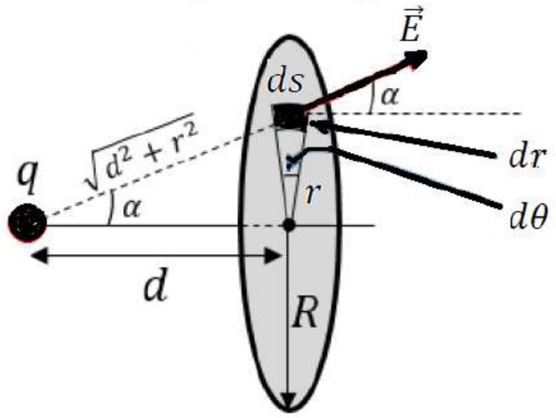
التمرين الاول:

يحسب تدفق الحقل الكهربائي Φ الناتج عن الشحنة النقطية q عبر سطح القرص كالآتي:



$$\Phi = \iint_S \vec{E}\, d\vec{s} = \iint_S E\, ds\, cos\alpha$$

كما هو موضح في الشكل

E الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنة النقطية q

ds المساحة العنصرية للقرص

α الزاوية بين اتجاه الحقل الكهربائي و محور القرص

$$E = K\frac{q}{d^2+r^2}$$

$$ds = r\, dr\, d\theta$$

$$cos\alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2+r^2}}$$

بالتعويض في عبارة تدفق الحقل الكهربائي Φ نجد:

$$\Phi = K\, q\, d\int_0^R \frac{r}{(d^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dr\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= K\, q\, d\left[\frac{-1}{\sqrt{d^2+r^2}}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi\, K\, q\left(1-\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right)$$

بوضع:

$$\Phi = \frac{q}{4\varepsilon_0}$$

نجد:

$$2\pi\, K\, q\left(1-\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right) = \frac{q}{4\varepsilon_0}$$

$$1-\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{d^2+R^2} = 2\, d$$

$$R = \sqrt{3}\, d = 3\sqrt{3}\ \text{cm}$$

التمرين الثاني:

1. عبارة الحقل الكهربائي: لتكن M نقطة من إحدى المناطق $r<a$ و $a<r<b$ و $r>b$.

باستعمال الإحداثيات الكروية (r,θ,φ) فإنّ عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M تكتب كالآتي:

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi)=E_r(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_r+E_\theta(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_\theta+E_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_\varphi$$

دراسة التناظر: بما أنّ الكثافة الحجمية للشحنة ρ (الكرة a)، والكثافة السطحية σ (الكرة b)

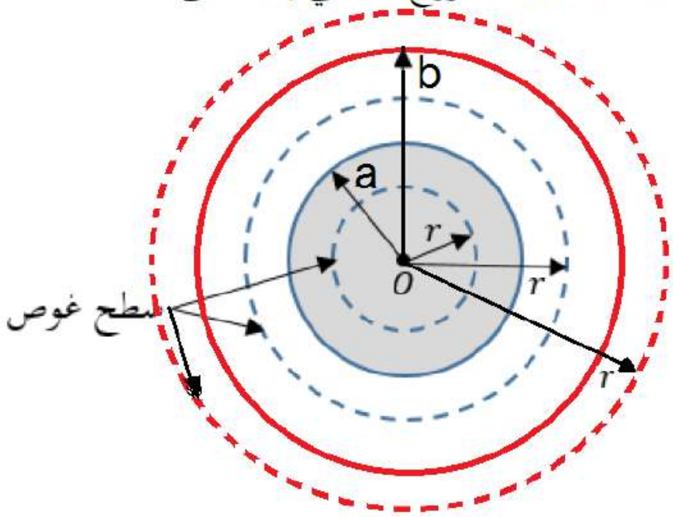
ثابتتان ، وبالتالي فكل مستوي يحوي النقطتين O و M هو مستوي تناظر للتوزيع الشحني

ومنه فإنّ الحقل الكهربائي في النقطة M ينتمي إلى تقاطع هذه المستويات أي أنّ الحقل الكهربائي يكون قطريا أي موازيا للمتّجه $\vec{u}_r$ و منه يمكننا أن نكتب عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M كالآتي:

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi)=E_r(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_r$$

دراسة الثبات:

- إذا قمنا بعملية دوران للنقطة M وفق الزاوية φ فإننا سنلاحظ ثبات التوزيع الشحني إذن يمكن حذف الإحداثية φ من مركبات الحقل الكهربائي.
- إذا قمنا بعملية دوران للنقطة M وفق الزاوية θ فإننا سنلاحظ ثبات التوزيع الشحني إذن يمكن حذف الإحداثية θ من مركبات الحقل الكهربائي.



و منه يمكننا أن نكتب عبارة الحقل الكهربائي كالآتي:

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi)=E_r(r)\,\vec{u}_r$$

لإيجاد عبارة الحقل الكهربائي نستعمل نظرية غوص:

$$\oiint_{S_G}\vec{E}\,d\vec{s}=\frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

حيث يمكن في هذه الحالة أن نختار سطح غوص S_G على شكل كرة مركزها O و نصف قطرها r.

لدينا الحقل الكهربائي و عنصر السطح هما قطريان أي أنّهما متوازيان إذن:

$$\oiint_{S_G}E\,ds=\frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

كذلك الحقل الكهربائي هو ثابت على امتداد سطح غوص إذن:

$$E\oiint_{S_G}ds=\frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

أي أنّ:

$$E\,S_G=\frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

و منه:

$$E\,4\pi r^2=\frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}\qquad(1)$$

* المنطقة $r < a$:

لدينا: $$\sum q_{int} = \rho\, v = \rho\, \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

بالتعويض في العلاقة (1) نجد:

$$E\ 4\pi r^2 = \frac{\rho\, \frac{4}{3}\pi\, r^3}{\varepsilon_0}$$

أي أنّ: $$E\ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

و منه يمكن أن نكتب: $$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\, \vec{u}_r$$

* المنطقة $a < r < b$:

في هذه المنطقة لدينا: $$\sum q_{int} = \rho\, v = \rho\, \frac{4}{3}\pi\, a^3$$

بالتعويض في العلاقة (1) نجد:

$$E\ 4\pi r^2 = \frac{\rho\, \frac{4}{3}\pi\, a^3}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\, \frac{1}{r^2}$$

نكتب: $$\vec{E} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\, \frac{1}{r^2}\, \vec{u}_r$$

* المنطقة $r > b$:   في هذه المنطقة لدينا:

$$\sum q_{int} = q_v + q_s = \rho\, v + \sigma\, S = \rho\, \frac{4}{3}\pi\, a^3 + \sigma\, 4\pi\, b^2$$

بالتعويض في العلاقة (1) نجد:

$$E\ 4\pi r^2 = \frac{\rho\, \frac{4}{3}\pi\, a^3 + \sigma\, 4\pi\, b^2}{\varepsilon_0}$$

$$= \left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma\, b^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}$$

نكتب: $$\vec{E} = \left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma\, b^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}\, \vec{u}_r$$

ـ الكمون الكهربائي في المناطق المذكورة سابقا:

نستعمل العلاقة: $$dV = -\vec{E}\, d\vec{l}$$

بمأنّ الحقل الكهربائي قطري، إذن يمكن كتابة العلاقة الأخيرة على الشكل:

$$dV = -E\, dr$$

و منه: $$V = -\int E\, dr \cdots\cdots (2)$$

** المنطقة $r > b$:

في هذه المنطقة يكون: $$V = -\int \left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma\, b^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}\, dr$$

و منه: $$V = \left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma\, b^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r} + C_1$$

لدينا $V(\infty) = 0$ و منه حسب العلاقة الأخيرة نجد $C_1 = 0$، أي أنّ:

$$V = \left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma\, b^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r}$$

** المنطقة $a < r < b$:

$$V = -\int \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\, dr$$
$$= \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2$$

