الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشهيد حمه لخضر الوادي

Université Echahid Hamma Lakhdar d'ElOued

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم علوم التسيير
اللجنة العلمية للقسم

Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion
Département des sciences de gestion
Comité scientifique du Département

الرقم: **2022/004**/ل ع ق ت/ق ع ت/ ك ع إق ت ع ت

الوادي في: **2022/01/02**

شـــهــادة إداريـــة

(اعتماد مطبوعة)

يشهد السيد رئيس اللجنة العلمية لقسم علوم التسيير، بأن **الدكتورة خلف منى**، قدمت أمام اللجنة العلمية لقسم علوم التسيير المنعقدة بتاريخ 2021/02/11 ، مطبوعة بعنوان:

محاضرات إحصاء 1

مقدمة لطلبة سنة أولى ل م د؛ عدد صفحاتها 99 صفحة؛ وبعد تعيين لجنة الخبرة وبعد استلام تقارير الخبرة الايجابية، واستيفاء المطبوعة الجوانب الشكلية والمنهجية والشروط المعتمدة في كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بجامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي، تمت المصادقة من طرف أعضاء اللجنة العلمية على اعتماد المطبوعة للتدريس.

رئيس اللجنة العلمية للقسم

رئيس اللجنة العلمية لقسم علوم التسيير
أ.د حمـزة بـالي

B.P.789, 39000, El Oued, Algérie, Tél/Fax: 032120768 / 032120768 scgestioneloued@gmail.com

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمة لخضر الوادي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

مطبوعة موجهة لطلبة سنة أولى (LMD) جذع مشترك بعنوان:

محاضرات احصاء 1

من إعداد:

د. خلف منى

الموسم الجامعي:2021/2020

مقرر إحصاء 1

I. مفاهيم أساسية حول علم الإحصاء

II. عرض البيانات

III. مقاييس النزعة المركزية

IV. مقاييس التشتت

V. مقاييس الشكل

VI. الأرقام القياسية

مفاهيم أساسية حول علم الإحصاء

1.مفهوم علم الاحصاء

إن كلمة الإحصاء*La statistique* تعني الدولة Statos: .، تعني الحالة أو الوضع Status:ومن ذلك يمكن أن نفهم أن الإحصاء في تعريف بدائي له يعبر عن حالة أو وضع الدولة بلغة الأرقام، ولكن يبقى هذا المفهوم بسيطا لا يعبر عن الحقيقة العلمية من المعرفة.

غير إن المتتبع للبوادر الأولى لعلم الإحصاء يجد أنها ترجع إلى أزمنة قديمة جدا عند الإنسان البدائي لما تحول من حياة التنقل إلى حياة الاستقرار، مع هذا الاستقرار نتج مفهوم احتلال المجال، أي احتلال قطعة من الأرض واعتبارها مجالا خاصا. بعد ذلك أصبح بهمه أن يعبر على مساحة هذا المجال، عدد الأشجار المثمرة الموجودة في المجال، عدد أفراد العائلة، عدد الحيوانات التي تمكن من ترويضها .يعبر عن كل ذلك بعدد معين من الحصى .و هي نفسها اهتمامات الدولة الحديثة، ولكن بطريقة متطورة حيث أنشئت الدواوين والإدارات المتخصصة في جمع ونشر الإحصائيات في مختلف النشاطات الاجتماعية والاقتصادية لبلد ما، فنجد الهيئة المكلفة بذلك في الجزائر هي الديوان الوطني للإحصائيات.

أما البوادر العلمية للإحصاء كنظرية فلم تظهر إلا بداية من القرن الثامن عشر 18 م، حيث توجه الباحثون الرياضيون وعلى رأسهم(*Bernoulli , Gauss&* Laplace) نحو التحليل الإحصائي و إنشاء القوانين الاحتمالية .ولم يكتمل الإحصاء كعلم لجمع وعرض وتحليل واستخدام البيانات الإحصائية بغرض الاستدلال واتخاذ القرارات إلا في بداية القرن العشرون.

بحيث يعد علم الإحصاء اليوم، من أهم العلوم التي تتوقف عليها التنمية السياسية والاقتصادية والثقافية ، الخ...، وللإحصاء حصة أساسية من عمل الدول والمؤسسات والمنظمات السياسية والاقتصادية والاجتماعية، عالميا ودوليا ومحليا، وكثيرا ما يرتهن مصير مشاريع أو قرارات كبرى بالنتائج التي يقدمها الإحصاء في مجال معين.

وبصورة عامة، فان افتقاد الجهد الإحصائي، في مجال من المجالات، يمنع من التأكد وتحصيل الضمان في استجابة اي مشروع للواقع، كما يحول دون تحديد مدى نجاحه أو إخفاقه، وتجعل في الإقدام عليه شيئا من المخاطرة.

جاء في موسوعة للاند حول الإحصاء من الناحية الجوهرية انه مجموعة الوقائع التي يودي إليها اجتماع البشر في مجتمعات سياسية ...لكن الكلمة عندنا سترتدي مفهوما أوسع، فنحن نعني بالإحصاء العلم الذي

يكون موضوعه جمع وتنسيق وقائع كثيرة في كل صنف، بحيث يمكن الحصول على نسب عددية مستقلة استقلالا ملموسا عن المصادفة واستثناءاتها، وفي موسوعة المورد العربية يعرف الاحصاء بأنه علم جمع وتصنيف وتعليل الوقائع أو المعطيات الرقمية أو العددية، يتخذ طريقة للتحليل في العلوم الدقيقة والعلوم الاجتماعية وفي المشروعات الاقتصادية على اختلافها .

كما يعرف علم الإحصاء بأنه علم اتخاذ القرارات في جميع نواحي الحياة، وذلك من خلال جمع ودراسة وتحليل البيانات المتوفرة واستخلاص النتائج عن الظواهر المدروسة مما سبق يمكن تصنيف الإحصاء كعلم إلى قسمين رئيسيين هما:

- **الإحصاء الوصفي Statistique descriptive:** وهو ذلك الفرع من الإحصاء الذي يمثل الطرق العلمية الرقمية أو الحسابية لجمع المعلومات والبيانات بهدف تنظيمها، تلخيصها وعرضها في صورة مبسطة في صورة جداول أو رسوم بيانية.

- **الإحصاء الاستدلالي Statistique infertilité:** وهو ذلك الفرع من الإحصاء الذي يهتم بتناول الطرق العلمية في تحليل البيانات المتوفرة في العينة**ECHANTILLON و** تعميمات عن خواص المجتمع الكلي وذلك إلى أساليب التقدير والاختبار واتخاذ القرارات والتنبؤ، بحيث يلعب هذا الجزء دورا مهما في تخطيط التجارب التي تجمع منها البيانات ومن ثم تصميمها.

لذا فإن الإحصاء يهتم بطرق جمع البيانات وتمثيلها وعرضها *الإحصاء الوصفي* ، ومن ثم تحليلها وتفسيرها و التوصل إلى استنتاجات من خلال *الإحصاء الاستدلالي*.

2. التعريف بالمصطلحات الإحصائية

- **المجتمع Population**: هو جميع الوحدات الإحصائية المراد دراستها والمعرفة بشكل دقيق والتي تشترك فيما بينها في الصفة الأساسية محل اهتمام الباحث، مثل :مجموعة من الطلبة، ، مجتمع من المؤسسات.....
- **العينة Echantillon**: هي جزء من المجتمع تحت الدراسة مثل مجموعة من سكان مدينة، أو مجموعة من طلبة جامعة التكوين المتواصل، أو بعض المساحات الزراعية في الجزائر ...الخ.

- **الظاهرة Phénomène**: هي صفة لعناصر تختلف من عنصر لآخر في شكل أو النوع أو الكمية، ويطلق على الصفة تحت الدراسة متغير variable مثل طول شخص ما، عدد الأخطاء الإملائية في بحث ما، سرعة سيارة بين مدنيين خلال أسبوع ... الخ.

- **المتغير variable**: هو الصفة تحت الدراسة كما أشرنا أعلاه أو هو الشيء الذي يمكن أن يأخذ قيما مختلفة في الظروف المختلفة (زمنية، مكانية، سياسية، اقتصادية ... الخ) فمثلا سعر التمر يختلف من يوم لآخر ويختلف في نفس السوق من سنة لأخرى.

3. المتغيرات الإحصائية: نقسم المتغيرات إلى نوعين:

3.1. متغيرات نوعية (كيفية) Variable qualitative: هي الظواهر أو الصفات التي لا يمكن قياسها مباشرة بالأرقام العددية ، وتنقسم بدورها إلى:

3.1.1. بيانات نوعية خاضعة للترتيب: والتي يجب فيها مراعاة الترتيب فيها كالمستوى التعليمي، الرتب العسكرية...

3.1.2. بيانات نوعي غير خاضعة للترتيب: كالجنسية، ، أنواع الأمراض ...

3.2. متغيرات كمية (عددية) Variable quantitatives: وهي البيانات التي يعبر عنها في صورة عددية وتنقسم إلى:[1]

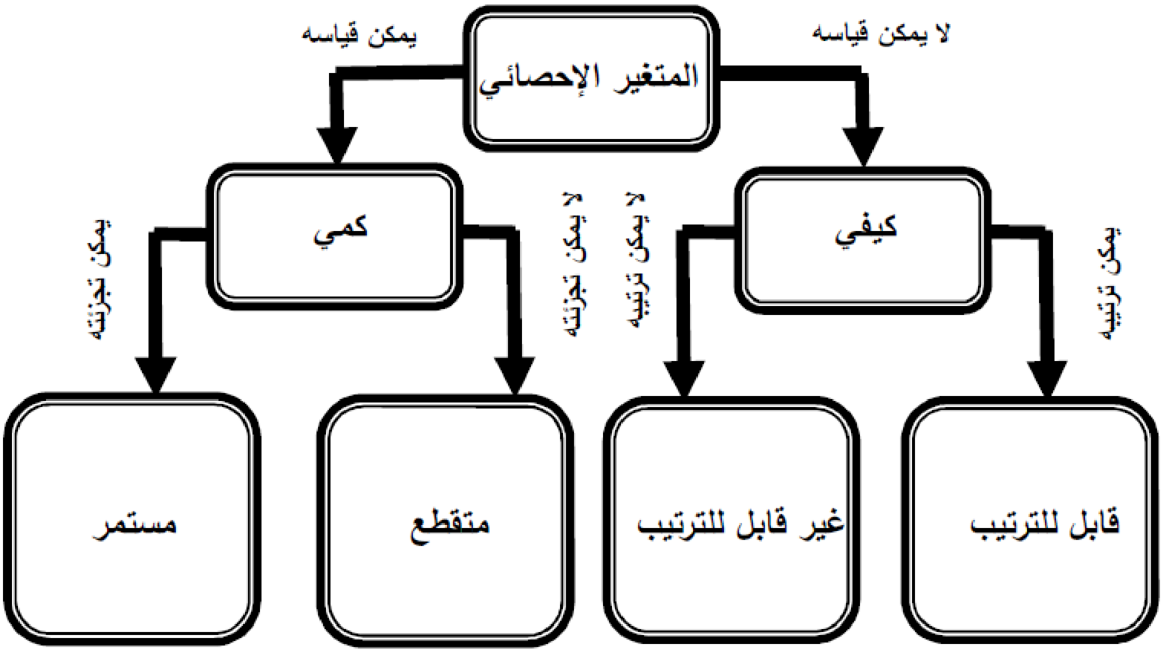
3.2.1. متغير متقطع Variable discret: وهو المتغير الذي يأخذ أعداد صحيحة، فمثلا إذا كان × متغير يمثل عدد أفراد الأسرة، فإنه لا يمكن أن يأخذ القيم 2، 3، 4، 5 ... ولا يمكن أن نأخذ × القيم 1.5، 3.25، 5.17..

3.2.2. **متغير متصل (مستمر) Variable Continue**: وهو المتغير الذي يمكن أن يأخذ أي قيمة بين قيمتين معنيتين، فإذا كان × هو متغير الطول فمثلا فإن × يمكن أن تأخذ القيم 15متر، 11.3 متر، 14.75 متر، أي أن المتغير × يمكن أن نأخذ أي قيمة في فترة زمنية معينة.

[1]

ملاحظة: *إذا كانت وحدة قياس المتغير قابلة لتجزئة يقسم إلى وحدات مثلا الكغ في الوزن ، المتر في الطول، الكم في المسافة، الساعة في الزمن فالمتغير مستمر . والشكل أدناه يوضح أنواع المتغير الإحصائي*

الشكل رقم 1.1: أنواع المتغير الإحصائي



4.مصادر البيانات الإحصائية

مما لا شك فيه أن في الدراسات الإحصائية تعد البيانات المادة الأساسية الرئيسية، وعليها تتوقف دقة الوصف والتحليل وسلامة الاستنتاج ومنطقيته، فإذا كانت هذه البيانات والمعلومات دقيقة وشاملة وواقعية، كان الوصف والاستنتاج والقرار الذي نحصل عليه سليما وصحيحا، وعليه فالاهتمام التام والحرص الدقيق في الحصول على بيانات سليمة وواقعية حول الظواهر تحت الدراسة بعد أن العمود الفقري والحجر الأساسي في علم الإحصاء، وهناك عدة طرق لجمع البيانات الإحصائية ، وذلك حسب الهدف من الدراسة وأسلوب التحليل المتبع، ومن بين الطرق المتبعة في جمع البيانات نذكر ما يلي:

1.4. الطريقة المباشرة: يقصد بهذه الطريقة قيام الباحث بجمع المعلومات الإحصائية بنفسه، من مصادرها الأولية، كأن يقوم بطرح الأسئلة مباشرة على الأسر.

4.2. الطريقة غير المباشرة: وتسمى أيضا طريقة البيانات الثانوية، وهي تشمل جميع البيانات والمعلومات الإحصائية المتوفرة من وثائق ومطبوعات ونشرات إحصائية التي تصدرها الهيئات والدواوين المختلفة، وكذلك الهيئات الدولية ومنظماتها المختلفة، ولهذه الطريقة فوائد متعددة أهمها أنها تؤدي إلى اقتصاد كبير في وقت الباحث ونفقاته، إلا أنها تشكو أيضا من عدد من العيوب منها:

- عدم التطابق في بعض الأحيان بين البيانات التي يوفرها المصدر الثانوي والبيانات التي يرغب الباحث في الحصول عليها؛
- نقص كمية البيانات ودرجة الدقة؛
- قد تكون الوحدة الإحصائية المستعملة لا تتطابق وخطة البحث.

5. أساليب جمع البيانات الإحصائية

للوصول إلى البيانات والمعلومات هناك أسلوبان يمكن من خلالهما جمع هذه البيانات والمعلومات كل منهما لها ميزاتها وعيوبها وهذان الأسلوبان هما:

5.1. أسلوب الحصر الشامل : هو جمع البيانات من جميع المفردات التي يتكون منها هذا المجتمع مجال البحث، ومثال ذلك التعداد العام للسكان من ميزات هذا الأسلوب يعطي بيانات كاملة حول الظواهر التي يتم البحث عنها، أما عيوبه فان هذا الأسلوب يحتاج إلى وقت وجهد ومال، كما لا يمكن استخدام هذا الأسلوب في المجتمعات غير المحددة.

5.2. أسلوب العينة: هو اخذ وحدات من المجتمع الإحصائي تسمى العينة والغرض من اخذ العينة أن تكون بديلا عن المجتمع الإحصائي، وعن طريق صفاتها يتمكن الباحث ان يصف خواص المجتمع بتعميم النتائج التي حصل عليها من دراسة العينة . تفضل هذه الطريقة عن طريقة التسجيل الشامل للأسباب الآتية:

- توفر المال و الجهد والوقت اللازم لإجراء البحث؛
- صعوبة إجراء التسجيل الشامل بسبب طبيعة المجتمع فقد يكون المجتمع غير محدد أو كبير جدا .

ومن عيوب هذا الأسلوب فان محاولة التعرف على خواص المجتمع عن طريق دراسة جزء منه ينطوي عليه التضحية في دقة النتائج التي تستخرجها.

عرض البيانات

تمهيد:

إن عرض البيانات الإحصائية وتبويبها يمثل الخطوة الثانية بعد تجميع هذه البيانات الخام في مفهوم التحليل الإحصائي، ويلجأ الباحث إلى حصر وتصنيف هذه البيانات وعرضها بطريقة مختصرة تساعد على فهمها وتحليلها إحصائيا للتعرف عليها ووصفها ومقارنتها بغيرها من الظواهر ، والخروج ببعض المدلولات الإحصائية عن مجتمع الدراسة.

تتوقف طريقة عرض البيانات على نوع هذه البيانات وعلى الحقائق المطلوب إبرازها، وهناك طريقتان أساسيتان لعرض وتبويب البيانات الإحصائية وهما: العرض الجدولي والعرض البياني.

1. العرض الجدولي للبيانات

بعد عملية تبويب وتعيين الصفات التي تميز المفردات، ترصد النتائج في جداول مناسبة بحيث توضح الشكل النهائي للمجموعات المميزة وتسمى هذه العملية التي يتم فيها تجميع البيانات في مجموعات مميزة ومتجانسة *بعملية التصنيف*، وتصنف البيانات الإحصائية بوجه عام وفقا لإحدى التصنيفات التالية: تصنيف جغرافي؛ تصنيف تاريخي أو زمني؛ تصنيف نوعي أو وصفي؛ تصنيف كمي.

كما يجب التقيد بالقواعد الواجب إتباعها عند تشغيل الجداول الإحصائية هي:

- عنوان واضح في أعلى الجدول يعطي فكرة عن البيانات التي يحتويها هذا الجدول؛
- ذكر مصدر البيانات في أسفل الجدول إذا وجد؛
- ذكر وحدة القياس المستعملة؛
- ذكر عنوان كل عمود أو سطر؛
- وضع رقما للجدول.

ونلخص أن أهم معيار لتبويب البيانات في الجداول الإحصائية هو التمييز في طبيعة المتغير وفق التبويب التالي:

1.1. جدول التوزيع التكراري البسيط

يمثل طريقة تنظيم البيانات الخام للظاهرة (المتغير) وتبويبها في جداول تضم صفات أو قيم الظاهرة والتكرارات المناظرة لها لغرض دراستها وتحليلها، ويستخدم هذا النوع من الجداول لوصف وتلخيص البيانات التي تتعلق بظاهرة واحدة فقط سواء كانت كيفية أو كمية، ولتوضح شكل جداول التوزيع التكراري البسيطة نقوم بعرض الجدول التالي:

الجدول رقم 1.1 الشكل العام لجدول التوزيع التكراري البسيط

في حالة متغير كيفي نضع في هذه الخانات صفة المتغير.

في حالة متغير كمي منفصل نكتب قيم المتغير ويجب أن ترتب تصاعديا أو تنازليا.

في حالة متغير كمي متصل تكتب قيم المتغير في شكل فئات.

المتغير (Xi)	التكرار المطلق (n_i)
x_1	n_1
X_2	n_2
.	.
.	.
.	.
X_k	n_k
$\sum$المجموع	$N = \sum n_i$

نضع في هذه الخانات عدد المفردات المقابلة لكل صفة أو قيمة أو فئة للمتغير الإحصائي

1.1.1. المتغير الكيفي:

تلخص الجداول التكرارية البسيطة البيانات الكيفية في وضعها على صورة جدول منتظم يوضح كيفية توزيع القيم التي حصلنا عليها من الظاهرة المدروسة حيث يدل العمود أو السطر الأول على قيم الظاهرة، ويدل العمود أو السطر الثاني على التكرار المقابل لهذه القيم.

