الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة الشهيد حمه لخضر –الوادي-

كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات

المحاضرات البهية في المعادلات التفاضلية

إعداد : الدكتور مسعود قصبة

لفائدة طلبة سنة ثالثة رياضيات

السنة الجامعية : 2018 - 2019

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسرني أن أضع بين يدي طلبتي الأعزاء هذه السلسلة من المحاضرات في مقياس المعادلات التفاضلية والتي سميتها "المحاضرات البهية في المعادلات التفاضلية" للسنة الثالثة رياضيات والتي أعددتها وفق البرنامج المقرر من طرف الوزارة الوصيّة، وذلك من عدة مراجع معتمدة في هذا الموضوع الذي له أهمية قصوى في ميدان التحليل الرياضي، فالمعادلات التفاضلية من المواد الأساسية التي يرتكز عليها نمو الطالب العلمي في المجالات الرياضية والتطبيقية والهندسية، فهي تربط بين تجريد الرياضيات وواقع التطبيقات بأسلوب علمي سلس، وتدخل المعادلات التفاضلية في شتى فروع الرياضيات والفيزياء والفلك والميكانيك والكيمياء والبيولوجيا وغيرها من العلوم، والعمل على حل المعادلات التفاضلية قد ابتدأ منذ غابر الأزمان ولايزال مستمرًا وذلك لأن ما استطاع الإنسان أن يحل منها هو جزء بسيط منها.

لكن ما هي المعادلة التفاضلية؟ وماذا تعني؟ وكيف تشكلت؟ كيف نفكر بها؟ وكيف نجد حلولها؟

الجواب على هذه الأسئِلة هو هدف هذه المحاضرات لنقدم موضوعها ونظرِيتها وطرق حلها وتطبيقات عليها. ولقد قسمت هذا العمل إلى ثلاثة فصول متوخيًا التيسير والتبسيط إلى حدٍ بعيدٍ مدعمًا ذلك بكثير من التمثيل، وأعقبت كل فصلٍ بتمارين مقترحة وهذه الفصول هي كالآتي :

- الفصل الأول : المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى
- الفصل الثاني : المعادلات التفاضلية من رتب أعلى
- الفصل الثالث : الجمل التفاضلية ومفاهيم أولية حول الإستقرار

وأوّد أن أقول إن هذا العمل بشري فلا يخلو من اعتراء الزلل أوالخلل عليه، ولذا سأكون من الشاكرين لكل أحدٍ قدّم لي ملحوظةٍ أو إقتراحٍ عليه سواءً من طلبتا الأعزاء أو أساتذتنا الأوفياء.

وفي الختام اسأل الله العليم الكريم أن أكون وُفقت في إعداد هذه المحاضرات وأن يجعل الله لها القبول.

كتبها :
الدكتور مسعود قصبة

أستاذ محاضر بجامعة الشهيد حمه لخضر - الوادي

قسم الرياضيات - كلية العلوم الدقيقة

بريدي الإلكتروني : guesbamessaoud2@gmail.com

الفصل الأول

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

المحاضرة الأولى

مفاهيم أساسية و تعاريف أولية

1.1 تعاريف هامة

تعريف (المعادلة التفاضلية) : نسمي معادلة تفاضلية كل معادلة تربط بين المتغير المستقل x والدالة المجهولة y(x) (اختصارًا نكتبها y) ومشتقاتها من مختلف الرتب y', y'',........

أقسام المعادلات التفاضلية

هناك قسمان للمعادلات التفاضلية

أ) المعادلات التفاضلية العادية : تسمى المعادلة التفاضلية بمعادلة تفاضلية عادية إذا كانت الدالة المجهولة تعتمد على متغير مستقل واحد.

ب) المعادلات التفاضلية الجزئية : تسمى المعادلة التفاضلية بمعادلة تفاضلية جزئية إذا كانت الدالة المجهولة تعتمد على متغيرين مستقلين أو أكثر.

أمثلة : نعتبر المعادلات التفاضلية التالية :

1) $y' + xy = 4$ **2)** $y'' - 3xy = 0$ **3)** $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0$ **4)** $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = x^2 + y$

المعادلتين التفاضليتين **1)** و **2)** معادلتين تفاضليتين عاديتين، بينما المعادلتين **3)** و **4)** جزئيتين.

ملاحظة : في هذه الدروس سوف نتعرض فقط لدراسة المعادلات التفاضلية العادية.

رتبة و درجة معادلة تفاضلية

تعريف (رتبة معادلة تفاضلية) : رتبة معادلة تفاضلية هي أعلى مشتقة تتضمنها المعادلة.

أمثلة :

1) $xy' + y = x^3$ معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.

2) $y'' + xy'^2 = 5$ معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

تعريف (درجة معادلة تفاضلية) : درجة معادلة تفاضلية هي درجة أعلى مشتق موجود في المعادلة.

أمثلة :

1) $y' - 2xy^3 + 1 = 0$ الرتبة الأولى و الدرجة الأولى.

2) $(y'')^2 - (1 + y'^2)^3 = 0$ الرتبة الثانية و الدرجة الثانية.

3) $y''' + 2xy'' + y'^2 = \sin x$ الرتبة الثالثة و الدرجة الأولى.

تنبيه : في التعريف السابق يجب أن تكون جميع القوى غير كسرية.

مثال : حدد رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية التالية :

$$y'' = (5-2y')^{\frac{3}{2}}$$

الحل : نربع كلا الطرفين فنجد

$$y''^{2} = (5-2y')^{3}$$

إذن فهذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الثانية.

نتيجة : الشكل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة n هو

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots.., y^{(n)}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.1)$$

حيث F دالة معلومة في نطاق W $\left(W \subset \mathbb{R}^{n+2}\right)$ و $x \in I \subset \mathbb{R}$

تعريف : نقول أن المعادلة التفاضلية (E) محلولة بالنسبة للمشتق إذا أمكن كتابتها على الشكل

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots.., y^{(n-1)}\right)$$

حيث f دالة معلومة في نطاق D من $\mathbb{R}^{n+1}$ و $x \in I \subset \mathbb{R}$.

1.1.1 حل (تكامل) المعادلة التفاضلية :

تعريف : تسمى الدالة y=y(x) حلاً للمعادلة التفاضلية (1.1)

إذا تحقق الشرطان التاليان :

ش1) $y \in C^{n}(I)$

ش2) الدالة y(x) تحقق المعادلة التفاضلية (1.1) .

مثال : تحقق من أن $y(x) = c\sin x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية

$$y'' + y = 0$$

حيث c ثابت حقيقي.

الحل : واضح أن $y \in C^{2}(\mathbb{R})$ و لدينا $y(x) = c\sin x$ ومنه $y'(x) = c\cos x, y''(x) = -c\sin x$ وبالتعويض نجد :

$y'' + y = 0$ وبالتالي $y(x) = c\sin x$ هو حلاً لهذه المعادلة التفاضلية.

1.1.2 تصنيف حلول المعادلات التفاضلية

ميز يمكن تصنيف حلول المعادلات التفاضلية إلى نوعين : حل صريح و حل ضمني.

تعريف (الحل الصريح) : الحل الصريح لمعادلة تفاضلية هو كل حل على الشكل التالي

$$y = f(x) + c$$

حيث : c ثابت حقيقي اختياري.

تعريف (الحل الضمني) : الحل الضمني لمعادلة تفاضلية هو عبارة عن علاقة بين المتغير المستقل x و الدالة المجهولة yأي : G(x ,y)=0 ينتج عن اشتقاقها ضمنيا المعادلة التفاضلية الأصلية.

مثال1 (الحل الصريح) : الدالة $y(x) = xe^{x}$ تعتبر حلاً صريحاً للمعدلة التفاضلية :

$$y'' - 2y' + y = 0$$

وللتأكد من ذلك نجد أولاً $y' = xe^{x} + e^{x}$ ثم نجد $y'' = xe^{x} + 2e^{x}$ و بالتعويض نحصل على $y'' - 2y' + y = 0$.

مثال2 (الحل الضمني) : العلاقة : $x^{2} + y^{2} - 4 = 0$ تعتبر حلاً ضمنياً للمعادلة التفاضلية :

$$y' = -\frac{x}{y}$$

على المجال $x \in]-2,2[$ وللتأكد من ذلك نشتق العلاقة بالنسبة للمتغير x فنجد :

$2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$ و بالتالي $y' = -\dfrac{x}{y}$ وهي المعادلة المعطاة.

الحل العام، الخاص و الشاذ

تعريف (الحل العام) : الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي على n من الثوابت الإختيارية ويحقق المعادلة التفاضلية.

تعريف (الحل الخاص) : الحل الخاص لمعادلة تفاضلية هو الحل الذي نحصل عليه بإعطاء قيم محددة للثوابت الإختيارية الموجودة في عبارة الحل العام.

مثال : يمكن أن نتأكد من أن : $y(x) = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ حيث : c_3, c_2, c_1 ثوابت اختيارية هو حل للمعادلة التفاضلية

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0$$

و نجد بعض الحلول الخاصة :

$c_1 = 0, c_2 = c_3 = 1, y = e^{2x} + e^{3x}$

$c_1 = 3, c_2 = 5, c_3 = 0, y = 3 + 5e^{2x}$

تعريف (الحل الشاذ) : نسمي حلاً شاذًا لمعادلة تفاضلية كل حل لا يمكن استخراجه من عبارة حلها العام.

مثال :

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية :

$$y'^2 - 4y = 0$$

التي حلها العام

$$y = (x + c)^2$$

إن الحل المعدوم $y = 0$ يعتبر حلا شاذا لهذه المعادلة، لأننا لا يمكننا استخراجه من الحل العام بإعطاء قيمة معينة للثابت c.

1.2 المعادلات التفاضلية الخطية

تعريف : نسمي معادلة تفاضلية خطية كل معادلة تحقق الشرطان التاليان :

ش1) درجة التابع المجهول و مشتقاته هي الدرجة الأولى.

ش2) لا يوجد جداء للتابع المجهول مع مشتقاته أو مع مع بعضها البعض.

أمثلة :

نعتبر المعادلات التفاضلية الآتية :

(1 $y'' + xy' = e^x$ **(2** $5x^2y''' - y'' + 2xy = 0$ **(3** $yy'' + y' = x$ **(4** $y' + x\sqrt{y} = \sin x$ **)**

المعادلتين التفاضليتين 1) و 2) خطيتين، بينما المعادلتين 3) و 4) غير خطيتين.

ملاحظة : إذا لم تكن المعادلة خطية نسميها معادلة تفاضلية غير خطية.

تعريف (الشكل العام لمعادلة تفاضلية خطية نونية) : هي كل معادلة تفاضلية من الشكل الآتي :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

حيث : $f, a_n, a_{n-1}, a_1, a_0$ دوال معلومة على مجال I من $\mathbb{R}$.

ملاحظات :

1) إذا كانت الدوال $a_n, \dots\dots, a_1, a_0$ متغيرة نسميها معادلة تفاضلية نونية ذات معاملات متغيرة وإذا

كانت ثابتة نسميها معادلة تفاضلية نونية ذات معاملات ثابتة.

2) إذا كان $f(x)=0$ تسمى معادلة تفاضلية متجانسة

وإذا كان $f(x)\neq 0$ تسمى معادلة تفاضلية غيرمتجانسة

1.3 إنشاء المعادلة التفاضلية

قد لا يكون من المناسب أن يجتاز الطالب مادة المعادلات التفاضلية دون أن يحظى بالحد الأدنى من المعرفة عن بعض أسباب نشؤ هذه المادة.

1) إنشاء المعادلة التفاضلية عن طريق مجموعة المنحنيات :

لتكن مجموعة المنحنيات في المستوي xoy المعرفة بالمعادلة التالية :

$$x \in I, \psi\left(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n\right)=0$$

متعلقة ب n ثابت اختياري, ولإيجاد المعادلة التفاضلية نشتق العلاقة السابقة n مرة ثم نحذف الثوابت.

مثال : اوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوائر

$$x^2+y^2=c^2$$

الحل : نشتق العلاقة بالنسبة إلى x فنجد :

$$2x+2yy'=0$$

ومنه :

$$y'=-\frac{x}{y}, y\neq 0$$

2) إنشاء المعادلة التفاضلية عن طريق بعض المسائل الفيزيائية :

إن المعادلات التفاضلية التي تنشأ من المسائل الهندسية عديدة و متعددة نذكر منها المسألة التالية :

جسم كتلته m موضوع فوق سطح أملس (لايوجد احتكاك) نربط الجسم بنابض، نحرك الجسم في الجهة المعاكسة لنقطة التثبيت مسافة قدرها x من المعلوم فيزيائيا أن الجسم حتمًا سيخضع لقوة F متناسبة مع المسافة x أي أن : $F=kx$ حيث k هوثابت المرونة.

