التمرين الثاني:

1. إيجاد عبارة الشحنة الكلية للكرة q إذا كانت الكثافة الحجمية للشحنة ثابتة و تساوي ρ_0 :

لدينا:
$$dq = \rho\, dv$$

و منه:
$$q = \iiint_{v} \rho\, dv$$

بما أنّ الكثافة الحجمية للشحنة ثابتة و تساوي ρ_0، إذن:

$$q = \iiint_{v} \rho_0\, dv = \rho_0 \iiint_{v} dv = \rho_0 \cdot v$$

من المعلوم أنّ حجم الكرة هو $v = \frac{4}{3}\pi R^3$ و منه تكون عبارة الشحنة الكلية للكرة كالآتي:

$$q = \frac{4}{3}\pi \rho_0 R^3$$

2. إيجاد عبارة الشحنة الكلية للكرة q إذا كانت الكثافة الحجمية للشحنة تتغير حسب العلاقة : $\rho(r) = \rho_0\left(\frac{R}{r}\right)$

لدينا:
$$q = \iiint_{v} \rho\, dv$$

بتعويض عبارة ρ نجد:
$$q = \iiint_{v} \rho_0\left(\frac{R}{r}\right) dv$$

لدينا كذلك عبارة عنصر الحجم بدلالة الإحداثيات الكروية كالآتي:

$$dv = r^2 sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

بتعويض عبارة dv نجد:
$$q = \iiint_{v} \rho_0\left(\frac{R}{r}\right) r^2 sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

بما أنّ جميع المتغيرات مستقلة عن بعضها البعض فيكون:

$$q = \rho_0\, R \int_0^R r\, dr \int_0^{\pi} sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

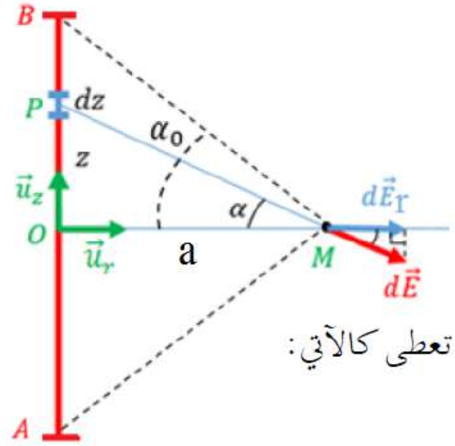
بحساب هذه التكاملات نجد:
$$q = \rho_0\, R\left(\frac{1}{2}R^2\right)(2)(2\pi)$$

و منه تكون عبارة الشحنة الكلية للكرة كالآتي:
$$q = 2\pi\rho_0\, R^3$$

التمرين الثالث:

أ. إيجاد عبارة الحقل الكهربائي في نقطة M واقعة على محور القطعة المستقيمة و التي تبعد مسافة r عن النقطة O منتصف AB:

بما أنّ النقطة M واقعة على محور القطعة المستقيمة $(z = 0)$ إذن بسبب التناظر الحقل الكهربائي في النقطة M يكون محمول على محور هذه القطعة المستقيمة أي أنّ $\vec{E} = E_r\,\vec{u}_r$



لدينا كما هو موضح في الشكل:

$$dE_r = dE\,cos\alpha$$

و منه يكون:

$$E_r = \int dE\,cos\alpha$$

حيث عبارة الحقل الكهربائي العنصري dE في النقطة M تعطى كالآتي:

$$dE = K\frac{dq}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}$$

مع العلم أن: $dq = \lambda \cdot dz$ تمثل الشحنة العنصرية لهذا التّوزيع الخطّي.

بالتعويض في عبارة E_r نجد:

$$E_r = \int K\frac{\lambda \cdot dz}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}\,cos\alpha$$

نقوم إذن بتغيير جميع المتغيرات في التكامل الأخير بدلالة متغير واحد و ليكن α $\left(-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le +\frac{\pi}{2}\right)$،
حيث كما هو موضح في الشكل لدينا:

$$\begin{cases} tg\alpha = \dfrac{z}{\mathrm{a}} \rightarrow \dfrac{1}{(cos\alpha)^2}d\alpha = \dfrac{dz}{\mathrm{a}} \rightarrow \boldsymbol{dz} = \dfrac{\mathrm{a}}{\boldsymbol{(cos\alpha)^2}}\boldsymbol{d\alpha} \\ cos\alpha = \dfrac{\mathrm{a}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|} \rightarrow \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right\| = \dfrac{\mathrm{a}}{\boldsymbol{cos\alpha}} \end{cases}$$

حيث قمنا بمفاضلة عبارة $tg\alpha$ في المعادلة الأولى.