مثال1: البيانات التالية تبيّن فصائل الدم لـ20 مريض أجريت لهم عمليات جراحية في المستشفى خلال أسبوع معين: O , B , A , O , A , O , A , O , B , A , O , B , A , B , O , AB , O , A , AB , O , O , B ,

المطلوب :عرض هذه البيانات في جدول توزيع تكراري؟

الجدول رقم2.1.: توزيع المرضى حسب نوعية فصيلة الدم

فصيلة الدم (Xi)	A	B	AB	O	المجموع $\sum$
عدد المرضى التكرارات (n_i)	**5**	**5**	**8**	**2**	**20**

إن تلخيص البيانات ووضعها في صورة الجدول أعلاه تعطي قراءة سريعة وواضحة لقيم المتغير (فصيلة الدم)

1.1.2. المتغير الكمي المنفصل:

وهو المتغير الذي تأخذ بياناتها أرقام عددية صحيحة فقط مثل عدد الأسر أو عدد الدول، ولغرض تبويب بيانات المتغير الكمي المنفصل يتم اعتماد جدول التكراري

البسيط مكون من عمودين أو سطرين يخصص العمود أو السطر الأول لقيم المتغير بعد ترتيبها والعمود أو السطر الثاني يخصص للتكرارات، وكما هو موضح في المثال 2.

مثال2: البيانات التالية تمثل عدد الغيابات التي سجلها عمال مؤسسة ما خلال الثلاثي الأول من سنة 2020:

3	5	2	2	2	3	2	5	3	4
0	5	2	1	5	0	0	4	5	5
4	1	2	3	2	0	3	5	1	1

الحل:

الجدول رقم1.3.: توزيع العمال حسب عدد الغيابات

عدد الغيابات (Xi)	0	1	2	3	**4**	**5**	**المجموع** $\sum$
عدد العمال التكرارات (n_i)	**4**	**4**	**7**	**5**	**3**	**7**	**30**

1.1.3.المتغير الكمي المتصل: لدراسة متغير كمي مستمر فإنه يشمل ما لا نهاية من القيم، ولتعذر وضع كل هذه القيم نقسمها إلى فئات، ،ولتكوين جدول التوزيع التكراري ذو فئات نتبع الخطوات التالية::

أولا: تحديد المدى: وهو: المجال الذي تنتشر فيه البيانات، وهو الفرق بين أكبر قيمة للبيانات وأصغر قيمة لها ، أي أن: **المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة.**

ثانيا: تحديد عدد الفئات: لتحديد عدد الفئات نقسم المدى إلى فئات متساوية الطول بحيث يكون عددها مناسبا وهناك عدة طرق لحساب عدد الفئات نذكر منها:

* معادلة ستيرجس (Sturages) $$K = 1 + 3{,}322 \log(n)$$

التي تنص على أن K :عدد الفئات، n : عدد البيانات.

* معادلة يول (yule) التي تنص على عدد الفئات = $2.5\sqrt[4]{\text{عدد البيانات}}$

ثالثا: تحديد طول الفئة: طول الفئة L وهو يساوي المدى مقسوما على عدد الفئات

طول الفئة = المدى / عدد الفئات $$L=R/K$$

مما سبق نستخلص الطريقة المرنة في تحديد عدد الفئات وأطوالها والتي لا تعتمد على المعدلات الرياضية بل أن هذه الطريقة مرنة بطبيعتها وهي:

طول الفئة × عدد الفئات ≥ المدى

رابعا: تحديد حدود الفئات: في هذه المرحلة يتم تحديد بداية ونهاية كل فئة، على أن تكون بداية الفئة الأولى أصغر من أو تساوي أصغر قيمة في البيانات، ونهاية الفئة الأخيرة أكبر من أكبر قيمة في البيانات.

ملاحظات:

- عند تفريغ البيانات فإنه يجب أن تنتمي كل مفردة إلى فئة واحدة فقط.
- عند كتابة الفئات فإنه:

- يذكر الحد الأدنى والأعلى لكل فئة إذا كان المتغير متقطع على أن تكون الفئة مغلقة من الجهتين. كما يجب إدراج الحدود الفعلية(الحقيقية):

الحد الأدنى الحقيقي = الحد الأدنى الظاهري − $2/1$ درجة الدقة.

الحد الأعلى الحقيقي = الحد الأعلى الظاهري + $2/1$ درجة الدقة.

- يذكر الحد الأدنى ويحدد الحد الأدنى الأعلى ضمنيا أو العكس إذا كان المتغير متصل وتكون الفئة مغلقة من جهة الحد الأدنى ومفتوحة من جهة الحد الأعلى.
- يفضل استخدام الفئات المتساوية الطول، إلا أنه في بعض الحالات يمكن أن يستخدم الفئات غير المتساوية، من هذه الحالات ما يلي:

– إذا كان الغرض من الدراسة هو الاهتمام ببعض الفئات والتركيز عليها وإهمال باقي الفئات، فيمكن عندها دمج الفئات التي لا تهم الباحث في فئة واحدة.

– إذا كان التكرار لبعض الفئات صغير جدا مقارنة بباقي الفئات، يمكن دمج هذه الفئات معا.

مثال3: البيانات التالية تمثل مبيعات صيدلية من الكمامات الطبية خلال 50 يوم. والمطلوب : تلخيص البيانات التالية في جدول توزيع تكراري مناسب؟

52	48	26	29	70	41	28	31	45	36
45	35	40	60	31	40	77	73	78	50
30	41	59	38	43	35	81	66	67	82
23	45	67	69	58	36	20	55	52	58
34	22	37	43	51	52	35	30	46	66

الحل:

المتغير الإحصائي: عدد الكمامات المباعة، ونوعه متغير كمي منفصل.

الجدول الإحصائي المناسب جدول توزيع تكراري ذو فئات مغلقة ومتساوية الطول ومن أجل ذلك نتبع الخطوات التالية:

تحديد المدى. $R = X\ max - X\ min$

62=20-82

* معادلة ستيرجس (Sturages) $K = 1 + 3{,}322 \log(n)$

$= 1 + 3{,}322 \log(50)$.=6.64

طول الفئة = 62/6.64 = 9.03 .

نقرب طول الفئة 10، ومن أجل تكوين جدول التوزيع التكراري نحدد حدود الفئة الأول، حيث الحد الأدنى للفئة الأول يساوي أصغر البيانات أو أقل منه.

الجدول رقم1.4.: توزيع المبيعات حسب عدد الكمامات

الفئات (Xi)	**التكرارات (n_i)**	**الحدود الفعلية(الحقيقية)**
29–20	**6**	**29.5–19.5**
39–30	**12**	**39.5–29.5**
49–40	**11**	**49.5–39.5**
59–50	**9**	**59.5–49.5**
69–60	**6**	**69.5–59.5**

79-70	4	79.5-69.5
89-80	2	89.5-79.5
المجموع∑	50	/

إن تفريغ البيانات ضمن جدول توزيع تكراري يمكننا من فهم الحقائق والحصول على استنتاجات لا يمكن الوصول إليها من البيانات المطلقة.

بعد إعداد جدول التوزيع التكراري يكون من المناسب في أغلب الأحيان عرض البيانات في شكل توزيع تكراري نسبي للتعبير عن الأهمية النسبية لتكرار كل فئة بالنسبة لإجمالي التكرارات، ويحسب التكرار النسبي بالصيغة التالية:***التكرار المطلق / مجموع التكرارات***

2.1. جدول التوزيع التكراري المزدوجة

يستعمل جدول التوزيع التكراري المزدوج عند دراسة ظاهرتين (خاصيتين) لمجتمع ما في آن واحد حيث توضع البيانات الإحصائية في مثل هذه الجداول على الشكل التالي: تخصص الأسطر لبيانات الخاصية الأولى، بينما تخصص الأعمدة لبيانات الخاصية الثانية.

نرمز لقيم الخاصية الأولى ب X_i حيث ($i=1,2,\ldots\ldots,N$) ونرمز لبيانات الخاصية الثانية ب Y_jحيث ($j=1,2,\ldots\ldots,m$).

وكمثال على ذلك عند دراسة مستوى معيشة العائلات يمكن أن نتطرق إلى خاصيتين هما: مهنة رب الأسرة والإنفاق الاستهلاكي، فإذا رمزنا للمتغير الأول مهنة رب الأسرة بالرمز Xi والمتغير الثاني الإنفاق الاستهلاكي بالرمز y_j يمكن أن نشكل الجدول المزدوج التالي

المتغير y / المتغير X	y_1	y_2	y_3	y_4	Ni
X_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	N_1
X_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	N_2
X_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	n_{34}	N_3
X_4	n_{41}	n_{42}	n_{43}	n_{44}	N_4

X_5	n_{51} n_{52} n_{53} n_{55}	N_5
N_j	N_1 N_2 N_3 N_4	$\sum N_i = \sum Nj$

مثال 4: سحبت عينة عشوائية من مجتمع ما، تتكون من 183 أسرة قصد دراسة خاصيتين هما مهنة رب الأسرة والتركيب الأسرية من حيث عدد الأطفال، فكانت النتائج كالتالي:

الجدول رقم1.5.: توزيع الأسر حسب عدد الأطفال ومهنة رب الأسرة

عدد الأطفال / المهنة	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**المجموع**
إطار سامي	10	8	6	4	3	1	0	32
مهنة حرة	15	7	3	2	1	0	0	28
عامل يومي	3	5	8	10	15	9	7	57
متقاعد	2	4	9	11	13	17	10	66
المجموع	30	24	26	27	32	27	17	**183**

يمكن أن نقرأ من الجدول السابق ما يلي:

- من بين 183 أسرة المدروسة هناك 28 أسرة يشتغل رب الأسرة بالمهن الحرة.
- من بين 183 أسرة المدروسة هناك 32 أسرة لها أربع أطفال.
- أن هناك 8 عمال يومين لهم طفلين و 10 لهم 3 أطفال.
- أن هناك 17 أسرة فقط لها 6 أطفال منها 7 أسر يشتغل رب الأسرة كعامل يومي و10 أسر رب الأسرة متقاعد.

2. العرض البياني للبيانات الإحصائية

يعتبر العرض البياني للبيانات الإحصائية بمثابة تلخيص هذه البيانات باستخدام الرسومات البيانية والأشكال الهندسية، إذ تمكن هذه الأخيرة من من القيام بتحليل سريع للظاهرة المدروسة ، وتختلف طرق عرض البيانات حسب نوع المتغير المدروس، وسنتعرض لكل منها بالتفصيل فيما يلي:

- العرض البياني في حالة متغير كمي منفصل؛
- العرض البياني في حالة متغير كمي متصل؛
- العرض البياني في حالة متغير كيفي.

1.2.العرض البياني في حالة متغير كمي منفصل

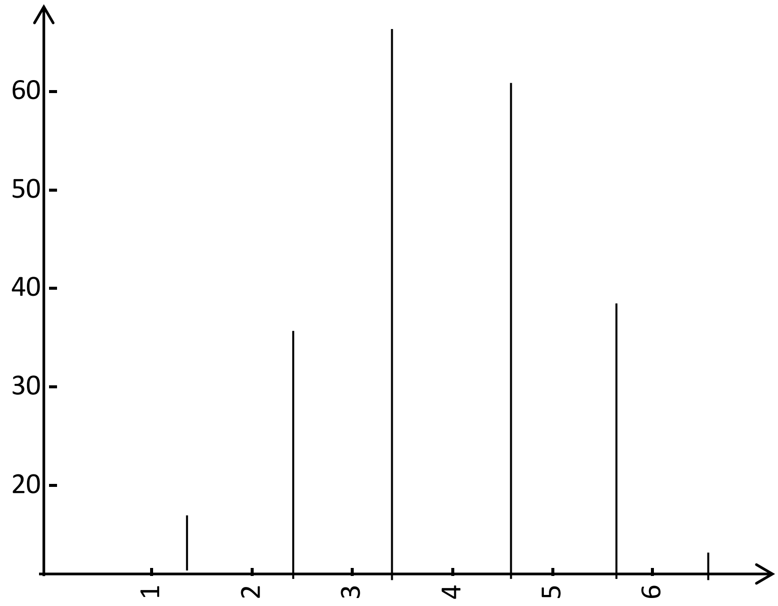
1.1.2.العرض البياني للتكرارات البسيطة :هو عبارة عن أعمدة بسيطة تتناسب أطوالها مع التكرار المقابل لقيمة معينة للمتغير المدروس وتسمى الأعمدة البسيطة.

مثال5: عند إلقاء زهرة نرد 200 مرة سجل عدد المرات التي شوهد فيها كل وجه من الأوجه الستة وكانت نتائج التجربة كالتالي:

الجدول رقم1.6.: توزيع وجه زهرة النرد حسب عدد مرات الظهور

الوجه (Xi)	1	2	3	4	5	6	**المجموع** $\sum$
عدد المرات **التكرارات** (n_i)	8	29	68	57	33	5	**200**

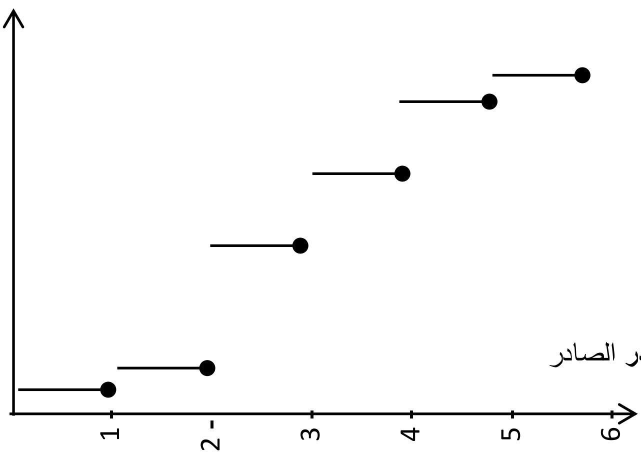
المطلوب: عرض هذه البيانات بيانيا؟.



العرض باستخدام الأعمدة البسيطة

2.2.1. العرض البياني للتكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة

1.2.2.1. التكرارات المتجمعة الصاعدة :هي عبارة عن قطع مستقيمة متصاعدة حسب تصاعد التكرارات التجميعية الصاعدة المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير الإحصائي المدروس. ولتوضيح كيفية رسم التكرارات المتجمعة الصاعدة نأخذ المثال أعلاه



الشكل رقم 2.2.العرض البياني للتكرار المتجمع الصاعد الصاعد

2.2.2.1. التكرارات المتجمعة النازلة :هي عبارة عن قطع مستقيمة متنازلة حسب تنازل التكرارات التجميعية النازلة، حيث أن القطعة المستقيمة الأولى تقابل مجموع التكرارات وأصغر قيمة للمتغير

المدروس والقطعة الثانية تقابل مجموع التكرارات ناقص التكرار البسيط الأول مع القيمة الثانية للمتغير الإحصائي وهكذا.

2.2. العرض البياني في حالة متغير كمي متصل

إن العروض البيانية للمتغير الكمي المتصل هي أكثر العروض البيانية استعمالا ومن أهمها:

2.2.1. المدرج التكراري Histogramme:

وهو عبارة عن مستطيلات متلاصقة طول كل منها يتناسب مع التكرار المقابل، وقاعدة كل منها تساوي طول الفئة المقابلة، ويمكن أن نميز بين حالتين عند رسم المدرج التكراري:

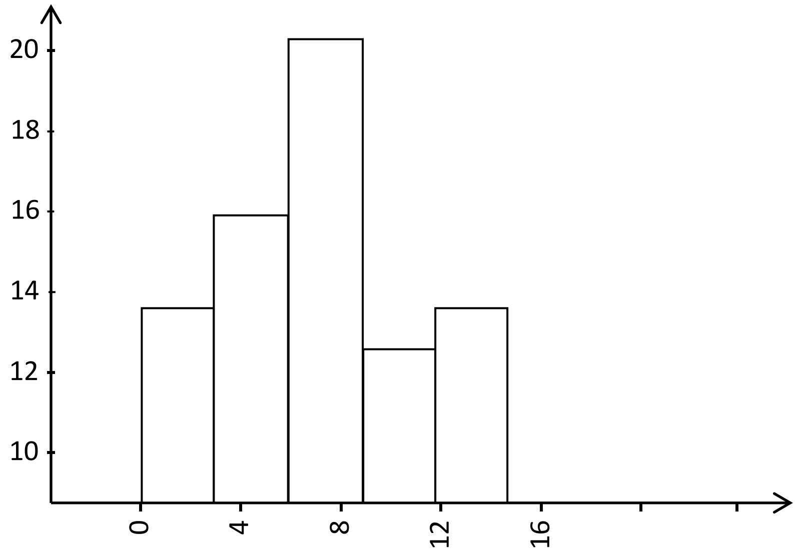
أ) **الحالة الأولى**: عندما تكون الفئات متساوية.

مثال8: يبين الجدول التالي توزيع الدرجات التي حصل عليها 50 طالب في مادة الإحصاء.
المطلوب: أرسم المدرج التكراري الذي يمثل توزيع الدرجات؟.

الجدول رقم7.1: توزيع عدد الطلبة حسب الدرجات المتحصل عليها في مادة الإحصاء

الفئة	التكرار
4 – 0	8
8 – 4	12
12 – 8	20
16 – 12	6
20 – 16	4
المجموع	**50**

الحل:



ب) الحالة الثانية: عندما تكون الفئات غير متساوية.

إذا كانت هناك فئات التوزيع غير متساوية نقوم بتعديل التكرارات، حتى يكون هناك تناسب بين طول الفئة والتكرار المقابل لها، وقيم تعديل التكرارات باستخدام المعادلة الآتية.

$$\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول الفئة}} \times \text{طول الفئة المختار}$$

مثال 9: يبين الجدول التالي توزيع عينة من 100 عامل حسب الأجر اليومي المطلوب تمثيل هذه البيانات باستخدام المدرج التكراري؟.

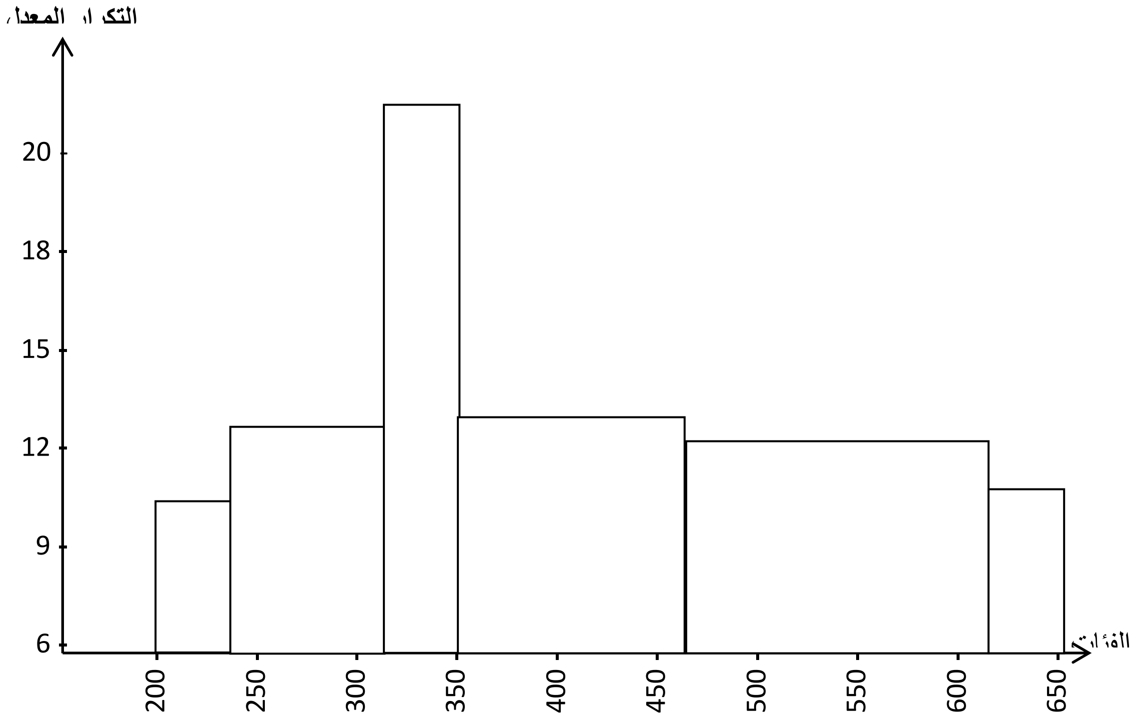
الجدول رقم8.1: توزيع العمال حسب الأجر

فئة الأجر	عدد العمال
250 – 200	5
350 – 250	15
400 – 350	20
550 – 400	25
750 – 550	30
800 – 750	5
المجموع	100

الحل: بما أن فئات التوزيع غير متساوية فإننا من أجل رسم المدرج التكراري نقوم بتعديل تكرار هذه الفئات وفقا للمعادلة السابقة.