ومن جهة أخرى لدينا $F=mx''$ حيث x'' هو التسارع $\left(x''=\frac{d^2x}{dt^2}\right)$

ومنه $mx''=kx$ وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

3) إنشاء المعادلة التفاضلية عن طريق بعض المسائل الكيميائية :

من المعلوم أنه في بعض الحالات عندما يتم تحويل عنصر ما وليكن A إلى عنصر آخر وليكن B فإن المعدل الزمني اللازم لتحويل كمية قدرها x من العنصر A يتناسب طرديًا مع الكمية x نفسها التي لم يتم تحويلها بعد.

وليكن معلومًا لدينا كمية المادة غير المحولة في لحظة معينة أي لتكن $x=x_0$ عند اللحظة $t=0$ بمعنى أن كامل كمية العنصر A هو x_0 عندما يتم تحديد قيمة x كمية المادة المتبقية التي لم يتم تحويلها بعد عند أي لحظة لاحقة $t>0$ بواسطة المعادلة التفاضلية

$$\frac{dx}{dt}=-kx$$

إضافة إلى الشرط الإبتدائي $x(0)=x_0$ وحيث أن الكمية تتناقص بمرور الوقت فإن ثابت التناسب في المعادلة يجب أن يكون سالبًا تمامًا (-k).

4) إنشاء المعادلة التفاضلية عن طريق بعض المسائل البيولوجية :

من المشكلات الرئيسية في علم الأحياء تلك المرتبطة بالنمو، سواءً كان ذلك النمو مرتبطًا بخلية أو عضو معين، أو إنسان أو نبات أو عدد سكان، وقد يبدو لأول وهلة أن المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

والتي حلها العام هو

$$y = ce^{kt}$$

هي المعادلة المثلى التي تصف النمو عندما يكون $k > 0$ أو التحلل وذلك عندما يكون $k < 0$، حيث c ثابت اختياري.

من الواضح جدًا أن لهذه المعادلة قصورا ينافي طبيعة نمو الأشياء في بعض الأحيان، وذلك أن y تزداد إلى ما نهاية عندما تتجه t إلى ما لا نهاية. ونحن نعلم أن النمو لا بد أن يتوقف بعد مرور بعض الزمن مثل طول قامة الإنسان تظل ثابتة بعد مرور فترة من الزمن فلا شك أن هذه المعادلة غير صالحة لإعطاء النموذج الرياضي الملائم لهذا النمو الطبيعي لقامة الإنسان.

و السؤال الآن : هل من الممكن تطوير هذه المعادلة لتتفق مع طبيعة الحقائق البيولوجية من حيث النمو والتحلل؟

المحاضرة الثانية

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

1.4 تعاريف أساسية

تعريف : المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى هي كل معادلة تربط بين المتغير المستقل x و المتغير المجهول y ومشتقه y' أي من الشكل : $F(x,y,y')=0$ حيث أن F دالة معرفة على نطاق Ω من $\mathbb{R}^3$ و $x\in I\subset\mathbb{R}$ **.**

تعريف : المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى (المنحلة بالنسبة للمشتق) هي كل معادلة من الشكل :

$$y'=f(x,y)\quad\ldots\ldots\ldots(1.4)$$

حيث f دالة معرفة على نطاق D من $\mathbb{R}^2$ **.**

تعريف (حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى) : حل المعادلة (1.4) على مجال I من $\mathbb{R}$ هو الدالة : $y:I\to\mathbb{R}$ والتي تحقق الشروط الثلاثة التالية :

ش1) y قابلة للإشتقاق على المجال I.

ش2) $\forall x\in I,(x,y(x))\in D$

ش3) $\forall x\in I,y'=(x,y(x))$

1.4.1 الحل الأعظمي و الحل الشمولي

تعريف (تمديد الحل) : ليكن $y:I\to\mathbb{R}$ و $\tilde{y}:\tilde{I}\to\mathbb{R}$ حلين للمعادلة التفاضلية (1.4).

نقول أن الحل $\tilde{y}$ هو تمديد للحل y إذا تحقق ما يلي :

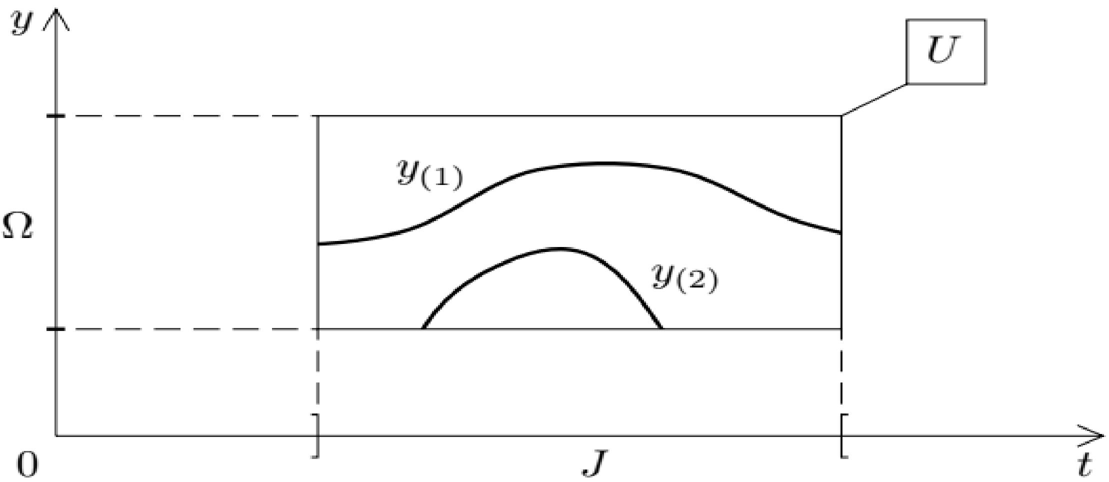
1) $I\subset\tilde{I}$

2) $\tilde{y}/I=y$ بمعنى $y=\tilde{y},\forall x\in I$

تعريف (الحل الأعظمي –Solution maximale) : نقول أن الحل: $y:I\to\mathbb{R}$ أنه حل أعظمي إذا كان لا يقبل أي تمديد له سوى نفسه.

تعريف (الحل الشمولي –Solution globale) : نقول عن الحل y أنه شمولي إذا كان معرفًا على I بأكمله.

مثال 1 : نعتبر y_1 ، y_2 حلين للمعادلة التفاضلية (1.4) كما هو مبين في الشكل التالي :



في الشكل أعلاه إن y_1 يعتبر حل شمولي، بينما y_2 حل أعظمي.

مثال 2 : نعتبر المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' = y^2$$

المعرفة على $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

لنحل هذه المعادلة :

- إن $y = 0$ يعتبر حلًا لها.

- إذا كان $y \neq 0$ يمكن كتابة المعادلة كما يلي : $\frac{y'}{y^2} = 1$ حيث $y' = \frac{dy}{dx}$ ومنه $\frac{dy}{y^2} = dx$ وبمكاملة الطرفين نجد : $\int \frac{dy}{y^2} = \int dx$ ومنه $-\frac{1}{y} = x + c$ وعليه فإن :

$$y(x) = -\frac{1}{x+c}$$

حيث c ثابت اختياري.

فهذه العبارة تعرف لنا حلين لهذه المعادلة معرفين على المجالين $]-\infty, -c[,]-c, +\infty[$ على التوالي.

فهذان الحلان هما أعظميان لكن ليس شموليان.

- في هذا المثال $y(x) = 0$ هو الحل الشمولي الوحيد لهذه المعادلة.

1.4.2 شرط ليبشتز (Lipschitz)

تعريف : نقول أن الدالة f تحقق شرط ليبشتز(بالنسبة للمتغير الثاني) في نطاق D من $\mathbb{R}^2$، إذا وجد ثابت k>0 بحيث :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k\,|y_1 - y_2|, \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D$$

ويسمى الثابت k بثابت ليبشتز للدالة f، وتسمى الدالة f عندئذٍ بدالة ليبشتز.

مثال 1 :

نعتبرالدالة $f(x, y) = x^2 y^2$ والمنطقة D من $\mathbb{R}^2$ معرفة كالتالي :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$$

أثبت أن الدالة f تحقق شرط ليبشتز وعين ثابت ليبشتز

الحل : من أجل كل من $(x, y_2), (x, y_1)$ من D لدينا :

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= x^2 |y_1^2 - y_2^2| \\ &= x^2 |y_1 - y_2| |y_1 + y_2| \\ &\leq 8 |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

إذن الدالة f تحقق شرط ليبشتز وأن k=8.

مثال 2 :

نعتبر $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$ و $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 2, |y| \leq 1\}$

بين أن الدالة f لا تحقق شرط ليبشتز على النطاق D.

الحل : بما أن $x \to 0^+$ يؤدي إلى $\frac{2}{x}$ يقترب من اللانهاية، لذلك لا يمكن إيجاد عددًا موجبًا غير معدوم k يحقق العلاقة $k \geq \frac{2}{x}$ وهذا يعني أن f لا تحقق شرط ليبشتز على D.

مبرهنة : إذا كانت الدالة f تحقق الشرط

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le k, \forall (x,y) \in D$$

فإن شرط ليبشتز يتحقق بنفس الثابت k .

البرهان :

لإثبات ذلك نستخدم نظرية التزايدات المنتهية في نقطتين كيفيتين مختلفتين $(x,y_1),(x,y_2)$ من النطاق D فنجد :

$$f(x,y_1)-f(x,y_2)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,z)(y_1-y_2)$$

حيث : $y_1<z<y_2$ ، وبما أن $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le k, \forall (x,y) \in D$ و $(x,z) \in D$ فإن :

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right| \le k\left|y_1-y_2\right|$$

وهذا يعني أن الدالة f تحقق شرط ليبشتز بنفس الثابت k.

تنبيه : عكس المبرهنة السابقة غير صحيح.

مثال : لنعتبر الدالة $f(x,y)=|y|$ إن الدالة f تحقق شرط ليبشتز في جوار النقطة $(x,0)$ وذلك لأن :

$$\begin{aligned}\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right| &= \left||y_1|-|y_2|\right| \\ &\le \left|y_1-y_2\right|\end{aligned}$$

مع أن الدالة f لا تقبل الإشتقاق بالنسبة للمتغير الثاني y عند $(0,0)$.

المحاضرة الثالثة

طريقة بيكارد للتقريبات المتعاقبة

5.1 مسألة كوشي

تعريف : لنفترض أن لدينا المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى

$$y' = f(x, y)$$

الخاضعة للشرط الإبتدائي : $y(x_0) = y_0$، نسمي مسألة ايجاد حل للمعادلة (E) طبقًا للشرط المعطى بمسألة كوشي أو مسألة القيمة الإبتدائية ويسمى الشرط $y(x_0) = y_0$ بالشرط الإبتدائي.

الشكل التكاملي لمسألة كوشي

مبرهنة : يكون $y(x)$ حلًا لمسألة كوشي إذا وفقط إذا كان حلًا للمعادلة التكاملية[1] التالية :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

الإثبات :

ليكن $y(x)$ حلًا لمسألة كوشي إذن فهو يحقق

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

نكامل كلا الطرفين بالنسبة للمتغير x فنجد :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

من جهة أخرى نشتق العبارة $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$ فنجد المطلوب.

6.1 طريقة بيكارد (Picard)

توجد الكثير من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى لا يمكن الحصول على حلها الدقيق بالطرق المتبعة المعروفة، لذا نلجأ لطريقة بيكارد لإيجاد حلولاً تقريبية لها.

لقد رأينا سابقًا أن حل مسألة كوشي يكافئ حل المعادلة التكاملية التالية :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

وللحصول على تقريبات للحل $y(x)$ نتبع ما يلي :

نعوض $y(s)$ بالشرط الإبتدائي y_0 في التكامل $\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$ فنحصل على التقريب الأول كما يلي :

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds$$

ثم نعوض $y(s)$ ب $y_1(s)$ فنحصل على التقريب الثاني

[1] المعادلة التكاملية هي كل معادلة المجهول فيها يكون دالة تحت رمز التكامل.

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\left(s,y_1(s)\right)ds$$

وهكذا حتى نحصل على باقي التقريبات المتعاقبة وهي كالتالي :

$$\begin{cases} y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\left(s,y_0\right)ds \\ y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\left(s,y_1(s)\right)ds \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\left(s,y_{n-1}(s)\right)ds \end{cases}$$

وبالتالي نحصل على متتالية التقريبات المتعاقبة

$$y_0(x), y_1(x), \ldots\ldots, y_n(x)$$

مثال : بإستخدام طريقة بيكارد، أحسب الحلول التقريبية لمسالة كوشي الآتية :

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0)=1 \end{cases}$$

ثم استنتج الحل الدقيق لها.

