم مع توزيع بواسون عند مستوى معنوية $\alpha = 10\%$ ؟

**التمرين رقم (02):**

يعطي الجدول الموالي نتائج فحص طبي لمرض ضغط الدم:

| الفئات | 0 – 10 | 10 – 20 | 20 – 30 | 30 – 40 | 40 – 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| التكرارات | 1 | 3 | 3 | 10 | 15 |

المطلوب:

هل تتطابق هذه القيم مع التوزيع الطبيعي؟

**التمرين رقم (03):**

قام تاجر بجمع بيانات عن عدد السيارت الأجنبية والمحلية التي يشتريها عملاء أعمارهم تحت سن 30 سنة، والتي يشتريها عملاء أعمارهم 30 سنة فأكثر. لاختبار ما اذا كان نوع السيارة المشتراة أجنبية أو محلية مستقلا عن سن المشترى عند معنوية 1%.

| السن | نوع السيارة | | الاجمالي |
|---|---|---|---|
| | أجنبية | محلية | |
| تحت 30 | 40 | 30 | 70 |
| 30 فأكثر | 80 | 20 | 100 |

**التمرين رقم (04):**

أخذ مدير مصنع عينة عشوائية من 100 يوم من الاجازات المرضية، ووجد أن 30 % من القوة العاملة في المصنع في فئة العمر 20-29 قد أخذو أجازة مرضية 26 يوم وأن 40 % من القوة العاملة في فئة العمر 30-39 قد أخذو 37 يوما، وأن 20 % في فئة العمر 40-49 قد أخذوا 24 يوما، وأن 10 % في فئة العمر 50 فأكثر قد أخذوا

13 يوما أجازة مرضية. كيف يمكن للمدير عند مستوى معنوية 5 % أن يختبر الفرض أن العمر ليس عاملا في أخذ أجازة مرضية؟

**التمرين رقم (05)**:

يعطي الجدول الموالي توزيع القبول لعدد 100 طالب في 3 كليات. بمستوى معنوية 5 % اختبر معنوية أن توزيع القبول هو تقريبا ذو الحدين إذا كان احتمال قبول طالب في كلية ما 0.4.

| عدد الطلاب | مرات القبول |
|---|---|
| 25 | 0 |
| 34 | 1 |
| 31 | 2 |
| 10 | 3 |

**التمرين رقم(06)**:

يعطي الجدول الموالي توزيع درجات اختبار القدرات الدراسية SAT لعينة عشوائية من 100 طالب جامعي.

| عدد الطلاب | درجات SAT |
|---|---|
| 350-251 | 3 |
| 450-351 | 25 |
| 550-451 | 50 |
| 650-551 | 20 |
| 750-651 | 2 |

المطلوب:

باستخدام مستوى معنوية 5 % اختبر ما اذا كانت درجات SAT تتبع التوزيع الطبيعي.

## 1- التوزيعات الاحتمالية

**التمرين 1**: نرمي حجرة نرد 4 مرات متتالية، ونسجل في كل مرة الرقم الذي يظهر. فإذا كانت جميع الأوجه لها نفس احتمال الظهور وأن الأربعة رميات مستقلة عن بعضها البعض.

**1-** ما هو احتمال ظهور الرقم 5 ثلاث مرات؟

**2-** ما هو احتمال ظهور الرقم 5 مرة واحدة على الأقل؟

إذا كان لدينا المتغير العشوائي $X$ حيث يمثل عدد مرات ظهور الرقم 5 في الأربع رميات.

**3-** حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي $X$ ؟

**4-** أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

**الحل**:

أ- احتمال ظهور الرقم 5 ثلاث مرات هو

احتمال ظهور الرقم 5 عند رمي حجرة نرد مرة واحدة هو $\frac{1}{6}$. إذا اعتبرنا $A$ و $B$ هو حادث ظهور وعدم ظهور الرقم 5 على التوالي. يصبح لدينا:

$$P(A) = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{5}{6}$$

وبما أن عدد الرميات مستقلة عن بعضها البعض فإنه يمكن تطبيق توزيع ذي الحدين حيث أن:

$$P(X) = c_n^X p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X=3) = c_4^3 (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^{4-3} = 0.01$$

**2-** احتمال ظهور الرقم 5 مرة واحدة على الأقل هو

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = P(X=0) = c_4^0 \frac{1}{6}^0 (\frac{5}{6})^{4-0} = 0.48$$

$$P(A) = 1 - 0.48 = 0.52$$

**3-** تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي $X$:

إذا كان المتغير العشوائي ظهور الرقم 5 يكون لدينا عدد الحالات الممكنة عند رمي حجرة نرد مرة واحدة

$$\mathbf{\Omega} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$$

أما عندما نرمي حجرة نرد 4 مرات تكون عدد الحالات الممكنة $2^4 = 16$

وبما أن المتغير العشوائي يتبع توزيع ذي الحدين فإنه يمكننا حساب الاحتمالات المقابلة من خلال:

حيث أن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي هي: $\{0, 1,2,3,4\}$

$$P(X = 0) = c_4^0 (\frac{1}{6})^0 (\frac{5}{6})^{4-0} = \frac{625}{1296}$$

$$P(X = 1) = c_4^1 (\frac{1}{6})^1 (\frac{5}{6})^{4-1} = \frac{125}{324}$$

$$P(X = 2) = c_4^2 (\frac{1}{6})^2 (\frac{5}{6})^{4-2} = \frac{25}{216}$$

$$P(X = 3) = c_4^3 (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^{4-3} = \frac{5}{324}$$

$$P(X = 4) = c_4^4 (\frac{1}{6})^4 (\frac{5}{6})^{4-4} = \frac{1}{1296}$$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | **Σ** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{625}{1296}$ | $\frac{125}{324}$ | $\frac{25}{216}$ | $\frac{5}{324}$ | $\frac{1}{1296}$ | 1 |

**4**– حساب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري:

- التوقع الرياضي

$$E(X) = np$$
$$= 4 \times \frac{1}{6} = 0.66$$

- التباين

$$V(X) = np(1 - p)$$
$$= 4 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 0.55$$

- الانحراف المعياري

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)}$$
$$\delta(X) = \sqrt{0.55}$$
$$\delta(X) = 0.74$$

**التمرين 2**: تشير الإحصائيات للسنوات السابقة أنه في المتوسط يتوقف 6 طلاب جدد عن الدراسة في كل قسم كل سنة في كلية معينة.

**1**– ما هو احتمال توقف 3 طلاب عن الدراسة في سنة معينة؟

**2**– ما هو احتمال توقف 3 طلاب أو أقل عن الدراسة في سنة معينة؟

**3**– أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

**الحل:**

**1-** احتمال توقف 3 طلاب عن الدراسة في سنة معينة هو

$$P(X) = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!}, \quad x = 0,1,2 \dots \dots . n$$

$$P(3) = \frac{6^3 e^{-6}}{3!} = \frac{216\times 0.00248}{3\times 2\times 1} = 0.08928$$

**2-** احتمال توقف 3 طلاب أو أقل عن الدراسة في سنة معينة هو

$$P(X \leq 3) = f(3) + f(2) + f(1) + f(0)$$

$$P\ (3) = 0.08928$$

$$P(2) = \frac{6^2 e^{-6}}{2!} = \frac{36\times 0.00248}{2\times 1} = 0.04464$$

$$P(1) = \frac{6^1 e^{-6}}{1!} = \frac{6\times 0.00248}{1} = 0.01488$$

$$P(0) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} = \frac{1\times 0.00248}{1} = 0.00248$$

$$P(X \leq 3) = 0.08928 + 0.04464 + 0.01488 + 0.00248$$
$$= 0.15128$$

**3-** حساب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الحوادث:

- التوقع الرياضي

$$E(x) = \lambda = 6$$

- التباين

$$V(x) = \lambda = 6$$

- الانحراف المعياري

$$\sigma(x) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{6} = 2.45$$

**التمرين 3**: في امتحان مقياس الإحصاء وجد الطالب 4 تمارين. فإذا كان احتمال أن يجيب هذا الطالب عن كل تمرين صحيحا هو $\frac{2}{3}$ .

**1-** ما هو احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرينين فقط؟

**2-** ما هو احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرين واحد أو أكثر؟

**3-** ما هو احتمال أن يجيب صحيحا عن أكثر من نصف التمارين؟

**الحل:**

**1**– احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرينين فقط هو

لدينا: $n = 4, \quad P = \frac{2}{3}, \quad q = 1 - P = \frac{1}{3}$

$$P(2) = c_4^2 (\frac{2}{3})^2 (\frac{1}{3})^{4-2} = 0.2962$$

**2**– احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرين واحد أو أكثر هو

$$P(X \geq 1) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

$$P(1) = c_4^1 (\frac{2}{3})^1 (\frac{1}{3})^{4-1} = 0.0987$$

$$P(2) = c_4^2 (\frac{2}{3})^2 (\frac{1}{3})^{4-2} = 0.2962$$

$$P(3) = c_4^3 (\frac{2}{3})^3 (\frac{1}{3})^{4-3} = 0.3950$$

$$P(4) = c_4^4 (\frac{2}{3})^4 (\frac{1}{3})^{4-4} = 0.1975$$

$$P(X \geq 1) = 0.0987 + 0.2962 + 0.3950 + 0.1975$$
$$= 0.9876$$

أو بطريقة ثانية:

احتمال أن لا يجيب عن أي تمرين هو $q^4 = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$ وبالتالي احتمال أن يجيب صحيحا على الأقل على تمرين هو $1 - q^4 = \frac{80}{81} = 0.9876$

**3**– احتمال أن يجيب صحيحا عن أكثر من نصف التمارين هو

يجيب هذا الطالب على أكثر من نصف التمارين يعني إذا أجاب صحيحا على 3 أو 4 تمارين.

$$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) = 0.3950 + 0.1975 = 0.5925$$

**التمرين 4**: تشير الإحصائيات أن 1 في المائة من السيارات المنتجة في مصنع ما فيها بعض المشاكل التقنية. فرضا أننا اخترنا عينة متكونة من 30 سيارة. أحسب احتمال وجود أكثر من سيارة فيها مشاكل تقنية:

**1**– باستخدام توزيع ذي الحدين؟

**2**– باستخدام التوزيع البواسوني كتقريب لتوزيع ذي الحدين؟

**الحل**:

**1**– باستخدام توزيع ذي الحدين:

لدينا: $n = 30, \quad P = 0.01, \quad q = 1 - P = 0.99$

باستخدام الجداول الإحصائية نجد:

$$P(X > 1) = P(2) + P(3) + P(4) \dots\dots. = 0.0328 + 0.0031$$
$$= 0.0328 + 0.0031 + 0.0002 = 0.0361$$

**2**– باستخدام التوزيع البواسوني كتقريب لتوزيع ذي الحدين:

بما أن $n = 30$ و$np = 30 \times 0.01 = 0.3$ فإنه يمكننا استخدام تقريب التوزيع البواسوني لتوزيع ذي الحدين. حيث أن: $\lambda = np = 0.3$

يمكننا حساب $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$ حيث أن $X$ هو عدد السيارات غير الجيدة.