الجدول رقم9.1: توزيع العمال حسب الأجر

فئة الأجر	عدد العمال	طول الفئة	التكرار المعدل
250 – 200	5	5	5
350 – 250	15	10	7.5
400 – 350	20	5	20
550 – 400	25	15	8.33
750 – 550	30	20	7.5
800 – 750	5	5	5
المجموع	100		



اخترنا طول الفئة يساوي 50 كأساس لتعديل التكرارات لأن هذا الطول هو الأكثر ظهورا في الجدول الأصلي.

ملاحظة: نقوم بتعديل التكرارات في حالة الفئات غير المتساوية في الحالتين التاليتين:

- عند رسم المدرج التكراري.
- عند تحديد الفئة المنوالية وحساب المنوال.

2.2.2. المضلع التكراري

هو مجموعة من القطع المستقيمة المتصلة والمنكسرة تتحدد بنقاط إحداثيات مراكز الفئات والتكرارات المقابلة لها. ولإيجاد مركز الفئة نطبق العلاقة التالية:

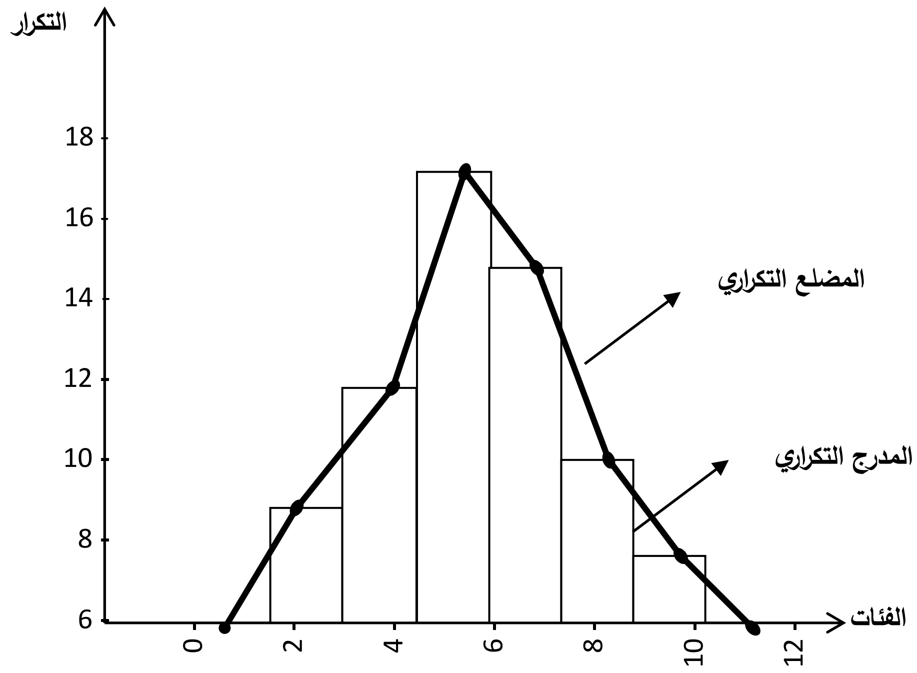
مركز الفئة =(الحد الأدنى للفئة + الحد الأعلى للفئة)/2

ولتوضيح رسم المضلع التكراري نأخذ المثال السابق المعتمد في رسم المدرج التكراري.

مثال 10: ليكن التوزيع التكراري الآتي، أرسم المدرج التكراري والمضلع التكراري؟.

الجدول رقم10.1: توزيع تكراري

الفئة	التكرار
4 – 2	4
6 – 4	8
8 – 6	16
10 – 8	12
12 – 10	6
14 – 12	2
المجموع	48



ملاحظة: الخط المنكسر يمثل المضلع التكراري، حيث أن المساحة التي تقع تحت المضلع التكراري تساوي المساحة التي تقع تحت المدرج التكراري، وحتى نحافظ على المساحة التي تقع أسفل هذا المضلع، نفترض أن لهذا التوزيع فئات إحداهما في بدايته والأخرى في نهايته تكرار كل منهما يساوي صفر، بحيث ننطلق في رسم المضلع من مركز الفئة الافتراضية الأولى (الفئة ما قبل الأولى)، وننتهي عند مركز الفئة الافتراضية الأخيرة.

2.2.3. منحنى التكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة:

يرسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد عن طريق إيصال مجموعة النقاط ذات الإحداثيات التالية: الحدود العليا للفئات والتكرار المتجمع الصاعد المقابل لها، ويرسم منحنى التكرار المتجمع النازل بإيصال مجموعة النقاط التي إحداثياتها: الحدود الدنيا للفئات والتكرار المتجمع النازل مقابل لها. يبين كل من منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى التكرار المتجمع النازل شدة أو ضعف تطور الظاهرة المدروسة عن مستوى معين من مجال الدراسة. إن فاصلة نقطة تقاطع المنحنيين تسمى بالوسيط.

مثال 11: أرسم على نفس المعلم كل من منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى التكرار المتجمع النازل لبيانات التكراري الآتي؟.

الجدول رقم11.1: توزيع تكراري

الفئة	التكرار
4 – 2	4
6 – 4	9
8 – 6	12
10 – 8	16
12 – 10	18
14 – 12	10
16 – 14	6
المجموع	75

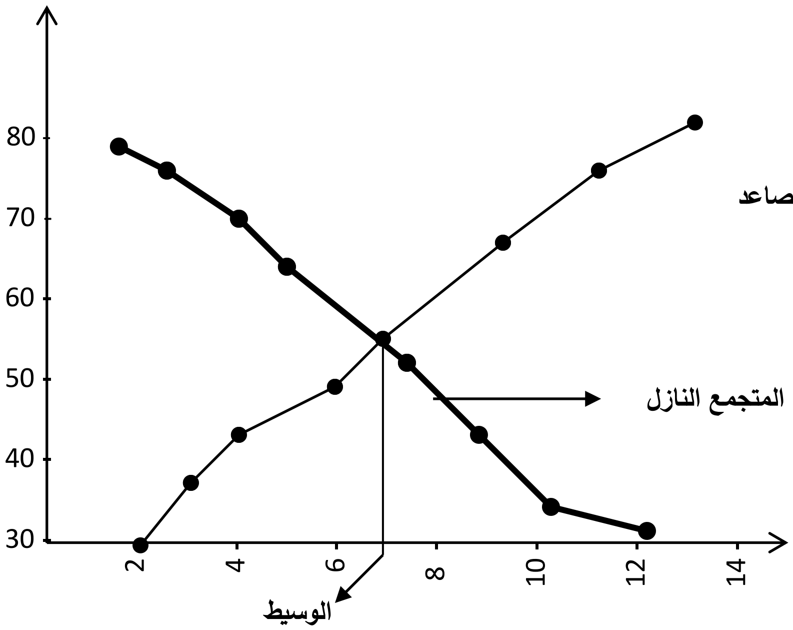
<u>**الحل**</u>: أولا نحسب كل من التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل.

الجدول رقم11: توزيع تكراري

الفئة	**Ni**	$\nearrow$ **ni**	**ni** $\swarrow$
4 – 2	4	4	75
6 – 4	9	13	71
8 – 6	12	25	62
10 – 8	16	41	50
12 – 10	18	59	34
14 – 12	10	69	16

16 – 14	6	75	6
المجموع	75		

ثانيا: نقوم برسم المنحنيين:



1.1. العرض البياني في حالة متغير كيفي

1.1. العرض الدائري: Diagramme circulaire:

ويتمثل في دائرة مقسمة إلى عدة أجزاء كل جزء يقابل زاوية مركزية تتناسب مع التكرارت المقابلة لكل خاصية من الخصائص المدروسة، ولتحقيق ذلك نضيف عمودا إلى جدول المعطيات يحتوي على الزوايا المركزية المقابلة لكل تكرار.

مثال 12: يبين الجدول التالي عدد طلبة كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير سنة 2020 مقسمين على أقسام الكلية المختلفة.

الجدول رقم12: توزيع عدد طلبة حسب أقسام الكلية

القسم	سنة أولى جدع مشترك	ع اقتصادية	ع التسيير	ع تجارية	ع مالية ومحاسبية	المجموع
عدد الطلبة	1200	1000	800	600	400	**4000**

المطلوب: عرض البيانات باستخدام القطع الدائرية؟.

الحل: **أولا**: نحسب الزاوية المركزية.

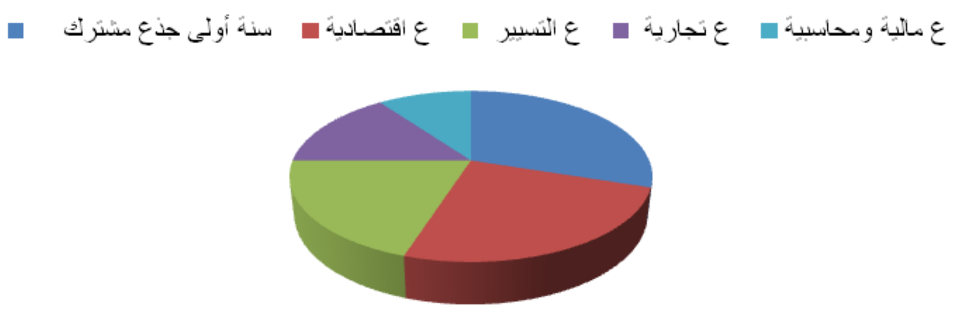
الجدول رقم12: توزيع عدد طلبة حسب أقسام الكلية

القسم	سنة أولى جدع مشترك	ع اقتصادية	ع التسيير	ع تجارية	ع مالية ومحاسبية	المجموع
عدد الطلبة	1200	1000	800	600	400	**4000**
الزاوية المركزية	°108	°90	°72	°54	°36	°360

ملاحظة: حسبت الزوايا المركزية بالطريقة التالية:

$$\frac{\text{تكرار الخاصية}}{\text{مجموع التكرارات}} \times 360°$$

الشكل رقم: دائرة بيانية توضح توزيع الطلبة حسب أقسام كلية علوم اقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بجامعة الوادي



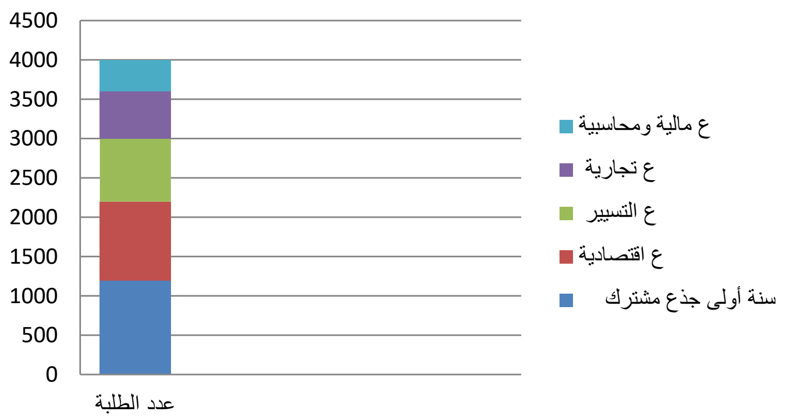
2.1. العمود المجزأ Diagrammes en Barres

وهو عبارة عن مستطيل مقسم إلى عدة أجزاء كل جزء يقابل تكرار معين للخاصية المدروسة.

هذه الطريقة تشبه طريقة الأعمدة البيانية البسيطة ولكن يتم رسم عمود يمثل القيمة الأولى .عمود بباقي قيمة المتغير وتكون بداية العمود الثاني نهاية العمود الأول للمتغير ثم يليه أو يرتفعه.

مثال 13: أعرض بيانات المثال السابق باستخدام العمود المجزأ.

الشكل رقم: عمود يجزأ عدد طلبة حسب أقسام كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بجامعة الوادي

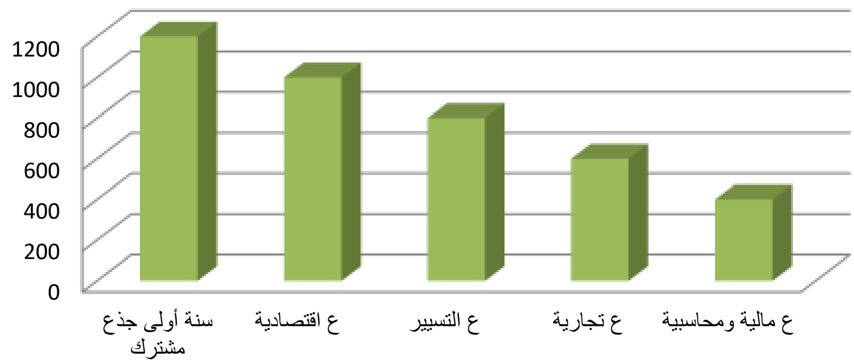


2.3. الأعمدة المستطيلة:

وهو عبارة عن مجموعة من الأعمدة المتجاوزة ذات القواعد المتساوية إلا أن ارتفاعها تتناسب مع تكرار كل خاصية، كما أن هذه الأعمدة تكون متباعدة بمسافات متساوية.

مثال 14: أعرض بيانات المثال السابق باستخدام الأعمدة المستطيلة

الشكل رقم: أعمدة مستطيلة تبين توزيع الطلبة حسب أقسام كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بجامعة الوادي



مقاييس النزعة المركزية

تمهيد:

عند التمعن في الظواهر التي حولنا والقيم التي تأخذها نلاحظ أن غالبية هذه القيم نقترب من بعضها البعض، وتتجمع حول قيمة معينة غير منظورة، فذكاء أو طول أو وزن مجموعة من الأشخاص مثلا وتتجمع حول قيمة معينة متوسطة، والقليل من الأشخاص لهم ذكاء أو طول أو وزن يبتعد كثيرا عن هذه القيمة من ناحية الصغر أو الكبر. سميت هذه الظاهرة بظاهرة النزعة المركزية والتي لها عدد من المتوسطات للتعبير عنها تختلف باختلاف الغرض الذي تستخدم فيه، وطبيعة البيانات المحسوبة منها، أهم هذه المتوسطات: المتوسط الحسابي، المتوسط الهندسي، المتوسط التوافقي، الوسيط، المنوال والتي سنتطرق لها في الصفحات القادمة.

وميزة هذه المتوسطات كقيم عددية وحيدة توفر لنا فكرة عامة عن البيانات، وتصف الظاهرة المدروسة مثل الجداول الإحصائية، إلا أنها أكثر اختصارا وأكثر فائدة، حيث تمكننا من المقارنة بين مجموعة من القيم ومجموعة أخرى، أو بين ظاهرة وأخرى.

1. المتوسط الحسابي Moyenne arithmétique

يعتبر المتوسط الحسابي من أسهل وأكثر متوسطات النزعة المركزية استخداما في الإحصاء، هو عبارة عن مجموع القيم مقسوما على عددها.

1.1. المتوسط الحسابي في حالة بيانات مفردة: فإذا كانت لدينا القيم $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n$

فإن متوسطها الحسابي يساوي

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n}$$

حيث: $\overline{X}$ = المتوسط الحسابي X_i = تمثل قيم الظاهرة n = تمثل عدد البيانات

مثال 1: إذا كانت الدرجات التي تحصل عليها الطالب في خمس مواد هي: 8، 10، 13، 14، 15.

أحسب متوسط درجات هذا الطالب؟.

الحل: $\overline{X}=\frac{\sum Xi}{n}=\frac{8+10+13+14+15}{5}=\frac{60}{5}=12$

2.1المتوسط الحسابي في حالة بيانات مكررة: إذا كانت لدينا

القيم $x_1,x_2,x_3,\dots\dots\dots\dots\dots\dots x_4$

ولها تكرارات $n_1,n_2,n_3,\dots\dots\dots\dots\dots\dots n_4$

فإن المتوسط الحساب لها يعطي بالعلاقة

$$\overline{X}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+\dots\dots\dots\dots n_nx_n}{n_1+n_2+n_3+n_4+\dots\dots\dots\dots\dots n_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}n_ix_i}{\sum n_i}$$

أي أن المتوسط الحسابي لبيانات متكررة يساوي مجموع حاصل ضرب كل قيمة في تكرارها على مجموع التكرارات وحيث: X_i = تمثل قيم الظاهرة. n_i = تكرار مل قيمة. Σn_i = مجموع التكرارات.

مثال2: في امتحان فجائي في مادة الإحصاء الوصفي تحصل طلبة فوج معين على الدرجات المبينة في الجدول التالي:

الدرجة	3	4	5	6	8	9
عدد الطلبة	4	3	6	5	4	2

المطلوب: حساب متوسط الدرجات التي تحصل عليها طلبة هذا الفوج؟.

الحل: لحساب هذا المتوسط فإننا نقوم أولا بضرب كل قيمة في تكرارها ثم نطبق العلاقة التي تحسب المتوسط الحسابي لبيانات متكررة، وسنقوم بذلك من خلال الجدول التالي:

الدرجة	3	4	5	6	8	9	$\sum$
عدد الطلبة	4	3	6	5	4	2	24
$n_i\ x_i$	12	12	30	30	32	18	134

$$\overline{X}=\frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}=\frac{134}{24}=5{,}58$$

أي أن متوسط درجات طلبة هذا الفوج الحسابي في الامتحان الفجائي يساوي 5.58.

2.3. المتوسط الحسابي في حالة توزيع تكراري: تعتمد طريقة حساب المتوسط الحسابي لبيانات مبوبة على مراكز الفئات التي يفترق أنها تمثل الفئات التي أخذت منها، ويكون المتوسط الحسابي في هذه الحالة يساوي إلى مجموع حاصل ضرب مراكز الفئات في تكرارها على مجموع التكرارات

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}}$$

حيث: x_i = تمثل مراكز الفئات. n_i = تكرار الفئات. $\sum n_i$ = مجموع التكرارات.

مثال3: في دراسة إحصائية حول مادة الحليب بالمزارع الموجودة على مستوى ولاية سوق أهراس توصلنا إلى إعداد الجدول التالي: **والمطلوب:** إيجاد متوسط إنتاج الحليب بهذه المزارع

الإنتاج باللترات	240-200	280-240	320-280	360-320
عدد المزارع	5	6	8	4

الحل:

الإنتاج باللترات	**عدد المزارع n_i**	**مراكز الفئات x_i**	**$n_i\ x_i$**
240-200	5	220	1100
280-240	6	260	1560
320-280	8	300	2400
360-320	4	240	1360
400-360	2	380	760
المجموع	**25**		**7180**

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{7180}{25} = 287.2$$

أي أن متوسط إنتاج الحليب بهذه المزارع هو أكثر بقليل من 287 لتر للمزرعة.

4.1. حساب المتوسط الحسابي بالطريقة المختصرة: عندما تكون البيانات الموجودة في الجداول المعطاة كبيرة القيم فإن استخدام الطريقة السابقة يصبح صعب، كما يزداد احتمال الوقوع في الأخطاء بذلك فإنه في مثل هذه الحالات يفضل استخدام طرقة مختصرة الهدف منها تبسيط العمليات الحسابية الطويلة حتى يسهل التعامل معها.