الحل :

نعلم أن التقريب الأول كما يلي :

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\left(s,y_0\right)ds$$

وبالتعويض نجد

$$y_1(x)=1+\int_{0}^{x} ds=1+x$$

كما أن التقريب الثاني هو :

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\left(s,y_1(s)\right)ds$$

$$=1+\int_{0}^{x}(1+s)ds$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}$$

أما التقريب الثالث للمسألة فهو :

$$y_3(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\left(s,y_2(s)\right)ds$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

وهكذا إلى أن نصل إلى التقريب النوني

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

الذي يتقارب نحو e^x وهو الحل الدقيق لهذه المسألة.

1.6 وجود الحل ووحدانيته

أ) لتكن لدينا مسألة كوشي التالية :

$$\begin{cases} |y'| + |y| = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

إن هذه المسألة لا تقبل أي حل وذلك لأن $y = 0$ هو الحل الوحيد لها، لكنه لا يحقق شرطها الإبتدائي.

ب) نعتبر الآن المسألة :

$$\begin{cases} y' = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

بالمكاملة نجد $y = \frac{1}{2}x^2 + c$ حيث c ثابت اختياري، وبإستخدام شرطها الإبتدائي نجد $c = 1$

وبالتالي $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ هو الحل الوحيد لهذه المسألة.

ج) أخيرًا وليس آخرًا نعتبر مسألة كوشي التالية :

$$\begin{cases} xy' = y - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

التي يكون حلها $y = 1 + cx$ وبإستخدام شرطها الإبتدائي نرى أنه لا يمكن تحديد قيمة c، وبالتالي فإن هذه المسألة عدد لا نهائي من الحلول.

نستنتج من خلال هذه الأمثلة الثلاثة أن مسألة كوشي قد يكون لها حل وحيد أو أكثرمن حل أو لا يوجد لها أي حل، وهذا يقودنا إلى طرح التساؤلات التالية :

- تحت أي شروط على f حتى يكون لمسألة كوشي حلاً على الأقل. (مسألة الوجود)
- تحت أي شروط على f حتى يكون لمسألة كوشي حلاً وحيدًا. (مسألة الوحدانية)
- إن النظرية التي تحوي هذه الشروط تسمى بنظرية الوجود والوحدانية، وهي موضوع محاضرتنا القادمة.

المحاضرة الرابعة

نظرية الوجود والوحدانية

نظرية الوجود والوحدانية (كوشي- ليبشتز) :

إذا كانت الدالة f مستمرة على R وتحقق شرط ليبشتز بالنسبة للمتغير الثاني y عليه، حيث R هو المستطيل الذي مركزه (x_0,y_0) والمعرف كما يلي :

$$R=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : |x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\right\}$$

حيث : b,a موجبان تمامًا

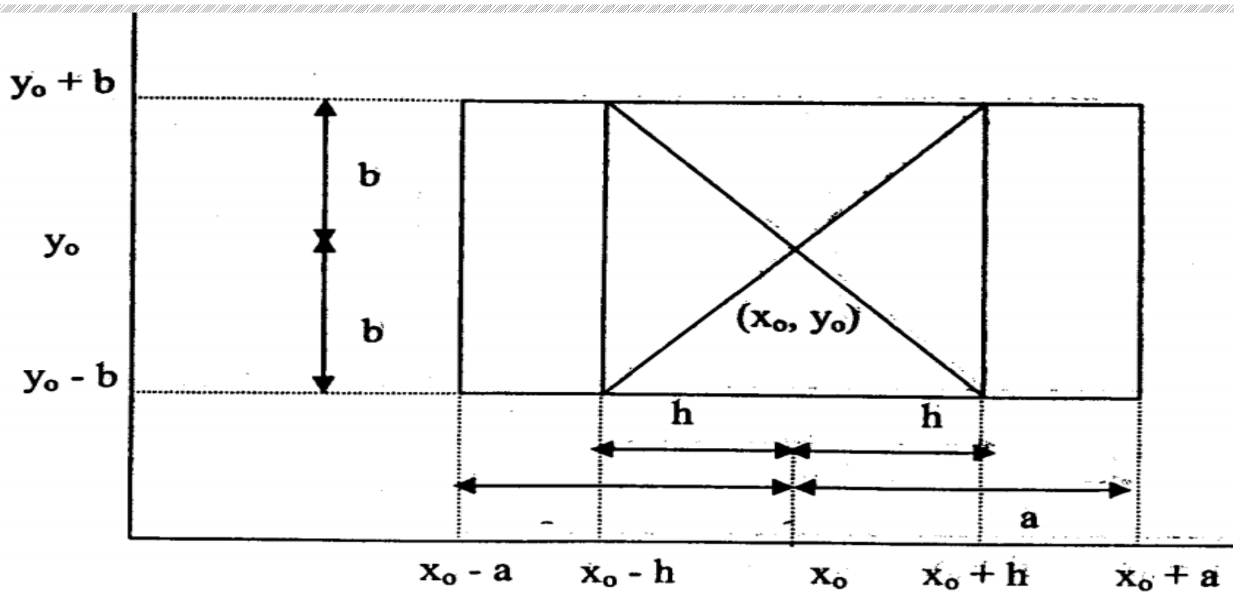
فإنه يوجد حلاً وحيدًا لمسألة كوشي $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ على المجال $[x_0-h, x_0+h]$ حيث : $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$ مع $M=\sup\limits_{R}|f(x,y)|$.

البرهان :

سوف نبرهن على هذه النظرية بإستخدام طريقة بيكارد للتقريبات المتعاقبة

$$\begin{cases} y_1(x)=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s,y_0)\,ds \\ y_2(x)=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s,y_1(s))\,ds \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ y_n(x)=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1}(s))\,ds \end{cases}$$

سنقسم البرهان إلى خمس خطوات رئيسية.



الخطوة الأولى :

نثبت من أجل كل x من المجال $[x_0 - h, x_0 + h]$ المنحنى (y_n) يقع داخل المستطيل R أي أن :

$$|y_n(x) - y_0| \leq b$$

ولإثبات هذا نستخدم البرهان بالتراجع.

- § نتأكد من صحة الخاصية من أجل $n = 1$ أي نتأكد من أن : $|y_1(x) - y_0| \leq b$

لدينا :

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\, ds \right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y_0)|\, ds \leq M\, |x - x_0|$$

$$\leq Mh \leq b$$

- § نفرض أن (y_{n-1}) تقع داخل R وبالتالي تكون $f(x, y_{n-1}(x))$ معرفة ومستمرة على المجال $[x_0 - h, x_0 + h]$ وتحقق $|f(x, y_{n-1}(x))| \leq M$ ومنه :

$$|y_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1})\, ds \right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1})|\, ds \leq M\, |x - x_0|$$

$$\leq Mh \leq b$$

وهذا يعني أن (y_n) تقع داخل R.

الخطوة الثانية :

نثبت أن : $|y_n - y_{n-1}| \leq \dfrac{Mk^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n$

للبرهان على هذه المتباينة نستخدم أيضًا البرهان بالتراجع.

- § الخاصية صحيحة من أجل $(n = 1$ حسب الخطوة الأولى).

§ الآن لنفرض أن المتباينة محققة من أجل n ولنثبت صحتها من أجل $n+1$ أي نثبت :

$$|y_{n+1}-y_n|\le \frac{Mk^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

لدينا

$$|y_{n+1}-y_n|=\left|\int_{x_0}^{x}\{f(s,y_n)-f(s,y_{n-1})\}ds\right|$$

$$\le \int_{x_0}^{x}|f(s,y_n)-f(s,y_{n-1})|ds$$

وبإستخدام شرط ليبشتز نجد أن :

$$|f(s,y_n)-f(s,y_{n-1})|\le k|y_n-y_{n-1}|$$

ومنه

$$|y_{n+1}-y_n|\le k\int_{x_0}^{x}|y_n-y_{n-1}|ds$$

$$\le k\frac{Mk^{n-1}}{n!}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{n+1}$$

وهذا يعني

$$|y_{n+1}-y_n|\le \frac{Mk^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

وهي المتباينة المطلوبة، الآن لننتقل إلى الخطوة الموالية.

الخطوة الثالثة :

سوف نثبت أن المتتالية $(y_n(x))_{n\ge 1}$ متقاربة بإنتظام من أجل كل x من المجال $[x_0-h,x_0+h]$.

من الخطوة الثانية لدينا :

$$|y_n-y_{n-1}|\le \frac{Mk^{n-1}}{n!}|x-x_0|^n$$

لننشئ السلسلة التالية :

$$(1)\; y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+\dots\dots\dots+(y_n-y_{n-1})+\dots\dots\dots\dots$$

لنضع :

$$s_n=y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+\dots\dots+(y_n-y_{n-1})=y_n$$

حسب تقارب السلاسل و المتتاليات فإن تقارب السلسلة (1) يكافئ تقارب المتتالية $(y_n)_{n\ge 1}$، ولدينا

$$|y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+\dots\dots\dots+(y_n-y_{n-1})+\dots\dots\dots\dots|$$

$$\le |y_0|+Mh+\frac{1}{2!}Mkh^2+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{n!}Mk^{n-1}h^n+\dots\dots\dots$$

$$\le |y_0|+\frac{M}{k}\left(e^{kh}-1\right)$$

وبالتالي فإن السلسلة متقارية مطلقًا وبإنتظام على المجال $[x_0-h,x_0+h]$، وإذا أخذنا المجموع الجزئي حتى الرتبة l فإننا نحصل على

$$y_l(x)=y_0+\sum_{n=1}^{l}(y_n(x)-y_{n-1}(x))$$

فهذه العلاقة تبيّن أيضًا أن المتتالية $(y_n(x))_{n\ge 1}$ متقاربة على المجال $[x_0-h,x_0+h]$ وتؤول إلى دالة ما في المتغير x

أي أن :

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(x) = y(x)$$

الخطوة الرابعة :

بيّنا في الخطوة السابقة أن : $\lim_{n\to+\infty} y_n(x) = y(x)$. سوف نثبت في هذه الخطوة أن $y(x)$ حلًا للمعادلة التفاضلية $y' = f(x,y)$ بإستخدام شرط ليبشتز لدينا :

$$\left|f(x,y) - f(x,y_n)\right| \le k\left|y - y_n\right|$$

وهذا يبيّن أن $f(x,y_n)$ تؤول بإنتظام إلى $f(x,y)$، وحسب التقريب النوني لدينا : $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1}(s))ds$ وبإدخال النهاية للطرفين نجد :

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1}(s))ds\right)$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to+\infty} f(s,y_{n-1}(s))ds$$

$$= y_0 + \left(\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds\right)$$

وباشتقاق الطرفين نجد $y' = f(x,y)$ مع $y(x_0) = y_0$.

- وبذلك فإن الخطوات الأربع السابقة تثبت وجود الحل لمسألة كوشي، بقيّ الآن أن نثبت أن هذا الحل وحيد.

الخطوة الخامسة (وحدانية الحل) :

لإثبات الوحدانية نعتمد على متباينة غرونويل (Gronwall) التي تلعب دورًا كبيرًا في ميدان المعادلات التفاضلية.

توطئة (متباينة غرونويل) :

ليكن g, f تابعين مستمرين موجبين على مجال $[a,b]$ ويحققان المتباينة التالية :

$$f(x) \le N + \int_{a}^{x} f(s)g(s)ds, \ \forall x \in [a,b]$$

حيث Nثابت حقيقي موجب$(N \ge 0)$، عندئذٍ يكون

$$f(x) \le N e^{\int_a^x g(s)ds}, \ \forall x \in [a,b]$$

- لنعود الآن لإثبات الوحدانية، نفرض أن y_2, y_1 حلين لمسألة كوشي وبالتالي :

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y_1(s))ds$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y_2(s))ds$$

ومنه :

$$|y_2(x)-y_1(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))|ds$$

$$\le k\int_{x_0}^{x} |y_2(x)-y_1(x)|ds$$

بأخذ $f(x)=|y_2(x)-y_1(x)|, g(x)=1, N=0$ في توطئة غرونويل نجد :

$$f(x) \le 0 + k\int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

وبالتالي نحصل على

$$f(x) \le 0e^{-\int_{x_0}^{x} g(s)ds} = 0$$

أي أن :

$$|y_2(x)-y_1(x)| \le 0$$

وهذا يعني أن : $y_2(x)=y_1(x)$ وبالتالي وحدانية الحل.

مثال : نعتبر مسألة كوشي التالية $y'=x^2+y^2$ مع الشرط $y(0)=0$. بإستخدام نظرية كوشي - ليبشتز بيّن أنها تقبل حلًا وحيدًا على مجال يطلب تعيينه (اعتبر $R=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : |x|\le 1, |y|\le 1\}$).