بالتعويض في عبارة E_r الأخيرة نجد:

$$E_r = \frac{K\,\lambda}{\mathrm{a}}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} cos\alpha$$

و منه:

$$E_r = \frac{K\,\lambda}{\mathrm{a}}[sin\alpha]_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} = \frac{2\,K\,\lambda}{\mathrm{a}}sin\alpha_0$$

و لدينا كما هو موضح في الشكل:

$$sin\alpha_0 = \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \mathrm{a}^2}}$$

بالتعويض يكون:

$$E_r = \frac{K\,\lambda\,L}{\mathrm{a}\sqrt{\frac{L^2}{4} + \mathrm{a}^2}}$$

و منه يمكننا كتابة عبارة الحقل الكهربائي الناتج عن القطعة المستقيمة و المشحونة بانتظام في نقطة M واقعة على محورها كالآتي:

$$\vec{E} = E_r(r)\,\vec{u}_r = \frac{K\,\lambda\,L}{r\sqrt{\frac{L^2}{4} + r^2}}\vec{u}_r$$

ب. المناقشة بالنسبة للحقل الكهربائي و ذلك في الحالتين: $L \gg r$ و $L \ll r$:

حسب عبارة الحقل الكهربائي الأخيرة لدينا:

$$\vec{E} = \frac{K\,\lambda\,L}{r\,L\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{r^2}{L^2}}}\vec{u}_r = \frac{K\,\lambda}{r\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{r^2}{L^2}}}\vec{u}_r$$

في الحالة $L \gg r$ لدينا المقدار $\frac{r^2}{L^2}$ يؤول إلى الصفر و منه يكون:

$$\vec{E} = \frac{2\,K\,\lambda}{r}\vec{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot r}\vec{u}_r$$

و هي تمثل عبارة الحقل الكهربائي الناتج عن المستقيم اللانهائي الطول و المشحون بانتظام.

و من جهة أخرى لدينا:

$$\vec{E} = \frac{K\,\lambda\,L}{\mathrm{a}\sqrt{\frac{L^2}{4} + \mathrm{a}^2}}\vec{u}_r = \frac{K\,\lambda\,L}{\mathrm{a}^2\sqrt{\frac{L^2}{4\,\mathrm{a}^2} + 1}}\vec{u}_r$$

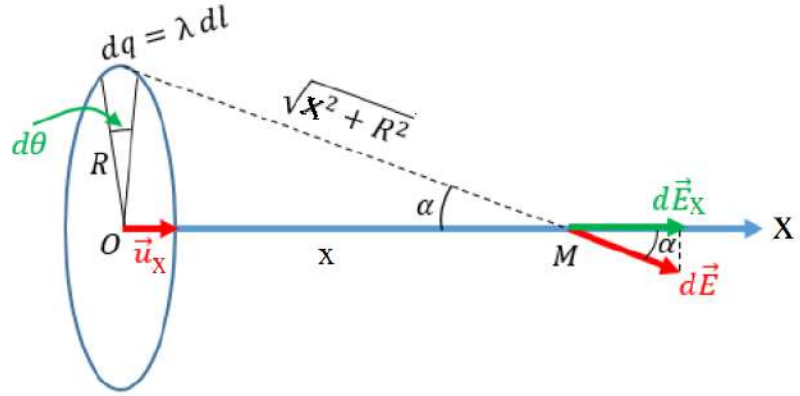
ففي الحالة $L \geq \mathrm{a}$ لدينا المقدار $\frac{L^2}{\mathrm{a}^2}$ يؤول إلى الصفر و منه يكون:

$$\vec{E} = \frac{K\,\lambda\,L}{\mathrm{a}^2}\vec{u}_r = K\frac{q}{\mathrm{a}^2}\vec{u}_r$$

و هي تمثل عبارة الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية حيث $q = \lambda\,L$ تمثل الشحنة الكلية للقطعة المستقيمة.