فإذا قمنا مثلا بطريقة قيمة ثابتة (a) من جميع القيم (جميع مراكز الفئات) فإن المتوسط الحساب يصبح

$$\boxed{\overline{X} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1 - a)}{n}}$$

إذا كانت البيانات مفردة أو إذا كانت البيانات مبوبة في جداول توزيع التكراري

$$\boxed{\overline{X} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} n_1(x_i - a)}{\sum n_i}}$$

مثال4: أحسب متوسط إنتاج مادة الحليب في المثال السابق بإتباع الطريقة المختصرة؟

الحل: نختار وسط فرضي $a=300$ وهو مركز الفئة الوسطى ونتبع الخطوات التالية:

- توجد قيم جديدة y_i = والتي تساوي مراكز الفئات ناقص الوسط الفرض.
- نضرب هذه القيم الجديدة في تكرار الفئات n_i.
- نحسب $\overline{Y}$ وهو المتوسط الحسابي لهذه القيم الجديدة.
- نحسب المتوسط الحسابي للقيم الجديدة والذي يساوي $\overline{X} = \overline{Y} + a$

الإنتاج باللترات	n_i عدد المزارع	x_i	y_i	$n_i\, x_i$
240-200	5	220	-80	-400
280-240	6	260	-40	-240
320-280	8	300	0	0
360-320	4	240	40	160
400-360	2	380	80	160
المجموع	25			-320

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_1 y_i}{\sum_{i=1}^{n} n_1} = \frac{-320}{25} = -12{,}8$$

$\overline{X}$ =300 - 12.8= 287.2 لتر

5.1.المتوسط الحسابي المرجح (الموزون) Moyenne Arithmétique pondérée

في بعض الأحيان فإن القيم المراد حساب المتوسط الحسابي لها لا تكون لها نفس الأهمية بل أهميات نسبية مختلفة تختلف باختلاف عامل الترجيح الخاص بها. في مثل هذه الحالات فإن المتوسط الحسابي البسيط يمكن الاعتماد عليه في إيجاد المتوسط الصحيح والمنطقي، بل يتطلب الأمر استخدام صيغة أخرى تسمى بصيغة المتوسط الحسابي المرجح:

$$\text{المتوسط الحسابي المرجح} = \frac{\text{مجموع حاصل ضرب مل قيمة في معاملها}}{\text{مجموع المعاملات}} = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

حيث: x_i = تمثل القيم. n_i = تمثل المعاملات.

ويستخدم المتوسط الحسابي المرجع كذلك لإيجاد المتوسط الحسابي لمجموع البيانات أو أكثر في حالة دمجهم معا في مجموعة واحدة وبالتالي فإن متوسط الحسابي المرجح لمجموعتين من البيانات y,z يساوي:

وبما أن

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i}{n+Z}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = n\overline{Z}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n\overline{Y}$$

فإن

$$\overline{X} = \frac{n\overline{Z} + Z\overline{Y}}{n+Z}$$

مثال5: الجدول التالي يبين عدد العمال ومتوسط الأجر للعامل الواحد في فروع المختلفة التي تشكل الشركة الوطنية لإنتاج أنابيب النفظ. المطلوب حساب متوسط الأجور التي توزعها هذه الشركة؟.

الفرع	**الفرع الشمالي**	**الفرع الشرقي**	**الفرع الجنوبي**
عدد العمال	130	110	80
متوسط الأجور	13000	14500	18500

الحل: إذا اعتبرنا أن متوسط الأجر في شركة هو عبارة عن مجموع متوسط الأجر في الفروع الثلاثة مقسوما على ثلاثة فإن الإجابة تكون خاطئة فالإجابة الصحيحة هي تلك التي يمكن الحصول عليها من خلال علاقة المتوسط الحسابي المرجح.

$$\overline{X} = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2 + n_3\overline{x}_3 .... + n_1\overline{x}_1}{n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_4}$$

$$\overline{X} = \frac{(130x13000) + (110x14500) + (80x18500)}{130+110+80} = \frac{1690000 + 1595000 + 1480000}{320}$$

$$\overline{X} = \frac{4765000}{320} = 14890{,}62 =$$ متوسط أجر عمال الشركة

خواص المتوسط الحسابي:

- ✓ يعتبر المتوسط الحسابي أبسط مقاييس المركزية حسابا وأكثرها استخداما.
- ✓ يأخذ المتوسط الحسابي بعين الاعتبار جميع قيم الظاهرة المدروسة.

- ✓ مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفر = $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X}) = 0$
- ✓ يتأثر المتوسط الحسابي بالقيم المتطرفة أو الشاذة.
- ✓ لا يمكن إيجاد المتوسط الحسابي من الجداول التكرارية المفتوحة من البداية أو النهاية.

2. المتوسط الهندسي: Moyenne géométrique

المتوسط الهندسي واسع الاستخدام في الحياة الاقتصادية (كما سنرى لاحقا) لأن التركيز يكون غالبا منصبا على إيجاد متوسط نسب التغير لبعض الظواهر مثل: تطور الدخول، زيادة الأجور، والنمو السكاني ... إلخ.

1.2. المتوسط الهندسي في حالة بيانات مفردة: إذا كانت لدينا القيم $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots\ldots x_n$ فإن متوسطها الهندسي يساوي الجذر النوني لحاصل ضرب هذه القيم في بعضها البعض.

$$G = \sqrt[n]{x_1.x_2x_3\ldots\ldots x_n}$$

2.2. المتوسط الهندسي في حالة بيانات مكررة وإذا كانت هذه القيم متكررة فإن:

$$G = \sqrt[N]{x_1^{n_1}.x_2^{n_2}.x_3^{n_3}\ldots\ldots x_3^{n_4}}$$

حيث $N = \Sigma ni$ (مجموع التكرارات)

3.2. المتوسط الهندسي في حالة توزيع تكراري : إذا كانت هذه القيم مبوبة في جداول توزيع تكراري فإن:

$$G = \sqrt[N]{x_1^{n_1}.x_2^{n_2}.x_3^{n_3}\ldots\ldots x_3^{n_4}}$$

حيث x_i = مراكز الفئات. $\Sigma ni = N$ (مجموع التكرارات).

مثال 6: أوجد المتوسط الهندسي للأعداد: 2، 4، 5، 6.

الحل: $G = \sqrt[4]{2\times4\times5\times6} = \sqrt[4]{240} = 3{,}94$

في حالة كون البيانات كبيرة فإنه يفضل استخدام طريقة اللوغاريتم ويكون ذلك كالتالي:

في حالة بيانات مفردة: $G = \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3.x_4\ldots.x_n}$

$$LogG = \frac{1}{N}\left[\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + ...+\log x_4\right]$$

$$\log G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\log x_1$$

وفي حالة البيانات المتكررة أو المبوبة في جداول توزيع تكرار فإن:

$$G = \sqrt[N]{x_1^{n_1}.x_2^{n_2}.x_3^{n_3}............x_n^{n_n}}$$

$$LogG = \frac{1}{N}\left[n_1\log x_1 + n_2\log x_2 + n_3\log x_3 + ...+n_n\log x_4\right]$$

$$\log G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}n_i\log x_1$$

حيث: x_i تمثل القيمة أو مركز الفئة. n_i تمثل التكرار.

مثال 7: أوجد المتوسط الهندسي للبيانات المبينة في الجدول أدناه باستخدام طريقة اللوغاريتم

القيم	2	4	5	6
التكرار	2	3	2	4

الحل:

$$LogG = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}Ni\log X_i$$

$$= \frac{1}{11}[2\log 2 + 3\log 4 + 2\log 5 + 4\log 6]$$

$$= \frac{1}{11}[(2\times 0{,}0301)+(3\times 0{,}601)+(2\times 0{,}699)+(4\times 0{,}778)]$$

$$= \frac{1}{11}[0{,}602 + 1{,}806 + 1{,}398 + 3{,}112]$$

$$= \frac{1}{11}6{,}918$$

$$\text{Log G} = 0{,}629$$

ومنه المتوسط الهندسي = G = 4.24

- **استخدام المتوسط الهندسي في الحياة الاقتصادي:**

لتباين كيفية استخدام المتوسط الهندسي في الحياة الاقتصادية نأخذ المثال التالي:

الجدول التالي يبين تطور إنتاج مؤسسة ما خلال الفترة 2017-2020 .

السنة	2017	2018	2019	2020
الإنتاج	1000	1250	1875	2625

المطلوب : إيجاد نسبة زيادة الإنتاج من سنة إلى أخرى؟

- إيجاد متوسط نسبة الزيادة خلال الفترة؟

الحل:

السنة	2017	2018	2019	2020
الإنتاج	1000	1250	1875	2625
نسبة الزيادة	-	0.25	0.50	0.40

إذا رمزنا لمتوسط نسبة الزيادة خلال الفترة بالرمز (t) و لنسبة الزيادة خلال السنوات الأولى والثانية والثالثة بالرموز (t_1)، (t_2) و (t_3) فإنه حتى يكون (t) ممثلا فعلا لمتوسط نسبة الزيادة خلال الفترة لابد من تحقق الشرط التالي: $(1+t)\,(1+t)\,(1+t) = (1+t_1)\,(1+t_2)\,(1+t_3)$.

ومنه $(1+t_1)\,(1+t_2)\,(1+t_3) = (1+t)^3$.

و نأخذ الجذر التكعيبي لطرفي المعادلة نحصل على $1+t=\sqrt[3]{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)}$

ومنه $t=\sqrt[3]{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)}-1$

وبصفة عامة إذا لدينا نسبة الزيادة لـ (n) فترة متوسط نسبة هذه الزيادة (متوسط النسب) يعطي بالعلاقة: $\mathbf{t=\sqrt[N]{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)\ldots\ldots\ldots(1+t_3)}-1}$

وبتطبيق هذه العلاقة على بيانات المثال السابق فإن: $t=\sqrt[3]{(1{,}25)(1{,}50)(1{,}40)}-1$

= 0,3795 = t سنويا37,95% =

مثال8: إذا كان عدد سكان مدينة ما في سنة 2005 يساوي 500000 نسمة وبلغ في سنة 2015، 609497 نسمة أوجد متوسط نسبة زيادة السكان خلال هذه الفترة؟.

<u>الحل</u>: - نسبة زيادة السكان خلال الفترة = [عدد السكان في سنة 2015- عدد السكان في سنة 2005]/عدد السكان في 2005 = (609497 - 500000)/ 500000 = 21.19%

ومنه يمكن إيجاد متوسط نسبة الزيادة خلال الفترة بتطبيق العلاقة السابقة

$$t = \sqrt[10]{(1{,}2119)} - 1$$

$$t = 0{,}02 = 2\%$$

<u>خواص المتوسط الهندسي</u>:

من أهم خواص المتوسط الهندسي ما يلي:

- ✓ يدخل في حساب جميع القيم ولكنه أقل تأثر بالقيم المتطرفة من المتوسط الحسابي؛
- ✓ لا يمكن حساب من الجداول التكرارية المفتوحة من البداية أو النهاية؛
- ✓ لا يمكن حسابه في حالة وجود قيمة سالبة أو معدومة؛
- ✓ يستخدم بأكثر واقعية عند وصف الظواهر النسبية؛
- ✓ قيمة المتوسط الهندسي لأي ظاهرة أصغر دائما من قيمة المتوسط الحسابي $G < \overline{X}$.

ثالثا: المتوسط التوافقي: (Moyenne Harmonique)

المتوسط التوافقي هو من المقاييس الخاصة التي تستخدم لتحديد معدلات السرعة ومتوسط الأسعار، ومتوسط الكثافة السكانية. وكمثال على ذلك نقول أن سائق قطع المسافة الفاصلة بين مدينتين على أربع مراحل متساوية، المسافة المقطوعة في كل منها 100 كم.

فإذا قطع المرحلة الأولى بسرعة 100كم/ساعة والمرحلة الثانية بسرعة 120كم/ساعة والمرحلة الثالثة بسرعة 150كم/ساعة والمرحلة الرابعة بسرعة 80كم/ساعة، أوجد متوسط سرعة هذا السائق على طول المرحلة؟.

<u>الحل</u>: إذا استخدمنا المتوسط الحسابي لتحديد متوسط السرعة لهذا السائق على طول المسافة فإننا سنجده يساوي: 112.5 كم/ساعة = $\overline{X} = \dfrac{100+120+150+80}{4}$

وهذه النتيجة غير صحيحة ومضللة بدليل أن:

الزمن الذي إستغرقه السائق في المرحلة الأولى = 1 ساعة.

الزمن الذي إستغرقه السائق في المرحلة الثانية = 6/5 ساعة.

الزمن الذي إستغرقه السائق في المرحلة الثالثة = 3/2 ساعة.

الزمن الذي إستغرقه السائق في المرحلة الرابعة = 4/5 ساعة.

ومنه الزمن الذي استغرقه السائق على طول المسافة = $1+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{45}{12}$ ساعة.

فإذا كان متوسط السرعة المتوصل إليه صحيحا فإن هذا السائق سيقطع خلال المدة $\frac{45}{12}$ ساعة المسافة 422 كم ($112.5 \times \frac{45}{12}$ ساعة) وهذا غير صحيح لأن المسافة الكلية هي 400 كم فقط.

الآن إذا قسمنا المسافة الكلية على المدة الزمنية الفعلية فإننا سنحصل على متوسط السرعة الصحيح وهو 106.67 كم/ساعة = $\frac{400}{\frac{45}{12}}=\frac{4800}{45}$

وهذا المتوسط كما سنرى لاحقا يمكن إيجاده بالمتوسط التوافقي.

تعريف: المتوسط التوافقي لمجموعة من القيم هو مقلوب المتوسط الحسابي لمقاليب هذه القيم.

فإذا كانت لدينا القيم: $x_1,x_2,x_3,x_4\ldots\ldots\ldots.x_n$.

فإن مقاليب هذه القيم هو $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3},\frac{1}{x_4},\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{x_n}$

والمتوسط الحسابي لمقاليب هذه القيم هو $\dfrac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots\ldots..\frac{1}{x_n}}{n}$

ومقلوب المتوسط الحسابي لمقاليب هذه القيم هو المتوسط التوافقي. $H=\dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots\ldots..\frac{1}{x_n}}$

وباختصار $$\boxed{H=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}}$$

أما إذا كانت البيانات متكررة أو مبوبة في جداول توزيع تكراري فإن: $$\boxed{H=\frac{\sum_{i=1}^{n}N_i}{\sum_{i=1}^{n}\frac{n_i}{x_i}}}$$

حيث: n_i تمثل التكرار.

x_i تمثل القيم أو مراكز الفئات.

فإذا طبقنا علاقة المتوسط التوافقي على بيانات المثال السابق فإننا سنجد

متوسط السرعة
$$H = \frac{400}{\frac{100}{100}+\frac{100}{120}+\frac{100}{150}+\frac{100}{80}} = \frac{400}{\frac{1200+1000+800+1500}{1200}}$$

$$H = \frac{48000}{4500} = \text{ كم/ساعة } 106.67$$

فإذا ضربنا هذه السرعة في زمن المرحلة $\frac{45}{12}$ ساعة فإننا نحصل على 400 كم هي المسافة المقطوعة فعلا.

مثال9: أحسب المتوسطات الثلاث (الحسابي والهندسي والتوافقي) للبيانات التالية: 2، 4، 6، 8.

الحل: – المتوسط الحسابي $\overline{X} = \frac{2+4+6+8}{4} = \frac{20}{4} = 5$

– المتوسط الهندسي $G = \sqrt[4]{2\times4\times6\times8} = \sqrt[4]{384} = 4{,}42$

– المتوسط التوافقي $H = \frac{4}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = \frac{4}{\frac{24+12+8+6}{48}} = \frac{192}{50} = 3{,}84$

أي أن $\overline{X} > G > H$ وهذه العلاقة صحيحة في كل الحالات.

خواص المتوسط التوافقي:

- ✓ يأخذ بعين الاعتبار جميع القيم وتأثره بالقيم الشاذة أقل من تأثر المتوسط الحسابي؛
- ✓ لا يمكن حسابه في حالة وجود بيانات معدومة؛
- ✓ يعطي نتائج أكثر واقعية في حالة حساب متوسطات الأسعار والسرعة}
- ✓ قيمته دائما أقل من قيمة المتوسط الهندسي.مما سبق فإن $\overline{\mathbf{X}} > \mathbf{G} > \mathbf{H}$

مثال10: أوجد المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي والمتوسط التوافقي للبيانات المبوبة في الجدول الإحصائي التالي ثم قارن بينها؟.

الفئة	3-1	5-3	7-5	9-7	11-9	المجموع
التكرار	2	4	6	4	2	18

الحل:

الفئة	التكرار	X_i	$N_i\,x_i$
3-1	2	2	4
5-3	4	4	16
7-5	6	6	36
9-7	4	8	32
11-9	2	10	20
المجموع	18		108

المتوسط الحسابي= $$\overline{X}=\frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}=\frac{108}{18}=6$$

المتوسط الهندسي: $$LogG=\frac{1}{N}\left[\sum N_i LogX_i\right]$$

$$=\frac{1}{18}\left[2Log2+4Log4+6Log6+4Log8+2Log10\right]$$

$$=\frac{1}{18}\left[0,602+2,408+4,669+3,612+2\right]$$

$$=\frac{1}{18}\times 13,291$$

$$LogG=0,7384$$

ومنه G= 5,48

المتوسط التوافقي $$H=\frac{\sum N_i}{\sum \frac{N_i}{X_i}}=\frac{18}{\frac{2}{2}+\frac{4}{4}+\frac{6}{6}+\frac{4}{8}+\frac{2}{10}}$$

$$H=\frac{18}{1+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}=\frac{180}{10+10+10+5+2}=\frac{180}{37}=4{,}86$$

ويلاحظ بوضوح: $\mathbf{\overline{X}>G>H}$

2. الوسيط Mediane

تبين لنا عند دراستنا للمتوسط الحسابي أن هذا المتوسط يعطي نتيجة صحيحة ومنطقية عندما تكون البيانات التي حسب منها متجانسة ومتقاربة، أما إذا كانت تحتوي على قيم متطرفة في الصغر أو الكبر فإن النتيجة التي يعطيها تكون غير واقعية، في مثل هذه الحالات فقد وجد متوسط آخر سمي بالوسيط الذي هو أكثر واقعية ودلالة وصحة للحصول على فكرة عامة عن حالة البيانات التي بها قيم متطرفة.

2.1. الوسيط في حالة بيانات مفردة: يمثل الوسيط هو القيمة التي تقسم مجموع البيانات إلى قسمين بحيث يكون نصف عدد البيانات أكبر منه ونصف عدد البيانات أصغر منه ويرمز له بالرمز: Me.

مثال 11: أوجد الوسيط للبيانات التالية: 8، 6، 8، 10، 12، 15، 9؟

الحل: لإيجاد الوسيط نقوم بالتالي:

أ) نرتب البيانات تصاعديا أو تنازليا: 6، 8، 8، 9، 10، 12، 15.

ب) نبحث عن الوسيط لهذه البيانات، وهناك حالتين:

1- إذا كان عدد البيانات فردي فإن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$

2 – إذا كان عدد البيانات زوجي فإن الوسيط هو متوسط القيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$.

وفي مثالنا فإن عدد البيانات المعطاة هو 7 أي فردي وبالتالي فإن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{7+1}{8}=4$ وهو **9**.

ويلاحظ جليا أن عدد البيانات أقل من 9 يساوي عدد البيانات أكبر من 9.

مثال12: البيانات التالية تمثل الدرجات التي تحصل عليها 10 طلبة في امتحان معين:

16، 17، 17، 15، 14، 16، 15، 13، 4، 3.

المطلوب: إيجاد وسيط الدرجات؟

الحل: نرتب أولا هذه البيانات ترتيبا تصاعديا: 3، 4، 13، 14، 15، 15، 16، 17، 17.

بما أن عدد البيانات زوجي فإن الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$ وهما 15 و15 وبالتالي فإن الوسيط هو =15= Me.

2.2. الوسيط في حالة بيانات متكررة: إذا كانت البيانات المراد حساب الوسيط لها متكررة (لها تكرارات) فإن الوسيط يوجد بإتباع الخطوات التالية:

- نحسب التكرار المتجمع الصاعد لقيم الظاهرة.
- نحدد ترتيب الوسيط $\frac{N}{2}$ (حيث N = مجموع التكرارات).
- نبحث عن القيمة التي تكرارها المتجمع الصاعد أكبر من $\frac{N}{2}$ مباشرة وهي القيمة التي تمثل الوسيط.

مثال13: الجدول التالي يمثل توزيع الطلبة فوج معين حسب الدرجات التي تحصلوا عليها في الفرض الفجائي في مادة الإحصاء. المطلوب إيجاد الوسيط لهذه البيانات؟.