الحل : بما أن الدالة $f(x,y)=x^2+y^2$ مستمرة على المستطيل R و لدينا : من أجل كل $(x,y_2),(x,y_1)$ من R

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)| = |y_2{}^2 - y_1{}^2|$$
$$= |y_2-y_1||y_2+y_1|$$
$$\le 2|y_2-y_1|$$

اذن الدالة f تحقق شرط ليبشتزعلى المستطيل R، و بالتالي حسب نظرية كوشي - ليبشتز المسألة تقبل حلًا وحيدًا على المجال $[-h,h]$، لدينا : $M=\sup_R |f(x,y)|=2$ و $h=\min\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ أي على المجال $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

نظرية الوجود لبيانو

لقد اشترطنا فيما سبق أن تحقق الدالة f شرط ليبشتز لكي يكون لمسألة كوشي حلًا وحيدًا، ولكن هذا الشرط قد لا يتحقق في الكثير من المعادلات التفاضلية مثلًا : $y'=\sqrt{|y|}$ الأمر الذي يجعلنا نطرح السؤال التالي :

هل يكفي استمرار f لإثبات وجود لمسألة كوشي؟.

إن الجواب على هذا التساؤل كان ايجابيًا من طرف "بيانو".

نظرية وجود الحل "بيانو" :

ليكن $f(x,y)$ تابع مستمر ومحدود على الشريط

$$T=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : |x-x_0|\le a, |y|<\infty\}$$

فإن مسألة كوشي :

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

تقبل على الأقل حلًا في المجال $[x_0-a,x_0+a]$.

نتيجة : إذا كان f مستمرًا في المستطيل $R=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : |x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\}$ فإن مسألة كوشي تقبل على الأقل حلًا في المجال $[x_0-h,x_0+h]$ حيث : $h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)$ مع $M=\sup_R |f(x,y)|$.

مثال : نعتبر مسألة كوشي التالية :

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}} \\ y(0)=0 \end{cases}$$

إن الدالة $f(x,y)=y^{\frac{2}{3}}$ مستمرة من أجل كل (x,y) من $\mathbb{R}^2$ فحسب النتيجة السابقة المسألة تقبل على الأقل حلًا في المجال $[-h,h]$ حيث : $h=\min\left(a,b^{\frac{1}{3}}\right)$.

المحاضرة الخامسة

تكامل (أو حل) بعض أنواع المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

رأينا سابقًا أن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى المنحلة بالنسبة للمشتق تكون على الشكل : $y' = f(x,y)$
والتي يمكن التعبير عنها بالعلاقة التالية :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

إن معظم المعادلات التفاضلية من هذا الشكل تُرتب إلى أربعة أنواع :
منفصلة المتغيرات – المتجانسة – الخطية – تُرد (تؤول) إلى خطية.

1.7 المعادلات المنفصلة المتغيرات

تعريف : نسمي معادلة تفاضلية ذات متغيرات منفصلة كل معادلة يُمكن جعلها على الشكل

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

طريقة حلها :
لحلها نكامل الطرفين : $\int f(x)dx + \int g(y)dy = c$ حيث c ثابت اختياري.

مثال : كامل المعادلة التفاضلية التالية :

$$e^x \cos y dx + (1+e^x)\sin y dy = 0$$

الحل :
بفصل المتغيرات وذلك بقسمة طرفي المعادلة على $(1+e^x)\cos y$، نجد

$$\frac{e^x}{1+e^x}\cos y dx + \frac{\sin y}{\cos y}dy = 0$$

بالتكامل المباشر نحصل على

$\ln(1+e^x) - \ln|\cos y| = \ln|c|$ ومنه $\ln\frac{1+e^x}{|\cos y|} = \ln|c|$, وبالتالي :

$1+e^x = |c \cos y|$ **(حيث c ثابت اختياري)**

وهي تمثل عبارة الحل في شكله الضمني.

المعادلة من الشكل $y' = f(ax+by+c)$ **:**

حيث a,b,c ثوابت

هذه المعادلة تحوَل إلى معادلة ذات متغيرات منفصلة وذلك بإجراء التحويل التالي :

$z = ax+by+c$ ومنه $\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$ وعليه نجد

$$\frac{dz}{a+bf(z)} = dx$$

وهي معادلة ذات متغيرات منفصلة.

مثال : حل المعادلة التفاضلية $y' = 2x+y$

الحل : نضع $z = 2x+y$ ومنه $\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$ وبالتعويض في المعادلة نجد $\frac{dz}{dx} = 2+z$ وعليه $\frac{dz}{2+z} = dx$

وبالمكاملة نجد $\ln|2+z| = x + \ln|c|$ وبالتالي $z = -2 + ce^x$ ومنه

$$y = ce^{x} - 2x - 2$$

حيث c ثابت اختياري.

1.8 المعادلات التفاضلية المتجانسة

تعريف (الدالة المتجانسة) : نقول عن الدالة $f(x,y)$ أنها متجانسة (بالنسبة للمتغيرين y,x) من الدرجة n، إذا تحقق

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{n} f(x,y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

أمثلة :

1) الدالة $f(x,y)=\sqrt[3]{x^{3}+y^{3}}$ متجانسة من الدرجة الأولى, لأن

$$f(\lambda x,\lambda y)=\sqrt[3]{(\lambda x)^{3}+(\lambda y)^{3}}=\lambda\sqrt[3]{x^{3}+y^{3}}=\lambda f(x,y)$$

2) الدالة $f(x,y)=xy-y^{2}$ متجانسة من الدرجة الثانية, لأن

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)(\lambda y)-(\lambda y)^{2}=\lambda^{2}\left(xy-y^{2}\right)=\lambda^{2} f(x,y)$$

3) الدالة $f(x,y)=\dfrac{x^{2}-y^{2}}{xy}$ متجانسة من الدرجة صفر, لأن

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^{2}-(\lambda y)^{2}}{(\lambda x)(\lambda y)}=\frac{x^{2}-y^{2}}{xy}=\lambda^{0} f(x,y)$$

تعريف (المعادلة التفاضلية المتجانسة) : نقول أن المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ أنها متجانسة, إذا كانت الدالتين N,M متجانستين وبنفس الدرجة.

مثال : أثبت أن المعادلة التالية متجانسة

$$x^{2}y'=x^{2}+y^{2}-xy$$

الحل : لدينا $x^{2}\dfrac{dy}{dx}=x^{2}+y^{2}-xy$ أي أن $\left(x^{2}+y^{2}-xy\right)dx-x^{2}dy=0$

إذن $M(x,y)=x^{2}+y^{2}-xy$ و $N(x,y)=-x^{2}$ و بما أن

$$M(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^{2}+(\lambda y)^{2}-(\lambda x)(\lambda y)=\lambda^{2} M(x,y)$$

$$N(\lambda x,\lambda y)=-(\lambda x)^{2}=\lambda^{2} N(x,y)$$

وهذا يعني أن كلا الدالتين N,M متجانستين بنفس الدرجة (الثانية) وعليه فالمعادلة التفاضلية المعطاة متجانسة.

تعريف آخر : نقول أن المعادلة التفاضلية $y'=f(x,y)$ أنها متجانسة, إذا كانت الدالة f متجانسة من الدرجة صفر.

مثال : أثبت أن المعادلة التفاضلية التالية متجانسة

$$2x^{2}ydx=\left(3x^{3}+y^{3}\right)dy$$

الحل : لدينا $\left(3x^{3}+y^{3}\right)\dfrac{dy}{dx}=2x^{2}ydx$ ومنه $y'=\dfrac{2x^{2}y}{3x^{3}+y^{3}}=f(x,y)$ إذن

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{2(\lambda x)^{2}(\lambda y)}{3(\lambda x)^{3}+(\lambda y)^{3}}=\frac{2\lambda^{3}x^{2}y}{3\lambda^{3}x^{3}+\lambda^{3}y^{3}}=\frac{2x^{2}y}{3x^{3}+y^{3}}$$

وهذا يعني أن الدالة f متجانسة من الدرجة 0, وبالتالي المعادلة المعطاة متجانسة.

قضية : المعادلة التفاضلية المتجانسة هي كل معادلة يُمكن كتابتها على الشكل :

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

الإثبات : لتكن (E).................. $y' = f(x,y)$ حسب التعريف المعادلة (E) متجانسة إذا كانت الدالة f متجانسة ومن الدرجة صفر، وبالتالي من أجل كل λ من $\mathbb{R}$ يكون : $f(\lambda x,\lambda y) = f(x,y)$ وبأخذ $\lambda = \frac{1}{x}$ مع $x \neq 0$ نجد $f\left(1,\frac{y}{x}\right) = f(x,y)$ إذن تصبح المعادلة (E) كما يلي : $y' = f\left(1,\frac{y}{x}\right)$ نكتب $f\left(1,\frac{y}{x}\right)$ على الشكل $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ومنه $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

طريقة حل المعادلة التفاضلية المتجانسة :

عرفنا من خلال ما سبق أن المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 ....(E)$$

تتميز بأن كلا من الدالتين M,N متجانستين من نفس الدرجة بالنسبة للمتغيرين y,x.

بإستعمال القضية السابقة نستنتج أن النسبة $\frac{M}{N}$ دالة في $\frac{y}{x}$ فقط, وبقسمة طرفي المعادلة (E) على $N(x,y)$ نحصل على المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} + g\left(\frac{y}{x}\right) = 0 ....(E')$$

إن هذه المعادلة نستطيع تحويلها إلى معادلة ذات متغيرات منفصلة وذلك بوضع : $v = \frac{y}{x}$ ومنه $y = vx$ ومنه نحصل على $dy = vdx + xdv$ وبالتعويض في (E') نحصل على المعادلة : $x\frac{dv}{dx} + v + g(v) = 0$ وهي معادلة ذات متغيرات منفصلة لأن $x\frac{dv}{dx} = -v - g(v)$ أي $\frac{dx}{x} = \frac{dv}{-g(v) - v}$.

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - xy\right)dy = 0$$

الحل : من الملاحظ أن كلا من الدالتين N,M متجانسة ومن الدرجة الثانية, فإذا اخترنا $y = vx$ فسنحصل على

$$\left(x^2 + v^2x^2\right)dx + \left(x^2 - vx^2\right)(vdx + xdv) = 0$$

ومنه $x^2(1+v)dx + x^3(1-v)dv = 0$ وبفصل المتغيرات نحصل على

$$\frac{dx}{x} + \left(-1 + \frac{2}{1+v}\right)dv = 0$$

وبالمكاملة نجد $\ln|x| - v + 2\ln|1+v| + \ln|c| = 0$ وبالتبسيط نجد

$$c(x+y)^2 = xe^{\frac{y}{x}}$$

حيث c ثابت اختياري, وهي تمثل عبارة حلها العام في شكله الضمني.

ملاحظة : يُمكن أيضًا استخدام التحويل $v = \frac{x}{y}$.

المحاضرة السادسة

بعض المعادلات التفاضلية التي تحول إلى متجانسة

1.9 المعادلات التفاضلية من الشكل $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ حيث c_2,b_2,a_2,c_1,b_1,a_1 ثوابت معلومة

إن حل هذه المعادلة التفاضلية مرتبط بتقاطع المستقيمين $(D_2),(D_1)$ حيث

$$(D_1): a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$(D_2): a_2x+b_2y+c_2=0$$

إذن لابد من دراسة الجملة $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ والتي محددها $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$

وبالتالي نميز حالتين.

الحالة الأولى (المستقيمان متقاطعان) :

أي أن $\Delta\neq 0$ لتكن (x_0,y_0) هي نقطة تقاطعهما في هذه الحالة المعادلة تحول إلى متجانسة بالإعتماد على التحويل التالي $\begin{cases} x=x_0+t \\ y=y_0+z \end{cases}$ يصبح $\begin{cases} dx=dt \\ dy=dz \end{cases}$ وبالتالي يكون

$$\frac{dz}{dt}=f\left(\frac{a_1(x_0+t)+b_1(y_0+z)+c_1}{a_2(x_0+t)+b_2(y_0+z)+c_2}\right)$$

$$=f\left(\frac{a_1t+b_1z_1}{a_2t+b_2z}\right)$$

وهي معادلة متجانسة بالنسبة للمتغيرين z,t.

الحالة الثانية (المستقيمان متوازيان) :

أي $\Delta=0$ ومنه $a_1b_2=a_2b_1$ وبالتالي $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k\neq\frac{c_2}{c_1}$ حيث k ثابت حقيقي، والمعادلة تصبح

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=F(a_1x+b_1y)$$

وتحوَل إلى معادلة منفصلة المتغيرات تندرج تحت النوع $y'=f(ax+by+c)$ الذي درسناه سابقًا.