التمرين الرابع:

1. رسم تخطيطي لهذه المسألة:



2. إيجاد عبارة الكمون الكهربائي في النقطة M التي تقع على المحور $O\mathrm{X}$ و التي تبعد بمسافة x عن مركز الحلقة O:

لدينا:
$$V = \int dV$$

حيث:
$$dV = K\frac{dq}{\sqrt{\mathrm{x}^2 + R^2}} = K\frac{\lambda\, R\, d\theta}{\sqrt{\mathrm{x}^2 + R^2}}$$

و منه يكون:
$$V = K\frac{\lambda\, R}{\sqrt{\mathrm{x}^2 + R^2}}\int_0^{2\pi} d\theta$$

أي أنّ:
$$V = \frac{2\pi\, K\, \lambda\, R}{\sqrt{\mathrm{x}^2 + R^2}}$$

3 .أ. الطريقة الأولى: إيجاد عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M و ذلك <u>باستنتاجه من الكمون:</u>

بما أنّ عبارة V لا تتعلق إلا بـ x إذن:
$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial \mathrm{x}}\,\vec{u}_{\mathrm{x}}$$

و منه بحساب مشتقة V نجد:
$$\vec{E} = -2\pi\, K\, \lambda\, R\left(\frac{0 - \dfrac{2\,\mathrm{x}}{2\sqrt{\mathrm{x}^2 + R^2}}}{\mathrm{x}^2 + R^2}\right)\vec{u}_{\mathrm{x}}$$

أي أنّ:
$$\vec{E} = \frac{2\pi\, K\, \lambda\, R\mathrm{x}}{(\mathrm{x}^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}\;\vec{u}_{\mathrm{x}}$$

ب. الطريقة الثانية: إيجاد عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M و ذلك <u>بالحساب المباشر له:</u>

بما أنّ النقطة M تقع على محور الحلقة OX إذن مركبات الحقل الكهربائي في النقطة M لا تتعلق إلا بـ x.
بما أنّ كل مستوي يشمل محور الحلقة OX هو مستوي تناظر للتوزيع الشحني إذن فالحقل الكهربائي يكون محمول على المحور OX.

هذا يعني أنّ:
$$\vec{E}(M) = E_{\mathrm{X}}(\mathrm{x})\,\vec{u}_{\mathrm{X}}$$

و منه:
$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int dE_{\mathrm{x}}\;\vec{u}_{\mathrm{x}}$$

كما هو موضح في الشكل لدينا : $dE_{\mathrm{x}} = dE\ cos\alpha$

حيث: $dE = K\dfrac{dq}{\mathrm{x}^2+\mathrm{a}^2} = K\dfrac{\lambda\,\mathrm{a}\,d\theta}{\mathrm{x}^2+\mathrm{a}^2}$

$$cos\alpha = \frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{a}^2}}$$

بالتعويض في عبارة الحقل الكهربائي $\vec{E}$ نجد:

$$\vec{E} = \int dE\ cos\alpha\ \vec{u}_{\mathrm{x}} = \int_0^{2\pi} \frac{K\,\lambda\,\mathrm{a}\,\mathrm{x}}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{a}^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta\ \vec{u}_{\mathrm{x}} = \frac{K\,\lambda\,\mathrm{a}\,\mathrm{x}}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{a}^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} d\theta\ \vec{u}_{\mathrm{x}}$$

و منه نجد: $\vec{E} = \dfrac{2\pi K\,\lambda\,\mathrm{a}\,\mathrm{x}}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{a}^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{u}_{\mathrm{x}}$

4. عبارة الحقل الكهربائي الأعظمي E_{max}

E هي تابع لـ x لتحديد قيمتها العظمى نعدم مشتقتها ونحدد x ثم نعوضها في عبارة E

المقدار $A = 2\pi K\,\lambda\,\mathrm{a}$ ثابت، يكون خارج الاشتقاق

$$\frac{dE}{dx} = A\ \frac{d}{dx}\left(x.\,(x^2+a^2)^{-3/2}\right) = A\left((x^2+a^2)^{-3/2} - \frac{3}{2}2x.\,x(x^2+a^2)^{-5/2}\right)$$

$$\frac{dE}{dx} = 0 \ \Rightarrow\ A\left((x^2+a^2)^{-3/2} - \frac{3}{2}2x.\,x(x^2+a^2)^{-5/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2+a^2)^{-3/2}(1-3x^2.\,(x^2+a^2)^{-1}) = 0$$

$$\Rightarrow 1-3x^2.\,(x^2+a^2)^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 = x^2+a^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = a^2$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