باستخدام قانون التوزيع البواسوني نحصل على:

$$P(1) = \frac{0.3^1 e^{-0.3}}{1!} = \frac{0.3 \times 0.74082}{1} = 0.222246$$
$$P(0) = \frac{0.3^0 e^{-0.3}}{0!} = \frac{1 \times 0.74082}{1} = 0.74082$$

$$P(X \leq 1) = P(1) + P(0) = 0.222246 + 0.74082$$
$$= 0.963066$$
$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$$
$$= 1 - 0.963066 = 0.036934$$

فكلما زادت $n$ يقترب التقريب أكثر من الاحتمال باستخدام توزيع ذي الحدين

**التمرين 5**: إذا كان طول الطلبة في كلية ما يتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط حسابي 170 وانحراف معياري 10.

**1**– ما هو احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا بين 150 و160؟

**2**– ما هو احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا أقل أو يساوي 175؟

**3**– ما هو احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا أكثر أو يساوي 185؟

**الحل**:

**1**– احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا بين 150 و160 هو

نقوم بحساب أولا قيمة $z$ المناظرة لقيم $X$ ثم نجد القيم التي تناظر قيم $z$ في الجداول الإحصائية كما

يلي:

$$z_1 = \frac{X_1-\mu}{\delta} = \frac{150-170}{10} = -2 \qquad z_2 = \frac{X_2-\mu}{\delta} = \frac{160-170}{10} = -1$$

عند البحث عن مقابل $z = -2$ و $z = 1$ في الجداول الإحصائية نحصل على القيمتين 0.4772 و0.3413. هذا يعني أن احتمال أن العمر بين 150 و160 هو

$$P(150 < X < 160) = 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$$

**2**– احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا أقل أو يساوي 175 هو

$$z = \frac{X-\mu}{\delta} = \frac{175-170}{10} = 0.5$$

عند البحث عن مقابل القيمة $z = 0.5$ في الجداول الإحصائية نحصل على القيمة 0.1915. هذا يعني أن احتمال أن يكون عمر الطالب أقل أو يساوي **175** هو

$$P(X \leq 175) = 0.5 - 0.1915 = 0.3085$$

**3**– احتمال أن يكون عمر طالب اختير عشوائيا أكثر أو يساوي 185 هو

$$z = \frac{X-\mu}{\delta} = \frac{185-170}{10} = 1.5$$

عند البحث عن مقابل القيمة $z = 1.5$ في الجداول الإحصائية نحصل على القيمة **0.4332**. هذا يعني أن احتمال أن يكون عمر الطالب أكثر أو يساوي **185** هو

$$P(X \geq 185) = 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

**التمرين 6**: إذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات في أحد المسابقات هو 74 و12 على التوالي.

**1**– أحسب العلامات بالوحدات القياسية واحتمالاتها للمتسابقين الحاصلين على: 60،75، 85، 93؟

**2**– أحسب العلامات المناظرة للوحدات القياسية: -1، 0.5، 1.5، 2؟

**الحل**:

**1**– حساب العلامات بالوحدات القياسية للمتسابقين الحاصلين على:

$$z_1 = \frac{X_1-\mu}{\delta} = \frac{60-74}{12} = -1.16, \qquad P(z_1 = 1.16) = 0.3770$$

$$z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\delta} = \frac{75-74}{12} = 0.08, \qquad P(z_2 = 0.08) = 0.0319$$

$$z_3 = \frac{X_3 - \mu}{\delta} = \frac{85-74}{12} = 0.91, \qquad P(z_3 = 0.91) = 0.3186$$

$$z_4 = \frac{X_4 - \mu}{\delta} = \frac{93-74}{12} = 1.58, \qquad P(z_4 = 1.58) = 0.4429$$

**2**– العلامات المناظرة للوحدات القياسية: -1، 0.5، 1.5، 2 هي

$$X_1 = z_1 \times \delta + \mu = 12 \times (-1) + 74 = 62$$

$$X_2 = z_2 \times \delta + \mu = 12 \times (0.5) + 74 = 80$$

$$X_3 = z_3 \times \delta + \mu = 12 \times (1.5) + 74 = 92$$

$$X_4 = z_4 \times \delta + \mu = 12 \times (2) + 74 = 98$$

**التمرين 7**: إذا ألقينا 12 قطعة نقدية متماثلة. أحسب احتمال أن نحصل على الصورة عددا من المرات يتراوح بين 4 و7 بما في ذلك 4 و7، وذلك باستخدام:

**1**– توزيع ذي الحدين؟

**2**– التقريب الطبيعي لتوزيع ذي الحدين؟

**الحل**:

**1**– باستخدام توزيع ذي الحدين:

لدينا: $n = 12, \quad P = 0.5, \quad q = 1 - P = 0.5$

$$P(4 \le X \le 7) = P(4) + P(5) + P(6) + P(7)$$

$$P(4) = c_{12}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{12-4} = 0.1208$$

$$P(5) = c_{12}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{12-5} = 0.1933$$

$$P(6) = c_{12}^{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{12-6} = 0.2255$$

$$P(7) = c_{12}^{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^{12-7} = 0.1933$$

$$P(4 \le X \le 7) = 0.1208 + 0.1933 + 0.2255 + 0.1933$$

$$\approx 0.7332$$

**2**– باستخدام التقريب الطبيعي لتوزيع ذي الحدين:

لدينا:
$$\mu = np = 12 \times 0.5 = 6$$
$$\delta = \sqrt{npq} = \sqrt{12 \times 0.5 \times 0.5} = 1.78$$

إذا كان $X$ يمثل عدد ظهور الصورة. وبالتالي نقوم بحساب الاحتمال $P(4 \leq X \leq 7)$

ولكن إذا افترضنا عدد النتائج متصل من أجل تطبيق تقريب التوزيع الطبيعي. في هذه الحالة يجب أن نحسب الاحتمال: $P(3.5 \leq X \leq 7.5)$

نقوم بحساب 3.5 و7.5 بالوحدات المعيارية:

$$z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\delta} = \frac{3.5-6}{1.78} = -1.45, \quad P(z_1 = 1.45) = 0.4265$$
$$z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\delta} = \frac{7.5-6}{1.78} = 0.87, \quad P(z_2 = 0.87) = 0.3078$$
$$P \approx P(4 \leq X \leq 7) = P(-1.45 \leq X \leq 0.87)$$
$$= 0.4265 + 0.3078 = 0.7343$$

**التمرين 8**: نفترض أنه هناك 300 خطأ مطبعيا موزعة على صفحات كتاب متكون من 500 صفحة. أحسب احتمال أن تحتوي صفحة معينة على:

**1**– خطأين بالضبط؟

**2**– خطأين أو أكثر؟

**3**– 5 أخطاء بالضبط؟

**الحل**:

**1**– احتمال وجود خطأين بالضبط هو :

نفترض أن عدد الأخطاء في الصفحة هو عبارة عن عدد مرات النجاح حسب توزيع ذي الحدين. لدينا:

$n = 300$ حيث أنه يوجد 300 خطأ مطبعي و $P = \frac{1}{500}$ هو احتمال أن يظهر خطأ في الصفحة المعينة. وبما أن $P$ صغيرة و$n$ كبيرة من الأفضل استخدام تقريب بواسون لتوزيع ذي الحدين حيث أن:

$$\lambda = np = 0.6$$

باستخدام قانون التوزيع البواسوني نحصل على:

$$P(X = 2) = \frac{0.6^2 e^{-0.6}}{2!} = \frac{0.36 \times 0.549}{2} = 0.0988$$

**2**– احتمال خطأين أو أكثر هو

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$P(X = 0) = \frac{0.6^0 e^{-0.6}}{0!} = \frac{1 \times e^{-0.6}}{1} = 0.549$$

$$P(X = 1) = \frac{0.6^1 e^{-0.6}}{1!} = \frac{0.6 \times 0.549}{1} = 0.329$$

$$P(X \geq 2) = 1 - 0.549 + 0.329$$

$$= 0.122$$

**3**– احتمال وجود 5 أخطاء بالضبط هو

$$P(X = 5) = \frac{0.6^5 e^{-0.6}}{5!} = \frac{0.0777 \times 0.549}{120} = 3.554775 \times 10^{-4}$$

**التمرين 9**: في مركز تلقي المكالمات الهاتفية، يتم استقبال المكالمات من خارج الوطن باحتمال قدره 0.1 في الساعة. قمنا بسحب 100 مكالمة خلال ساعة معينة. ما هو احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية في العينة المسحوبة وذلك باستخدام:

**1**– توزيع ذي الحدين؟

**2**– التوزيع البواسوني؟

**3**– التوزيع الطبيعي؟

**الحل**:

**1**– احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية باستخدام توزيع ذي الحدين هو:

نفترض أن $X$ هو عدد المكالمات الدولية التي يستقبلها المركز. وبالتالي يجب أن نحسب الاحتمال:

$$P(X > 3)$$

لدينا: المكالمة يمكن أن تكون محلية أو دولية وبالتالي يمكن تطبيق توزيع ذي الحدين.