مثال 1 : حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(2y-x-1)dx-(6y-3x+2)dy=0$$

الحل : لنبحث عن الوضعية النسبية للمستقيمين فنجدهما متوازيان، اذن نجري التحويل $z=-x+2y$ ومنه $dx=2dy-dz$ وبالتعويض في المعادلة نجد

$$(z-1)(2dy-dz)-(3z+2)dy=0$$

بالتبسيط نجد

$$(z-1)dz+(z+4)dy=0$$

ومنه

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{z+4}{z-1}$$

وهي معادلة منفصلة المتغيرات وبمكاملتها نجد

$$z+y+c-5\ln|z+4|=0$$

وعليه فإن حل المعادلة يتمثل في العبارة التالية

$$3y-x+c=5\ln|2y-x+4|$$

حيث c ثابت اختياري.

مثال 2 : حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(-3x+y+6)dx+(x+y+2)dy=0$$

الحل : إن المستقيمان متقاطعان ولإيجاد نقطة تقاطعهما نحل الجملة فنجد

$$\begin{cases}-3x+y+6=0\\ x+y+2=0\end{cases}$$

نجد $x_0=1, y_0=-3$ أي أن نقطة التقاطع هي $(1,-3)$.

الآن نقوم بإجراء التحويل التالي :

$$\begin{cases}x=x_0+t\\ y=y_0+z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1+t\\ y=-3+z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=dt\\ dy=dz\end{cases}$$

نقوم بالتعويض في المعادلة فنحصل على

$$(-3t+z)dt+(t+z)dz=0$$

وهي معادلة متجانسة، لحلها نطبق عليها ما تعلمناه سابقًا فنحصل على

$z^2+2tz-3t^2=0$ وبالتعويض عن z و t نحصل على حل المعادلة في شكله الضمني

$$(y+3)^2+2(x-1)(y+3)-3(x-1)^2=c$$

حيث c ثابت اختياري.

1.10 المعادلات التفاضلية شبه المتجانسة

تعريف (الدالة شبه المتجانسة) : نقول عن دالة $f(x,y)$ أنها شبه متجانسة من الدرجة k إذا تحقق الشرط يوجد α,β من $\mathbb{R}$ بحيث

$$f(t^{\alpha}x,t^{\beta}y)=t^{k}f(x,y)$$

تعريف (المعادلة شبه المتجانسة) : نقول أن المعادلة $y'=f(x,y)$ أنها شبه متجانسة إذا كانت الدالة $f(x,y)$ شبه متجانسة من الدرجة $\beta-\alpha$، بمعنى إذا تحققت المساواة :

$$f(t^{\alpha}x,t^{\beta}y)=t^{\beta-\alpha}f(x,y)$$

مثال : تحقق أن الدالة $f(x,y)=\dfrac{x^6-y^4}{x^4y}$ شبه متجانسة.

الحل : لدينا

$$f(t^{\alpha}x,t^{\beta}y)=\frac{(t^{\alpha}x)^6-(t^{\beta}y)^4}{(t^{\alpha}x)^4(t^{\beta}y)}$$

$$= \frac{t^{6\alpha}x^{6} - t^{6\beta}y^{4}}{t^{4\alpha}x^{4} - t^{\beta}y}$$

$$= t^{\beta-\alpha}\frac{x^{6} - y^{4}}{x^{4}y}$$

نجد $3\alpha = 2\beta$ وعليه فالدالة f شبه متجانسة.

طريقة الحل :

لحل هذا النوع من المعادلات نضع $y = \mu x^{\frac{\beta}{\alpha}}$.

مثال : أثبت أن المعادلة التفاضلية شبه متجانسة ثم حلها

$$2xdy + \left(x^{2}y^{4}+1\right)ydy = 0$$

الحل :

نكتب $\frac{dy}{dx} = -\frac{y\left(x^{2}y^{4}+1\right)}{2x}, x \neq 0$ ومنه $f\left(x, y\right) = -\frac{y\left(x^{2}y^{4}+1\right)}{2x}$، وبالتالي

$$f\left(t^{\alpha}x, t^{\beta}y\right) = \frac{t^{\beta}y\left(t^{2\alpha}x^{2}t^{4\beta}y^{4}+1\right)}{2t^{\alpha}x} = t^{\beta-\alpha}\frac{y\left(x^{2}y^{4}+1\right)}{2x}$$

وبالتالي نجد $\alpha + 2\beta = 0$ أي أن المعادلة شبه متجانسة من أجل $\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{2}$.

الآن نضع $y = x^{-\frac{1}{2}}\mu$ ومنه $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\mu + x^{-\frac{1}{2}}\frac{d\mu}{dx}$، وبالتعويض في المعادلة نجد

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{\mu^{5}}{2x}$$

وبفصل المتغيرات نجد

$$\frac{dx}{x} = -2\frac{d\mu}{\mu^{5}}, \mu \neq 0$$

وبالمكاملة نجد

$$cx = \exp\left(-\frac{\mu^{-4}}{2}\right)$$

وأخيرًا نجد

$$cx = \exp\left(\frac{x^{-2}y^{-4}}{2}\right)$$

أيضًا $x = 0\ (y \neq 0)$ و $y = 0\ (x \neq 0)$ حلولاً شاذة لها.

ملاحظة مفيدة : كل معادلة شبه متجانسة يمكن جعلها متجانسة بإجراء التغيير التالي : $y = z^{\alpha}$ حيث α هو العدد الحقيقي الذي من أجله جميع حدود المعادلة متساوية.

مثال . حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$2xy'\left(x - y^{2}\right) + y^{3} = 0$$

الحل : نأخذ $y = z^{\alpha}$ فنجد

$$2x^{2}\alpha z^{\alpha-1}z' - 2x\alpha z^{3\alpha-1}z' + z^{3\alpha} = 0$$

وبالتالي لدينا

الحد الأول درجته $\alpha+1 = 2+(\alpha-1)$

الحد الثاني درجته $3\alpha = 1+(3\alpha-1)$

الحد الثالث درجته 3α

كل الحدود هي من الدرجة إذا كان $\alpha+1=3\alpha$ أي $\alpha=\frac{1}{2}$، اذن $y=z^{\frac{1}{2}}$ وبالتعويض نحصل على

$$z' = \frac{z^2}{x(z-x)}, x \neq 0$$

وهذه معادلة متجانسة (تأكد من ذلك) نأخذ $v=\frac{z}{x}$ أي $z=vx$ ومنه

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{v-1}$$

وبالفصل نجد

$$\frac{v-1}{v}dv = \frac{dx}{x}$$

وبالمكاملة نجد

$$v - \ln|v| = \ln|x| + \ln|c|$$

ومنه الحل العام يُعطى في شكله الضمني بالعلاقة الآتية

$$y^2 = x\ln|cy^2|$$

حيث c ثابت اختياري.

المحاضرة السابعة

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

تعريف : نسمي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى كل معادلة من الشكل

$$y' + p(x)y = f(x)................(E)$$

(يُسمى هذا الشكل بالشكل القياسي)

حيث f و p دالتان مستمرتان على مجال I من $\mathbb{R}$.

طريقة الحل :

هناك طريقتان لحل هذا النوع من المعادلات وهما

الطريقة الأولى (طريقة تغيير الثابت) :

قبل عرض هذه الطريقة نحتاج إلى المبرهنة التالية

مبرهنة : الحل العام للمعادلة (E) هو

$$y = y_g = y_p + y_h$$

حيث y_p حل خاص لها و y_h حل المتجانسة.

الإثبات : بما أن y_p حل خاص للمعادلة (E) فهو يحققها إذن

$$y'_p + p(x)y_p = f(x)$$

و y حل لها إذن

$$y' + p(x)y = f(x)$$

وبطرح المعادلتين بعضهما من بعض نحصل على

$$(y - y_p)' + p(x)(y - y_p) = 0$$

وهذا يعني أن الفرق $(y - y_p)$ حلًا للمتجانسة، ليكن $y_h = y - y_p$ ومنه $y = y_h + y_p$.

الآن لنعود لطريقتنا نحل أولاً المتجانسة $y' + p(x)y = 0$ ومنه $\frac{y'}{y} = -p(x)$ وبالمكاملة نجد

$$y_h = ce^{-\int p(x)dx}$$

الآن نغيَر الثابت c (أي نجعله متغيرًا بالنسبة إلى x) فيصبح عندنا

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}$$

ثم نعوَض في عبارة (E) فنجد الدالة $c(x)$ فيصبح y هو الحل الخاص y_p .

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$xy' - 2y = x^3$$

الحل : أولاً لنبحث عن حل المعادلة المتجانسة $xy' - 2y = 0$ ومنه $\frac{dy}{dx} = 2\frac{dx}{x}$ إذن $\ln|y| = \ln x^2 + \ln|c|$ وبالتالي نجد

$$y_h = cx^2$$

حيث c ثابت اختياري.

ثانياً نغيَر الثابت c لإيجاد حلاً خاصًا فيصبح $y_p = c(x)x^2$ ومنه $y'_p = c'(x)x^2 + 2xc(x)$ وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد $c(x) = x$ وبالتالي

$$y_p = x^3$$

وعليه فإن

$$y = x^2(x+c)$$

هو الحل العام لهذه المعادلة.

الطريقة الثانية (طريقة جداء تابعين) : وتسمى أيضًا بطريقة لاغرانج، نستخدم التحويل $y=u(x)v(x)$ ومنه $y' = u'v + v'u$ وبالتعويض في المعادلة (E) نجد

$$u'v + v'u + p(x)(uv) = f(x)$$

ومنه نجد

$$uv' + v(pu+u') = f(x) ....(*)$$

نختار التابع $u(x)$ الذي يحقق

$pu+u'=0$ أي أن $pu+\frac{du}{dx}=0$ وهي معادلة منفصلة المتغيرات وبالتالي $\frac{dx}{u} = -pdx$ وبالمكاملة نجد

$$u(x)=e^{-\int p(x)dx}$$

بقي الآن ايجاد التابع $v(x)$ بالرجوع إلى المعادلة $(*)$ وبتعويض $pu+u'=0$ نحصل على $uv'=f(x)$

ومنه $v' = \frac{f(x)}{u(x)}$ وبالتالي نجد

$$v(x)=\int \frac{f(x)}{u(x)}dx + c$$

مثال : لنحل نفس المعادلة السابقة $xy' - 2y = x^3$، المعادلة تكافئ $y' - \frac{2}{x}y = x^2, x \neq 0$ نضع $y=u(x)v(x)$

لنبحث عن كلا من التابعين v,u لدينا $u(x)=e^{-\int p(x)dx}$ حيث $p(x) = -\frac{2}{x}$ ومنه نجد $u(x)=x^2$.

ومن جهة أخرى لدينا $uv'=f(x)$ ومنه نجد $v(x)=x+c$، وبالتالي فالحل العام لهذه المعادلة هو

$$y=x^2(x+c)$$

حيث c ثابت اختياري.

المحاضرة الثامنة

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى و التي ترد إلى خطية (معادلتي برنولي و ريكاتي)

1.11 معادلة برنولي (Bernoulli)

تعريفها : هي معادلة مشهورة تُنسب إلى اسم صاحبها عالم الرياضيات السويسري Bernoulli وتحمل الشكل العام

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

طريقة حلها :

أولًا : عندما $n=1$ تصبح المعادلة من الشكل $y' + p(x)y = q(x)y$ ومنه

$$y' + \big(p(x) - q(x)\big)y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية ذات متغيرات منفصلة.

ثانيًا : عندما $n \neq 1$ نجري التحويل الآتي $z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$ ومنه ينتج $z' = \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$، وبالرجوع إلى المعادلة $y' + p(x)y = q(x)y^n$ وذلك بقسمة طرفيها على y^n نجد $\frac{y'}{y^n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$ وبالتعويض عن z نحصل على المعادلة التالية :

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

وهي معادلة خطية من الرتبة الأولى.

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' + \frac{1}{x}y = y^2$$

الحل : لدينا $n=2$ نجري تغيير المتغير $z = \frac{1}{y}$ ومنه $z' = \frac{-y'}{y^2}$ وبقسمة طرفي المعادلة المعطاة على y^2 نحصل على $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{y} = 1$ وبالتعويض عن z نجد

$$-z' + \frac{1}{x}z = 1$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، بحلها نجد $z = -x\ln|x| + cx$ وعليه فإن حل المعادلة هو

$$y = \frac{1}{x\left(c - \ln|x|\right)}$$

حيث c ثابت اختياري.

معادلة ريكاتي (Riccati)

تعريفها وشكلها العام : معادلة ريكاتي هي كل معادلة تفاضلية من الشكل

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

حيث c,b,a دوال مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$.

طريقة حلها : لا يمكننا حل هذا النوع من المعادلات إلا إذا عرفنا حلًا خاصًا لها وليكن y_1، ثم نقوم بالتحويل $y = y_1 + z$ وبالتعويض في المعادلة نحصل على المعادلة الآتية :

$$z' = a(x)z^2 + \left(2a(x)y_1 + b(x)\right)z$$

وهذه المعادلة هي عبارة عن معادلة برنولي.

