حلول التمارين المقترحة

(الفصل الثاني)

التمرين الأول :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1) الجملة التكرارية لطريقة جاكوبي :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{3} x_2^{(k)} - \frac{1}{3} x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{3} x_1^{(k)} - \frac{1}{3} x_3^{(k)} + 2 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{3} x_1^{(k)} - \frac{1}{3} x_2^{(k)} + 3 \end{cases}$$

أي :

$$X^{(k+1)} = T_J X^{(k)} + C_J$$

حيث :

$$T_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} ; \quad C_J = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) حساب الشعاع الطيفي $\rho(T_J)$ حيث :

$\rho(T_J) = \max_i |\lambda_i|$; λ_i القيم الذاتية لـ T_J.

قيم λ: تمثل حلول المعادلة المميزة: $\det(T_J-\lambda I)=0$

أي:

$$\det(T_J-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$=-\lambda\left(\lambda^2-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\lambda-\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\lambda\right)=0$$

ومنه نجد:

$$\det(T_J-\lambda I)=\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)\left(-\lambda^2-\frac{1}{3}\lambda+\frac{2}{9}\right)=0$$

حلول المعادلة هي: $\lambda_1=\frac{1}{3},\ \lambda_2=\frac{1}{3},\ \lambda_3=-\frac{2}{3}$;

إذن:

$$\rho(T_J)=\max_{i=1,2,3}|\lambda_i|=\frac{2}{3}$$

بما أن $\rho(T_J)=\frac{2}{3}<1$ فإن طريقة جاكوبي تتقارب.

3) عدد التكرارات خطأ 10^{-4} و $X^{(0)}=C_J$

حسب العلاقة لدينا:

$$\|X-X^{(k)}\|\leq\frac{\|T_J\|^k}{1-\|T_J\|}\|X^{(1)}-X^{(0)}\|=10^{-}$$

إذن:

$$\|X-X^{(k)}\|\leq\frac{\|T_J\|^{k+1}\cdot\|C_J\|}{1-\|T_J\|}=10^{-4}$$

لدينا: $\|g\|_1 = \|X^{(0)}\| = 6$; $\|T_J\|_1 = \frac{2}{3}$

ومنه نجد:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \times 18 = 10^{-4} \ : \ \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + 6}{\frac{1}{3}} = 10^{-4}$$

ندخل الدالة ln على الطرفين نجد:

$$(K+1)\ln\frac{2}{3} + \ln 18 = -4\ln 10$$

بعد الحساب نستنتج أن $k = 26$.

التمرين الثاني:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

تتقارب طريقتي جاكوبي وغوص سايدل إذا كانت A ذات قطر مسيطر تماما

أي: $|\alpha| > 1$ (حسب الأسطر والأعمدة)

ومنه قيم α التي تحقق التقارب هي:

$(\alpha > 1)$ أو $(\alpha < -1)$.

التمرين الرابع:

$$AX = b$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1) علما أن المصفوفة A ذات قطر مسيطر تماما

فإن الطريقتين تتقاربان (جاكوبي وغوص-سايدل)

أ) طريقة جاكوبي:

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{6} x_2^{(k)} - \frac{1}{6} x_3^{(k)} + 2 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{2} x_1^{(k)} + 0 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{6} x_1^{(k)} - \frac{1}{3} x_2^{(k)} + 1 \end{cases}$$

بالتعويض نجد:

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; X^{(2)} = \begin{pmatrix} 13/6 \\ -2/3 \\ 10/9 \end{pmatrix}$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 52/27 \\ -13/12 \\ 31/36 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1,926 \\ -1,083 \\ 0,861 \end{pmatrix}$$

ب) طريقة غوص - سايدل:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{6} x_2^{(k)} - \frac{1}{6} x_3^{(k)} + 2 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{2} x_1^{(k+1)} + 0 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{6} x_1^{(k+1)} - \frac{1}{3} x_2^{(k+1)} + 1 \end{cases}$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; X^{(2)} = \begin{pmatrix} 35/18 \\ -35/36 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 431/216 \\ -431/452 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1,995 \\ -0,995 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) حل الجملة باستعمال طريقة غوص للحذف:

$$[A:b] : \left(\begin{array}{ccc:c} 6 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 11/3 & -1/3 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

نجد: $x_3 = 1$, $x_2 = -1$, $x_1 = 2$

$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ أي: الحل الصحيح X حيث

طريقة التفكيك $A = LU$ حيث:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} , \; U = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 11/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

نصل الى نفس النتيجة.

3) من خلال المقارنة نجد أن طريقة غوص سايدل هي الأسرع لأنها الأقرب الى الحل الصحيح.