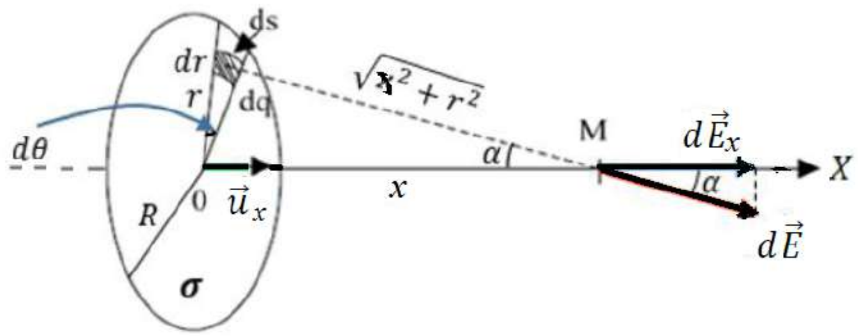
بالتعويض في عبارة E نجد:

$$E_{max} = \frac{2\pi K\lambda a(\pm\frac{a}{\sqrt{2}})}{((\pm\frac{a}{\sqrt{2}})^2+a^2)^{3/2}}$$

وبالتالي: $|E_{max}| = \dfrac{2\pi K\lambda a(\frac{a}{\sqrt{2}})}{(\frac{3}{2})^{3/2}a^3} = \dfrac{\lambda}{\varepsilon_0 a\sqrt{27}}$

التمرين الخامس:

رسم تخطيطي للمسألة:



1. عبارة الشحنة العنصرية dq المحمولة من طرف السطح العنصري للقرص ds:

$$dq = \sigma\, ds = \sigma\, r\, dr\, d\theta$$

2. إيجاد عبارة الكمون الكهربائي V الناتج عن كل القرص في النقطة M:

لدينا:

$$V = \int dV$$

حيث:

$$dV = K\frac{dq}{\sqrt{x^2+r^2}} = K\frac{\sigma\, r\, dr\, d\theta}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

ومنه يكون:

$$V = K\sigma\int_0^R \frac{r}{\sqrt{x^2+r^2}}dr\int_0^{2\pi}d\theta$$

أو نكتب:

$$V = \frac{1}{2}K\sigma\int_0^R 2r(x^2+r^2)^{-\frac{1}{2}}dr\int_0^{2\pi}d\theta$$

أي أنّ:

$$V = \frac{1}{2}K\sigma\left[\frac{(x^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right]_0^R(2\pi)$$

إذن:

$$V = 2\pi K\sigma\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right)$$

3. إيجاد عبارة الحقل الكهربائي في النقطة M و ذلك باستنتاجه من الكمون:

بما أنّ عبارة V لا تتعلق إلا بـ x إذن:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{u}_x$$

و منه بحساب مشتقة V نجد:

$$\vec{E} = -2\pi K\sigma\left(\frac{2\,x}{2\sqrt{x^2+R^2}}-1\right)\vec{u}_x$$

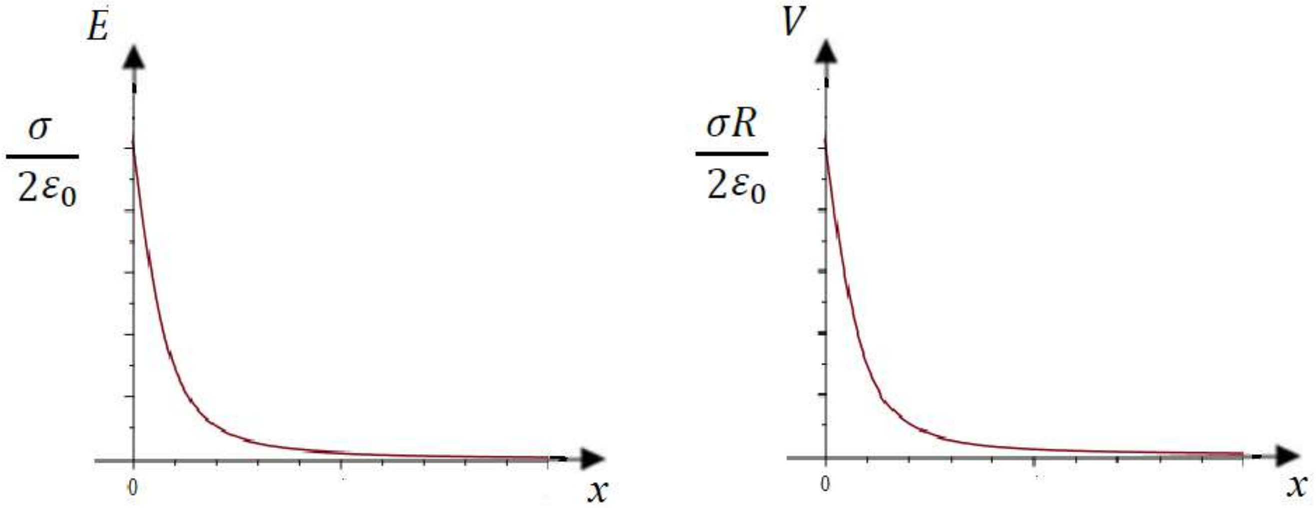
أي أنّ:

$$\vec{E} = 2\pi K\sigma\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\vec{u}_x$$

4. عبارة الحقل الكهربائي $\vec{E}$ في النقطة M في حالة مستو لانهائي موزعة عليه الشحنة بانتظام:

يمكن استنتاج عبارة الحقل الكهربائي في حالة مستو لانهائي موزعة عليه الشحنة بانتظام و ذلك انطلاقا من عبارة الحقل الكهربائي الناتج عن القرص السابقة و هذا باعتبار أن نصف قطر القرص يؤول إلى اللانهاية فيكون:

$$\vec{E} = 2\pi\, K\,\sigma(1-0)\vec{u}_x = 2\pi\, K\,\sigma\,\vec{u}_x = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{u}_x$$



5. إيجاد عبارة الحقل الكهربائي الناشئ من طرف المستوي اللانهائي المثقوب و ذلك في النقطة M:

حسب مبدأ التراكب لدينا:

الحقل الناتج عن المستوي اللانهائي = الحقل الناتج عن القرص + الحقل الناتج عن المستوي اللانهائي المثقوب

و منه نستنتج أنّ:

الحقل الناتج عن المستوي اللانهائي المثقوب = الحقل الناتج عن المستوي اللانهائي ـــ الحقل الناتج عن القرص

و منه تكون عبارة الحقل الكهربائي الناشئ من طرف المستوي اللانهائي المثقوب في النقطة M كالآتي:

$$\vec{E} = 2\pi\, K\, \sigma\, \vec{u}_x - 2\pi\, K\, \sigma \left(1 - \frac{z}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) \vec{u}_x$$

أي أنّ:

$$\vec{E} = 2\pi\, K\, \sigma \frac{z}{\sqrt{x^2 + R^2}}\, \vec{u}_x$$

التمرين السادس:

1. إيجاد عبارة الشحنة الكلية للسلك Q بدلالة R و λ_0:

لدينا:

$$dq = \lambda\, dl$$

حيث:

$$\lambda = \lambda_0 \cos\theta\,, \qquad dl = R\, d\theta$$

بالتعويض في عبارة dq نجد:

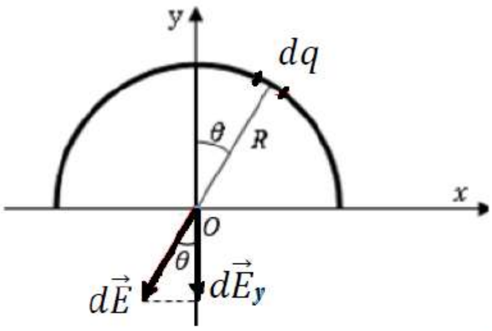
$$dq = R\, \lambda_0 \cos\theta\, d\theta$$

و منه يكون:

$$Q = \int dq = R\, \lambda_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = R\, \lambda_0\, [\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

و منه نجد:

$$\boxed{Q = 2R\, \lambda_0}$$



2. إيجاد عبارة الكمون الكهربائي في النقطة O:

$$V = \int dV = \int K \frac{dq}{R} = \frac{K}{R} \int dq = \frac{K\, q}{R}$$

و بتعويض عبارة Q السابقة يكون:

$$V = 2\, K\, \lambda_0$$

3. إيجاد عبارة الحقل الكهربائي الإجمالي في النقطة O:

بما أنّ المستويين (Oyz) و (Oxy) هو مستوي تناظر للتوزيع الشحني إذن فالحقل الكهربائي ينتمي لتقاطع هذين المستويين أي أنّه محمول على المحور Oy.