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$
$$= 1 - P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X = 0) = c_{100}^{0}(0.1)^0(0.9)^{100-0} = 0.0000265$$

$$P(X = 1) = c_{100}^{1}(0.1)^1(0.9)^{100-1} = 0.0005951$$

$$P(X = 2) = c_{100}^{2}(0.1)^2(0.9)^{100-2} = 0.0016231$$

$$P(X=3)=c_{100}^{3}(0.1)^{3}(0.9)^{100-3}=0.0078363$$
$$P(X\leq 3)=0.000026+0.000595+0.001623+0.007836$$
$$=0.0078363$$

وبالتالي:
$$P(X>3)=1-0.0078363$$
$$=0.9921$$

**1**- احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية باستخدام التوزيع البواسوني هو:

لدينا: $n=100$ و $P=0.1$ هو احتمال تلقي مكالمة دولية. وبما أن $P$ صغيرة و$n$ كبيرة فإنه بإمكاننا استخدام التوزيع البواسوني كتقريب لتوزيع ذي الحدين حيث أن:

$$\lambda=np=10$$

نقوم بحساب الاحتمال: $P(X>3)=1-P(X\leq 3)$

باستخدام قانون التوزيع البواسوني نحصل على:

$$P(X=0)=\frac{10^{0}e^{-10}}{0!}=\frac{1\times 0.00005}{1}=0.00005$$
$$P(X=1)=\frac{10^{1}e^{-10}}{1!}=\frac{10\times 0.00005}{1}=0.0005$$
$$P(X=2)=\frac{10^{2}e^{-10}}{2!}=\frac{100\times 0.00005}{2}=0.0023$$
$$P(X=3)=\frac{10^{3}e^{-10}}{3!}=\frac{1000\times 0.00005}{6}=0.008$$
$$P(X\leq 3)=0.00005+0.0005+0.0023+0.008=0.0104$$
$$P(X>3)=1-0.0104=0.9896$$

**3**- احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية باستخدام التوزيع الطبيعي هو:

نقوم بحساب الاحتمال: $P(X>3)=1-P(X\leq 3)$

لدينا:
$$\mu=np=100\times 0.1=10$$
$$\delta=\sqrt{npq}=\sqrt{100\times 0.1\times 0.9}=3$$

بافتراض أن $X$ يمثل عدد المكالمات الدولية. وبالتالي نقوم بحساب الاحتمال

$$P(X>3)=1-P(0\leq X\leq 3)$$

ولكن إذا افترضنا عدد النتائج متصلة من أجل تطبيق تقريب التوزيع الطبيعي. في هذه الحالة يجب أن نحسب الاحتمال: $P(-0.5 \leq X \leq 3.5)$

نقوم بحساب 3.5 و7.5 بالوحدات المعيارية:

$$z_1 = \frac{X_1-\mu}{\delta} = \frac{-0.5-10}{3} = -3.5, \qquad P(z_1 = 3.5) = 0.4998$$

$$z_2 = \frac{X_2-\mu}{\delta} = \frac{3.5-10}{3} = -2.16, \qquad P(z_2 = 2.16) = 0.4846$$

$$P \approx P(0 \leq X \leq 3) = P(-3.5 \leq X \leq -2.16)$$

$$= 0.4998 + 0.4846 = 0.9844$$

**التمرين 10**: تتكون عائلة من 7 أطفال، ما هو احتمال أن يكون في هذه العائلة:

**1**- 4 أولاد ؟

**2**- عدد الأولاد أقل من عدد البنات؟

**الحل**:

**1**- احتمال أن يكون في هذه العائلة 4 أولاد هو

نفترض احتمال أن يكون الطفل ولد هو $\frac{1}{2}$

لدينا: $n = 7, \quad P = \frac{1}{2}, \quad q = 1 - P = \frac{1}{2}$

$$P(X = 4) = c_7^4 (\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{2})^3 = 0.2734$$

**2**- احتمال أن يكون في هذه العائلة عدد الأولاد أقل من عدد البنات هو

$$P(X) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X = 0) = c_7^0 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^7 = 0.0081$$

$$P(X = 1) = c_7^1 (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^6 = 0.0546$$

$$P(X = 2) = c_7^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^5 = 0.1640$$

$$P(X = 3) = c_7^3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^4 = 0.2734$$

$$P(X) = 0.0081 + 0.0546 + 0.1640 + 0.2734$$

$$= 0.5001$$

**التمرين 11**: نفترض أن نسبة رسوب الطلبة في إحدى الأقسام هو $0.02$. ما هو احتمال وجود $3$ طلبة راسبين في عينة متكونة من $100$ طالب اختيرت عشوائيا وذلك باستخدام:

**1**– توزيع ذي الحدين؟

**2**– توزيع بواسون؟

**الحل**:

في هذا المثال نستطيع تطبيق توزيع ذي الحدين، وحيث أن $P$ صغيرة تساوي $0.02$ و $n$ كبيرة تساوي $100$ فمن الأفضل تطبيق التوزيع البواسوني.

**1**– توزيع ذي الحدين:

لدينا: $n = 100, \quad P = 0.02, \quad q = 1 - P = 0.98$

$$P(X = 3) = c_{100}^{3}(0.02)^3(0.98)^{97} = 0.1822$$

$$P(X = 3) = 0.1822$$

**2**– توزيع بواسون:

$$\lambda = np = 2$$

$$P(X = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = \frac{8\times 0.1353}{6} = 0.1804$$

$$P(X = 3) = 0.1804$$

## 2- توزيع المعاينة للوسط الحسابي

**التمرين 01**: مجتمع حجمه 200000 وحدة وإنحرافه المعياري يساوي 800، أما وسطه الحسابي يساوي 30سحبت

منه عينة عشوائية حجمها 400، **والمطلوب**:

1- أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري في حالة السحب مع الإرجاع.

2- أوجد الاحتمال أن يكون الوسط الحسابي أكبر من أو يساوي 75 .

3- أكتب عبارة معامل التصحيح، ومتى نستخدمها ؟، ولماذا يمكننا الاستغناء عنها في هذا التمرين؟

**التمرين 02**: مصنع ينتج كراسي ترتكز على قاعدة دائرية، اعتمادا على التجارب السابقة فان مفتش الرقابة على العملية الإنتاجية مقتنع أن متوسط قطر القاعدة الدائرية 5 سم والانحراف المعياري لها 0,005 سم وتوزيع العملية الإنتاجية هو التوزيع الطبيعي.

يهتم الفاحص بالمحافظة على متوسط قطر العملية الإنتاجية عند 5 سم، ولتحقيق ذلك تسحب عينات عشوائية بصفة دورية حجم كل منها 9 كراسي وذلك في محاولة لاكتشاف أية انحراف على الأرقام الطبيعية المشار إليها، **والمطلوب**:

1- حدد توزيع المعاينة لـ $\bar{X}$؟

2-بفرض أن الفاحص سحب عينة عشوائية من 9كراسي وقيست أقطار قاعدتها ووجد أن $\bar{X}=5.004$ سم، ما هو احتمال أن متوسط القطر في تلك العينة العشوائية سيكون على الأقل 5,004 سم على فرض أن متوسط العملية باقيا عند 5سم والانحراف المعياري للعملية هو 0,005 سم؟

3-ما هو حجم العينة التي يجب سحبها لتحقيق خطأ معياري لـ$\bar{X}$ يساوي 0.001؟

**التمرين 03**: بفرض أن n=16، أوجد قيمة T والتي لها الاحتمالات التالية: 0.95، 0.025

**التمرين 04**: كمية المبيعات اليومية بالوحدات في المتوسط تساوي 201 وحدة / يوم، وبإنحراف معياري 30وحدة/يوم خلال فترة مدتها 36 يوم، **والمطلوب**: ما هو إحتمال أن المبيعات اليومية في المتوسط تساوي 200 وحدة أو أكثر ؟

**التمرين 05**: مقاول بناء قرر شراء كميات كبيرة من مصابيح الإنارة عالية القوة من صاحب مصنع معين، صاحب المصنع أكد للمقاول أن هذه المصابيح لها متوسط عمر 1000 ساعة بإنحراف معياري 80 ساعة، **قرر المقاول شراء هذه المصابيح إذاكان متوسط لعينة عشوائية حجمها 64 هو 1010 ساعة على الأقل**.

**المطلوب**: في ظل هذا الشرط، ما هو احتمال أن المقاول سوف يشتري هذه المصابيح من هذا المصنع؟

**التمرين 06**: في مصنع لإنتاج الخيوط، متوسط قوة الخيوط فيها 82.5 نيوتن أخذت عينة عشوائية مكونة من 25 خيط، فوجد انحرافها المعياري 15 نيوتن.

**التمرين 07**: إذا كانت معدلات الطلبة في السنة الثانية لجامعة الوادي تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 60 رصيد وأخذت عينة عشوائية مؤلفة من 16 طالب فوجد أن الانحراف المعياري لها هو 12.

**المطلوب**: أوجد احتمال أن يزيد متوسط معدل الطلبة في العينة عن 66.3.

**حلول تمارين المحور الاول:**

**حل التمرين الأول:**

M

لدينا:

$$n = 400\ .\quad M = 30 \quad \sigma = 800\ . \qquad N = 200000$$

أ–حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة في حالة السحب مع الإرجاع:

$$\mathrm{M}\bar{X} = M = 30$$

$$\sigma\bar{x} = \frac{\sigma x}{\sqrt{n}} = \frac{800}{\sqrt{400}} = 40$$

ب–إيجاد احتمال أن يكون الوسط الحسابي للعينة أكبر من أو يساوي 75:

P(x̄ ≥ 75)

= P(Z ≥ 1.125)

الطريقة الثانية أفضل للطالب

$$P(\bar{X} \geq 75)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - M}{\frac{\sigma x}{\sqrt{n}}} = \frac{75 - 30}{40} = 1.125$$

ج- معامل التصحيح $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

نستخدمها عند السجب بدون إرجاع ونستغني عنه لأن معامل التصحيح قريب من الواحد الصحيح 0.998

$$P(\bar{X} \geq 75) = P(Z \geq 1.125)$$
$$= 0.5 - P(0 < Z \leq 1.125)$$
$$= 0.5 - 0.3686 = 01314$$

= 1 − P(Z < 1.125)

= 1 − 0,8686 = 0,1313

**حل التمرين الثاني:**

لدينا $n = 9$: ، $\sigma = 0.005$ ، $M = 5$

أ–تحديد توزيع المعاينة لـ$\bar{X}$:

بما أن توزيع الإنتاجية المفترض هو توزيع طبيعي متوسطه5 = M وانحرافه المعياري $\sigma = 0.005$,فان توزيع المعاينة لـ$\bar{X}$هو توزيع طبيعي أيضا متوسطه $M = 5$ وانحرافه المعياري عند $(n = 9)$:

$$\sigma\bar{X} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.005}{\sqrt{9}} = 0.00166$$

ب–إيجاد احتمال أن متوسط القطر في تلك العينة العشوائية سيكون على الأقل 5.004 سم:

نفس الشئ نستخدم الطريقة الثانية

$$P(\bar{X} \geq 5.004)$$
$$P\left(Z \geq \frac{5.004 - 5}{0.00166}\right)$$
$$= P(Z \geq 2.44)$$
$$= 0.5 - P(0 < Z \leq 2.44)$$
$$= 0.5 - 0.4918$$
$$= 0.0082$$

= 1 − P(Z < 2.44)

= ----

ج–إيجاد حجم العينة التي يجب سحبها لتحقيق خطا معياري لـ$X$يساوي 0.001:

أي لدينا: $\sigma\bar{X} = 0.001$

$$\sigma\bar{X} = \frac{\sigma x}{\sqrt{n}} = 0.001 \Leftrightarrow \frac{0.005}{\sqrt{n}} = 0.001$$
$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{0.005}{0.001} = 5$$
$$n = 25$$