ولحلها نجعل متغيرًا جديدًا وليكن u حيث $u = \frac{1}{z}$.

مثال : حل معادلة ريكاتي التالية :

$$y' = \frac{1}{x}y^2 - \left(2 + \frac{1}{x}\right)y + x + 2$$

مع العلم أن $y_1 = x$ حلًا خاصًا لها.

الحل :

نتأكد أولًا أن $y_1 = x$ حلًا للمعادلة (واضح).

الآن نضع $y = x + z$ ومنه $y' = 1 + z'$، نعوض في المعادلة التفاضلية وبعد الإختصار نجد :

$$xz' - z^2 + z = 0$$

وهي معادلة برنولي من أجل $n = 2$ لحلها نضع $u = \frac{1}{z}$ وبالتعويض نحصل على المعادلة التالية :

$$u' - \frac{1}{x}u = \frac{1}{x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، وبحلها نجد $u(x) = cx + 1$ ومنه $z(x) = \frac{1}{cx + 1}$ وعليه فإن الحل العام لهذه المعادلة هو :

$$y(x) = x + \frac{1}{cx + 1}$$

حيث c ثابت اختياري.

المحاضرة التاسعة

المعادلات التفاضلية التامة وغير التامة

أولاً : المعادلة التفاضلية التامة

تعريف 1 (التفاضل الكلي) : ليكن $F(x,y)$ تابع مستمر و قابل للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$، نقول بأن التفاضل الكلي للتابع F هو dF حيث :

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$$

تعريف 2 (التفاضل التام) : نقول عن المقدار $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ أنه تفاضل تام، إذا وُجد تابع $F(x,y)$ بحيث تفاضله الكلي هو :

$$dF=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

وبعبارة أخرى نقول عن المقدار $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ بأنه تفاضل تام إذا وجد F بحيث يكون :

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y),\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$$

تعريف 3 (المعادلة التفاضلية التامة) : إذا كان المقدار $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ تفاضلاً تامًا فنسمي المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

بمعادلة تفاضلية تامة.

مبرهنة (الشرط اللازم والكافي لتكون معادلة تامة) : الشرط اللازم والكافي لكي تكون المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

تامة هو

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

(ويسمى هذا الشرط بشرط كوشي).

نتيجة : الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ يُعرف بالعلاقة :

$$F(x,y)=c$$

حيث F هو التفاضل التام للمقدار $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ و c ثابت اختياري.

تكامل المعادلة التفاضلية التامة : لحل المعادلة التفاضلية التامة $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ نعتمد على شرط كوشي $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. لدينا

$$\begin{aligned}dF&=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy\\&=M(x,y)dx+N(x,y)dy\end{aligned}$$

وبالتالي يصبح لدينا

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)..........(1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)\ldots\ldots\ldots(2)$$

نكامل (1) بالنسبة إلى x فنحصل على :

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)$$

ومنه
$$N(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)+\varphi'(y)$$

وبالتالي نجد $\varphi(y)$ وبالتعويض نجد عبارة $F(x,y)$.

مثال : بين أن المعادلة التفاضلية

$$(x+y+1)dx+\left(x-y^2+3\right)dy=0$$

تامة ثم حلها.

الحل : لدينا

$M(x,y)=x+y+1$ و $N(x,y)=x-y^2+3$، وبالتالي $\frac{\partial M}{\partial y}=1$ و $\frac{\partial N}{\partial x}=1$ اذن فالمعادلة تامة.

الآن لنقوم بحلها، لدينا $\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$ ومنه $\frac{\partial F}{\partial x}=x+y+1$ وعليه فإن

$$F(x,y)=\int(x+y+1)dx+\varphi(y)$$

وبالتالي $F(x,y)=\frac{1}{2}x^2+xy+x+\varphi(y)$. ومن جهة أخرى، لدينا $\frac{\partial F}{\partial y}=x+\varphi'(y)=N(x,y)$ وبالتعويض نجد $\varphi'(y)=-y^2+3$ ومنه

$$\varphi(y)=-\frac{y^2}{3}+3y+c_1$$

حيث c_1 ثابت اختياري.

وبالتعويض في .. نجد

$$F(x,y)=\frac{1}{2}x^2+xy+x--\frac{y^2}{3}+3y+c_1$$

ومنه حل المعادلة هو $F(x,y)=c_2$ أي هو

$$\frac{1}{2}x^2+xy+x--\frac{y^2}{3}+3y=c$$

حيث c ثابت اختياري.

ملاحظة مفيدة : من المبرهنة السابقة نجد أن إذا كانت المعادلة $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ تامة فإن حلها العام هو

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy=c$$

حيث c ثابت اختياري، و (x_0,y_0) أي نقطة معرفة عندها الدالتين N,M.

مثال : لنحل المعادلة السابقة بهذه الطريقة المختصرة، لدينا $(x+y+1)dx+\left(x-y^2+3\right)dy=0$ ومنه

$$\int_{0}^{x}(x+y+1)dx+\int_{0}^{y}\left(-y^2+3\right)dy=0$$

وبالتالي

$$\frac{1}{2}x^2+xy+x--\frac{y^2}{3}+3y=c$$

(لاحظ أننا اخترنا $x_0 = y_0 = 0$ لأن كلا من الدالتين N, M معرفة عند $(0,0)$ وبالطبع هو أبسط اختيار ممكن).

ثانيًا : المعادلة التفاضلية غير التامة

تعريف : نقول أن المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ أنها ليست تامة إذا كان

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

طريقة الحل : إذا كانت المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ليست تامة فإننا نسعى إلى وضع المعادلة في صيغة جديدة تصبح من خلالها تامة، وذلك من خلال ضرب طرفيها في تابع $u(x,y)$ ويسمى بعامل المكاملة.

ايجاد عامل المكاملة : لدينا $uM(x,y)dx + uN(x,y)dy = 0$ هذه المعادلة تكون تامة إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\frac{\partial}{\partial y}(uM) = \frac{\partial}{\partial x}(uN)$$

ومنه يكون لدينا :

$$u\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial u}{\partial y} = u\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial u}{\partial x}$$

وبالتالي

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y}$$

وللتسهيل نفرض فرضيات حول التابع $u(x,y)$.

الحالة الأولى : u دالة في x فقط، عندها يكون $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ وبالتالي تصبح العلاقة السابقة كما يلي :

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial u}{\partial x}$$

ومنه

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx = \frac{du}{u}$$

من خلال هذه العلاقة نلاحظ أنه إذا كان الطرف الأيمن لهذه العلاقة متعلقاً ب x فقط فإنه يمكن ايجاد الدالة u وإلا فلا.

الآن لنضع $\frac{du}{u} = f$ ينتج عن ذلك $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$ وبمكاملة الطرفين نجد

$$u(x) = e^{\int f(x)dx}$$

الحالة الثانية : إذا كان التابع u متغيرًا بالنسبة إلى y فقط، عندها تصبح المعادلة * كما يلي :

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -M\frac{du}{dy}$$

ومنه $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy = -\frac{du}{u}$، وحسب الفرض أن التابع u متغير بالنسبة إلى y فقط فيكون لدينا :

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy = g(y)dy$$

ومن ثَم نحصل على

$$u(y)=e^{-\int g(y)dy}$$

يمكننا تلخيص الحالتين كما يلي :

- إذا كان لدينا $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$ فإن

$.u(x)=e^{\int f(x)dx}$

- إذا كان لدينا $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=g(y)$ فإن

$.u(y)=e^{-\int g(y)dy}$

ملاحظة هامة : إذّا لم تتحقق إحدى الحالتين فهذا يدل أنه لا يوجد للمعادلة (E) عامل تكميل.

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$2y\left(x^2-y+x\right)dx+\left(x^2-2y\right)dy=0$$

الحل : لدينا $M(x,y)=2y\left(x^2-y+x\right)$ و $N(x,y)=x^2-2y$ ومنه $\frac{\partial M}{\partial y}=2x^2-4y+2x, \frac{\partial N}{\partial x}=2x$

نلاحظ أن $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ فالمعادلة ليست تامة، نجد أولاً الفرق $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2x^2-4y$ ومنه

$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=2=f(x)$ وعليه فإن $u(x)=e^{\int f(x)dx}=e^{\int 2dx}=e^{2x}$ وهو عامل التكميل الذي يحول المعادلة المعطاة إلى تامة، فتصبح

$$2y\left(x^2-y+x\right)e^{2x}dx+\left(x^2-2y\right)e^{2x}dy=0$$

وحلها هو

$$y\left(x^2-y\right)=ce^{-2x}$$

المحاضرة العاشرة

المعادلات التفاضلية غير المحلولة بالنسبة للمشتق

(معادلة لاغرانج - معادلة كليرو)

لقد درسنا في المحاضرات السابقة بعض المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى، لكن هناك معادلات يصعب حلها بالطرق السابقة منها المعادلات غير القابلة للحل بالنسبة إلى y' (أي لا يمكن كتابتها على الشكل : $(y'=f(x,y))$، إن هذه المعادلات لها أصناف وأشكال متعددة لكننا سنقتصر في محاضرتنا هذه على صنفين مهمين هما معادلة لاغرانج ومعادلة كليرو.

أولاً - معادلة لاغرانج

تعريفها : نسمي معادلة لاغرانج كل معادلة تفاضلية يمكن كتابتها على الشكل :

$$y=xa(y')+b(y')$$

حيث : $a(y')\neq y'$ و b,a دالتين قابلتين للإشتقاق على مجال I من ¡ .

طريقة حلها : نضع $y'=\frac{dy}{dx}=p$ فنحصل مباشرة على العلاقة التالية : $y=xa(p)+b(p)$ وبإشتقاق طرفيها بالنسبة للمتغير x نجد : $p=xa'(p)\frac{dp}{dx}+a(p)+b'(p)\frac{dp}{dx}$ وبتبسيطها نحصل على

$$\frac{dx}{dp}+\frac{a'(p)}{p-a(p)}x=\frac{b'(p)}{p-a(p)}$$

وهي معادلة خطية من الرتبة الأولى.

مثال : أوجد الحل العام لمعادلة لاغرانج الآتية :

$$(y')^3+2x(y')^2-y=0$$

الحل : يمكن كتابة المعادلة كما يلي : $y=2x(y')^2+(y')^3$ وبوضع $y'=p$ نحصل على $y=2xp^2+p^3$ ونشتق بالنسبة للمتغير x فنجد $\frac{dy}{dx}=2p^2+(4xp+3p^2)\frac{dp}{dx}$ ومنه

$$\frac{dx}{dp}+\frac{4}{2p-1}x=\frac{-3p}{2p-1}$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بالنسبة للمتغير x وبحلها نجد $x_g=\frac{c}{(2p-1)^2}-\frac{p^2}{2p-1}+\frac{p^2}{2(2p-1)^2}$،

وبالتالي الحل لهذه المعادلة يتأتى من الجملة الآتية :

$$\begin{cases} y=2xp^2+p^3 \\ x=x_g \end{cases}$$

ويسمى هذا الحل حلاً عاماً في شكله الوسيطي.

الحلول الشاذة لمعادلة لاغرانج : وذلك في حالة $\frac{dp}{dx}=0$ وبالتالي يكون $p=a(p)$ ومنه $p\in\{\lambda_i, i=1,2,\ldots\ldots k\}$ وبالتعويض في المعادلة $y=xa(p)+b(p)$ نجد

$$y_i=\lambda_i x+b(\lambda_i)$$

وهي تمثل حلول شاذة (قد تكون حلولا خاصة في بعض الحالات).

مثال : في المعادلة السابقة لنبحث عن حلولها الشاذة، لدينا $\frac{dp}{dx}=0$ إذن $p(2p-1)=0$ ومنه $p=0$ أو $p=\frac{1}{2}$

وعليه فإن $\lambda_1=0,\lambda_2=\frac{1}{2}$، بالتعويض في العلاقة السابقة نجد أن للمعادلة حلان شاذان هما :

$y_1=0$ و $y_2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$

ثانيا - معادلة كليرو

تعريفها : تسمى معادلة كليرو كل معادلة تفاضلية يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$y=xy'+b(y')$$

(أي أنها حالة خاصة من معادلة لاغرانج عندما $a(y')=y'$).

طريقة حلها : لحلها نضع $y'=p$ وبالتعويض نحصل على $y=xp+b(p)$، بالإشتقاق بالنسبة إلى x فنجد

$$y'=\frac{dp}{dx}x+p+b'(p)\frac{dp}{dx}$$

لكن $y'=p$ ومنه

$$\left(x+b'(p)\right)\frac{dp}{dx}=0$$

- نفرض أن $x+b'(p)\neq 0$ نقسم عليه فنجد $\frac{dp}{dx}=0$ ومنه $p=c$ حيث c ثابت اختياري، وعليه فإن الحل العام في هذه الحالة هو :

$$y=cx+b(c)$$

- في حالة $x+b'(p)=0$ ومنه $x=-b'(p)$ وبالتالي نحصل على الجملة الآتية

$$\begin{cases} x=-b'(p) \\ y=xp+b(p) \end{cases}$$

وتمثل الحلول الشاذة وسيطياً.