الدرجة	4	5	6	7	8	9	المجموع
عدد الطلبة	2	4	8	6	5	4	**29**

1) نحسب التكرار المتجمع الصاعد للبيانات المعطاة:

الدرجة X_i	4	5	6	7	8	9	المجموع
عدد الطلبة N_i	2	4	8	6	5	4	**29**
التكرار المتجمع الصاعد	2	6	14	20	25	29	/

2) نحسب ترتيب الوسيط = $\frac{N}{2}$ = 14.5.

3) القيمة التي تكرارها المتجمع الصاعد أكبر مباشرة من $\frac{N}{2}$ هي 7 وبالتالي فإن الوسيط = 7.

2.3. الوسيط لبيانات مبوبة في جداول توزيع تكراري: لتحديد الوسيط لبيانات مبوبة في جداول توزيع تكراري فإننا نقوم بالتالي:

1) نحسب التكرار المتجمع الصاعد أو النازل.

2) نحدد ترتيب الوسيط وهو عبارة عن نصف مجموع التكرارات $\frac{N}{2}$.

3) نحدد الفئة الوسيطية أي الفئة التي يقع فيها الوسيط، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي ترتيب الوسيط أو أكبر منه مباشرة.

4) نحدد ونحسب الوسيط بتطبيق العلاقة الإحصائية للوسيط.

$$Me = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - N_0}{n_e} . K$$

n_e = تكرار الفئة الوسيطية، K = طول الفئة، L_1=الحد الأدنى للفئة الوسيطية

مثال14: يبين التوزيع التكراري التالي توزيع 50 طالب حسب الدرجة المتحصل عليها في امتحان إحصاء.

المطلوب: أحسب قيمة الوسيط لهذه البيانات؟.

فئة الدرجات	4-2	6-4	8-6	10-8	12-10	14-12	16-14	المجموع
عدد الطلبة	2	6	8	10	14	6	4	**50**

الحل:

أ) نحسب التكرار المتجمع الصاعد لبيانات التوزيع كما هو مبين في الجدول الآتي:.

فئة الدرجات	4-2	6-4	8-6	10-8	12-10	14-12	16-14	المجموع
عدد الطلبة	2	6	8	10	14	6	4	**50**
التكرار المتجمع الصاعد	2	8	16	26	40	46	50	/

ب) نحدد ترتيب الوسيط = $\frac{50}{2} = 25$ وعليه نحدد الفئة الوسيطية أي الفئة التي تكرارها المتجمع يساوي ترتيب الوسيط أو الأكبر منه مباشرة، (أي الفئة التي تكرارها المتجمع الصاعد ≤ 25 وهي هنا الفئة [8-10]).

ج) نحسب الآن قيمة الوسيط باستخدام العلاقة السابقة

$$M_e = 8 + \frac{25-22}{15} 2 = 8 + 0,4$$

$$\mathbf{M_e = 8,4}$$

خواص الوسيط:

يتصف الوسيط بعدة خصائص أهمها:

- ✓ لا يتأثر بالقيم المتطرفة وبالتالي فإنه يعتبر أصلح المقاييس عن وجود مثل هذه القيم؛
- ✓ يمكن إيجاد الوسيط من الرسم من خلال إسقاط نقطة تقاطع منحى التكرار المجمع الصاعد ومنحى التكرار المجمع النازل على محور المتغير؛
- ✓ يمكن استخدامه في حالة البيانات النوعية؛
- ✓ يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

3. أشباه الوسيط

الوسيط هو القيمة التي تقسم مجموع البيانات إلى قسمين متساويين، بحيث نصف عدد البيانات أقل منه ونصف البيانات أكبر منه، وما دام يمكن تقسيم بيانات أي ظاهرة إلى عدة أقسام متساوية وليس إلى قسمين فقط فإنه يمكن التعامل معه القيم التي تقسم هذه البيانات بنفس طريقة التعامل مع الوسيط.

- فإذا تم تقسيم البيانات إلى أربعة أقسام فإن المقياس يسمى بالربيع.
- وإذا تم تقسيم البيانات إلى عشرة أقسام فإن المقياس يسمى بالعشير.
- أما إذا تم تقسيم البيانات إلى 100 قسم فإن المقياس يسمى بالمئين.

1.3. الربيعات Les quartils: هي القيم التي تقسم مجموع البيانات إلى أربع أجزاء متساوية فمثلا:

1.1.3. الربيع الأول Q1: ويسمى كذلك بالربيع الأدنى وهو القيمة التي تقسم مجموع البيانات إلى قسمين بحيث ربع عدد البيانات أقل منه وثلاثة أرباع البيانات أكبر منه وترتيب الربيع الأول هو $\frac{N}{4}$ ويحسب كالتالي:

$$Q_1 = L_1 + \frac{\frac{N}{4} - N_0}{n_{Q1}}.K$$

1.2.3. الربيع الثالث Q3: ويسمى كذلك الربيع الأعلى وهو القيمة التي تقسم مجموع البيانات إلى قسمين بحيث ثلاثة أرباع عدد البيانات أقل منه وربع عدد البيانات أكبر منه وترتيب الربيع الثالث هو $\frac{3N}{4}$. ويحسب كالتالي:

$$Q_3 = L_1 + \frac{\frac{3N}{4} - N_0}{nQ_3}.K$$

وواضح أن الربيع الثاني هو نفسه الوسيط

$$Q_2 = L_1 + \frac{\frac{2N}{4} - N_0}{n_e}.K = M_e$$

3.2. العشريات Les Diciles:

العشير الأول D_1: هو القيمة التي تقسم مجموع عدد البيانات إلى قسمين بحيث عشر عدد البيانات اقل منه وتسعة أعشار عدد البيانات أكبر منه وترتيبه هو $\frac{N}{10}$ ونحسب بالتالي:

$$D_1 = L_1 + \frac{\frac{N}{10} - N_0}{n_{d3}}.K$$

3.3. المئينات: Les centiles

: إذا قسمت البيانات إلى مائة قسم متساوي فإن نقاط التقسيم هذه تسمى المئينات. **فالمئين الأول C_1** هو القيمة التي يسبقها 1% من البيانات ويليها 99% من البيانات ويحسب كالتالي:

$$C_1 = L_1 + \frac{\frac{N}{100} - N_0}{n_{C1}}.K$$

والمئين العشرين C_{20} يحسب كالتالي:

$$C_{20} = L_1 + \frac{\frac{20N}{100} - N_0}{n_{C20}}.K$$

مثال15: أحسب الربيع الأول و العشير الثالث والمئين الستين للبيانات التالية التي توضح درجات 50 طالب في مادة ما؟

الدرجة	4-2	6-4	8-6	10-8	12-10	14-12	16-14	المجموع
عدد الطلبة	4	8	10	15	6	4	3	50

الحل:

الدرجة	4-2	6-4	8-6	10-8	12-10	14-12	16-14	المجموع
عدد الطلبة	4	8	10	15	6	4	3	50
	4	12	22	37	43	47	50	/

$$Q_1 = L_1 + \frac{\frac{N}{4} - N_0}{n_{Q1}}.K = 6 + \frac{12.5-12}{10} \times 2 = 6,1$$

$$D_3 = L_1 + \frac{\frac{3N}{10} - N_0}{n_{D3}}.K = 6 + \frac{15-12}{10} \times 2 = 6,6$$

$$C_{60} = L_1 + \frac{\frac{60N}{100} - N_0}{n_{C60}}.K = 8 + \frac{30-22}{15} \times 2 = 9,067$$

4.المنوال Mode

يمثل المنوال هو القيمة الأكثر شيوعا أو تكرار في مجموعة القيم؛ والمنوال قد يكون وحيد القيمة كما قد يكون هناك أكثر من منوال لنفس التوزيع، وسنرمز له بالرمز **Mo**.

مثال16: الجدول التالي يبين إنتاج مصنع للأحذية من المقاسات المختلفة؟ أوجد المنوال؟

المقاس	36	37	38	39	40	41	42
عدد الأزواج	300	800	500	300	200	100	10

الحل: المنوال هنا هو المقاس 37.

مثال17: البيانات التالية تمثل التقديرات التي تحصل عليها 10 طلاب في مادة الإحصاء. ممتاز، جيد، جيد جدا، جيد، متوسط،، فوق المتوسط، جيد، ضعيف، جيد جدا، جيد

المطلوب: إيجاد المنوال

الحل: المنوال هنا هو جيد.

- **المنوال لبيانات مبوبة في جداول توزيع تكراري:**

لإيجاد المنوال من الجداول التوزيع التكراري نبحث عن الفئة المنوالية وهي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار. وهناك أكثر من طريقة لحساب المنوال:

- يمكن اعتبار مركز الفئة المنوالية كمنوال على وجه التقريب.

- يمكن حساب المنوال بالاعتماد على الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والفئتين التي قبلها والتي بعدها طريقة بيرسون ويكون ذلك على النحو التالي:

إذا رمزنا للفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي قبلها بالرمز (d_1) وللفرق بين تكرار الفئة المنوالية التي بعدها بالرمز (d_2) ولطول الفئة بالرمز (K) ولحدها الأدنى بالرمز (L_1) فنحصل على العلاقة التالية:

$$M_0 = L_1 + \frac{d_1}{d_1 + d_2}.K$$ [*]

يمكن كذلك إيجاد المنوال من الرسم، وذلك من خلال رسم المدرج التكراري للفئة المنوالية وللفئتين التي قبلها والتي بعدها. نقوم بعد ذلك بإيصال نهاية المستطيل للفئة المنوالية من الناحية اليسرى بنهاية المستطيل للفئة التي بعدها من الناحية اليسرى. كذلك نهاية المستطيل للفئة المنوالية من الجهة اليمنى بنهاية المستطيل للفئة التي قبلها من الجهة اليمنى.

ومن نقطة التقاطع المستقيمين ننزل عمودا على المحور الأفقي فتكون نقطة تقاطع هذا العمود المحور مع المحور الأفقي هي قيمة المنوال.

مثال18: الجدول التالي يبين توزيع عمال مؤسسة ما حسب الأجور بآلاف الدينارات الموزعة في الجدول التالي:

الأجور	15-10	20-15	25-20	30-25	35-30	40-35	**المجموع**
عدد العمال	10	15	20	15	10	5	75

المطلوب:

1) تحديد قيمة المنوال؟

2) قارن بين قيمة المنوال والمتوسط الحسابي والوسيط؟.

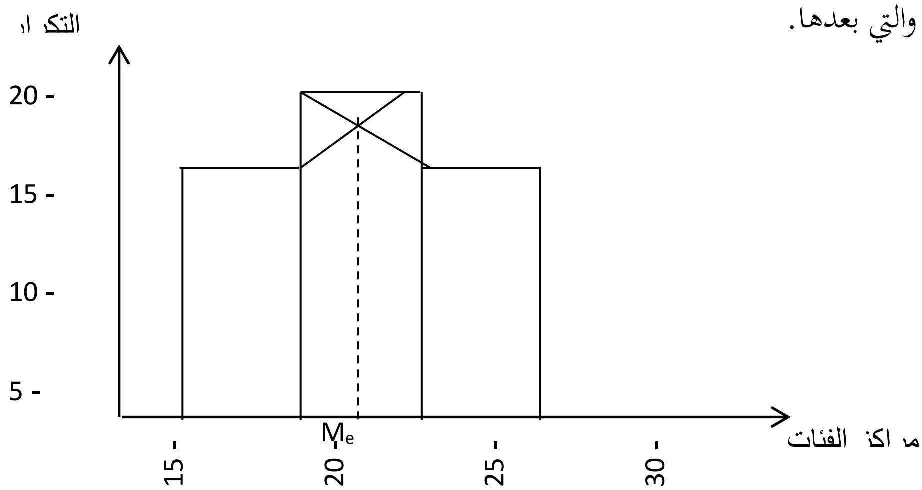
[*] ملاحظة: توجد طريقة حسابية أخرى لإيجاد المنوال تسمى بطريقة الرافعة ولكنها أقل دقة من طريقة بيرسون.

الحل:

الأجر بالآلاف	عدد العمال	X_i	n_ix_i	n_i ↗
15–10	10	12.5	125	10
20–15	15	17.5	262.5	25
25–20	20	22.5	450	45
30–25	15	27.5	412.5	60
35–30	10	32.5	325	70
40–35	5	37.5	187.5	75
المجموع	**75**		**1762.5**	

1) الفئة المنوالية هي الفئة [20–25[وبالتالي فإنه يمكن اعتبار مركز هذه الفئة (22.5) كمنوال تقريبي.

نحدد المنوال الآن بالرسم وذلك من خلال رسم المستطيلات التي تمثل كل من الفئة المنوالية والفئتين التي قبلها والتي بعدها.



– نحسب المنوال من خلال العلاقة المتوصل إليها.

$$M_0 = L_1 + \frac{d_1}{d_1 + d_2}.K = 20 + \frac{5}{5+5}.5$$

$$M_0 = 22,5$$

2) لمقارنة بين $\overline{X}$ M_1, M_e, نحسب كل من المتوسط الحسابي والوسيط

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{1762{,}5}{75} = 23{,}5$$

$$M_e = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - N_0}{n_2}.K = 20 + \frac{37{,}5 - 25}{20}.5 = 32{,}125$$

حيث أن الفئة الوسيطية هي نفسها الفئة المنوالية

نلاحظ من النتائج السابق أن $\overline{X} > M_e > M_0$

خواص المنوال:

- ✓ لا يأخذ بعين الاعتبار جميع البيانات المعطاة وبالتالي فهو لا يتأثر بالقيم المتطرفة؛
- ✓ يمكن حسابه بيانيا من خلال المدرج التكراري؛
- ✓ يمكن أن يوجد أكثر من منوال لتوزيع واحد؛
- ✓ يمكن حساب من الجداول الإحصائية المفتوحة؛

يعتبر أفضل المتوسطات لوصف الظواهر النوعية.

مقاييس التشتت

تمهيد:

إن استعمال مقاييس النزعة المركزية بمفردها في وصف مجموعة من الدرجات المأخوذة على ظاهرة ما يعجز عن إعطاء وصف كامل وصورة تامة عن تلك الدرجات،. يجعل من الضرورة استخدام مقاييس أخرى تكمل المقاييس الأولى وتتمثل في مقاييس التشتت باعتبارها عن مقاييس إحصائية هدفها قياس مدى تباعد البيانات عن بعضها البعض، وتكمن أهميتها في كون أنه لا يمكن أن نتصور مثلا تساوي الإنتاج في جميع المؤسسات الصناعية أو تساوي مستوى الخدمات في جميع المصلحات الخدماتية أو تساوي جميع أطوال الأشخاص...إلخ وبالتالي فإن استخدام قيمة واحدة لوصف التوزيع التكراري قد تكون مضللة أحيانا.

تعريف التشتت.

تشتت بيانات ظاهرة ما يقصد به درجة أو مقدار التفاوت أو الاختلاف بين مفردات هذه الظاهرة، وتعتبر بيانات الظاهرة متجانسة عندما تكون قيمتها قريبة من بعضها البعض ونقول في هذه الحالة أنها غير مشتتة. أما إذا كانت بيانات الظاهرة متباعدة وغير متجانسة فنقول أن مفردات الظاهرة مشتتة وغير مركزة. ويقاس تشتت البيانات بعدة مقاييس منها: المدي، التباين، الانحراف المعياري

1. المدى (المطلق)

1.1. المدى في حالة بيانات مفردة: المدى لمجموعة من البيانات هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لها ويرمز له بالرمز .R

المدى= أكبر قيمة – أصغر قيمة.

2.1.المدى في حالة توزيع تكراري: أما المدى للتوزيعات التكرارية فيحسب بعدة طرق منها: المدى = مركز الفئة الأخيرة – مركز الفئة الأولى

المدى = الحد الأعلى لفئة الأخيرة – الحد الأدنى للفئة الأولى

مثال1: أوجد المدى للبيانات التالية: 12،18،22،28،30.

الحل: المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة = 30–12=22.

مثال2: أوجد المدى للبيانات التالية 65،20،17، –04،18،19،4.

الحل: المدى = 65 –(–4) = 69.

نلاحظ المدى في هذا المثال قد تأثر بشكل كبير جدا بالقيم المتطرقة، إذ نلاحظ أن معظم البيانات متقاربة باستثناء القيمة 65 والقيمة (–4)، فإذا استبعدنا هذه القيم المتطرفة فإن المدى يصبح .R = 20–14=6

$$R = X_{max} - X_{min}$$

وبسبب هذا العيب فإن المدى كمقياس للتشتت لا يستخدم إلا عندما نرغب في مقياس تقريبي وسريع لتشتت البيانات دون الاهتمام بالدقة في المقياس، أو عندما يكون للبيانات المتطرفة أهمية خاصة كتوزيعات درجات الحرارة على سبيل المثال، حيث تعلن درجات الحرارة اليومية بحدها الأقصى وحدها الأدنى خلال اليوم، كما يشيع استخدام هذا المقياس في حالات مراقبة جودة الإنتاج أو متابعة المبيعات التي يحققها رجال البيع لمؤسسة ما.

أما إذا أردنا أن نقلل من أثر القيم المتطرفة فإننا نقوم باستبعادها ويمكن أن يتم ذلك باستخدام الطرق التالية:

* المدى الربيعي = الربيع الثالث – الربيع الأول.

* المدى العشري = العشر التاسع – العشر الأول.

* المدى المئيني = المئين 99 – المئين الأول.

خواص المدى:

✓ يتصف المدى بسهولة حسابه؛

✓ يعتمد في حساب على قيمتين فقط هما القيمة الكبرى والقيمة الصغرى؛

- ✓ بسبب الخاصية الثانية فإن المدى شديد التأثر بالقيم المتطرفة.

2. الانحراف المتوسط (L'écart moyen)

لأن مقاييس التشتت هي مقاييس لقوة تجمع البيانات حول بعضها، وحيث أن التجمع يكون حول القيم المتوسطة، فإنه إذا كان مقدار الاختلاف بين القيم ومتوسطها كبيرا دل ذلك على أن التشتت كبير والعكس صحيح.

وحيث أن مجموع الاختلافات (الانحرافات) عن المتوسط يساوي صفرا فإنه لو حسبنا القيم المطلقة لمقدار الاختلاف عن المتوسط يكون متوسط هذه الاختلافات مقياسا مناسبا لمقدار التشتت، يسمى هذا المقياس بالانحراف المتوسط.

.2.1الانحراف المتوسط في حالة بيانات مفردة: ويعرف الانحراف المتوسط بأنه المتوسط الحسابي للقيم المطلقة لانحرافات القيم عن متوسطها الحسابي، وسوف نرمز للانحراف المتوسط في دراستنا بالرمز E_x وعليه: إذا كانت لدينا القيم التالية: $X_1 , X_2 , X_3 , X_4 .... X_n$ فإن الانحراف المتوسط لها هو:

$$E_X = \frac{\left|X_1 - \overline{X}\right| + \left|X_2 - \overline{X}\right| + \left|X_3 - \overline{X}\right| + ... + \left|X_n - \overline{X}\right|}{n}$$

أو

$$E_X = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|X_i - \overline{X}\right|}{n}$$

الانحراف المتوسط في حالة بيانات مكررة: أما إذا كانت البيانات مكررة أو مبوبة في جداول توزيع تكرار فإن الانحراف المتوسط لها يعطي العلاقة:

$$E_X = \frac{\sum_{i=1}^{n} ni\left|X_i - \overline{X}\right|}{\sum_{i=1}^{n} ni}$$

مثال3: أوجد الانحراف المتوسط للبيانات التالية: 2،4،5،6،8؟

الحل:

X_i	$\left\|X_I - \overline{X}\right\|$
2	3
4	1
5	0
6	1
8	3
$\sum$	**8**

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i}{n} = \frac{25}{5} = 5$$

$$E_x = \frac{\sum\left|X_i - \overline{X}\right|}{n} = \frac{8}{5} = 1.6$$

مثال4: أوجد تشتت البيانات المبوبة في جدول التوزيع التكراري الآتي باستخدام الانحراف المتوسط؟

الفئة	2-0	4-2	6-4	8-6	المجموع
التكرار	2	3	4	3	12

الحل:

الفئة	التكرار	X_i	n_iX_i	$\lvert X_I - \overline{X}\rvert$	$n_i\lvert X_i - \overline{X}\rvert$
0-2	2	1	2	3.33	6.66
4-2	3	3	9	1.33	4
6-4	4	5	20	0.67	2.68
8-6	3	7	21	2.67	8.01
المجموع	12		52		21.35

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i X_i}{\sum n_i} = \frac{25}{12} = 4.33$$

$$E_x = \frac{\sum n_i \lvert X_i - \overline{X}\rvert}{\sum n_i} = \frac{21.35}{12} = 1.78$$

ويعتبر الانحراف المتوسط أفضل من سابقه (المدى) لأنه أقل تأثر بالقيم المتطرفة غير أنه لا يستعمل بشكل واسع بسبب اعتماده على القيمة المطلقة لانحرافات القيم عن متوسطها الحسابي.