لإيجاد الثابت C_2 يمكن أن نستعمل خاصية استمرارية الكمون بحيث يكون الكمون الكهربائي في المنطقة $r \geq b$ و الكمون الكهربائي في المنطقة $a \leq r \leq b$ متساويين فقط عند الموضع $r = b$ و منه يمكن أن نستخرج قيمة الثابت C_2 و ذلك كالآتي:

$$\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{b} + C_2 = \left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma\, b^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{b} \longrightarrow C_2 = \frac{\sigma\, b}{\varepsilon_0}$$

و منه تكون عبارة الكمون الكهربائي في هذه المنطقة كالآتي:

$$V = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\sigma\, b}{\varepsilon_0}$$

** المنطقة $r < a$:

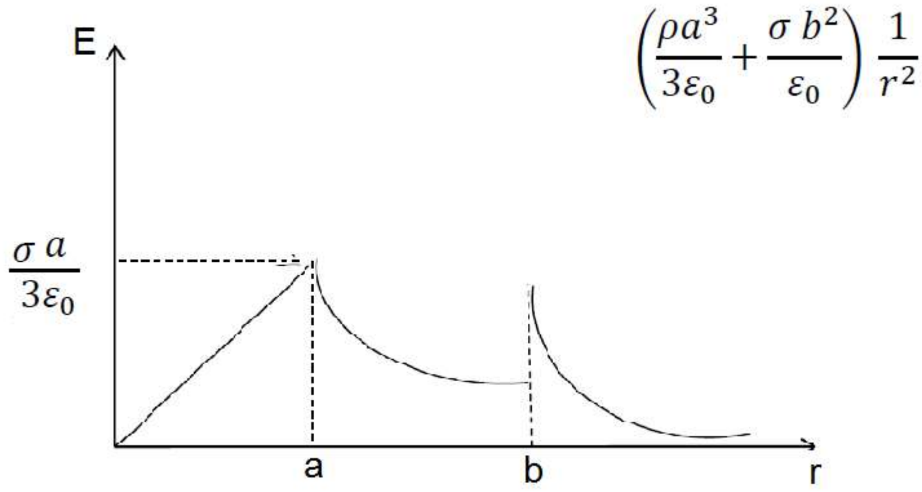
$$V = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\, dr$$
$$= -\frac{\rho}{6\,\varepsilon_0} r^2 + C_3$$

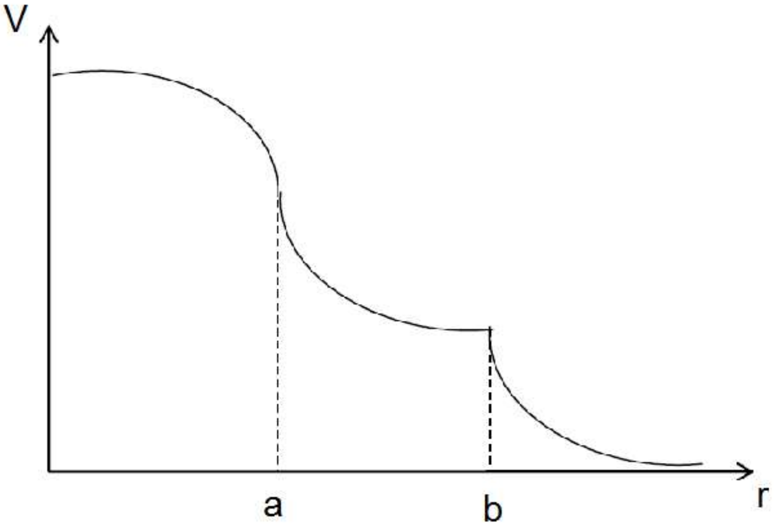
لإيجاد الثابت C_3 يمكن أن نستعمل خاصية استمرارية الكمون بحيث يكون الكمون الكهربائي في المنطقة $r \leq a$ و الكمون الكهربائي في المنطقة $a \leq r \leq b$ متساويين فقط عند الموضع $r = a$ و منه يمكن أن نستخرج قيمة الثابت C_3 و ذلك كالآتي:

$$-\frac{\rho}{6\,\varepsilon_0} a^2 + C_3 = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{a} + \frac{\sigma\, b}{\varepsilon_0} \longrightarrow C_3 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma\, b}{\varepsilon_0}$$