مثال : نعتبر معادلة كليرو التالية :

$$y=xy'+(y')^2$$

عين الحل العام و الحل الشاذ لها.

الحل : نضع $y'=p$ بالتعويض نجد : $y=xp+(p)^2$ بالإشتقاق نحصل على $y'=p+x\frac{dp}{dx}+2p\frac{dp}{dx}$ لكن $y'=p$ ومنه نجد

$$(x+2p)\frac{dp}{dx}=0$$

- إذا كان $x+2p\neq 0$ فنجد $\frac{dp}{dx}=0$ ومنه $p=c$ إذن الحل العام هو :

$$y=cx+c^2$$

حيث c ثابت اختياري.

- في حالة $x+2p=0$ وبالتالي $p=-\frac{x}{2}$ و بالتعويض نجد الحل الشاذ كما يلي :

$$y=-\frac{x^2}{4}$$

1.12 تمارين للحل

التمرين الأول(مفاهيم أساسية) : أجب بصحيح أو خاطئ لكل من الأسئلة التالية مع التبرير :

1. المعادلة التفاضلية $(y''')^3+y^2=x$ رتبتها 3 ودرجتها 2 .
2. المعادلة التفاضلية $\sqrt[3]{(y'')^2}=\sqrt{1+y^2}$ رتبتها 2 ودرجتها 4.
3. يمكن حل جميع المعادلات التفاضلية.
4. المعادلة $y'=\frac{y}{x^2}$ الحل المعدوم ($y(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$) حلا لها على $\mathbb{R}$.
5. $y(x)=tgx$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y''=2y(1+y^2)$.
6. كل حل أعظمي لمعادلة تفاضلية هو حل شمولي.

التمرين الثاني : باستخدام طريقة بيكارد اوجد ما يلي :

1) التقريب الثالث لحل المسألة $y'=2y-2x^2-3$: و $y(0)=2$

2) التقريب النوني للمسألة $y'=xy$: و $y(0)=2$

التمرين الثالث : أثبت أن التوابع التالية تحقق شرط ليبشيتز على الميدان D ثم عين ثابت ليبشيتز

1) $f(x,y)=\frac{y}{1+x^2}$, $D=\mathbb{R}^2$.

2) $f(x,y)=\frac{x}{1+y^2}$, . $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le a,|y|<\infty\}$

3) $f(x,y)=x^2(\cos y)^2+y(\sin x)^2$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le a,|y|<\infty\}$.

التمرين الرابع : بين أن التابع $f(x,y)$ لا يحقق شرط ليبشيتز

a) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le 1,|y|\le 2\}$, $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^4+y^4},(x,y)\ne(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{x},(x,y)\ne(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le 1,|y|<\infty\}$,

التمرين الخامس : أدرس وجود ووحدانية الحل للمسائل التالية:

1) $y(0)=0$, $y'=1+y^{\frac{2}{3}}$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le a,|y|\le b,a,b\in\mathbb{R}_+^*\}$,

2) $y(0)=1$, $y'=\sin(xy)$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le a,|y-1|\le b,a,b\in\mathbb{R}_+^*\}$,

3) $y(0)=1$, $y'=e^y$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le 2,|y|\le 3\}$,

4 ($y(0)=1$, $y'=e^x+\frac{x}{y}$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le 2,|y|\le 3\}$,

التمرين السادس : أثبت أن المسألة التالية تقبل حلا وحيدا على مجال يطلب تعيينه في كل حالة

.1 $y(0)=1$, $y'=y^2-x^2$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le 1,|y-1|\le 1\}$,

.2 $y(0)=0$, $y'=\sin(xy)+e^y$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le 2,|y|\le 1\}$,

.3 $y(0)=0,\quad y'=2y^2\cos^2 x+|y|\sin x,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le\pi,|y|\le 1\}$

.4 $y(0)=m>0,\quad y'=P(x)y+q(x),\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le 1,|y|\le 3\}$ حيث p و q تابعين مستمرين على المجال $[-1,1]$.

التمرين السابع : نفس السؤال السابق

.1 $y(0)=0,\quad y'=\sin(xy)+e^{y^2},\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le 2,|y|\le 1\}$

.2 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le 1,|y|\le 2\},\quad y'=x^2e^{x+y},\quad y(0)=0$

.3 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le 2,|y-1|\le 3\},\quad y'=x^2+e^{-y^2},\quad y(1)=2$

.4 $y(0)=2,\quad y'=x^2y^2+y^4,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le 1,-1\le y\le 5\}$

التمرين الثامن (المعادلات المنفصلة المتغيرات) : حل المعادلات التفاضلية الآتية :

(1 $(x+xy^2)dx+e^{x^2}ydy=0$ **(4** $y^2(x^3+1)dx+(x^3-5x^2+6x)dy=0$

(2 $(x^2+1)dy=(y^2+4)dx$ **(5** $(x^3+1)dy-ydx=0$

(3 $x\cos^2 x dx+tgy dy=0$ **(6** $(e^{-y}+1)\sin x dx=(1+\cos x)dy,\quad y(0)=0$

التمرين التاسع : حل المعادلات التفاضلية الآتية :

(1 $y'\left(x^2y^2-9y^2\right)=x^2y^2-4x^2$ **(2** $\sin x\sin^2 y dx-\cos^2 x dy=0$

(3 $y^2\cos\sqrt{x}dx-2\sqrt{x}e^{\frac{1}{y}}dy=0$ **(4** $y'=ay-by^2,\quad y(0)=\alpha>0$ حيث a و b عددان حقيقيان.

التمرين العاشر(معادلات تفاضلية ترد إلى منفصلة المتغيرات) : حل المعادلات التفاضلية الآتية :

(1 $y'=\sqrt{4x+2y-1}$ **(2** $y'=(y-4x)^2$ **(3** $y'=\sin(x-y)$

(4 $y'=\cos(x+y)$ **(5** $y'=(x+y-1)^2$ **(6** $(x+y-3)dx+(x+y+2)dy=0$

التمرين الحادي عشر : نفس السؤال السابق

(1 $y'=\sqrt{x-3y+4}$ **(2** $y'=(2y+x-3)^2$

(3 $y'=\sin(x+y)$ **(4** $(x+y)dx+(2x+2y+1)dy=0$

التمرين الثاني عشر : باستخدام الإحداثيات القطبية حل المعادلة التفاضلية :

(a $\left(x^2+y^2\right)(xdx+ydy)-\frac{y}{x}(xdy-ydx)=0$

(b $y'=\frac{x+y}{x-y}$

التمرين الثالث عشر(معادلات تنتظر الحل) : أخي الطالب، أختي الطالبة إليك هذه المعادلات التفاضلية التي تنتظر منك أن تحلها علما أنها كلها متجانسة أو ترد إلى متجانسة :

(1 $(x-2y)dx+(2x+y)dy=0$ **(2** $xydx-\left(x^2+3y^2\right)dy=0$ **(3** $\left(x+\sqrt{xy}\right)dy-ydx=0$

(4 $(x-y)(4x+y)dx+5x(5x-y)dy=0$ **(5** $y'=\frac{x+y-2}{y-x-4}$ **(6** $y'=2\left(\frac{y+2}{x+y+1}\right)^2$

الأجوبة : **1** $\ln\left(x^2+y^2\right)+4arctg\frac{y}{x}=c$. **.2** $x^2=6y^2\ln\left|\frac{y}{c}\right|$. **3** $y=ce^{2\sqrt{\frac{x}{y}}}$. **.4** $x(y+x)^2=c(y-2x)$

5 $y^2-2xy+x^2+4x-8y=c$ **.6** $\ln|y+2|+2arctg\frac{y+2}{x-1}=c$ ، حيث c ثابت اختياري.

الفصل الثاني

المعادلات التفاضلية من رتب أعلى

المحاضرة الحادية عشر

المعادلات التفاضلية ذات الرتب العليا

2.1 عموميات

مقدمة : في المحاضرات السابقة إنصب جل اهتمامنا على دراسة المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى، وفي هذه المحاضرات نسعى لدراسة معادلات تفاضلية ذات رتب أعلى من الرتبة الأولى، ولعل أنسب ما نبدأ به هو استذكار الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية النونية (ذات الرتبة n) الذي أخذناه في أول محاضرة لنا، وهي التي تحمل الشكل التالي :

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+........+a_1(x)y'+a_0y=f(x)$$

ويقال أن المعادلة ذات ذات معاملات ثابتة إذا كان كل من الدوال $a_n,............,a_1,a_0$ ثابتًا، ويقال أنها ذات معاملات متغيرة إذا كان كل من $a_n,............,a_1,a_0$ متغيرًا.

كما يقال أنها متجانسة إذا كان $f(x)=0$ وإلا فهي غير متجانسة.

خاصية : إذا كان كل من $y_1,y_0,.......y_k$ حلاً للمعادلة النونية المتجانسة

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+........+a_1(x)y'+a_0y=0$$

فإن $y=c_1y_1+c_2y_0,.......+c_ky_k$ هو حلا لها.

حيث $c_1,c_2,.......c_k$ ثوابت اختيارية (بمعنى أي تشكيل خطي سيكون حلا للمعادلة نفسها).

الإثبات : واضح.

تعريف (الإستقلال الخطي) : لتكن $\varphi_1(x),\varphi_2(x),.........,\varphi_k(x)$ دوال معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ نقول أنها مستقلة خطيًا إذا تحقق الإستلزام التالي :

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+..........+c_k\varphi_k(x)=0\Rightarrow c_1=c_2=..........=0$$

تعريف (الإرتباط الخطي) : نقول أن الدوال $\varphi_1(x),\varphi_2(x),.........,\varphi_k(x)$ مرتبطة خطيًا إذا أمكن إيجاد ثوابت $c_1,c_2,.......c_k$ غير منعدمة في آن واحد بحيث :

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+..........+c_k\varphi_k(x)=0$$

تعريف (الرونسكيان Wronskian-) : إذا كانت $\varphi_1,\varphi_2.........,\varphi_k$ دوال قابلة للإشتقاق $(n-1)$ مرة على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الرونسكيان لها هو المحدد التالي :

$$W(\varphi_1,\varphi_2,......\varphi_n)(x)=\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & . \; . \; . & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & . \; . \; . & \varphi_n' \\ . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . \; . \; . & . \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & . \; . \; . & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ملاحظة : أطلق اسم الرونسكيان على هذا المحدد تخليدًا لذكرى مكتشفه عالم الرياضيات البولندي هوني رونسكي (Hoene Wronski) الذي عاش خلال الفترة (1778م – 1853م)

مثال : لو أن φ_1,φ_2 دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الرونسكيان هو :

$$W(\varphi_1,\varphi_2)(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\ \varphi_1' & \varphi_2'\end{vmatrix}=\varphi_1\varphi_2'-\varphi_2\varphi_1'$$

مبرهنة : لتكن $y_1,y_2,.......y_n$ حلولا للمعادلة المتجانسة ذات المعاملات المستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ ، إذا كان من أجل كل x من I

$$W(y_1,y_2,....y_n)(x)\neq 0$$

فإن الحلول $y_1,y_2,.......y_n$ مستقلة خطيًا.

مثال : هل الدوال التالية :

$$y_1(x)=x,y_2(x)=x^2,y_3(x)=\frac{1}{x}$$

تمثل حلولاً مستقلة خطيًا للمعادلة التفاضلية

$$x^3y'''+x^2y''-2xy'+2y=0$$

حيث $x>0$.

الحل : لدينا

$$W(y_1,y_2,....y_n)(x)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & y_3\\ y_1' & y_2' & y_3'\\ y_1'' & y_2'' & y_3''\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x & x^2 & \frac{1}{x}\\ 1 & 2x & -\frac{1}{x^2}\\ 0 & 2 & \frac{2}{x^3}\end{vmatrix}=\frac{6}{x}\neq 0$$

وبالتالي الحلول y_1,y_2,y_3 مستقلة خطيا.

الحل العام للمعادلة المتجانسة :

مبرهنة : لتكن $y_1,y_2,.......y_n$ حلولا مستقلة خطيًا للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات المستمرة

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+.........+a_1(x)y'+a_0y=0$$

مع $a_n(x)\neq 0$، فإن الحل العام لها هو

$$y=c_1y_1+c_2y_0,.......+c_ny_n$$

حيث $c_1,c_2,.......c_n$ ثوابت اختيارية.