خواص الانحراف المتوسط:

- ✓ يعتمد في حسابه على جميع القيم وليس على القيمة الكبرى والصغرى فقط؛
- ✓ لا يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة؛
- ✓ يتأثر بالقيم المتطرفة، لأن انحرافها عن المتوسط الحسابي يكون كبيرا.

3. التباين والانحراف المعياري La variance et l'écart type:

3.1. التباين La variance:

وهو عبارة عن المتوسط الحسابي لمربعات الفروق بين قيم المتغير الإحصائي ومتوسطها الحسابي، ونستخدم مربعات الفروق هنا تفاديا لاستخدام القيم المطلقة كما هو الشأن في الانحراف المتوسط.

3.1.1. التباين في حالة بيانات مفردة: فإذا كانت لدينا البيانات التالية:

$X_1, X_2, X_3, X_4 \ldots\ldots X_n$ فإن التباين لهذه البيانات يعطي بالعلاقة

$$V_X = \frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+(X_3-\overline{X})^2+\ldots\ldots+(X_n-\overline{X})^2}{n}$$

أما في حالة بيانات مكررة

$$V_X = \frac{\sum_{i=1}^{n} ni(X_1-\overline{X})^2}{\sum ni}$$

مثال5: أوجد التباين للبيانات التالية: 3،7،6،1،11،5،6،9.

الحل:

$(X_i-\overline{X})^2$	$(X_i-\overline{X})$	X_i
9	-3	3
1	1	7
0	0	6
25	-5	1
25	5	11
1	-1	5
0	0	6
9	3	9
70		**48**

المتوسط الحسابي:

$$\overline{X} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{48}{8} = 6$$

التباين:

$$V_x = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n} = \frac{70}{8} = 8.75$$

في بعض الأحيان عندما يكون المتوسط الحسابي للبيانات عبارة عن كسر، فإن عملية حساب التباين تكون مضنية وعرضة للأخطاء الحسابية لذلك فإنه تم تطوير طريقة مختصرة لحساب التباين.

طريقة مختصرة لحساب التباين:

انطلاقا من العلاقة المتوصل إليها سابقا:

$$V_x = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n}$$

يمكن كتابة

$$V_x = \frac{\sum (X_i^2 - 2\overline{X}X_i + \overline{X}^2)}{n}$$

$$V_X = \frac{\sum X_i^2}{n} - 2\overline{X}\frac{\sum X_i}{n} + \frac{n\overline{X}^2}{n}$$

$$V_X = \frac{\sum X_i^2}{n} - 2\overline{X}\,\overline{X} + \overline{X}^2$$

$$V_x = \frac{\sum X_i^2}{n} - 2\overline{X}^2 + \overline{X}^2$$

ومنه

$$\boxed{V_x = \frac{\sum X_i^2}{\sum ni} - \overline{X}^2}$$ (*)

3.2.1. التباين في حالة بيانات توزيع تكراري

أما في حالة البيانات المبوبة فإن العلاقة تصبح

$$\boxed{V_x = \frac{\sum n_i X_i^2}{\sum hi} - \overline{X}^2}$$

(*) يفضل العلاقة المختصرة لسهولة الحسابات ولأنها تتعامل مع القيم الأصلية بدلا من انحرافاتها عن المتوسط الحسابي.

3.2 الانحراف المعياري:

ويعتبر الانحراف المعياري من أهم المقاييس الإحصائية للتشتت، وهو أكثر استخداما في النظريات والقوانين الإحصائية، لأنه يعطي فكرة سليمة ومنطقية عن ظاهرة التشتت، ويعرف الانحراف المعياري بأنه الجذر التربيعي لمتوسط مجموع مربع انحراف القيم عن متوسطها، أي أنه الجذر التربيعي للتباين. سوف نرمز للانحراف المعياري في دراستنا بالرمز (S_X).

3.2.1. الانحراف المعياري لبيانات مفردة

$$Sx = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n}}$$

3.2.2. الانحراف المعياري لبيانات متكررة أو مبوبة

$$Sx = \sqrt{\frac{\sum hi(X_i - \overline{X})^2}{\sum hi}}$$

أما الصيغة المختصرة للانحراف المعياري فتعطى بالعلاقات التالية: الانحراف المعياري لبيانات مفردة

$$Sx = \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n} - \overline{X}^2}$$

الانحراف المعياري لبيانات متكررة أو مبوبة

$$Sx = \sqrt{\frac{\sum hiX_i^2}{\sum hi} - \overline{X}^2}$$

مثال6: أوجد التباين والانحراف المعياري بالصيغة الأصلية ثم بالصيغة المختصرة للبيانات المبوبة في الجدول الإحصائي التالي:

الفئة	8-4	13-9	18-14	23-19	28-24	المجموع
التكرار	3	4	6	2	4	19

الحل:

الفئة	التكرار	X_i	n_iX_i	$(X_i-\overline{X})$	$N_i(X_i-\overline{X})$	$N_i(X_i-\overline{X})^2$	X_i^2	$n_iX_i^2$
8-4	3	6	18	-10	-30	300	36	108
13-9	4	11	44	-5	-20	100	121	484
18-14	6	16	96	0	0	0	256	1536
23-19	2	21	42	5	10	50	441	882
28-24	4	26	104	10	40	400	676	2704
المجموع	**19**		**304**			**850**		**5714**

$$\overline{X}=\frac{\sum h_iX_i}{\sum h_i}=\frac{304}{19}=16$$

التباين بالصيغة الأصلية

$$\overline{X}=\frac{\sum n_i(X_i-\overline{X})^2}{\sum n_i}=\frac{850}{19}=44.74$$

الانحراف المعياري بالصيغة الأصلية

$$S_x=\sqrt{\frac{\sum n_i(X_i-\overline{X})^2}{\sum X_i}}=\sqrt{44.73}=6.69$$

التباين بالصيغة المختصرة

$$V_x=\frac{\sum n_iX_i^2}{\sum n_i}-\overline{X}^2$$

$$=\frac{5714}{19}-(16)^2=300.74-256=44.74$$

الانحراف المعياري بالصيغة المختصرة

$$S_x=\sqrt{\frac{\sum h_iX_i^2}{\sum h_i}-\overline{X}^2}$$

$$S_x=\sqrt{\frac{5714}{19}-256}=\sqrt{44.73}=6.69$$

خصائص الانحراف المعياري:

1. إذا كان الانحراف المعيار للقيم $_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ هو S_x فإنه إذا أضيفت أو طرحت قيمة ثابتة (a) إلى أو من جميع القيم فإن الانحراف المعياري لا يتغير
2. إذا كان الانحراف المعيار للقيم $_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ هو S_x فإنه إذا ضربت كل قيمة بالمقدار a (قسمت كل قيمة على المقدار a) فإن الانحراف المعياري يتأثر بالمقدار نفسه

3 – بالنسبة للتوزيع الطبيعي فإن:

* 68.27% من البيانات تقع في المجال $\overline{X} \pm Sx$

* 95.45% من البيانات تقع في المجال $\overline{X} \pm 2Sx$

* 99.73% من البيانات تقع في المجال $\overline{X} \pm 3Sx$

4 – يأخذ الانحراف المعياري نفس وحدة القياس للمتغير الأصلي (كلغ، متر، لتر ....) لذلك لا يمكن استخدامها كأساس للمقارنة بين تشتت توزيعين لهما وحدات قياس مختلفة.

5 – بما أن الانحراف المعياري يتأثر بالمتوسط الحسابي لبيانات الظاهرة فإنه لا يمكن استخدامه للمقارنة بين تشتت بيانات توزيعين لهما متوسط حسابي مختلف ولو كان هذين التوزيعين من نفس النوعية

6 – لا يمكن إيجاده بالنسبة للتوزيعات التكرارية المفتوحة من البداية أو النهاية.

7 – إذا كان لدينا مجموعة كلية متكونة من مجموعتين جزئتين أو أكثر فإنه يمكن حساب الانحراف المعياري لها من خلال العلاقة التالي:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N}\left[n_1 SX_1 + h_2 SX_2\right] + \frac{1}{N}\left[h_1(\overline{X}_1 - \overline{X})^2 + h_2(\overline{X}_2 - \overline{X})^2\right]}$$

4. معامل الاختلاف Coefficient de variation:

رأينا سابقا أن الانحراف المعياري هو مقياس واقعي ومؤشر صحيح عن مقدار التشتت غير أن الخاصيتين 4و5 السابقتين تبينان أنه إذا استخدمنا هذا المقياس للمقارنة بين تشتت ظاهرتين أو أكثر فإن المقارنة تكون واقعية وواقعية فقط إذا كانت الظواهر من نوعية واحدة ولها متوسطات متساوية. أي يمكن مقارنة تشتت درجات مادة ما بدرجات مادة أخرى أو مقارنة تشتت دخل مجموعة من العمال بدخل مجموعة أخرى، وتكون المقارنة أكثر واقعية إذا كانت المتوسطات متساوية أو قريبة من بعضها.

أما إذا كانت الظواهر من صفات مختلفة أو إذا كانت متوسطاتها متباعدة، فإن المقارنة اعتمادا على الانحراف المعياري ستكون غير منطقية وغير واقعية، ولهذا السبب وجدت مقاييس أخرى سميت $\frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط الحسابي}} \times 100$

مقاييس التشتت النسبي تعتمد على تمييز البيانات وتقيس التشتت كنسبة مئوية للمتوسط، أهم هذه المقاييس هو معامل الاختلاف.

معامل الاختلاف = $$CV = \frac{Sx}{\overline{\overline{X}}} \times 100$$

مثال7: إذا كان متوسط علامات مجموعة من الطلبة في مقياس الاحصاء هو 15 بانحراف معياري 3 ومتوسط علاماتهم في مقياس الرياضيات هو 8 بانحراف معياري 2، فأي العلامات في نظرك أكثر تشتتا؟

الحل: إذا اعتمدنا على الانحراف المعياري فإننا نحكم على أن علامات الاحصاء أكثر تشتتا (Sx =3) من علامات الرياضيات (Sx =2)، وهذا غير صحيح لأننا إذا أدخلنا المتوسط الحسابي لدرجات الطلبة في المقياسين في الحسبان سنحصل على النتائج التالية:

$$CV_1 = \frac{3}{15} \times 100 = 20\%$$

$$CV_2 = \frac{2}{8} \times 100 = 25\%$$

أي أن علامات الرياضيات أكثر تشتتا

مثال8: ينتج مصنع نوعين من المصابيح الكهربائية، فإذا علمت أن المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لعمر المصباح في كل نوع هما:

$Sx_1 =$ 300 ساعة $\qquad \overline{X}_1 =$ 1500 ساعة

$Sx_2 =$ 325 ساعة $\qquad \overline{X}_2 =$ 1800 ساعة

أي المصابيح لها مدة حياة أكثر تشتت؟

الحل:

معامل الاختلاف للنوع الأول: $CV_1 = \frac{300}{1500} \times 100 = 20\%$

معامل الاختلاف للنوع الثاني: $CV_2 = \frac{325}{1800} \times 100 = 18\%$

أي أن النوع الأول من المصابيح الكهربائية لها مدة حياة أكثر تشتتا.

مقاييس الشكل

إذا كانت مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت تسمح بتلخيص بيانات أي ظاهرة في صورة أرقام بسيطة تعطي فكرة عن خصائص توزيع هذه البيانات ودرجة تجانسها أو اختلافها فإن هذا الوصف الذي تعطيه يبقى تنقصه الدقة الكافية المطلوبة للتعرف على خواص التوزيع خاصة من حيث انتشار البيانات على المنحى البياني الممثل لها من حيث التوائه أو تفلطحه عن الوضع الطبيعي كذلك دعت الحاجة لاستخدام مقاييس أخرى لتحقيق هذا الغرض سميت هذه المقاييس بمقاييس الالتواء والتفلطح التي سنتعرف عليها في هذا الفصل بعد التطرق لموضوع العزوم.

1. العزوم (Moments)

العزوم قد تكون حول نقطة الأصل أو حول المتوسط الحسابي أو حول أي نقطة معينة، فالعزم الأول حول نقطة الأصل مثلا هو متوسط قيم الظاهرة والعزم حول المتوسط الحسابي هو متوسط انحرافات قيم التوزيع عن المتوسط الحسابي لها. أما رتبة العزم فتتحدد بدرجة القوة (الأس) التي ترفع إليها القيم أو انحرافاتها عن المتوسط الحسابي. وتستخدم العزوم في إيجاد المعامل العزمي للإلتواء وكذلك معامل التفلطح.

1.1.. العزم حول نقطة الأصل

1.1.1. العزم حول نقطة الأصل في حالة بيانات مفردة: إذا كانت لدينا القيم $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ فإن

العزم الأول = $\frac{\sum X_i}{n}$،

العزم الثاني = $\frac{\sum X_i^2}{n}$،

العزم الثالث = $\frac{\sum X_i^3}{n}$ .....

العزم النوني = $\frac{\sum X_i^n}{n}$.

مثال1: إذا كانت لدينا القيم 8،5،2،1 أوجد العزم الأول والثاني والثالث والرابع حول نقطة الأصل؟.

<u>الحل:</u>

- **العزم الأول**: $\frac{\sum X_i}{n} = \frac{8+5+2+1}{4} = \frac{16}{4} = 4$
- **العزم الثاني**: $\frac{\sum X_i^2}{n} = \frac{64+25+4+1}{4} = \frac{94}{4} = 23.5$
- **العزم الثالث**: $\frac{\sum X_i^3}{n} = \frac{512+125+8+1}{4} = 161.5$
- **العزم الرابع** : $\frac{\sum X_i^4}{n} = \frac{64+25+4+1}{4} = 1184.5$

نلاحظ أن: العزم الأول = المتوسط الحسابي

التباين = العزم الثاني – مربع العزم الأول

ومنه فإن التباين في المثال السابق = 23.5 – 16 = 7.5.

2.1.1.. العزم حول نقطة الأصل في حالة بيانات مكررة أو توزيع تكراري : أما إذا كانت البيانات متكررة أو مبوبة في فئات فإن:

العزم الأول = $\frac{\sum n_i X_i}{\sum n_i}$

العزم الثاني = $\frac{\sum n_i X_i^2}{\sum n_i}$

العزم الثالث = $\frac{\sum n_i X_i^3}{\sum n_i}$

العزم النوني = $\frac{\sum n_i X_i^n}{\sum n_i}$

حيث n_i = التكرار. $\sum n_i$ = مجموع التكرارت. x_i = القيم أو مراكز الفئات.

<u>**مثال2** :</u> أوجد العزم الأول والثاني والثالث للبيانات المبوبة في جدول التوزيع التالي، ثم أوجد التباين والانحراف المعياري؟.

الفئة	3 –1	5 – 3	7 – 5	9 – 7	11 – 9	**المجموع**
التكرار	1	2	3	4	6	**16**

<u>الحل:</u>

الفئة	التكرار (n_i)	مركز الفئة (x_i)	n_ix_i	$n_ix_i^2$	$n_ix_i^3$
1-3	1	2	2	4	8
3-5	2	4	8	32	128
5-7	3	6	18	108	648
7-9	4	8	32	256	2048
9-11	5	10	60	600	6000
المجموع	**16**		**120**	**1000**	**8832**

العزم الأول = $M_1 = \frac{\sum n_i X_i}{\sum n_i} = \frac{120}{16} = 7.5 = \overline{X}$

العزم الثاني = $M_2 = \frac{\sum n_i X_i^2}{\sum n_i} = \frac{1000}{16} = 62.5$

العزم الثالث = $M_3 = \frac{\sum n_i X_i^3}{\sum n_i} = \frac{8832}{16} = 552$

التباين = العزم الثاني – مربع العزم الأول. = $62.5 - 56.25 = 6.25$.

ومنه الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$ = $\sqrt{6.25}$ = 2.5

2.1. العزم حول المتوسط الحسابي:

2.1.1العزم حول المتوسط الحسابي في حالة بيانات مفردة:ونرمز للعزم حول المتوسط الحسابي بالرمز μ.

العزم الأول حول المتوسط الحسابي: $\mu_1 = \frac{\sum (X_i - \bar{x})}{\sum n}$

العزم الثاني حول المتوسط الحسابي: $\mu_2 = \frac{\sum (X_i - \bar{x})^2}{\sum n}$

العزم الثالث حول المتوسط الحسابي: $\mu_3 = \frac{\sum (X_1 - \bar{x})^3}{\sum n}$

. .

العزم النوني حول المتوسط الحسابي: $\mu_n = \frac{\sum (X_i - \bar{x})^n}{\sum n}$

مثال3: أوجد العزم الأول والثاني والثالث حول المتوسط الحسابي للقيم التالية 2، 4،6؟

الحل: $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{\sum n} = \frac{2+4+6}{3} = \frac{12}{3} = 4$

X_1	$(X_1 \bar{X})$	$(X_1 \bar{X})^2$	$(X_1 \bar{X})^3$
2	2-	4	-8
4	0	0	0
6	2	4	8
المجموع	0	8	0

$$\mu_1 = \frac{\sum (X_i - \bar{x})}{\sum n} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\mu_2 = \frac{\sum (X_i - \bar{x})^2}{\sum n} = \frac{8}{3} = 2.66$$

$$\mu_2 = \frac{\sum (X_i - \bar{x})^3}{\sum n} = \frac{0}{3} = 0$$

ويلاحظ من خلال هذه النتائج أن:

- العزم الأول حول المتوسط الحسابي يساوي صفر دائما.
- العزم الثاني حول المتوسط الحسابي يساوي التباين

2.2. **العزم حول المتوسط الحسابي في حالة بيانات مكررة:** أما إذا كانت البيانات متكررة أو مبوبة في جداول توزيع تكراري فإن العزوم حول المتوسط الحسابي يمكن حسابها على النحو التالي:

العزم الأول حول المتوسط الحسابي = $\mu_1 = \frac{\sum n_1 (X_i - \bar{x})}{\sum n_1}$

العزم الثاني حول المتوسط الحسابي: $\mu_2 = \frac{\sum n_1 (X_i - \bar{x})^2}{\sum n_1}$

العزم الثالث حول المتوسط الحسابي: $\mu_2 = \frac{\sum n_1 (X_i - \bar{x})^3}{\sum n_1}$

.