هذا يعني أنّ كما هو موضح في الشكل:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int -dE \cos\theta\ \vec{j}$$

حيث:

$$dE = K\frac{dq}{R^2} = K\frac{R\, \lambda_0 \cos\theta\, d\theta}{R^2} = \frac{K\, \lambda_0}{R} \cos\theta\, d\theta$$

و منه بالتعويض في عبارة $\vec{E}$ يكون:

$$\vec{E} = -\frac{K\, \lambda_0}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta\ \vec{j}$$

$$= -\frac{K\, \lambda_0}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\right) d\theta\ \vec{j}$$

$$= -\frac{K\, \lambda_0}{2\, R} \left[\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\ \vec{j} \longrightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{\pi\, K\, \lambda_0}{2\, R}\ \vec{j}}$$

4. إيجاد عبارة القوة الإجمالية $\vec{F}$ المؤثرة على الشحنة النقطية q_O:

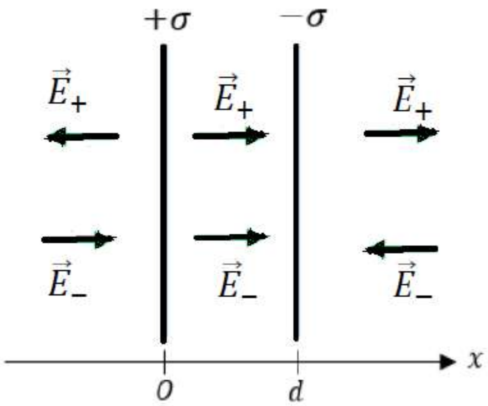
لدينا:

$$\vec{F} = q_O\, \vec{E}$$

و منه نستنتج أنّ:

$$\vec{F} = -\frac{\pi\, K\, \lambda_0\, q_O}{2\, R}\ \vec{j}$$

التمرين السابع:



1. إيجاد عبارة الحقل الكهربائي:

ليكن $\vec{E}_+$ الحقل الكهربائي الناتج عن الصفيحة الموجبة

و $\vec{E}_-$ الحقل الكهربائي الناتج عن الصفيحة السالبة

و منه يكون:

الحقل الكهربائي في الموضع $0 < x < d$:

حسب مبدأ التراكب كما هو موضح في الشكل لدينا: $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$

أي أنّ:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{\imath} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{\imath} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{\imath}$$

الحقل الكهربائي في الموضعين $0 > x$ و $x > d$

حسب مبدأ التراكب كما هو موضح في الشكل لدينا: $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$

أي أنّ:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{\imath} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{\imath} = \vec{0}$$

2. ايجاد عبارة فرق الكمون بين الصفيحتين:

لدينا: $dV = -\vec{E}\,\overrightarrow{dl}$

بما أنّ الحقل الكهربائي موازي للمحور Ox، إذن يكون: $dV = -E\,dx$

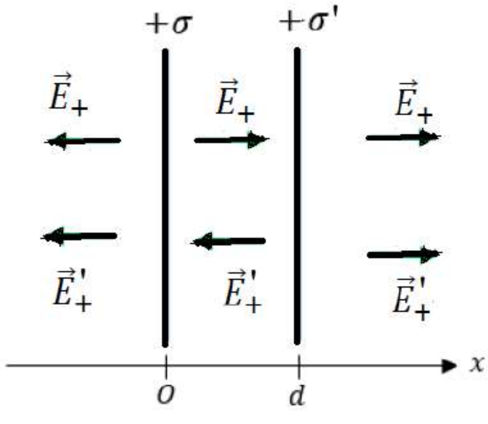
كذلك باعتبار أن الحقل الكهربائي منتظم، إذن بمكاملة العلاقة الأخيرة نجد:

$$\Delta V = E\,d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q/S}{\varepsilon_0} \longrightarrow q = \varepsilon_0\,S\,E$$

$$= 8.85 \times 10^{-12} \times 0.03 \times 1 \times 100$$

$$= 26.55C$$



3.الشحنتان لهما نفس الإشارة

$$+\sigma = +\sigma' \longrightarrow E_+ = E'_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

الحقل الكهربائي في الموضع $0 < x < d$:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}'_+ = \vec{0}$$

الحقل الكهربائي في الموضع $x > d$ $\quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{\imath}$

الحقل الكهربائي في الموضع $x < 0$ $\quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,(-\vec{\imath})$