**حل التمرين الثالث:**

إيجاد القيمة الجزئية$T$ والتي لها الاحتمالات 0.95و 0.025على التوالي :

عند $v = 15$ وتحت الأعمدة 0.95و 0.025نجد أن القيم الجزئية هي$(-2.131، 1.753)$ على التوالي.وهذا يعني أن المتغير العشوائيT بدرجات حرية 15 يأخذ قيم لا تزيد عن 2.131–أو 1.753هي (0.95,0.025)على التوالي،بمعنى آخر :

$$\boldsymbol{P}(T_{15} \leq -2.131) = 0.025$$
$$\boldsymbol{P}(T_{15} \leq 1.753) = 0.95$$

**حل التمرين الرابع:**

لدينا:

$$M = 210 \qquad ,\sigma = 30$$

- إيجاد احتمال أن المبيعات اليومية في المتوسط تساوي 200 وحدة أو أكثر :

9 مكرر

$$P(\bar{X} \geq 200) = P\left(\frac{\bar{X} - M}{\sigma\bar{x}} \geq \frac{200 - 210}{30}\right)$$
$$P(\bar{X} \geq 200) = P(Z \geq -0.33)$$
$$= 0.5 + P(0 < Z \leq 0.33)$$
$$= 0.5 + 0.1293$$
$$= 0.6293$$

**حل التمرين الخامس:**

لدينا:

$$\sigma = 80 \quad ، \quad n = 64 \quad ، M = 1000$$

–احتمال أن المقاول سوف يشتري مصابيح العينة التي لها متوسط عمر 1010 ساعة على الأقل:

$$P(\bar{X} \geq 1010) = P\left(\frac{\bar{X} - M}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{1010 - 1000}{\frac{80}{\sqrt{64}}}\right)$$
$$= P(Z \geq 1)$$
$$= 0.5 - P(0 < Z \leq 1)$$
$$= 0.5 - 0.3413$$
$$= 0.1587$$

**حل التمرين السادس:**

لدينا:

$$S = 15 \quad , \qquad n = 25, \qquad M = 82$$

- إيجاد احتمال أن يكون متوسط قوة الخيوط في العينة على الأقل 90:

$$P(\bar{X} \geq 90) = P\left(\frac{\bar{X} - M}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \geq \frac{90 - 82.5}{\frac{15}{\sqrt{25}}}\right)$$

وعند: $v = 24$

$$\begin{aligned} &= P(T \geq 2.5) \\ &= 1 - P(T < 2.5) \\ &= 1 - 0.990 \\ &= 0.01 \end{aligned}$$

**حل التمرين السابع:**

لدينا: $M = 60$ , $n = 16$ , $S = 12$

-إيجاد احتمال أن يزيد متوسط معدل طلبة سنة أولى في إحدى الجامعات في العينة عن 66.3:

$$P(\bar{X} > 66.3) = P\left(\frac{\bar{X} - M}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > \frac{66.3 - 60}{\frac{12}{\sqrt{16}}}\right)$$

عند $V = 15$

$$\begin{aligned} &= P(T > 2.1) \\ &= 1 - P(T \leq 2.1) \\ &= 1 - 0.975 \\ &= 0.025 \end{aligned}$$

**حل التمرين الثامن:**

لدينا:

$$\begin{aligned} n_1 &= 125 \ , \quad \sigma_1 = 200 \qquad M_1 = 1400 \\ n_2 &= 125 \quad , \sigma_2 = 100 \qquad , M_2 = 1200 \end{aligned}$$

-إيجاد احتمال أن يزيد متوسط العمر الإنتاجي لمصابيح المصنع A عن متوسط العمر الإنتاجي لمصابيح المصنع B بمقدار 250 ساعة:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 250)$$

$$P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (M_1 - M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2{}_1}{n_1} + \frac{\sigma^2{}_2}{n_2}}} > \frac{250 - (1400 - 1200)}{\sqrt{\frac{(200)^2}{125} + \frac{(100)^2}{125}}}\right)$$

$$P(Z > 2.5) = 0.5 - P(0 < Z \leq 2.5)$$
$$= 0.5 - 0.4938 = 0.0062$$

**حل التمرين التاسع:**

لدينا:

$$\sigma^2 = {\sigma^2}_1 = {\sigma^2}_2 \qquad S_1 = 8 \quad ,n_1 = 16 \quad ,M_1 = 910$$
$$S_2 = 15 \quad ,n_2 = 10 \quad ,M_2 = 925$$

-إيجاد احتمال أن تكون متوسط فترة صلاحية دواء الشركة (أ) أكبر من متوسط فترة صلاحية دواء الشركة (ب):

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 0)$$
$$P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (M_1 - M_2)}{\sqrt{Sp^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} > \frac{0 - (910 - 925)}{\sqrt{Sp^2\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{10}\right)}}\right)$$

نحسب أولا $Sp^2$ :

$$Sp^2 = \frac{(n_1 - 1){S^2}_1 + (n_2 - 1){S^2}_2}{n_1 + n_2 - 2}$$
$$Sp^2 = \frac{(16-1)(8)^2 + (10-1)(15)^2}{16 + 10 - 2} = 124.37$$
$$P\left(T > \frac{0 - (910 - 925)}{\sqrt{124.37\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{10}\right)}}\right) = p(T > 3.33)$$
$$V = n_1 + n_2 - 2 = 16 + 10 - 2 = 24$$
$$P(T > 3.33) = 1 - P(T \leq 3.33)$$
$$= 1 - 0.999 = 0.001$$

**حل التمرين العاشر:**

لدينا:

$$n_1 = 15 \qquad M_1 = 38 \qquad {S^2}_1 = 45$$
$$n_2 = 12 \qquad M_2 = 33 \qquad {S^2}_2 = 72$$

-إيجاد الاحتمال التالي:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 10)$$

$$P\left(\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(M_1-M_2)}{\sqrt{\frac{S^2{}_1}{n_1}+\frac{S^2{}_2}{n_2}}}\leq\frac{10-(38-33)}{\sqrt{\frac{45}{15}+\frac{72}{12}}}\right)$$

$$P(T\leq 1.67)$$

نحسب v حيث:

$$V=\frac{\left(\frac{S^2{}_1}{n_1}+\frac{S^2{}_2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S^2{}_1}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S^2{}_2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}=\frac{\left(\frac{45}{15}+\frac{72}{12}\right)^2}{\frac{\left(\frac{45}{15}\right)^2}{15-1}+\frac{\left(\frac{72}{12}\right)^2}{12-1}}$$

$$V=20.68\Longrightarrow V\approx 21$$

إذن مما سبق نجد أن:

$$P(T\leq 1.67)=0.950$$

**حل التمرين الحادي عشر:**

لدينا:

$$\sigma=5 \qquad ,n=4$$

-إيجاد احتمال أن تباين العينة سوف يكون 2.5 أو اقل:

$$P(S^2\leq 2.5)=P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\leq\frac{(4-1)(2.5)}{(5)^2}\right)$$

$$=P(\chi^2\leq 0.3)$$

نحسب الآن درجة الحرية:

$$V=n-1=3$$

$$P(S^2\leq 2.5)=P(\chi^2\leq 0.3)$$

$$=1-P(\chi^2>0.3)$$

$$=1-0.95=0.05$$

**حل التمرين الثاني عشر:**

لدينا: $n_2=17$ ، $n_1=11$

-إيجاد احتمال أن نسبة تباين العينتين يكون على الأقل 3.69:

$$P\left(\frac{S^2{}_1/S^2{}_2}{\sigma^2{}_1/\sigma^2{}_2}\geq 3.69\right)=P(\mathrm{F}\geq 3.69)$$

باستخدام توزيع فيشر عند درجتي حرية:

$$V_1 = n_1 - 1 = 11 - 1 = 10$$
$$V_2 = n_2 - 1 = 17 - 1 = 16$$
$$P(\mathrm{F} \geq 3.69) = 1 - P(\mathrm{F} < 3.69)$$
$$= 1 - 0.99 = 0.01$$

**حل التمرين الثالث عشر:**

لدينا: $n = 55$ ، $P = \frac{X}{N} = \frac{240}{600} = 0.4$

-إيجاد احتمال أن تكون نسبة الذكور في هذه المدرسة أكثر من 50%:

$$P(\bar{P} > 0.5) = P\left(\frac{\bar{P} - P}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}} > \frac{0.5 - 0.4}{\sqrt{\frac{(0.4)(0.6)}{55}}}\right)$$

حيث: $q = 1 - p = 1 - 0.4 = 0.6$

$$= P(Z > 1.51)$$
$$= 0.5 - P(0 < Z \leq 1.51)$$
$$= 0.5 - 0.4345$$
$$= 0.0655$$

**حل التمرين الرابع عشر:**

لدينا: $q = 0.83 \quad ,p = 0.17 \quad ,n = 230$

-إيجاد الاحتمال التالي:

$$P(\bar{P} \geq 0.15)$$
$$P\left(\frac{\bar{P} - P}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}} \geq \frac{0.15 - 0.17}{\sqrt{\frac{(0.17)(0.83)}{230}}}\right)$$
$$P(Z \geq -0.80) = 0.5 + P(0 < Z \leq 0.80)$$
$$= 0.5 + 0.2881$$
$$= 0.7881$$

**حل التمرين الخامس عشر:**

لدينا:

$$n_1 = 120 \quad , \quad P_1 = 0.64$$
$$n_2 = 150 \qquad P_2 = 0.60$$

بما أن $n_1$ و $n_2$كبيرتين فان توزيع المعاينة للإحصاء $(\bar{P}_1 - \bar{P}_2)$سيكون قريبا من التوزيع الطبيعي.