العزم النوني حول المتوسط الحسابي: $\mu_n = \frac{\sum n_1 (X_i - \bar{x})^n}{\sum n_1}$

مثال4: أوجد العزم الأول والثاني حول المتوسط الحسابي للبيانات المبوبة في الجدول التالي:

الفئة	$2-0$	$4-2$	$6-4$	$6-8$	**المجموع**
التكرار	2	4	6	4	**16**

الحل:

الفئة	**n_i**	**X_i**	**nx_i**	$(x_1 - \bar{x})$	$n_i(x_1 - \bar{x})$	$n_i(x_1 - \bar{x})^2$
$2-0$	2	1	2	-3.5	-7	24.5
$4-2$	4	3	12	-1.5	-6	9
$6-4$	6	5	30	0.5	3	1.5
$8-6$	4	7	28	2.5	10	25
المجموع	16		27		0	60

العزم الأول حول المتوسط الحسابي = $\mu_1 = \frac{\sum n_i (X_i - \bar{x})}{\sum n_i} = \frac{0}{4}$

العزم الثاني حول المتوسط الحسابي = $18 = \mu_1 = \frac{\sum n_i (X_i - \bar{x})^2}{\sum n_i} = \frac{60}{4}$

2. مقاييس الالتواء والتفلطح

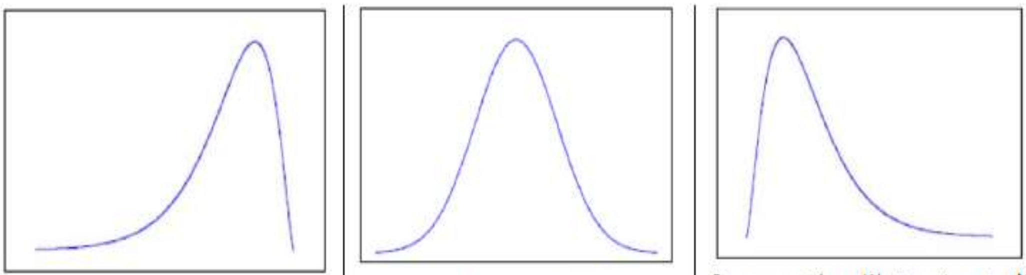
يمكن تحديد شكل التوزيع باستخدام مقاييس الالتواء والتفلطح

2.1. الالتواء (Asymétrie) : وهو عدم التناظر من اليمين أو من اليسار مقارنة

بتوزيع متناظر بالنسبة للقيمة المركزية) يعتبر منحنى التوزيع التكراري المعتدل هاما جدا في الدراسات

والتحليلات الإحصائية. إن هذا المنحنى الذي تتساوى عنده مقاييس النزعة المركزية الثلاث $\left(\overline{X} = Me = M0\right)$ نظري ونادر الوقوع، فالمنحيات التي نحصل عليها عادة تكون ملتوية ناحية اليمين أو ناحية اليسار أو قريبة من الاعتدال .

فقد عرفنا عند دراستنا لمقاييس النزعة المركزية أن التوزيعات الإحصائية يمكن أن تأخذ أحد الأشكال التالية حسب العلاقة بين المقاييس الثلاث:



التوزيع غير متماثل وملتو من جهة اليمين
$Mo < Me < \overline{X}$

التوزيع متماثل
$\overline{X} = Me = Mo$

التوزيع غير متماثل وملتو من جهة اليسار
$\overline{X} < Me < Mo$

أما في هذا الفصل فسنحاول معرفة درجة تناظر (تماثل) توزيع البيانات حول المتوسط الحسابي باستخدام العزوم والانحراف المعياري.

2.1.1. معامل فيشر للالتواء Coefficient de ficher:

يقيس هذا المعامل درجة إلتواء شكل التوزيع الإحصائي ويعتمد في ذلك على قيمة العزم الثالث حول المتوسط الحسابي، ولاستبعاد وحدة القياس نقسمه على الانحراف المعياري من نفس المرتبة.

$$F_1 = \frac{u^3}{S_x^3}$$

ويكون لدينا ثلاث حالات هي:

- توزيع إحصائي متناظر $F_1=0$ ⇨
- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليمين ⇨ $F_1>0$
- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليسار ⇨ $F_1<0$.

2.1.2. معامل بيرسون للالتواء Coefficient de Pearson:

$$P_1 = \frac{(u3)^2}{(u_2)^3}$$

وتكون لدينا ثلاث حالات كذلك:

- توزيع إحصائي متناظر $P_1=0$ ⇨
- منحنى التوزيع غير متناظر ناحية اليمين $P_1>0$ ⇨
- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليسار $P_1<0$ ⇨ .

2.1.3. معامل يول و كندال لالتواء Coefficient de & kendall yule:

ويستعمل هذا المعامل بالنسبة للجداول الإحصائية المفتوحة.

$$Cyk = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

أما الحالات الممكنة فهي:

- توزيع إحصائي متناظر $Cyk = 0$ ⇨
- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليمين $Cyk > 0$ ⇨
- منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليسار $Cyk < 0$ ⇨ .

2.2. التفلطح (Aplatissment)

ويقصد بالتفلطح مدى اتساع وضعف قمة منحنى التوزيع ولقد أصطلح على اعتبار منحنى التوزيع الطبيعي متوسط التفلطح. وتوجد كذلك عدة معاملات لقياس التفلطح أهمها:

2.2.1. معامل بيرسون للتفلطح Coefficient de Pearson :

$$P_2 = \frac{u_4}{(S_x)^4} = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2}$$

والحالات الممكنة هي:

- توزيع معتدل التفلطح (توزيع طبيعي) $P_2 = 3$ ⇨.
- منحنى التوزيع متطاول (مدبب) $P_2>3$

- منحنى التوزيع متفلطح $P_2<3$

2.2.2. معامل فيشر للتفلطح (**Coefficient de fisher**)

وهو عبارة عن معامل بيرسون مطروحا منه 3.

$$F_2 = P_2 - 3 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} - 3$$

والحالات الممكنة هي:

- منحنى التوزيع معتدل التفلطح $F_2 = 0$
- منحنى التوزيع معتدل التفلطح $F_2 > 0$
- منحنى التوزيع متفلطح $F_2 < 0$

مثال5: أدرس شكل منحنى التوزيع التكراري الآتي باستخدام معامل فيشر للالتواء ومعامل بيرسون للتفلطح؟.

X_I	1	2	3	4	المجموع
n_i	6	9	4	1	20

الحل:

Xi	Ni	Nixi	(Xi–X)	Ni(Xi–X)²	Ni(Xi–X)³	Ni(Xi–X)	Ni(Xi–X)
1	6	6	-1	-6	6	-6	6
2	9	18	0	0	0	0	0
3	4	12	1	4	4	4	4
4	1	4	2	2	4	8	16
المجموع	20	40		0	14	6	26

$$\overline{X} = \frac{\sum niXi}{\sum} = \frac{40}{20} = 2$$

$$\mu_1 = \frac{\sum n_i (X_i - \overline{X})}{\sum n_i} = \frac{0}{20} = 0$$

التباين

$$\mu_2 = \frac{\sum n_i (X_i - \overline{X})^2}{\sum n_i} = \frac{14}{20} = 0.7 =$$

والانحراف المعياري

$$S_x = \sqrt{0.7} = 0.83$$

$$\mu_3 = \frac{\sum n_i (X_i - \overline{X})^3}{\sum n_i} = \frac{6}{20} = 0.3$$

$$\mu_4 = \frac{\sum n_i (X_i - \overline{X})^4}{\sum n_i} = \frac{26}{20} = 1.3$$

$$F_1 = \frac{\mu 3}{(S_x)^3} = \frac{0.3}{(0.83)^3} = 0.52$$

ومنه معامل فيشر الالتواء

معامل فيشر للالتواء موجب هذا يعني أن منحنى التوزيع التكراري ملتوي ناحية اليمين.

معامل بيرسون للتفلطح. $P_2 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} = \frac{1.3}{(0.7)^2} = 2.653$

معامل بيرسون للتفلطح أقل من 3 هذا يعني أم منحنى التوزيع يميل للتفلطح.

2.2.3. معامل كيلي للتفلطح Coefficient de kelly

ويستخدم عندما يكون جدول التوزيع التكراري مفتوح من البداية أو من النهاية، ويعطي هذا المعامل بالعلاقة التالية:

$$C_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_3 - Q_1}{D_9 - D_1}$$

مثال6 : أدرس شكل منحنى التوزيع التكراري الآتي باستخدام معاملات فيشر ثم قم برسمه

الفئة	8 – 6	10 –8	12 - 10	14 – 12	16 –14	18 –16	20 – 18	المجموع
التكرار	3	1	26	33	14	8	6	100

الحل:

الفئة	n_i	Xi	xi n_i	$(X_i - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})\, n_i$	$(X_i - \bar{X})^2\, n_i$	$(X_i - \bar{X})^3\, n_i$	$(X_i - \bar{X})^4\, n_i$
8 – 6	3	7	21	- 5.86	- 17.58	- 17.58	- 603.697	3537.62
10 – 8	10	10	90	- 3.86	- 38.6	148.996	- 575.125	2219.98
12–10	26	11	286	- 1.86	- 48.36	89.95	- 167.307	311.189
14–12	33	13	429	0.14	4.62	0.647	0.091	0.013
16–14	14	15	210	2.14	29.96	64.11	137.2	293.62
18–16	8	17	136	4.14	33.12	137.12	567.68	2350.127
20–18	6	19	114	6.14	36.84	226.2	1388.86	8527.56
المجموع	100					770.04	747.7	17240.2

$$\mu_2 = \frac{\sum n_i (X_i - \overline{X})^2}{\sum n_i} = \frac{770.04}{100} = 7.7$$

$$\mu_3 = \frac{\sum n_i (X_i - \overline{X})^3}{\sum n_i} = \frac{747.7}{100} = 7.48$$

$$\mu_4 = \frac{\sum n_i (X_i - \overline{X})^3}{\sum n_i} = \frac{17240.2}{100} = 172.4$$

$$S_x = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{7.7} = 2.775$$

معامل فيشر للالتواء

$$F_1 = \frac{\mu_3}{S_x{}^3} = \frac{7.48}{'(2.775)^3}$$

$$F_1 = \frac{7.48}{21.369} = 0.35$$

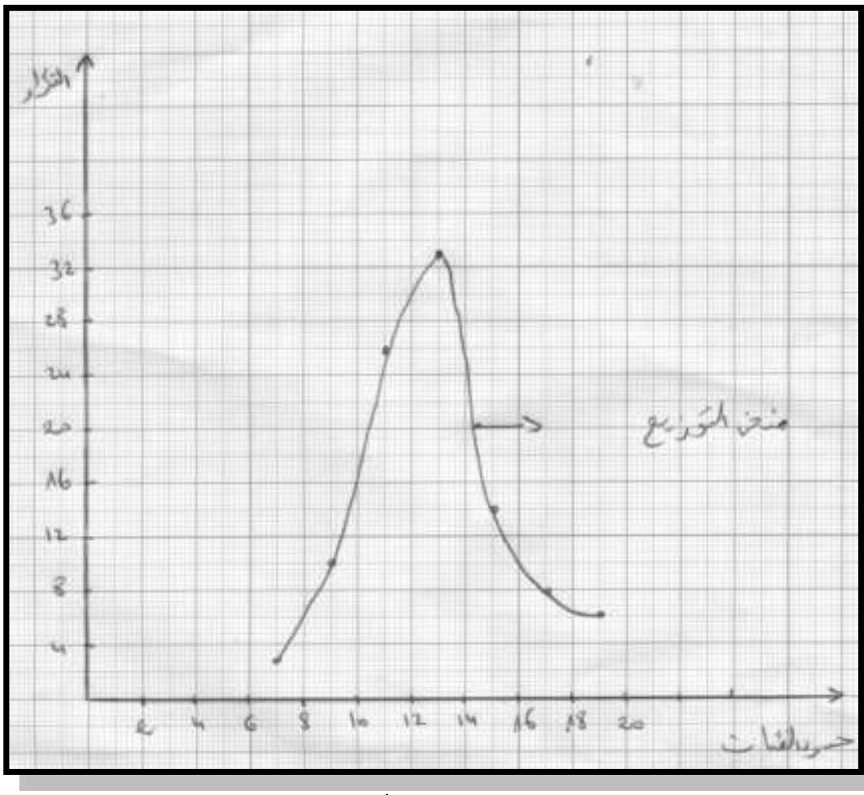
$F_1>0$ يعني أن منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي قليلا ناحية اليمين.

معامل فيشر للتفلطح

$$F_2 = \frac{U_4}{(\mu_2)^2}$$

$$F_2 = \frac{172.4}{(7.7)^2} - 3 = \frac{172.4}{59.29} - 3 = -0.092$$

مما يعني أن منحنى التوزيع يميل للتفلطح:



الأرقام القياسية

تمهيد:

العديد من الظواهر الاقتصادية والاجتماعية تتغير من فترة لأخرى ومن مكان لآخر، بقيم ليس من السهل إدراك أهميتها عن طريق الأرقام المطلقة ولا من السهل مقارنتها مع غيرها، لذلك لا بد من اللجوء إلى التحليل النسبي للظواهر الكمية وذلك عن طريق الأرقام القياسية.

1. مفهوم الرقم القياسي

الرقم القياسي هو مقياس إحصائي يقيس التغير الذي يطرأ على الظواهر والمتغيرات بسبب تأثير عوامل مختلفة، الأمر الذي يؤدي إلى تغيير قيمها من زمن إلى آخر، ومن مكان لآخر1 ، أي من ظرف أول يسمى بظرف الأساس إلى ظرف آخر يسمى بظرف المقارنة) سواء كان الظرف زماني أو مكاني(، وتكون قيمة الرقم القياسي .في ظرف الأساس مساوية للمقدار100 ونميّز صيغتين عامتين للرقم القياسي، الرقم القياسي الزمني والرقم القياسي المكاني:

- **الرقم القياسي الزمني** :يعطى الرقم القياسي الزمني لأي ظاهرة بالعلاقة التالية:

الرقم القياسي للظاهرة= قيمة الظاهرة في سنة المقارنة/ قيمة الظاهرة في سنة الأساس× 100

- **الرقم القياسي المكاني** :وهو معطى بالعلاقة التالية:

الرقم القياسي للظاهرة= قيمة الظاهرة في مكان المقارنة/ قيمة الظاهرة في مكان الأساس ×100

وتستخدم الأرقام القياسية في دراسة تطور الظواهر الاقتصادية والاجتماعية كالإنتاج، الاستهلاك، الصادرات...إلخ، غير أن الأكثر استخداما في دراسة تطور الأسعار والنفقات الاستهلاكية، ولا يقتصر استخدامها كأساس لمقارنة التغير في ظاهرة ما زمنيا أو مكانيا بل يمكن استخدامها للمقارنة بين ظاهرتين مختلفتين أو أكثر.

2. أنواع الأرقام القياسية

هناك عدة أنواع من الأرقام القياسية، ومن أهمها:

2.1.الأرقام القياسية البسيطة

يقيس الرقم القياسي البسيط تطور سعر أو كمية أو قيمة مادة واحدة فقط بين فترتين زمنيتين مختلفتين أو مكانين مختلفين، وهو عبارة عن النسبة بين قيمة المتغير في فترة المقارنة t_1 إلى قيمة نفس المتغير في فترة الأساس t_0

2.1.1.الرقم القياسي البسيط للأسعار

هو عبارة عن نسبة سعر السلعة الواحدة في سنة المقارنة إلى سعرها في سنة الأساس والناتج مضروب في 100%، ويعبر عن هذا الرقم بالصيغة التالية:

الرقم القياسي البسيط للأسعار= السعر في سنة المقارنة/ السعر في سنة الأساس×100

$$IP_{1/0} = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

2.2.1.الرقم القياسي البسيط للكميات

يستخدم هذا الرقم القياسي في حالة المقارنة بين كميات السلع بدلا من أسعارها، ويعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$Iq_{1/0} = \frac{q_1}{q_0} \times 100$$

2.3.1.الرقم القياسي البسيط للقيمة

ويطلق عليه أحيانا بالرقم القياسي للجودة، وبما أن القيمة**V** تمثل حاصل ضرب سعر السلعة **P** في الكمية المنتجة، أو المباعة **Q** فإن الصيغة المستخدمة لحساب الرقم القياسي للقيمة هي:

$$Iv_{1/0} = \frac{V_1}{V_0} \times 100$$

2.2.الأرقام القياسية التجميعية

يقيس هذا الرقم النسبة بين مجموع الأسعار والكميات أو القيم في سنة المقارنة إلى جميع أسعارها وكمياتها وقيمها في سنة الأساس مضروبة في 100 ، ويحسب الرقم القياسي التجميعي حسب الصيغ أدناه:

$$Iv_{1/0} = \frac{V_1}{V_0} \quad X100$$

2.2.1. الرقم القياسي التجميعي للأسعار: يقيس تغير أسعار مجموعة سلع مقاسة بأسعارها الحقيقية لفترتين وقد تكون السلع متجانسة أو غير متجانسة، ويحسب بموجب الصيغة التالية:

$$\sum I\,P_{1/0} = \frac{\sum P_{i1}}{\sum P_{i0}} X100$$

2.2.2.الرقم القياسي التجميعي للكميات: يتم حساب هذا الرقم بالصيغة التالية:

$$\sum I\,q_{1/0} = \frac{\sum q_{i1}}{\sum q_{i0}} X100$$

2.2.3.الرقم القياسي التجميعي للقيم: يعطى الرقم القياسي التجميعي للقيم بالصيغة التالية:

$$\sum I\,V_{1/0} = \frac{\sum V_{i1}}{\sum V_{i0}} X100$$

2.3. الأرقام القياسية المرجحة

لقد ذكرنا سابقا أن الرقم القياسي التجميعي للأسعار والكميات لا يأخذ بعين الاعتبار أوزان كل سلعة وأهميتها النسبية، لذلك جاءت الصيغ المرجحة للأرقام القياسية للتغلب على هذه العيوب، وتعتمد الأرقام القياسية المرجحة على ترجيح أسعار أو كميات كل سلعة باستخدام معامل معيّن، وتستخدم عادة كمية السلعة المباعة أو سعرها خلال سنة الأساس أو خلال سنة المقارنة، وهذه الأوزان تشير إلى الأهمية النسبية للسلعة. توجد عدة أنواع من الأرقام القياسية المرجحة، ولكن سوف نهتم بأكثرها استخداما:

3.2.1.الرقم القياسي المرجح للاسبير

الرقم القياسي المرجح للاسبير يتم فيه الترجيح بأوزان سنة الأساس، حيث يتم ترجيح الأسعار بكميات سنة الأساس أو يتم ترجيح الكميات بأسعار سنة الأساس، ويأخذ هذا الرقم الصيغتين التاليتين:

- **الرقم القياسي المرجح للأسعار**

$$L\,P_{1/0} = \frac{\sum P_{i1}\, q_{i0}}{\sum P_{i0} q_{i0}} X100$$

- **الرقم القياسي المرجح للكميات**

$$L\,q_{1/0} = \frac{\sum q_{i1}\, P_{i0}}{\sum q_{i0} P_{i0}} X100$$

3.2.2.الرقم القياسي المرجح لباش

يعتمد باش في حساب رقمه القياسي على ترجيح سنة المقارنة، ويأخذ هذا الرقم الصيغتين التاليتين:

❖ **الرقم القياسي المرجح للأسعار**

$$P\,p_{\,1/0} = \frac{\sum P_{i1}\, q_{i1}}{\sum P_{i0} q_{i1}} X100$$

❖ **الرقم القياسي المرجح للكميات**

$$P\,q_{1/0} = \frac{\sum q_{i1}\, P_{i1}}{\sum q_{i0} P_{i1}} X100$$

3.2.3.الرقم القياسي المرجح لفيشر

يعتبر من أفضل الأرقام القياسية المرجحة، ويستخدم للتخلص من المشكلة التي يعاني منها كل من رقم لاسبير ورقم باش(التخفيض والتضخيم)، ويقوم هذا الرقم بالأساس على حساب الوسط الهندسي للرقمين القياسيين التجميعيين المرجحين للاسبير وباش، وتكتب علاقته على الشكل التالي:

$$F_{1/0} = \sqrt{L_{1/0} P_{1/0}}$$

❖ **الرقم القياسي المرجح للأسعار**

$$Fp_{1/0}=\sqrt{Lp_{1/0}Pp_{1/0}}$$

❖ **الرقم القياسي المرجح للكميات**

$$Fq_{1/0}=\sqrt{Lq_{1/0}Pq_{1/0}}$$

3.خصائص الأرقام القياسية

للحصول على أحسن الأرقام القياسية، نختبرها إذا ما كانت تحقق بعض الخواص:

3.1.خاصية المطابقة

إذا كانت قيمة فترة الأساس t_0 ، تساوي قيمة فترة المقارنة t_1 فإن الرقم القياسي للفترة t_1 بالنسبة للفترة t_0 يساوي الرقم القياسي للفترة t_0 بالنسبة للفترة t_1 ويساوي 100%

3.2. خاصية الانعكاس: تتمثل هذه الخاصية بالصيغة التالية:

3.2.1. حالة الرقم القياسي للأسعار

$$I_{P\left(t_1/t_0\right)}\times I_{P\left(t_0/t_1\right)}=100\ \%\ =1$$

3.2.2. حالة الرقم القياسي للكميات

$$I_{Q\left(t_1/t_0\right)}\times I_{Q\left(t_0/t_1\right)}=100\ \%\ =1$$

والرقم القياسي الذي يحقق هذه الخاصية يعتبر من أفضل الأرقام القياسية.

