حلول التمارين المقترحة

الفصل الاول

التمرين الأول:

لدينا:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. حساب A×B ، B×A ، A - B :

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & +2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} \times \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

ثم:

$$\det A = 0 - 0 - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\det B = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = +12$$

$$\det(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = 3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -12$$

من جهة أخرى:

$$\det A \times detB = (-1) \times (12) = -12$$

الخاصية محققة دوما أي:

$$\det(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \det A \times detB$$

بصورة عامة:

$$\det(A_1 \times A_2 \times \dots A_n) = \det A_1 \times \dots \times detA_n$$

2. لدينا:

$$\det(\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1}) = \det A \times det\mathrm{A}^{-1}$$

حسب الخاصية السابقة ومنه:

$$(\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1}) = I$$

$$\det \mathrm{I} = \det A \times det\mathrm{A}^{-1}$$

بما أن $\det \mathrm{I} = 1$ فإن $det\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det A}$

أي : $\det \mathrm{A}^{-1} = -1$

3. $\|B\|_1 = max\{1+1+2\,,2+2+2\,,1+1+1\}$

(حسب الاعمدة) $\|B\|_1 = 6$

$$\|B\|_\infty = max\{1+2+1\,,1+2+1\,,2+1+1\}$$

(الاعمدة حسب) $\|B\|_\infty = 5$

التمرين الثاني:

لدينا: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1) اذن A متناظرة : $A^t = A$

- A معرفة موجبة اذا تحقق :

$$\forall \mathrm{X} \neq 0: \quad X^t A\, X > 0 \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

أي :

$$X^t = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} > 0$$

لدينا:

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3)$$

ومنه:

$$X^t A\, X = (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3x_2 - x_2x_3 + 2x_3^2$$

$$= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_1^2 + x_3^2$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_1^2 + x_3^2 > 0$$

ومنه : $\forall\, \mathrm{X} \neq 0 = X^t A\, X > 0$

اذن A معرفة موجبة

2) A ذات قطر مسيطر لأن :

حسب الاسطر:

$$2 \geq 1$$

$$2 \geq 2$$

$$2 \geq 1$$

حسب الاعمدة: $(2 \geq 1)$ ، $(2 \geq 2)$ ، $(2 \geq 1)$

3) القيم الذاتية للمصفوفة A:

المعادلة المميزة:

$$\det(A - \lambda\, I) = 0$$

$$A-\lambda\, I=\begin{pmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda\, I)=(2-\lambda)\begin{vmatrix}2 & -\lambda & -1\\ -1 & 2 & -\lambda\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-1 & & 0\\ -1 & 2 & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)((2-\lambda)^2-1)-(2-\lambda)$$

$$=(2-\lambda)[(2-\lambda)^2-1-1]$$

ومنه: $\det(A-\lambda\, I)=(2-\lambda)\,(2-\lambda-\sqrt{2})(2-\lambda+\sqrt{2})$

اذن:

$$\det(A-\lambda\, I)=0\leftrightarrow\begin{cases}2 \quad -\lambda \quad =0\\ 2 \quad -\sqrt{2} \quad -\lambda \quad =0\\ 2 \quad +\sqrt{2} \quad -\lambda \quad =0\end{cases}:\quad\begin{cases}\lambda= \quad 2\\ \lambda= \quad 2-\sqrt{2}\\ \lambda= \quad 2+\sqrt{2}\end{cases}$$

ومنه القيم الذاتية للمصفوفة A هي :

$$\lambda_1=2\ , \qquad \lambda_2=2-\sqrt{2}\ , \qquad \lambda_3=2+\sqrt{2}$$

الشعاع الطبقي:

$$\rho(A)=max|\lambda_i| \quad i=1{,}2{,}3$$

اذن: $\rho(A)\ =2+\sqrt{2}$

استنتاج $\|A\|_2$ لدينا :

$$\|A\|_2=\sqrt{e(A^tA)} \qquad (A^t=A)$$

$$=\sqrt{\mathrm{e}(A^2)} \qquad \left(\rho(A^2)\right)=[\rho(A)]^2$$

$$=\sqrt{\rho(A)^2}$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A)}=\ 2+\sqrt{2} \qquad \rho(A)\geq 0$$

التمرين الثالث:

1) الشكل المصفوفي: $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) طريقة كرامر:

حساب محدد المصفوفة A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$$

اذن الجملة (1= تقبل حل وحيد حيث:

$$\mathrm{x} = \frac{\Delta x}{\det A}\ ;\quad y = \frac{\Delta y}{\det A}\ ;\quad z = \frac{\Delta z}{\det A}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -13$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -41$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/_{30} \\ 41/_{30} \\ -9/_{30} \end{pmatrix}$$

3) حل الجملة بإستعمال طريقة غوص للحذف:

المصفوفة الموسعة: $[A: b]$

1. مرحلة الحذف:

$$[A:b]\ :\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & : & 1 \\ -1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 1 & 1 & -4 & : & 3 \end{pmatrix}$$

أ- $a_{11} = 3 \neq 0$

$$\mathrm{L}_1/_3 \ \to \mathrm{L}_1{}^{(1)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/_3 & : & 1/_3 \\ -1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 1 & 1 & -4 & : & 3 \end{pmatrix}$$

ب- حذف المتغير x من المعادلتين الثانية والثالثة:

$$\begin{matrix} \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 \ \to \mathrm{L}_2{}^{(1)} \\ \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \ \to \mathrm{L}_3{}^{(1)} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/_3 & : & 1/_3 \\ 0 & 2 & 4/_3 & : & 7/_3 \\ 0 & 1 & -13/_3 & : & 8/_3 \end{pmatrix}$$

ت- $a_{22}^{(1)} = 2 \neq 0$

$$L_2^{(1)}/_2 \to \mathrm{L}_2{}^{(2)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/_3 & : & 1/_3 \\ 0 & 1 & 2/_3 & : & 7/_6 \\ 0 & 1 & -13/_3 & : & 8/_3 \end{pmatrix}$$

ث- حذف المتغير y من المعادلة الثالثة :

$$L_3^{(1)} - L_2^{(2)} \ \to \mathrm{L}_3{}^{(2)} \ : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/_3 & : & 1/_3 \\ 0 & 0 & 2/_3 & : & 7/_6 \\ 0 & 0 & -5 & : & 3/_2 \end{pmatrix}$$

ج- $a_{33}^{(2)} = -5 \neq 0$ اذن :

$$L_3^{(2)}/_{-5} \rightarrow \mathrm{L}_3{}^{(3)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/_3 & : & 1/_3 \\ 0 & 1 & 2/_3 & : & 7/_6 \\ 0 & 0 & 1 & : & -3/_{10} \end{pmatrix}$$

2. مرحلة الغوص:

- $z = -3/_{10}$
- $\left(y + \frac{2}{3}z = \frac{7}{6}\right) \rightarrow y = \frac{7}{6} + \frac{1}{5} = \frac{41}{30}$
- $\left(x + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}\right) \rightarrow x = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{13}{30}$

التمرين الرابع:

المصفوفة الموسعة
$$[A:b] = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 & : & 6 \\ 3 & 8 & 1 & : & 11 \\ 1 & 2 & 4 & : & 20 \end{pmatrix}$$

1) مرحلة الحذف:

أ- $a_{11} = 3 \neq 0$

$$\mathrm{L}_1/_3 \rightarrow \mathrm{L}_1{}^{(1)} : \begin{pmatrix} 1 & 8/_3 & 3 & : & 2 \\ 3 & 8 & 1 & : & 11 \\ 1 & 2 & 4 & : & 20 \end{pmatrix}$$

ب- حذف المتغير x من المعادلتين الثانية والثالثة:

$$\begin{matrix} \mathrm{L}_2 + 3\mathrm{L}_1{}^{(1)} \rightarrow \mathrm{L}_2{}^{(1)} \\ \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1{}^{(1)} \rightarrow \mathrm{L}_3{}^{(1)} \end{matrix} : \begin{pmatrix} 1 & 8/_3 & 3 & : & 2 \\ 0 & 0 & -8 & : & 5 \\ 0 & -2/_3 & 1 & : & 18 \end{pmatrix}$$

ت- $a_{22}^{(1)} = 0$ اذن لايمكن استعماله كمحور يجب تغيير المحور اما بتبديل الاعمدة او الاسطر نلاحظ ان تبديل السطرين الثالث و الثاني يفيدنا في الحذف ومنه نحصل على المصفوفة الموسعة التالية:

$$\begin{matrix} L_2^{(2)} \to L_3^{(1)} \\ L_3^{(2)} \to L_2^{(1)} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & 3 & : & 2 \\ 0 & -2/3 & 1 & : & 18 \\ 0 & 0 & -8 & : & 5 \end{pmatrix}$$

ث- $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$ اذن :

$$L_3^{(2)}/_{-8} \to L_3^{(3)} : \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & 3 & : & 2 \\ 0 & -2/3 & 1 & : & 18 \\ 0 & 0 & 1 & : & -5/8 \end{pmatrix}$$

2) مرحلة التعويض :

- $z = -5/8$
- $-\frac{2}{3}y = 18 + \frac{5}{8} = \frac{144+5}{8} = \frac{149}{8}$
- $y = \frac{-149}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{-447}{16}$ اذن
- $x = 2 + \frac{8}{3} \times \frac{447}{16} + \frac{15}{8} = \frac{625}{8}$
- $x = \begin{pmatrix} 625/8 \\ -447/16 \\ -5/8 \end{pmatrix}$