-إيجاد الاحتمال التالي: $P(\bar{P}_1 - \bar{P}_2 \geq 0.06)$

$$Z = \frac{(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}}} = \frac{0.06 - (0.64 - 0.6)}{\sqrt{\frac{(0.64)(0.36)}{120} + \frac{(0.6)(0.4)}{150}}} = 0.33$$

$$P(\bar{P}_1 - \bar{P}_2 \geq 0.06) = P(Z \geq 0.33)$$
$$= 0.5 - P(0 < Z \leq 0.33)$$
$$= 0.5 - 0.1293 = 0.3707$$

**3- توزيع المعاينة (الفرق بين متوسطي، تباين العينة، نسبة العينة)**

**التمرين 08**: إذا كان متوسط العمر الإنتاجي لمصابيح كهربائية ينتجها المصنع $A$ هو $1400$ساعة وانحرافها المعياري هو $200$ ساعة، بينما التي ينتجها المصنع $B$ فمتوسط عمرها الإنتاجي هو $1200$ساعة وانحرافها المعياري هو $100$ساعة، إذا سحبت عينة عشوائية حجمها $125$مصباح من كل مصنع. **والمطلوب**: أوجد إحتمال أن يزيد متوسط العمر الإنتاجي لمصابيح المصنع $A$ عن متوسط العمر الإنتاجي لمصابيح المصنع $B$ بمقدار $250$ ساعة؟

**التمرين 09**: تنتج شركة (أ) دواء السعال الخاص بالأطفال متوسط فترة صلاحيته هو $910$ساعة، أما الشركة (ب )فتنتج دواء السعال الخاص بالأطفال متوسط فترة صلاحيته هو $925$ ساعة.إذا تم سحب عينة عشوائية,حجمها $16$عبوة من إنتاج الشركة (أ) بانحراف معياري هو $8$ ساعات، ثم بعد ذلك أخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها $10$ عبوات من إنتاج الشركة (ب) فكان انحرافها المعياري هو $15$ ساعة، وإذا كان تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين.

**المطلوب** :أوجد احتمال أن يكون متوسط فترة صلاحية دواء الشركة (أ) أكبر من متوسط فترة صلاحية دواء الشركة (ب)؟

**التمرين 010**: إذا تم سحب عينتان عشوائيتان مستقلتان حجمهما $15$و $12$وتباينهما $45$و $72$على التوالي لمجتمعين إحصائيين متوسطهما $38$ و $33$ على التوالي. **والمطلوب**: اوجد احتمال أن يكون الفرق بين هاتين العينتين $10$ أو اقل؟

**التمرين 11**: مجتمع إحصائي معين يتوزع توزيعا طبيعيا انحرافه المعياري، $5$ سحبت منه عينة عشوائية حجمها $4$ وحدات.

**المطلوب**: أوجد إحتمال أن تباين العينة سوف يكون $2.5$ أو أقل؟

**التمرين 12**: أخذت عينة عشوائية حجمها $11$من مجتمع إحصائي معين، وأخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها $17$من مجتمع آخر مستقل عن الأول. **والمطلوب**: اوجد احتمال أن نسبة تباين العينتين يكون على الأقل $3.69$؟

**التمرين 13**: يدرس في إحدى المدارس 600 تلميذا وتلميذة منهم 240 ذكور فإذا سحبنا عينة عشوائية من هذه المدرسة تشمل 55 تلميذا وتلميذة. **والمطلوب** : ما إحتمال أن تكون نسبة الذكور في هذه المدرسة أكثر من 50%؟

**التمرين 14**: إذا كان 17%من منتج معين غير صالح للاستعمال، اشترى زبون 230وحدة من هذا المنتج.
**المطلوب** :ما هو احتمال أن 15 % أو أكثر من الوحدات المشتراة في العينة تكون غير صالحة؟

**التمرين 15**: إذا كانت نسبة النجاح من الطالبات في امتحان اللغة العربية 64% ونسبة الناجحين من الطلبة الذكور في نفس الامتحان 60%. وتم اختيار عينتين مستقلتين الأولى حجمها 120 طالبة والثانية حجمها 150 طالبا من الذين اشتركوا في هذا الامتحان. **والمطلوب**: ما احتمال أن تكون نسبة الناجحات في عينة الطالبات أكبر من نسبة الناجحين في عينة الطلبة بمقدار 6% أو أكثر.

**حلول تمارين المحور الثاني:**

**حل التمرين الأول:**

تقدير بقيمة الوسط الحسابي المصروف الشهري لجميع طلبة الجامعة:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{35.5 + 37 + 42 + 43.6 + 44 + 39 + 49.2 + 38.3}{8}$$
$$\bar{X} = 41.075$$

إذن قيمة وسط المصروف الشهري لطلبة الجامعة هو 41.075 دينارا.

**حل التمرين الثاني:**

إيجاد فترة الثقة95%لمتوسط المجتمع المجهول:

لدينا:

$$\bar{X} - Z\alpha_{/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq M \leq \bar{X} + Z\alpha_{/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

من جدول التوزيع الطبيعي: $1 - \alpha = 0.95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$$Z_{0.025} = 1.96$$

وبالتعويض في فترة الثقة السابقة:

$$60 - 1.96\left(\frac{8}{\sqrt{25}}\right) \leq M \leq 60 + 1.96\left(\frac{8}{\sqrt{25}}\right)$$
$$56.864 \leq M \leq 63.136$$

وعليه نقول أننا واثقون بدرجة ثقة95%بأن متوسط المجتمع المجهول يتراوح مابين 63.136 و56.864.

**حل التمرين الثالث:**

إيجاد فترة الثقة98% لمتوسط اعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها المصنع:

بما أن حجم العينة كبير بدرجة كافية وتباين المجتمع معلوم فان فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\bar{X} - Z\alpha_{/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq M \leq \bar{X} + Z\alpha_{/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

لدينا: $1 - \alpha = 0.98 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01$

$$Z_{0.01} = 2.33$$

إذن نعوض في فترة الثقة السابقة لنجد:

$$820 - 2.33\left(\frac{20}{\sqrt{64}}\right) \leq M \leq 820 + 2.33\left(\frac{20}{\sqrt{64}}\right)$$
$$814.175 \leq M \leq 825.825$$

ومنه نحن واثقون بدرجة ثقة98% بأن متوسط اعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها المصنع داخل المجال$[814.175 ، 852.852]$.

**حل التمرين الرابع:**

إيجاد فترة الثقة95% للانتاجية اليومية لجميع عمال هذا المصنع بافتراض ان الانتاجية تتوزع توزيع طبيعي:

بما أن حجم العينة صغير وتباين المجتمع مجهول فان فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\bar{X} - t_{(\alpha/_2.V)}.\frac{S}{\sqrt{n}} \leq M \leq \bar{X} + t_{(\alpha/_2.V)}.\frac{S}{\sqrt{n}}$$

لدينا:

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$
$$V = n - 1 = 7 - 1 = 6$$

ومن جدول توزيع t نجد أن:

$$t_{(\alpha/_2;V)} = t_{(0.025.6)} = 2.447$$

نحسب أولا $\bar{X}$:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{84}{7} = 12$$

ثم نحسب S:

$$S = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = 2.65$$

وبالتعويض في فترة الثقة السابقة:

$$12 - 2.447\left(\frac{2.65}{\sqrt{7}}\right) \leq M \leq 12 + 2.447\left(\frac{2.65}{\sqrt{7}}\right)$$
$$9.553 \leq M \leq 14.447$$

إذن نستنتج أن فترة الثقة95% للإنتاجية اليومية لجميع عمال المصنع تتراوح ما بين 9.553 و14.447.

**حل التمرين الخامس:**

إيجاد حجم العينة المناسب:

لدينا:

$$\sigma = 1.5 \quad ، \quad E = 0.3$$
$$1 - \alpha = 0.92 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.04$$
$$Z_{0.04} = 1.75$$

ولدينا العلاقة التالية:

$$n \geq \left(\frac{Z\alpha/_2.\sigma}{E}\right)^2$$
$$n \geq \left(\frac{(1.75)(1.5)}{0.3}\right)^2$$
$$n \geq 76.56$$

إذن حجم العينة المناسب هو $n \simeq 77$.

**حل التمرين السادس:**

لدينا فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\bar{X} - t_{(\alpha/_2, V)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq M \leq \bar{X} + t_{(\alpha/_2, V)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \quad ، V = n - 1 = 16 - 1 = 15$$

بالتعويض نجد:

$$t_{(\alpha/_2 V)} = t_{(0.005,15)} = 2.947$$

$$10 - 2.947 . \left(\frac{3.5}{\sqrt{16}}\right) \leq M \leq 10 + 2.947 \left(\frac{3.5}{\sqrt{16}}\right)$$

$$7.421 \leq M \leq 12.578$$

إذن بدرجة ثقة99% فان متوسط المجتمع المجهول يقع داخل المجال$[12.578 ، 7.421]$.

**حل التمرين السابع:**

بما أن حجم العينتين كبير وتبايني المجتمعين معلومين فان فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z\alpha_{/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z\alpha_{/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

$$1 - \alpha = 0.98 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01$$

$$Z_{0.01} = 2.33$$

نحسب الحد الأدنى لفترة الثقة:

$$(258 - 202) - 2.33 \sqrt{\frac{19.3}{100} + \frac{14}{80}} = 56.586$$

نحسب الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$(258 - 202) + 2.33 \sqrt{\frac{19.3}{100} + \frac{14}{80}} = 57.413$$

إذن فترة الثقة98% للفرق الحقيقي بين متوسطي ساعات عمل البطاريات المنتجة في المعملين (أ) و(ب) هي$[57.413 ، 56.586]$.

**حل التمرين الثامن:**

حساب فترة الثقة 90% للفرق الحقيقي بين متوسطي المجتمعين المجهولين:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z\alpha_{/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq M_1 - M_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z\alpha_{/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$$

$$Z_{0.05} = 1.65$$

إذن بالتعويض نجد:

$$(28.9 - 27.3) - 1.65 \sqrt{\frac{1.8}{15} + \frac{1.5}{12}} \leq M_1 - M_2 \leq (28.9 - 27.3) + 1.65 \sqrt{\frac{1.8}{15} + \frac{1.5}{12}}$$

$$0.783 \leq M_1 - M_1 \leq 2.416$$

وعليه نقول بدرجة ثقة90% فان الفرق بين متوسطي المجتمعين يقع داخل المجال[0.783، 2.416].

**حل التمرين التاسع:**

إيجاد فترة الثقة90% للفرق الحقيقي بين متوسط الاجازات السنوية للعمال والعاملات في هذه المؤسسة:

إن فترة الثقة المطلوبة هي :

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{(\alpha/_2,V)} \cdot \sqrt{sp^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \leq M_1 - M_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{(\alpha/_2,V)} \cdot \sqrt{sp^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

نحسب أولا$sp^2$:

$$sp^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$sp^2 = \frac{(12-1)5^2 + (10-1)4^2}{12+10-2} = 20.95$$

$$1-\alpha = 0.90 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$$

$$t_{(\alpha/_2,V)} = t_{(0.05,20)} = 1.725$$

$$(81-85) - 1.725\sqrt{20.95\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{10}\right)} \leq M_1 - M_2 \leq (81-85) + 1.725\sqrt{20.95\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{10}\right)}$$

$$0.62 \leq M_1 - M_2 \leq 7.38$$

إذن نستنتج أن فترة الثقة90% للفرق الحقيقي بين متوسط الاجازات السنوية للعمال والعاملات في هذه المؤسسة يتروح بين 0.62 يوما و7.38 يوما.