3.3. خاصية الدوران

نعبّر عن هذه الخاصية بالعلاقة التالية:

$$I_{P\left(t_n/t_0\right)} = \frac{I_{P\left(t_1/t_0\right)} \times I_{P\left(t_2/t_1\right)} \times \ldots\ldots\ldots \times I_{P\left(t_n/t_{n-1}\right)}}{100^{\,n-1}}$$

حيث **n**: عدد الأرقام القياسية في البسط .

قائمة المراجع

1. ابراهيم مراد الدعمة،مازن حسن الباشا " **أساسيات في علم الإحصاء مع تطبيقات SPSS**" دار المناهج، الأردن، الطبعة الأولى،2013 .
2. امتثال محمد حسن، عادل محمود حلاوة، "**مبادئ الإحصاء الوصفي**"، الدار الجامعية،الإسكندرية، 2002.
3. ثائر فيصل شاهر، "**الإحصاء في العلوم الإدارية والمالية**"، دار حامد للنشر والتوزيع،الأردن،2014.
4. جيلالي جلاطو، "**الإحصاء مع تمارين ومسائل محلولة**" ، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،2002 .
5. خالد أحمد فرحان المشهداني، رائد عبد الخالق عبد الله العبيدي " **مبادئ الإحصاء**"، دار الأيام، الأردن، 2013 .
6. دلال القاضي، سهيلة عبد الله، محمود البياتي، **الإحصاء للإداريين والاقتصاديين**، دار حامد، عمان الأردن، 2005 .
7. ساعد بن فرحات، عبد الحميد قطوش، " **إحصاء 1 مدعم بتمارين وامتحانات محلولة**"، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة سطيف، الجزائر.
8. عبد الرزاق عزوز " **الكامل في الإحصاء** "الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2010.
9. عبد الرزاق عزوز، " **الكامل في الإحصاء** "الجزء الثاني، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2011.
10. عماد توما كرش، ولاء أحمد القزاز و وفاء يونس حمودي، "**علم الإحصاء**"، العراق،2014.
11. فتحي حمدان وكامل فليفل، "**مبادئ الإحصاء**"، دار المناهج، الأردن، 2009.

12. محمد بوهزة" ، **محاضرات في الإحصاء الوصفي**"، دار المحمدية العامة، الجزائر، 2011

13. محمد جبر المغربي، **"الإحصاء الوصفي"**، المكتبة العصرية،مصر، الطبعة الأولى،2007.

14. محمد راتول، **"الإحصاء الوصفي"**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية2006

15. نور الدين حامد،"**محاضرات وتمارين محلولة في مقياس الإحصاء الوصفي**"، دار اليازوردي، عمان الأردن،2016.

16. وليد السيد خليفة، مراد على عيسى، السعيد عبد الخالق عبد المعطي، **"الاتجاهات الحديثة في الإحصاء الوصفي"**، دار الوفاء الإسكندرية، مصر، الطبعة الأولى 2008.

17. يزن إبراهيم، هاشم راتب، **"مبادئ الإحصاء"**، دار البركة ، عمات الأردن، الطبعة الأولى 2001.

جامعة الوادي
كلية العلوم الإقتصادية و التجارية و علوم التسيير
السنة أولى ل.م.د

سلسلة تمارين رقم (1) : عرض البيانات

التمرين 01: حدد المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية(المفردة)، المتغير الإحصائي ونوعه من العبارات التالية:

- مدة حياة المصابيح الكهربائية المنتجة في مصنع.
- الأجور الشهرية لعمال مؤسسة النور.
- أوزان طلبة سنة ثانية قسم التجارة كلية العلوم الاقتصادية بجامعة الوادي.
- الرياضة الممارسة من طرف طلبة قسم التسيير كلية العلوم الاقتصادية بجامعة الوادي.
- عدد الغرف المملوكة من طرف كل عائلة في حي النور بلدية الوادي.
- تصنيف عمال مصنع الجلود حسب المؤهل.
- عدد السيارات في بلدية الوادي حسب الصنف.
- تصنيف الأحزاب السياسية حسب عدد الأصوات المكتسبة في الانتخابات.

التمرين 02: في محاولة لدراسة المستوى التعليمي لـ 30 شخص كانت نتائج البحث الميداني كما يلي:

ماجيستير	بكالوريا	دكتوراة	ماجيستير	دكتوراة	ليسانس	ليسانس	بكالوريا	بكالوريا	ليسانس
دكتوراة	بكالوريا	بكالوريا	بكالوريا	بكالوريا	ماجيستير	ليسانس	تقني	ماجيستير	ليسانس
ليسانس	تقني	تقني	تقني	ماجيستير	دكتوراة	ماجيستير	ليسانس	تقني	تقني

1) حدد المتغير الإحصائي ونوعه؟
2) لخص هذه البيانات في جدول إحصائي ثم أوجد نسب التمثيل لكل صفة في العينة المدروسة؟
3) أنشئ التمثيل البياني المناسب للجدول؟

التمرين 03: البيانات التالية تبين عدد الغيابات التي سجلها عمال مؤسسة ما خلال الثلاثي الأول من سنة 2018:

3	5	2	2	2	3	2	5	3	4
0	5	2	1	5	0	0	4	5	5
4	1	2	3	2	0	3	5	1	1

1) حدد المجتمع الإحصائي والمتغير الإحصائي ونوعه؟
2) لخص هذه البيانات في جدول إحصائي؟ ثم أنشئ التمثيل البياني المناسب للجدول؟
3) أحسب عدد ونسبة العمال الذين لديهم أقل من 3 غيابات ؟

التمرين 04: أنشئ تمثيل بياني مناسب للجدول التالي:

الاقسام	قسم الاقتصاد	قسم التجارة	قسم ع مالية ومحاسبية	قسم التسيير
عدد الطلبة الذكور	100	65	85	50
عدد الطلبة الاناث	170	115	200	100
عدد طلبة سنة ثانية	120	100	195	80
عدد طلبة سنة ثالثة	150	80	90	70

التمرين 05: البيانات التالية تمثل مبيعات كشك معين من جريدة الخبر خلال 50 يوم.

36	45	31	28	41	32	29	26	48	52
30	28	33	27	40	31	30	40	35	45
32	37	36	31	35	33	38	39	41	30
38	42	35	20	36	38	39	37	45	23
36	46	30	35	32	51	43	37	22	34

1) شكل جدول توزيع تكراري المناسب؟ ثم أنشئ التمثيل البياني لهذا الجدول؟

التمرين 06: لدينا البيانات التالية والتي تمثل الأجر اليومي (متغير كمي مستمر) لأربعين عاملا بالدينار:

370	250	140	250	490	300	490	170	180	370
450	560	150	600	510	140	220	270	190	450
230	460	640	370	450	260	340	170	320	150
600	160	270	300	698	100	490	190	160	690

1) لخص هذه البيانات في جدول إحصائي؟ ثم أنشئ التمثيل البياني المناسب للجدول؟
2) أحسب عدد و نسبة العمال الذين تساوي أو تزيد أجورهم عن 200 دينار؟

التمرين 07: الجدول التالي يمثل توزيع الأجور الأسبوعية لعمال مؤسسة ما:

الفئات	التكرارات	التكرارات النسبية
0-10	n_1	0.08
10-20	08	-
20-30	12	-
30-50	14	-
50-60	n_5	-
المجموع	50	1

1) أكمل الجدول ثم أحسب نسبة العمال الذين تساوي أو تزيد أجورهم عن 10 ولكنها تقل عن 50 ؟

التمرين 08: الجدول التالي يمثل توزيع عمال مؤسسة ما حسب التخصص:

الشهادة	التكرارات	التكرارات النسبية
تقني	55	0.44
تقني سامي	n_2	0.24
ليسانس	25	0.20
مهندس	n_4	f_4
المجموع	N	1

1) برهن على أن مجموع التكرارات النسبية يساوي 1.
2) استنتج كل من N ، n_4 ، n_2 و f_4 ؟

جامعة الوادي

كلية العلوم الإقتصادية و التجارية و علوم التسيير

السنة أولى ل.م.د

سلسلة تمارين رقم (2) : مقاييس النزعة المركزية والتشتت

التمرين 01: الجدول التالي تبين التوزيع التكراري لعدد الغيابات التي سجلها عمال مؤسسة ما خلال الثلاثي الأول من السنة:

المتغير الاحصائي (الغيابات)	0	1	2	3	4	5	المجموع
التكرار (العمال)	3	5	10	6	4	2	30

1) مثل بيانيا الجدول التالي باستخدام طريقة الأعمدة البسيطة؟ ثم استنتج قيمة المنوال بيانيا؟
2) أرسم منحنى التكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة؟ ثم استنتج قيمة الوسيط بيانيا؟
3) أحسب كل من المقاييس التالية: المتوسط الحسابي، المنوال و الوسيط، الربيع الأول والربيع الثالث.
4) أحسب كل من: المدى، التباين والانحراف المعياري.

التمرين 02: الجدول التالي تبين التوزيع التكراري لمبيعات كشك معين من جريدة الخبر خلال 50 يوم.

الفئات (المبيعات)	29-20	39-30	49-40	59-50	69-60	79-70	89-80	المجموع
التكرار (الجرائد)	6	12	11	9	6	4	2	50

1) أرسم المدرج التكراري لهذا التوزيع واستنتج قيمة المنوال بيانيا ؟
2) أرسم منحنى التكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة؟ ثم استنتج قيمة الوسيط بيانيا؟
3) أحسب كل من المقاييس التالية: المتوسط الحسابي، المنوال و الوسيط، الربيع الأول والربيع الثالث.
4) أحسب كل من: المدى، التباين والانحراف المعياري.

التمرين 03: الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري للأجر اليومي لأربعين عاملا بالدينار:

الفئات (الأجر)	200-100	300-200	400-300	500-400	600-500	700-600	800-700	المجموع
التكرار (العمال)	12	7	8	5	4	3	1	40

1) أرسم المدرج التكراري لهذا التوزيع واستنتج قيمة المنوال بيانيا ؟
2) أرسم منحنى التكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة؟ ثم استنتج قيمة الوسيط بيانيا؟
3) أحسب كل من المقاييس التالية: المتوسط الحسابي، المنوال و الوسيط، الربيع الأول والربيع الثالث.
4) أحسب كل من: المدى، التباين والانحراف المعياري.

التمرين 04: الجدول التالي يبين توزيع العمال حسب عدد ساعات العمل الأسبوعية.

56 -58	52 -56	46 - 52	42 - 46	40 - 42	38 -40	الفئات
30	110	240	90	20	10	التكرارات

1) أرسم المدرج التكراري لهذا التوزيع واستنتج قيمة المنوال بيانيا ؟
2) أرسم منحنى المتجمع الصاعد والنازل ثم استنتج قيمة الوسيط بيانيا ؟
3) أحسب المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال ؟ ماذا تلاحظ ؟
4) قس تشتت عد ساعات العمل الأسبوعية لعمال باستخدام الانحراف المعياري.

جامعة الوادي

كلية العلوم الإقتصادية و التجارية و علوم التسيير

السنة أولى ل.م.د

سلسلة تمارين رقم (3) : مقاييس التشتت و الشكل

التمرين 01: كان توزيع 50 طالب حسب عدد الغيابات كالتالي:

عدد الغيابات	0	1	2	3	4	5
عدد الطلبة	9	15	11	8	4	3

1) أحسب كل من المقاييس التالية: المدى ، المدى الربيعي، الانحراف المتوسط والانحراف المعياري ؟
2) أدرس شكل منحنى التوزيع ؟

التمرين 02: البيانات التالية تمثل توزيع المستخدمين بالآلاف حسب فئات الأجور (الساعة/ دينار) وذلك في إحدى المزارع الموسمية:

الفئات	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
n_i	39	82	95	44	33	22	5	3

1) أحسب كل من المقاييس التالية: المدى ، المدى الربيعي، الانحراف المتوسط والانحراف المعياري ؟
2) أدرس شكل منحنى التوزيع التكراري ؟

التمرين 03: الجدول الآتي يبين أرباح الشركتين X، Y لفترة ما بملايين الدينارات: أي الشركتين أفضل بالنسبة للمستثمرين ولماذا؟

الشركة X	10	65	45	50	10
الشركة Y	35	40	35	30	40

التمرين 04: أخذت عينتان من مجتمعين مستقلين عن بعضهما البعض فأعطت النتائج التالية:

العينة الأولى	العينة الثانية
$\sum_{i=1}^{30} x_i = 450$	$\sum_{i=1}^{20} y_i = 100$
$\sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 6900$	$\sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 3500$

1) أحسب المتوسط الحسابي و الإنحراف المعياري لكل عينة ؟
2) دمجت العينتان، أحسب كل من المتوسط الحسابي و الانحراف المعياري الناتج عن دمج العينتين؟
3) أحسب معامل الاختلاف لكل عينة، أي العينتان أكثر تشتتا ؟

جامعة الوادي

كلية العلوم الإقتصادية و التجارية و علوم التسيير

السنة أولى ل.م.د

يوم: 28 جانفي 2015

المدة: ساعة واحدة

إمتحان الأعمال الموجهة لمقياس : إحصاء (1)

الاسم:................................ **اللقب:**...................................... **الدفعة:**................. **الفوج:**...............

التمرين الأول: (06 نقاط)

البيانات التالية تبين عدد المصابيح الكهربائية بالألآف المنتجة خلال 60 يوم من طرف مصنع معين:

10	4	3	4	7	8	6	5	2	3	10	2	2	5	3
2	5	5	6	5	9	7	4	5	6	5	1	2	5	7
8	1	8	1	12	11	10	5	3	4	2	3	14	1	4
4	11	12	8	9	7	5	3	7	6	8	9	13	12	3

1) حدد المجتمع الإحصائي والمتغير الإحصائي ونوعه؟

2) لخص هذه البيانات في جدول إحصائي مناسب؟

3) أحسب متوسط عدد المصابيح المنتجة من طرف هذا المصنع خلال فترة 60 يوم ؟

الإجابة عن التمرين الأول: **(....../06)**

1) ....

....

....

2) ....

....

....

....

....

....

....

....

3) ....

....

....

....

....

التمرين الثاني: (06 نقاط)

الجدول التالي يبين التوزيع التكراري لنفقات الاستهلاكية الشهرية بآلاف الدينارات لعينة من الأسر سحبت بطريقة عشوائية من مجتمع معين:

الإنفاق	20	21	22	23	24	25
عدد الأسر	6	7	10	15	7	5

1) عين المجتمع الإحصائي و المتغير الإحصائي، وما نوع هذا المتغير ؟

2) أحسب المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال ؟ وماذا تمثل كل قيمة ؟

3) حدد الإنفاق الاستهلاكي للأسرة ذات المرتبة 25%؟

الإجابة عن التمرين الثاني: (....../06)

-1 ....

....

....

....

-2 ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

-3 ....

....

....

....

....

بالتوفيق أساتذة المقياس

جامعة الوادي

كلية العلوم الإقتصادية و التجارية و علوم التسيير

السنة أولى ل.م.د

يوم: 28 جانفي 2016

المدة: ساعة و نصف

إمتحان مقياس : إحصاء (1)

الاسم:............................... **اللقب:**...................................... **الدفعة:**.................. **الفوج:**..............

التمرين الأول: (04 نقاط)

الجدول التالي يبين معدل زيادة الأرباح التي حققتها مؤسسة معينة خلال ثلاث فترات:

الفترة بالسنوات	معدل زيادة الربح
2	5%
3	7%
1	4%

1) حدد المتغير الاحصائي ونوع هذا المتغير ؟

2) إيجاد معدل زيادة الأرباح خلال الفترة كاملة ؟

الإجابة عن التمرين الأول: **(....../04)**

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

التمرين الثاني: (08 نقاط)

الجدول التالي يمثل توزيع الأجور السنوية لعمال مؤسسة صناعية بالآلاف الدنانير.

الفئات – الأجور	200– 220	220 – 240	240 – 260	260 – 280	280 – 300	300 – 320
عدد العمال	12	14	20	30	14	10

1) عين المجتمع الإحصائي و المتغير الإحصائي، وما نوع هذا المتغير ؟

2) أرسم المدرج التكراري لهذا التوزيع واستنتج قيمة المنوال بيانيا ؟

3) أرسم منحنى المتجمع الصاعد والنازل ثم استنتج قيمة الوسيط بيانيا ؟

4) أحسب المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال ؟ وماذا تمثل كل قيمة ؟

5) أحسب عدد و نسبة العمال الذين أجرهم السنوي:

أ- أقل من 280 ألف دينار ؟ ب- يفوق أو يساوي 240 ألف دينار و أقل من 290 ألف دينار؟ ج- يفوق أو يساوي 260 ألف دينار؟

الإجابة عن التمرين الثاني: **(...../08)**

التمرين الثالث: (08 نقاط)

في إحدى الدول، أقيمت دراسة حول مساحة المستثمرات الفلاحية لمنطقة الشمال و لمنطقة الجنوب فكانت النتائج كالتالي:

المساحة بالهكتار	0- 10	10 – 30	30 - 50	50 - 100
عدد المستثمرات الفلاحية بمنطقة الشمال	3	15	20	12
عدد المستثمرات الفلاحية بمنطقة الجنوب	5	19	21	5

1) أحسب متوسط مساحة المستثمرات الفلاحية لكل من منطقة الشمال ومنطقة الجنوب، ثم أحسب متوسط مساحة المستثمرات الفلاحية لهذه الدولة ؟

2) أحسب الانحراف المعياري لمساحة المستثمرات الفلاحية لكل من منطقة الشمال ومنطقة الجنوب، ثم أحسب الانحراف المعياري لمساحة المستثمرات الفلاحية لهذه الدولة ؟

3) قارن تشتت كل من مساحة المستثمرات الفلاحية لمنطقة الشمال و منطقة الجنوب باستخدام معامل الاختلاف ؟

الإجابة عن التمرين الثالث: **(....../08)**

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

بالتوفيق للجميع

جامعة الوادي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة أولى ل م د

يوم: 29 جانفي 2020

المدة: ساعة و نصف

امتحان مقياس: إحصاء 1

الاسم:.................................. اللقب:.................................. الفوج:.........

التمرين الأول:(08 نقاط)

لدينا البيانات التالية والتي تمثل قيمة أموال الزكاة المجمعة من طرف الصندوق الوطني للزكاة لعدد من ولايات الوطن بملايين دنانير.

37.20	25.00	14.20	25.00	49.15	30.05	38.00	17.25	18.75	37.50
23.50	36.25	24.75	37.50	45.00	26.75	34.00	17.25	32.25	15.20
30.50	16.50	27.20	30.75	20.00	10.75	37.25	19.75	16.00	29.00

1) ما هو المتغير الإحصائي، وما نوعه؟

2) لخص هذه البيانات في جدول إحصائي؟ وأي نوع من الفئات تستخدم في مثل هاته الحالة؟

الإجابة عن التمرين الأول:**(....../08)**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

التمرين الثاني:(12 نقطة)

الجدول التالي يبين التوزيع التكراري للأرباح السنوية لمجموعة من **المؤسسات الاقتصادية ذات نشاط خدماتي**:

الأرباح (بملايين الدينارات)	12 - 8	16 -12	22 - 16	26 - 22	30 - 26	**المجموع**
المؤسسات	6	9	n_3	8	5	40

1) عين المجتمع الإحصائي و المتغير الإحصائي، وما نوع هذا المتغير ؟

2) أوجد قيمة n_3، وماذا تمثل ؟

3) أوجد قيمة كل من الوسيط والمنوال بيانيا ؟

4) أحسب المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال ؟ وماذا تمثل كل قيمة؟

5) أدرس تشتت هاته البيانات باستخدام الانحراف المعياري ؟

الإجابة عن التمرين الثاني: **(....../12)**

بالتوفيق للجميع