و منه تكون عبارة الكمون الكهربائي في هذه المنطقة كالآتي:

$$V = -\frac{\rho}{6\,\varepsilon_0} r^2 + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma\, b}{\varepsilon_0}$$


E
$\left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}+\frac{\sigma\, b^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}$
$\frac{\sigma\, a}{3\varepsilon_0}$
a
b
r


V
a
b
r

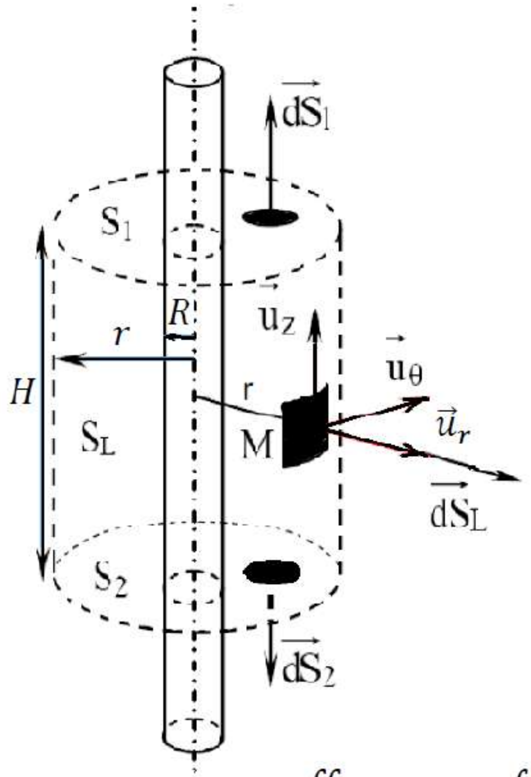
التمرين الثالث:

1. عبارة الحقل الكهربائي:

دراسة الثبات و التناظر

يمكن إثبات أنّ الحقل الكهربائي بدلالة الإحداثيات الأسطوانية يكون قطريا أي موازيا للمتّجه $\vec{u}_r$ في جميع المناطق المذكورة في هذا التمرين

و منه يمكننا أن نكتب عبارة الحقل الكهربائي كالآتي:



$$\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r)\,\vec{u}_r$$

لإيجاد عبارة الحقل الكهربائي نستعمل نظرية غوص:

$$\oiint_{S_G} \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

حيث يمكن في هذه الحالة أن نختار سطح غوص S_G على شكل أسطوانة مغلقة لها نفس محور الأسطوانة المشحونة و نصف قطرها r و ارتفاعها H

و منه يكون:

$$\iint_{S_1} \vec{E}\, d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}\, d\vec{s}_2 + \iint_{S_L} \vec{E}\, d\vec{s}_L = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

حيث S_1 يمثل مساحة القرص العلوي للأسطوانة، S_2 يمثل مساحة القرص السفلي للأسطوانة و S_L يمثل مساحة السطح الجانبي للأسطوانة.

بما أنّ الحقل الكهربائي $\vec{E}$ قطري إذن $\vec{E}$ يكون عموديا على عنصر السطح $d\vec{s}_1$، وكذلك أي أنّ:

$$\iint_{S_1} \vec{E}\, d\vec{s}_1 = 0 \quad ، \quad \iint_{S_2} \vec{E}\, d\vec{s}_2 = 0$$

و بما أنّ الحقل الكهربائي $\vec{E}$ قطري إذن $\vec{E}$ يكون موازيا لعنصر السطح $d\vec{s}_L$ و ثابت على امتداد السطح الجانبي لأسطوانة غوص، أي أنّ:

$$\iint_{S_L} \vec{E}\, d\vec{s}_L = \iint_{S_L} E\, ds_L = E\iint_{S_L} ds_L = E\, s_L = E\, 2\pi\, r\, H$$