**حل التمرين العاشر:**

إن فترة الثقة المطلوبة:

$$\left[\bar{d} - t_{(\alpha/_2,V)} \cdot \frac{Sd}{\sqrt{n}}, \bar{d} + t_{(\alpha/_2,V)} \cdot \frac{Sd}{\sqrt{n}}\right]$$

نحسب أولا الوسط الحسابي$\bar{d}$:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = 5.5$$

$$Sd = 2.449$$

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$V = n-1 = 8-1 = 7$$

$$t_{(\alpha/_2,V)} = t_{(0.025,7)} = 2.365$$

وعليه عند التعويض في فترة الثقة السابقة نجد:

الحد الأدنى لفترة الثقة: $5.5 - 2.365\left(\frac{2.449}{\sqrt{8}}\right) = 3.452$

الحد الأعلى لفترة الثقة: $5.5 + 2.365\left(\frac{2.449}{\sqrt{8}}\right) = 7.547$

إذن فترة الثقة95% للفرق الحقيقي بين متوسطي انتاجية العمال قبل وبعد التدريب يتراوح ما بين 3.452 و7.547.

**حل التمرين الحادي عشر:**

لدينا فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(\alpha/_2,n-1)}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\alpha/_2,n-1)}}$$

نحسب أولا $\overline{X}$ و $S^2$:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{305}{5} = 61$$

$$S^2 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n-1} = 205$$

$$1-\alpha = 0.90 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \quad ، \quad V = n-1 = 4$$

$$\chi^2_{(\alpha/_2,n-1)} = \chi^2_{(0.05,4)} = 9.488$$

$$\chi^2_{(1-\alpha/_2,n-1)} = \chi^2_{(0.95,4)} = 0.711$$

إذن بالتعويض نجد:

$$\frac{(5-1)(205)}{9.488} \le \sigma^2 \le \frac{(5-1)(205)}{0.711}$$

$$86.424 \le \sigma^2 \le 1153.305$$

ومنه فترة الثقة90% لتباين درجات الطلبة المشتركين في هذا الامتحان هي$[86.424، 1153.305]$.

**حل التمرين الثاني عشر:**

إن فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{f_{(\alpha/_2,V_1,V_2)}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2/S_2^2}{f_{(1-\alpha/_2,V_1,V_2)}}$$

$$1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$V_1 = n_1 - 1 = 25 - 1 = 24$$

$$V_2 = n_2 - 1 = 16 - 1 = 15$$

$$f_{(0.025,24,15)} = 2.69$$

$$f_{(0.975,24,15)} = 0.41$$

وبالتعويض نجد:

$$\frac{144/100}{2.69} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{144/100}{0.41}$$

$$0.535 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 3.512$$

وعليه فان فترة الثقة95% لنسبة تباين المجتمع الأولى إلى تباين المجتمع الثاني هي:$[0.535، 3.512]$.

**حل التمرين الثالث عشر:**

تقدير فترة الثقة 95%لنسبة الحاصلين على درجات جيدة من بين جميع الملتحقين بالتعليم في الولاية:

لدينا: $n = 100$ ، $X = 40$ إذن: $\overline{P} = \frac{40}{100} = 0.4$

وفترة الثقة المطلوبة هي:

$$\bar{P} - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} \leq P \leq \bar{P} + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}$$

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96$$

بالتعويض نجد:

$$0.4 - 1.96\sqrt{\frac{(0.4)(0.6)}{100}} \leq P \leq 0.4 + 1.96\sqrt{\frac{(0.4)(0.6)}{100}}$$

$$0.3039 \leq P \leq 0.4960$$

ومنه نسبة الحاصلين على درجات جيدة من بين جميع الملتحقين بالتعليم في تلك الولاية تتراوح ما بين30.39%و 49.60% وذلك بدرجة ثقة95%.

**حل التمرين الرابع عشر:**

أ–تقدير نسبة الأشخاص المؤيدين لهذا المترشح:

لدينا: $n = 500$ ، $X = 180$

إذن: $\bar{P} = \frac{180}{500} = 0.36$

ومنه نسبة الأشخاص المؤيدين لهذا المترشح هي 36%

ب–إيجاد فترة الثقة99% لنسبة الاشخاص المؤيدين لهذا المترشح:

$$\bar{P} - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} \leq P \leq \bar{P} + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}$$

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005$$

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.005} = 2.57$$

$$0.36 - 2.57\sqrt{\frac{(0.36)(0.64)}{500}} \leq P \leq 0.36 + 2.57\sqrt{\frac{(0.36)(0.64)}{500}}$$

$$0.3048 \leq P \leq 0.4151$$

ومنه نسبة الأشخاص المؤيدين لهذا المترشح السياسي تقع ما بين30.48%،41.51% وبدرجة ثقة99%.

**حل التمرين الخامس عشر:**

إيجاد فترة الثقة95% للفرق بين نسبتي العاطلين عن العمل في المنطقتين:

$$(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{P}_1\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\bar{q}_2}{n_2}} \leq P_1 - P_2 \leq (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}_1\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\bar{q}_2}{n_2}}$$

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow 0.025$$

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96$$

$$(0.2-0.07)-1.96\sqrt{\frac{(0.2)(0.8)}{250}+\frac{(0.07)(0.93)}{500}} \le P_1-P_2$$
$$\le (0.2-0.07)+1.96\sqrt{\frac{(0.2)(0.8)}{250}+\frac{(0.07)(0.93)}{500}}$$

$$0.0756 \le P_1 - P_2 \le 0.1843$$

ومنه فترة الثقة94% للفرق بين نسبتي العاطلين عن العمل في المنطقتين يقع ما بين 7.56%و 18.43%

**حل التمرين السادس عشر:**

إيجاد فترة الثقة94% للفرق بين نسبة كل من البالغين ونسبة كل من المراهقين الذين شاهدوا هذا البرنامج ويفضلونه:

إن فترة الثقة المطلوبة هي:

$$(\bar{P}_1-\bar{P}_2)-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{P}_1\bar{q}_1}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\bar{q}_2}{n_2}} \le P_1-P_2 \le (\bar{P}_1-\bar{P}_2)+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}_1\bar{q}_1}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\bar{q}_2}{n_2}}$$

$$1-\alpha = 0.94 \Rightarrow \alpha/2 = 0.03$$
$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.03} = 1.88$$

$$\bar{P}_1 = \frac{300}{600} = 0.5$$

$$\bar{P}_2 = \frac{100}{400} = 0.25$$

وبحساب الحد الأدنى:

$$(0.5-0.25)-1.88\sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{600}+\frac{(0.25)(0.75)}{400}} = 0.1940$$

أما الحد الأعلى لفترة الثقة:

$$(0.5-0.25)+1.88\sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{600}+\frac{(0.25)(0.75)}{400}} = 0.3059$$

وعليه يمكن القول انه وبدرجة ثقة94% فان الفرق بين نسبة كل من البالغين ونسبة كل من المراهقين الذين شاهدوا هذا البرنامج ويفضلونه تقع ما بين19.40%و 30.59%.

## 4- الفرضيات

**التمرين الأول:**

يعرف مركز تجنيد من الخبرة الماضية أن وزن المجند يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي 80كغ وانحراف معياري يساوي 10كغ ،يرغب هذا المركز أن يختبر عند مستوى المعنوية 0.01 ما إذا كان وزن المجند أكبر من 80كغ، لهذا قام بسحب عينة عشوائية تتكون من 25 مجندا فوجد أن متوسط الوزن في العينة هو 85كغ.

**المطلوب:** كيف يمكن إجراء هذا الاختبار عند مستوى المعنوية 0.01؟

**التمرين الثاني:**

وجد باحث في دراسة سابقة أن معدل قيم الفواتير في أحد المستشفيات 70.2 دينارا وان توزيعها يقترب من التوزيع الطبيعي. أراد الباحث اختبار فرضية أن قيم الفواتير قد تغيرت، فدرس 64 فاتورة أخذت كعينة عشوائية فوجد أن متوسطها الحسابي 73.7 وانحرافها المعياري 11.2.

**المطلوب:**باستعمال مستوى الدلالة 5%اختبر فرضية

$H_0: M = 75.2$ مقابل الفرضية $H_1: M \neq 75.2$ ؟

**التمرين الثالث:**

ترغب شركة أن تعرف ما إذا كان ادعائها صحيح حول صناديق الصابون المسحوق الذي تبيعه تحتوي على أكثر من 500غ، وتعرف الشركة من الخبرة الماضية أن أوزان الصناديق تتبع التوزيع الطبيعي، فأخذت عينة عشوائية حجمها 25 صندوق فوجد أن وسطها الحسابي هو 520غ وانحرافها المعياري 75.

**المطلوب:**عند مستوى الدلالة5 %اختبر صحة هذه الفرضية؟

**التمرين الرابع:**

أخذت عينة عشوائية مكونة من 16 قطعة فوجد أن متوسط المقاومة لكسر القطع هو 5.1 بانحراف معياري هو 4.80 ،فهل يقبل المنتج الفرض القائل بان القطع لها قوة مقاومة للكسر تساوي 5 وذلك عند مستوى الدلالة 5%؟

**التمرين الخامس:**

أخذت عينة عشوائية حجمها 10 مصابيح من النوع الأول فكان متوسطها الحسابي هو 630 ساعة إنارة من مجتمع له توزيع طبيعي وسطه$M_1$ وانحرافه المعياري 20 ساعة إنارة،وأخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها 16 مصباح من النوع الثاني فكان متوسطها الحسابي هو 650 ساعة إنارة، وذلك من مجتمع آخر يتبع التوزيع الطبيعي وسطه$M_2$ وانحرافه المعياري 40 ساعة انارة.

**المطلوب:**إذا علمت أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي، هل يمكن القول أن متوسط عمر المصابيح من النوع الأول أقل من متوسط عمر المصابيح من النوع الثاني عند مستوى الدلالة 5%؟

**التمرين السادس:**

إذا كان متوسط أوزان 15 طالبا من المشاركين في النشاط الرياضي في كلية ما هو 70.5كغ وبانحراف معياري 2.5كغ، بينما كان متوسط وزن 12 طالبا لم يظهروا اهتماما بالمشاركة في النشاط الرياضي في الكلية نفسها هو 69.8كغ وبانحراف معياري قدره 2.6كغ. وبافتراض أن متوسط أوزان طلبة الكلية ككل يتبع التوزيع الطبيعي.

**المطلوب:** اختبر فرضية عدم وجود اختلاف في أوزان الطلبة الذين يساهمون في النشاط الرياضي والطلبة الذين لم يبدوا اهتماما بالمشاركة في الكلية عند مستوى الدلالة5%إذا علمت أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين؟

**التمرين السابع:**

لاختبار مدى فعالية حمية غذائية لتخفيف الوزن، أجريت تجربة على خمسة أشخاص حيث تم قياس أوزانهم قبل اخذ الحمية وبعد اخذ الحمية والجدول الموالي يوضح نتائج التجربة:

| عدد الأشخاص | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| قبل أخذ الحمية | 60 | 65 | 68 | 70 | 75 |
| بعد أخذ الحمية | 58 | 60 | 62 | 63 | 70 |

**المطلوب:** هل هناك فرق في وزن الأشخاص قبل وبعد اخذ الحمية عند مستوى الدلالة5%؟

**التمرين الثامن:**

أخذت أربعة قراءات بجهاز معين فكانت قيمها كما يلي: 59، 55، 51،51.

**المطلوب:**اختبر الفرضية الصفرية $H_0: \sigma^2 = 0.7$ في مقابل الفرضية البديلة $H_1: \sigma^2 > 0.7$ وذلك عند مستوى الدلالة1%؟

**التمرين التاسع:**

تعاقدت شركة لصناعة السيارات لشراء مدخرات كهربائية من أحد المصانع يدعى أن تباين منتجاته 0.6 عام، وعند ورود الشحنة سحبت عينة عشوائية من 5 مدخرات فكان تباينها 0.8.

**المطلوب:** هل تقبل ادعاء الشركة عند مستوى الدلالة 0.05؟

**التمرين العاشر:**

سحبت عينتين عشوائيتين حجمها على التوالي 10، 25 من مجتمعين وكان الانحراف المعياري للعينتين هو: 15، 20 على الترتيب.

**المطلوب:** اختبر الفرضية التالية:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

وذلك عند مستوى الدلالة 0.01؟

**التمرين الحادي عشر:**

إذا كانت نسبة العائلات التي تملك البيوت التي تسكن فيها في مدينة معينة هي 62% أجريت إحصائية عن عينة حجمها 500 فوجد أن 340 شخص من بينهم يملكون البيوت التي يسكنوها.

**المطلوب:** هل يمكن القول أن هناك تزايد في نسبة الأشخاص الذين يملكون البيوت في تلك المدينة عند مستوى الدلالة 0.05؟

**التمرين الثاني عشر:**

إذا كان معلوما أن حوالي 25% من المستهلكين يفضلون الشاي من النوع (أ)، وقد قامت الشركة الموزعة لهذا النوع من الشاي بحملة دعائية، ولبيان مدى نجاح هذه الحملة أخذت عينة من المستهلكين حجمها 230 مستهلكا فوجد من بينهم 69 مستهلكا يفضلون هذا النوع.

**المطلوب:** هل أدت الحملة الدعائية إلى زيادة نسبة المستهلكين لهذا النوع من الشاي أولا عند مستوى دلالة 0.05؟

**التمرين الثالث عشر:**

يعتقد مسيرو مؤسسة ما أن 80% من عمالها يفضلون الحوافز المعنوية سحبت عينة عشوائية حجمها 100 عامل من المؤسسة فوجد أن 70 منهم يفضلون الحوافز المعنوية.

**المطلوب:** هل تقدم هذه المعلومات دليلا كافيا على تزايد نسبة العمال الذين يفضلون الحوافز المعنوية وذلك عند مستوى الدلالة 0.05؟

**التمرين الرابع عشر:**

أخذت 400 قطعة من إنتاج الآلة (أ) فتبين أن 20 قطعة منها مخالفة للمواصفات، وأخذت عينة أخرى من 400 قطعة من إنتاج الآلة (ب) فتبين أن 16 قطعة منها مخالفة للمواصفات.

**المطلوب:** هل نستطيع أن نستنتج أن هناك فرقا بين نسبة الإنتاج المخالف للمواصفات للآلتين عند مستوى دلالة 0.05؟

**التمرين الخامس عشر:**

في استطلاع للرأي العام لولايتين حول مترشح سياسي معين تبين أن 20% من بين 60 شخصا في الولاية(أ) يفضلون هذا المترشح،بينما في الولاية (ب) وجد 30%من بين 90 شخصا يفضلون هذا المترشح.

**المطلوب:** هل يمكن القول بان نسبة الأشخاص المؤيدين للمترشح السياسي في الولاية (أ) اقل من الولاية (ب) عند مستوى دلالة 0.05؟

**حل التمرين الأول:**

لدينا $n = 25$ ، $\overline{X} = 85$ ، $M_0 = 80$ ، $\sigma = 10$ ، $\alpha = 0.01$

ونريد اختبار ما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : M = 80 \\ H_1 : M > 80 \end{cases}$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات اتجاه واحد وقيمتها الحرجة هي:

$$Z_\alpha = Z_{0.01} = 2.33$$

$$Z = \frac{\overline{X} - M_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{85 - 80}{\frac{10}{\sqrt{25}}} = 2.5$$

بالمقارنة نجد أن: $2.33 < 2.5$ اي ان قيمة$Z$ وقعت في منطقة الرفض للفرضية الصفرية لذلك نرفض$H_0$ونقبل$H_1$ ونقول ان وزن المجند سوف يكون أكبر من 80كغ عند مستوى المعنوية 0.01 (تأييد لاعتقاد مركز التجنيد).

**حل التمرين الثاني:**

لدينا: $M_0 = 70.2$ ،$n = 64$ ،$\overline{X} = 72.3$ ، $S = 11.2$ ، $\alpha = 0.05$

ونريد اختبار : $\begin{cases} H_0 : M = 70.2 \\ H_1 : M \neq 70.2 \end{cases}$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات اتجاهين وقيمها الحرجة هي:

$$Z\alpha_{/2} = Z_{0.025} = 1.96 \quad ، \quad -Z\alpha_{/2} = -Z_{0.025} = -1.96$$

$$Z = \frac{\overline{X} - M_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{73.7 - 70.2}{\frac{11.2}{\sqrt{64}}} = 2.5$$

نلاحظ أن:$1.96 < 2.5$ أي أن قيمة $Z$ وقعت في منطقة الرفض لذلك نرفض$H_0$ ونقبل$H_1$ عند مستوى الدلالة 0.05 بمعنى أن قيم الفواتير قد تغيرت.

**حل التمرين الثالث:**

لدينا:$n = 25$ ، $S = 75$ ، $M_0 = 500$ ، $\alpha = 0.05$

ونريد اختبار :

$$\begin{cases} H_0 : M = 500 \\ H_1 : M > 500 \end{cases}$$

إن الفرضية البديلة لها اتجاه واحد وقيمتها الحرجة هي: $t_{(\alpha,V)} = t_{(0.05,24)} = 1.711$

$$T = \frac{\overline{X} - M_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{520 - 500}{\frac{75}{\sqrt{25}}} = 1.333$$

بالمقارنة نجد أن: $1.333 < 1,711$ إذن نقبل الفرضية$H_0$ ونرفض$H_1$ ونقول بان ادعاء الشركة غير صحيح عند مستوى الدلالة. 0.05

**حل التمرين الرابع:**

لدينا: $M_0 = 5$، $n = 16$، $\overline{X} = 5.1$ ، $S = 4.80$، $\alpha = 0.05$

ونريد اختبار:

$$\begin{cases} H_0: M = 5 \\ H_1: M \neq 5 \end{cases}$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة لها طرفين وقيمها الحرجة هي:

$$-t_{(\alpha/_2, v)} = -t_{(0.025,15)} = -2.131 \quad ، t_{(0.025,15)} = 2.131$$

$$T = \frac{\overline{X} - M_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{5.1 - 5}{\frac{4.80}{\sqrt{16}}} = 0.083$$

بالمقارنة نجد أن: $-2.131 < 0.083 < 2.131$ أي أن قيمة$T$ تقع في منطقة القبول إذن نقبل$H_0$ ونرفض$H_1$ عند مستوى الدلالة 0.05 بمعنى القطع لها قوة مقاومة للكسر تساوي 5 وذلك عند مستوى المعنوية 0.05.

**حل التمرين الخامس:**

لدينا : $n_1 = 10$ ، $\overline{X}_1 = 630$ ، $\sigma_1 = 20$

$n_2 = 16$ ، $\overline{X}_2 = 650$ ، $\sigma_2 = 40$ ، $\alpha = 5\%$

ونريد اختبار:

$$\begin{cases} H_0: M_1 = M_2 \\ H_1: M_1 < M_2 \end{cases}$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة لها اتجاه واحد (طرف أيسر) وقيمتها الحرجة هي:

$$-Z_\alpha = -Z_{0.05} = -1.65$$

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{630 - 650}{\sqrt{\frac{(20)^2}{10} + \frac{(40)^2}{16}}} = -1.69$$

بالمقارنة نجد أن: $-1.65 > -1.69$ إذن نرفض$H_0$ ونقبل$H_1$ عند مستوى الدلالة 0.05 ونقول أن متوسط عمر المصابيح من النوع الأول اقل من متوسط عمر المصابيح من النوع الثاني عند نفس مستوى المعنوية السابق.

**حل التمرين السادس:**

لدينا: $n_1 = 15$ ، $\bar{X}_1 = 70.5$، $S_1 = 2.5$

$n_2 = 12$، $\bar{X}_2 = 69.8$ ، $S_2 = 2.6$ ، $\alpha = 5\%$

ونريد اختبار:

$$\begin{cases} H_0: M_1 = M_2 \\ H_1: M_1 \neq M_2 \end{cases}$$

$$V = n_1 + n_2 - 2 = 15 + 12 - 2$$

$$V = 25$$

نلاحظ بان الفرضية البديلة لها طرفين وقيمها الحرجة هي:

$$-t_{(\alpha/2,V)} = -t_{(0.025,25)} = -2.060،\ t_{(\alpha/2,V)} = t_{(0.025,25)} = 2.060$$

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{Sp^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$Sp^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(15-1)(2.5)^2 + (12-1)(2.6)^2}{15 + 12 - 2}$$

$$SP^2 = 6.474$$

$$T = \frac{70.5 - 69.8}{\sqrt{6.474\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{12}\right)}} = 0.710$$

بالمقارنة نجد أن: $-2.060 < 0.710 < 2.060$ أي أن قيمة T تقع في منطقة القبول، إذن نقبل $H_0$ ونرفض $H_1$ عند مستوى الدلالة 0.05 بمعنى انه ليس هناك فرق بين متوسط أوزان الطلبة.