بالتعويض في العبارة (1) نجد:

$$E\, 2\pi\, r\, H = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

* المنطقة $r < R$:

$$\sum q_{int} = \rho\, v = \rho\, \pi\, r^2\, H$$

بالتعويض في العلاقة (2) نجد:

$$E\, 2\pi\, r\, H = \frac{\rho\, \pi\, r^2\, H}{\varepsilon_0} \longrightarrow E(r) = \frac{\rho}{2\,\varepsilon_0}\, r$$

** المنطقة $r > R$:
$$\sum q_{int} = \rho\, v = \rho\, \pi\, R^2\, H$$

بالتعويض في العلاقة (2) نجد:
$$E\, 2\pi\, r\, H = \frac{\rho\, \pi\, R^2\, H}{\varepsilon_0}$$

و منه:
$$E(r) = \frac{\rho\, R^2}{2\, \varepsilon_0}\, \frac{1}{r}$$

2. عبارة الكمون الكهربائي :

نعلم أنّ
$$dV = -\vec{E}\, d\vec{l}$$

الحقل الكهربائي قطري، إذن يمكن كتابة العلاقة الأخيرة على الشكل الآتي:
$$dV = -E\, dr$$

أي أنّ:
$$V = -\int E\, dr \qquad (3)$$

* المنطقة $r < R$:
$$V = -\int \frac{\rho}{2\, \varepsilon_0}\, r\, dr$$

و منه :
$$V = -\frac{\rho}{4\, \varepsilon_0}\, r^2 + C_1$$

لدينا $V(r = 0) = 0$ و منه حسب العلاقة الأخيرة نجد $C_1 = 0$، أي أنّ:
$$V = -\frac{\rho}{4\, \varepsilon_0}\, r^2$$

* المنطقة $r > R$:
$$V = -\int \frac{\rho\, R^2}{2\, \varepsilon_0}\, \frac{1}{r}\, dr$$

و منه:
$$V = -\frac{\rho\, R^2}{2\, \varepsilon_0}\, ln(r) + C_2$$

لإيجاد الثابت C_2 نستعمل خاصية استمرارية الكمون فيكون لدينا:
$$V_{int}(r = R) = V_{ext}(r = R)$$
$$-\frac{\rho\, R^2}{2\, \varepsilon_0}\, ln(R) + C_2 = -\frac{\rho}{4\, \varepsilon_0}\, R^2 \qquad C_2 = -\frac{\rho\, R^2}{2\, \varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - ln(R)\right)$$

و منه تكون عبارة الكمون الكهربائي داخل الكرة
$$V = -\frac{\rho\, R^2}{2\, \varepsilon_0}\, ln(r) - \frac{\rho\, R^2}{2\, \varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - ln(R)\right) = -\frac{\rho\, R^2}{2\, \varepsilon_0}\left(ln\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{2}\right)$$

3. إيجاد عبارة الحقل الكهربائي في المنطقة $r < R$ و هذا في حالة الكثافة الحجمية للشحنات ρ تتغير وفق العلاقة $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)$:

بما أنّ الكثافة الحجمية للشحنة ρ لا تتعلق إلا بـ r، و بالتالي هنا يبقى نفس الشيئ في دراسة الثبات و التناظر، و بذلك يمكننا أن نكتب عبارة الحقل الكهربائي كالآتي: $\vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r)\, \vec{u}_r$

و لإيجاد عبارة الحقل الكهربائي في المنطقة $r < R$ ننطلق من العلاقة (2) التي توصلنا إليها في السؤال الأول:

$$E\, 2\pi\, r\, H = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{v} \rho\, dv$$

حيث: $dv = r\, dr\, d\theta\, dz$ يمثل عنصر الحجم بدلالة الإحداثيات الأسطوانية. و منه يكون:

$$E\, 2\pi\, r\, H = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{v} \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right) r\, dr\, d\theta\, dz$$

أي أنّ:

$$E\, 2\pi\, r\, H = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0\, R}\int_0^r r^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz$$

إذن:

$$E\, 2\pi\, r\, H = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0\, R}\left(\frac{r^3}{3}\right)(2\pi)(H)$$

و منه:

$$E = \frac{\rho_0}{3\, \varepsilon_0\, R} r^2$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\, \varepsilon_0\, R} r^2\, \vec{u}_r$$