**حل التمرين السابع:**

لدينا:

$$\begin{cases} H_0: M_x = M_y \\ H_1: M_x \neq M_y \end{cases} ،\quad V = 4 ،\quad \alpha = 0.05$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرفين وقيمها الحرجة هي:

$$-t_{(\alpha/2,V)} = -t_{(0.025,4)} = -2.776 ،t_{(\alpha/2,V)} = t_{0.025,4} = 2.776$$

بعد القيام بالحسابات اللازمة نجد أن: $\bar{d} = 5$

$$sd = 1.870$$

$$T = \frac{\bar{d}}{\frac{Sd}{\sqrt{n}}} = \frac{5}{\frac{1.870}{\sqrt{5}}} = 5.978$$

بالمقارنة نجد أن: $5.978 > 2.776$ إذن نرفض $H_0$ ونقبل $H_1$ عند مستوى 5% ونقول أن هناك فرق في وزن الأشخاص قبل وبعد اخذ الحمية عند مستوى الدلالة 5%.

**حل التمرين الثامن:**

لدينا : $\alpha = 0.01$ ، $V = 3$

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 0.7 \\ H_1: \sigma^2 > 0.7 \end{cases}$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد وقيمتها الحرجة هي:

$$\chi^2{}_{(\alpha,V)} = \chi^2{}_{(0.01,3)} = 0.11$$

نقوم الآن بحساب إحصاء الاختبار:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

أولا نحسب$\overline{X}$ و $S^2$:

$$\overline{X} = 54 \quad ، S^2 = \frac{44}{3}$$

$$\chi^2 = \frac{(4-1)\left(\frac{44}{3}\right)}{(0.7)} = 62.857$$

بما أن$0.11 < 62.857$ فاننا نرفض الفرضية الصفرية$H_0$ ونقبل الفرضية البديلة$H_1$ ونستنتج ان قيمة التباين أكبر من $0.7$ عند مستوى المعنوية $0.01$.

**حل التمرين التاسع:**

نريد اختبار ما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 0.6 \\ H_1: \sigma^2 \neq 0.6 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05 \quad ، \quad V = 4$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرفين وقيمها الحرجة هي:

$$\chi^2{}_{(\alpha/2,V)} = \chi^2{}_{(0.025,4)} = 0.48$$

$$\chi^2{}_{(1-\alpha/2,V)} = \chi^2{}_{(0.975,4)} = 11.15$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(5-1)(0.8)}{0.6} = 5.333$$

بما أن$11.15 < 5.333 < 0.48$ فاننا نقبل الفرضية الصفرية$H_0$ ونرفض الفرضية البديلة$H_1$ عند مستوى الدلالة $0.05$ وبالتالي نقبل ادعاء الشركة عند نفس مستوى المعنوية السابق.

**حل التمرين العاشر:**

لدينا:

$$V_1 = 9 \;\; ،V_2 = 24 \quad ، \quad \alpha = 0.05 \quad \begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$$

الفرضية البديلة لها طرف واحد أيمن وقيمتها الحرجة هي: $F_{(\alpha,V_1,V_2)} = F_{(0.01,9,24)} = 3.26$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{225}{400} = 0.562$$

بما أن $0.562 < 3.26$ فاننا نقبل $H_0$ ونرفض $H_1$ عند مستوى الدلالة $0.01$ وبالتالي فان تبايني المجتمعين متساويين عند مستوى المعنوية $0.01$.

**حل التمرين الحادي عشر:**

نريد اختبار ما يلي:

$$\alpha = 0.05 \quad \begin{cases} H_0: P = 0.62 \\ H_1: P > 0.62 \end{cases}$$

نلاحظ بأن الفرضية البديلة ذات طرف واحد أيمن وقيمتها الحرجة هي: $Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.65$

ولدينا: $\overline{P} = \frac{340}{500} = 0.68$

$$Z = \frac{\overline{P} - P_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{0.68 - 0.62}{\sqrt{\frac{(0.62)(0.38)}{500}}} = 2.764$$

بالمقارنة نجد أن $2.764 > 1.65$ إذن نرفض $H_0$ ونقبل $H_1$ ونقول ان هناك تزايد في نسبة الاشخاص الذين يملكون البيوت في تلك المدينة عند مستوى المعنوية $0.05$.

**حل التمرين الثاني عشر:**

لدينا: $\begin{cases} H_0: P = 0.25 \\ H_1: P > 0.25 \end{cases}$

$$\alpha = 0.05$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد أيمن وقيمتها الحرجة هي: $Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.65$

ولدينا: $\overline{P} = \frac{69}{230} = 0.3$

نقوم بحساب دالة الاختبار Z: $Z = \frac{\overline{P} - P_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{0.3 - 0.25}{\sqrt{\frac{(0.25)(0.75)}{230}}} = 1.75$

بالمقارنة نجد أن $1.75 > 1.65$ اذن نرفض $H_0$ ونقبل $H_1$ عند مستوى الدلالة $0.05$ بمعنى أن الحملة الدعائية أدت إلى زيادة نسبة المستهلكين لهذا النوع من الشاي عند مستوى المعنوية السابق.

**حل التمرين الثالث عشر:**

لدينا: $\begin{cases} H_0: P = 0.8 \\ H_1: P > 0.8 \end{cases}$

$\alpha = 0.05$

نلاحظ بان الفرضية البديلة ذات طرف واحد أيمن وقيمتها الحرجة هي: $Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.65$

ولدينا: $\overline{P} = \frac{70}{100} = 0.7$

نحسب الآن دالة الاختبار Z حيث: $Z = \frac{\overline{P} - P_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$

$$Z = \frac{0.7 - 0.8}{\sqrt{\frac{(0.8)(0.2)}{100}}} = -2.5$$

بالمقارنة نجد أن$1.65 > 2.5-$ وعليه نقبل الفرضية الصفرية$H_0$ ونرفض الفرضية البديلة$H_1$ بمعنى ان هذه ليست دليلا كافيا على زيادة نسبة العمال الذين يفضلون الحوافز المعنوية في المؤسسة عند مستوى الدلالة 0.05.

**حل التمرين الرابع عشر:**

نريد اختبار: $\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 \neq P_2 \end{cases}$

بما أن الفرضية البديلة ذات طرفين فان قيمها الحرجة هي:

$$-Z\alpha_{/2} = -Z_{0.025} = -1.96 \text{ ،} Z\alpha_{/2} = Z_{0.025} = 1.96$$

ولدينا:

$$\overline{P}_1 = \frac{20}{400} = 0.05 \quad \text{،} \quad \overline{P}_2 = \frac{16}{400} = 0.04$$

نقوم بحساب دالة الاختبار Z:

$$Z = \frac{\overline{P}_1 - \overline{P}_2}{\sqrt{\frac{\overline{p}\overline{q}}{n_1} + \frac{\overline{p}\overline{q}}{n_2}}}$$

نحسب أولا$\overline{P}$ حيث:

$$\overline{p} = \frac{n_1\overline{P}_1 + n_2\overline{P}_2}{n_1 + n_2} = \frac{400(0.05) + 400(0.04)}{400 + 400} = 0.045$$

$$Z = \frac{0.05 - 0.04}{\sqrt{\frac{(0.045)(0.955)}{400} + \frac{(0.045)(0.955)}{400}}} = 0.682$$

نلاحظ أن$1.96 > 0.682$ اي ان قيمة Z المحسوبة تقع في منطقة قبول الفرضية$H_0$ اذن نقبل$H_0$ ونرفض$H_1$ عند مستوى الدلالة 0.05، وهذا يعني انه لا يوجد فرقا بين نسبة الإنتاج المخالف للمواصفات للآليتين (أ) و (ب) عند مستوى المعنوية 0.05.

**حل التمرين الخامس عشر:**

نريد اختبار:
$$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 < P_2 \end{cases}$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد أيسر وقيمتها الحرجة هي:

$$-Z_\alpha = -Z_{0.05} = -1.65$$

و الآن نقوم بحساب قيمة دالة الاختبار $Z$:

$$Z = \frac{\overline{P}_1 - \overline{P}_2}{\sqrt{\frac{\overline{p}\overline{q}}{n_1} + \frac{\overline{p}\overline{q}}{n_2}}}$$

$$\overline{p} = \frac{n_1\overline{P}_1 + n_2\overline{P}_2}{n_1 + n_2} = \frac{60(0.2) + 90(0.3)}{60 + 90} = 0.26$$

$$Z = \frac{0.2 - 0.3}{\sqrt{\frac{(0.26)(0.74)}{60} + \frac{(0.26)(0.74)}{90}}} = -1.367$$

نلاحظ أن $-1.65 < -1.367$ اي ان قيمة $Z$ المحسوبة تقع في منطقة قبول الفرضية الصفرية $H_0$ ومنه نقبل الفرضية $H_0$ ونرفض $H_1$ بمعنى ان نسبة الاشخاص المؤيدين للمترشح السياسي في الولاية(أ) ليست اقل من الولاية (ب) عند مستوى المعنوية $0.05$.

# المراجع

1. إدوارد مينيكا و زوريانا كورزيجا تعريب ميسرور علي ابراهيم سرور، "الاحصاء في الادارة مع التطبيق على الحاسب الآلي" دار المريخ للنشر.
2. أسامة عبد العزيز حسن ولبيبة حسب النبي العطار " أساسيات الإستدلال الاحصائي" الدار الجامعية، الاسكندرية، مصر، 2001.
3. دومينيك سالفاتور، ترجمة سعدية حافظ منتصر " **الاحصاء والاقتصاد القياسي**" الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر.
4. سلمان محمد طشطوش "**أساسيات المعاينة الاحصائية**" دار الشروق للنشر والتوزيع،عمان، الاردن، الطبعة الأولى، 2001.
5. علي يوسف خليفة " الاحصاء الاقتصادي الزراعي" منشأء المعارف، بالاسكندرية، مصر، 2000.
6. علي يوسف خليفة،" **الاحصاءئ الاقتصادي الزراعي**" منشأة المعارف، الاسكندرية، مصر، 2000.
7. فتحي أحمد عاروري " **المعاينة الاحصائية طرقها واستخداماتها**" شركة دار الأكاديميون للنشر والتوزيع، عمان، الاردن، الطبعة الاولى، 2015.
8. لبيبة حسب النبي العطار وعادل محمود حلاوة، "مقدمة في أساليب التحليل الإحصائي" الدار الجامعية لطبع والنشر والتوزيع، الاسكندرية، مصر، 2000.
9. محمد خميس الزوكه و محمد إبراهيم رمضان " الاحصاء والاساليب الكمية في العلوم الانسانية " درا المعرفة الجامعية ، 200.
10. محمد محمود مهدلي" **أساليب ومناهج علم الإحصاء**" دار المعرفة الجامعية، الاسكندرية، مصر، 2000.
11. Régis Bourbonnais "Econométrie Cours et exercices corrigés" 9e édition Dunod, 2015, Paris