مثال : في المثال السابق الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y=c_1x+c_2x^2+c_3\frac{1}{x}$$

الحل العام للمعادلة غيرالمتجانسة :

مبرهنة : ليكن y_p حلاً خاصًا للمعادلة (E) ولتكن $y_1,y_2,.......y_n$ حلولا مستقلة خطيًا للمعادلة المتجانسة (E') فإن الحل العام للمعادلة (E) يكون على الصيغة التالية :

$$y=c_1y_1+c_2y_2+.......+c_ny_n+y_p$$

البرهان : ليكن y حل للمعادلة (E) وبما أن كلا من y,y_p حلين أيضا للمعادلة (E) فإن الفرق $y-y_p$ سيكون حلاً للمعادلة (E') وبتطبيق المبرهنة السابقة يكون

$$y - y_p = c_1 y_1 + c_2 y_0 ,.......+ c_n y_n$$

وبالتالي

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_0 ,.......+ c_n y_n + y_p$$

وبه يتم البرهان.

ملاحظة : مجموعة الحلول $\{y_1, y_0, ...y_n\}$ المستقلة خطيا يُطلق عليها مجموعة الحلول الأساسية.

مثال : نعتبر المعادلة التفاضلية من الرتبة الثالثة الآتية

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^2 - 2x - 4$$

1. تأكد أن $y_p(x) = x^2$ حلاً خاصًا لها.

2. بيَن أن $y_1(x) = e^{2x}, y_2(x) = e^x, y_3(x) = e^{-x}$ حلول أساسية لها.

3. أوجد الحل العام لها.

الحل :

1. واضح.

2. لدينا

$$W(y_1, y_2, ...y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{-x} & e^x & e^{2x} \\ -e^{-x} & e^x & 2e^{2x} \\ e^{-x} & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} \neq 0$$

إذن المجموعة $\{y_1, y_2, y_3\}$ هي حلول أساسية للمعادلة المعطاة.

3. الحل العام لها هو

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + x^2$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية.

المحاضرة الثانية عشر

المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

أولا. المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية المتجانسة

تعريف : المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية هي كل معادلة من الشكل

$$ay'' + by' + cy = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (E)$$

حيث c,b,a أعداد حقيقية ثابتة.

مبرهنة : ليكن λ عددًا مركبًا أو حقيقيًا، الدالة $e^{\lambda x}$ تكون حلاً للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت λ جذرًا للمعادلة الجبرية

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

(نسميها بالمعادلة المميزة للمعادلة (E)).

الإثبات : نشتق ونعوض في المعادلة (E) فنجد

$$a\left(e^{\lambda x}\right)'' + b\left(e^{\lambda x}\right)' + c\left(e^{\lambda x}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ e^{\lambda x}\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

إذن المطلوب.

طريقة الحل : إن حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية المتجانسة مرتبط بطبيعة جذور المعادلة المميزة لها، نميز ثلاث حالات :

1. عندما $\Delta > 0$ حيث ($\Delta = b^2 - 4ac$) فالمعادلة في هذه الحالة لها جذران متمايزان و ليكنا λ_1, λ_2 فإن الحل العام لها هو

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

حيث c_2, c_1 ثابتان اختياريان.

2. عندما $\Delta = 0$ فالمعادلة لها حل مضاعف وليكن λ فالحل العام هو

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}$$

3. عندما $\Delta < 0$ فالمعادلة لها جذران مركبان مترافقان $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ فالحل العام هو

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right)$$

أمثلة : حل المعادلات التفاضلية الآتية :

1) $y'' + 2y' - 3y = 0$ **2)** $y'' + 4y' + 4y = 0$ **3)** $y'' + 2y' + 2y = 0$

الحل :

1) المعادلة المميزة هي $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ ولدينا $\Delta = 4$ فنجد $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1$ وبالتالي :

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x}$$

2) معادلتها المميزة هي $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ ولدينا $\Delta = 0$ إذن $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ وبالتالي :

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$$

3) المعادلة المميزة هي $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ ولدينا $\Delta = -4$ ومنه المعادلة لها جذران مركبان مترافقان هما $\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i$ وعليه فإن

$$y(x)=e^{-x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x\right)$$

ثانيًا. المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية غير المتجانسة

تعريف : المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية هي كل معادلة من الشكل

$$ay''+by'+cy=f(x)............(E')$$

حيث c,b,a أعداد حقيقية ثابتة، مع $f(x)\neq 0$.

طريقة الحل : مما سبق علمنا أن الحل العام هو عبارة عن مجموع الحل الخاص وحل المتجانسة أي أن

$$y=y_p+y_h$$

إن y_h إن طريقة ايجاده معلومة، إذن فالحل يكمن في تحديد الحل الخاص حيث يمكن ايجاده بطريق تغيير الثوابت (ستأتي) وهناك حالات خاصة لإيجاده.

الحالة الأولى . الطرف الأيمن للمعادلة على شكل كثير حدود :

بمعنى $f(x)=P_n(x)$ حيث $P_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n، ففي هذه الحالة الحل الخاص يأخذ الشكل الآتي :

$$y_p=Q_n(x)x^r$$

حيث $Q_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n (أي من نفس درجة P_n)

و r عدد جذور المعادلة المساوية للصفر.

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y''+2y'=x+1$$

الحل : معلوم أن الحل العام للمعادلة المتجانسة $y''+2y'=0$ هو $y_h=c_1+c_2e^{-2x}$، إن الحل الخاص يأخذ الشكل التالي : $y_p=Q_n(x)x^r$ حيث $n=1,r=1$ إذن $y_p=(ax+b)x$ وبالإشتقاق والتعويض نجد $b=\frac{1}{2},a=\frac{1}{4}$ ومنه يصبح $y_p=\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)x$ و عليه فإن الحل العام لهذه المعادلة هو

$$y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+c_1+c_2e^{-2x}$$

حيث c_2,c_1 ثابتان اختياريان.

الحالة الثانية : الطرف الأيمن من الشكل $e^{\alpha x}P_n(x)$

أي أن $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$ فالحل الخاص في هذه الحالة يأخذ الشكل التالي :

$$y_p=Q_n(x)x^re^{\alpha x}$$

حيث Q_n كثير حدود من الدرجة n و r عدد جذور المعادلة المساوية للقيمة α.

مثال : حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$y''-4y'+3y=xe^x$$

الحل : لدينا المعادلة المميزة هي $\lambda^2-4\lambda+3=0$ فنجد $\lambda_2=3,\lambda_1=1$ وبالتالي $y_h=c_1e^x+c_2e^{3x}$، إن الحل الخاص يأخذ الشكل $y_p=Q_n(x)x^re^{\alpha x}$ حيث $n=1,\alpha=1,r=1$ إذن يصبح $y_p=(ax+b)xe^x$ نشتق ثم نعوض في المعادلة فنجد $a=b=-\frac{1}{4}$ ومنه $y_p=-\frac{1}{4}\left(x^2+x\right)e^x$ وعليه فالحل العام هو

$$y=-\frac{1}{4}\left(x^2+x\right)e^x+c_1e^x+c_2e^{3x}$$

الحالة الثالثة : الطرف الأيمن من الشكل $a\cos\beta x+b\sin\beta x$

الحل الخاص في هذه الحالة يأخذ الشكل التالي :

$$y_p=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)x^r$$

حيث r عدد جذور المعادلة المساوية $i\beta$.

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y''+y=\sin x$$

الحل : معادلتها المميزة هي $\lambda^2+1=0$ ومنه $\lambda_1=i,\lambda_2=-i$ وبالتالي : $y_h=c_1\cos x+c_2\sin x$، إن الحل الخاص شكله $y_p=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)x$ نشتق ونعوض فنجد $A=-\frac{1}{2},B=0$ ومنه $y_p=-\frac{1}{2}x\cos x$ وبالتالي فإن الحل العام لهذه المعادلة هو :

$$y=-\frac{1}{2}x\cos x+c_1\cos x+c_2\sin x$$

الحالة الرابعة : الطرف الأيمن من الشكل $e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+P_m(x)\sin\beta x\right)$

حيث P_m,P_n كثيري حدود من الدرجتين m,n على التوالي، ففي هذه الحالة يأخذ الحل الخاص الشكل الآتي :

$$y_p=x^re^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos\beta x+Q_2(x)\sin\beta x\right)$$

حيث Q_2,Q_1 كثيري حدود من الدرجة s حيث $s=Max\{m,n\}$ و r هو عدد جذور المعادلة المميزة المساوية $\alpha+i\beta$.

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y''-y=3e^{2x}\cos x$$

الحل : المعادلة المميزة هي $\lambda^2-1=0$ وبالتالي $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$ ومنه $y_h=c_1e^x+c_2e^{-x}$ وفي هذه المعادلة لدينا $r=0$، $s=0$، $P_m(x)=0$، $P_n(x)=3$ وعليه فإن الحل الخاص يأخذ الشكل التالي :

$y_p=e^{2x}(A\cos x+B\sin x)$ نشتق و نعوض فنجد $A=\frac{3}{10}$، $B=\frac{3}{5}$ ومنه $y_p=e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x+\frac{3}{5}\sin x\right)$

وعبارة الحل العام هي

$$y=e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x+\frac{3}{5}\sin x\right)+c_1e^x+c_2e^{-x}$$

حيث c_2,c_1 ثابتان اختياريان.

ملاحظة : إذاكان y_1 حلا خاصا للمعادلة التفاضلية $ay''+by'+cy=f_1(x)$ و y_2 حلا خاصا للمعادلة التفاضلية $ay''+by'+cy=f_2(x)$ فإن y_1+y_2 يكون حلا خاصا للمعادلة :

$$ay''+by'+cy=f_1(x)+f_2(x)$$

المحاضرة الثالثة عشر

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة

2.2 معادلات أولر التفاضلية

فيما سبق تطرقنا للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة، فقدمنا طريقة المعادلة المميزة لهذا النوع، بينما في هذا الصنف من المعادلات لا توجد نظرية عامة تضمن وجود ووحدانية الحل فقد تم تقسيم هذه المعادلات إلى أنواع مختلفة ومتنوعة سنهتم بمعادلات أولر نسبة إلى العالم السويسري أولر (1707 - 1783).

لنبدأ بتعريف معادلة أولر التفاضلية من الرتبة الثانية.

تعريف : تُعرف معادلة أولر التفاضلية من الرتبة الثانية على أنها المعادلة التي تأخذ الشكل الآتي :

$$x^2y''+axy'+by=f(x)$$

حيث b,a ثوابت و f دالة عددية.

- إذا كان $f(x)=0$ فالمعادلة متجانسة.
- و إذا كان $f(x)\neq 0$ فالمعادلة غير متجانسة.

لحل هذا الصنف من المعادلات هناك طريقتان

الطريقة الأولى : لحل المتجانسة نفرض أن حل معادلة أولر المتجانسة من الشكل $y(x)=x^r$ حيث $x\neq 0$ ثم نبحث عن r فيكون

$y'=rx^{r-1}$ ، $y''=r(r-1)x^{r-2}$ وبالتعويض في المعادلة نحصل على المعادلة الجبرية التالية :

$$r^2+(a-1)r+b=0$$

(تسمى بالمعادلة المميزة لمعادلة اولر).

لدينا ثلاث احتمالات بالنسبة لجذري هذه المعادلة، فإما أنهما حقيقيان مختلفان أو حقيقيان مكرران أو أنهما مركبان. لنفصل في هذه الحالات حالة بحالة :

الحالة الأولى : الجذران r_2,r_1 حقيقيان مختلفان وبالتالي حلا المعادلة هما $y_2=x^{r_2},y_1=x^{r_1}$ ولدينا

$$W(y_2,y_1)(x)=(r_2-r_1)x^{r_1+r_2-1}$$

وهذا يعني أن الحلين y_1 و y_2 حلين أساسيين للمعادلة وبالتالي الحل العام يكون

$$y(x)=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2}$$

حيث c_2,c_1 ثابتان اختياريان.

الحالة الثانية : الجذران r_2,r_1 حقيقيان مكرران، لدينا $D=(a-1)^2+4b$ ففي هذه الحالة $D=0$ ويوجد حل مضاعف هو $r=\frac{1-a}{2}$ فيكون الحل الأول

$$y_1(x)=x^{\frac{1-a}{2}}$$

وللحصول على الحل الثاني، نفرض أن $y_2(x)=y_1(x)f(x)$ وبالتعويض في المعادلة نجد $f(x)=\ln|x|$ ومنه

$$y_2(x)=x^{\frac{1-a}{2}}\ln|x|$$

وبالتالي فالحل العام يكون

$$y(x)=x^{\frac{1-a}{2}}\left(c_1+c_2\ln|x|\right)$$

الحالة الثالثة : الجذران r_2,r_1 مركبان وذلك في حالة $D<0$ وبالتالي المعادلة المميزة لها حلان مترافقان $r_1=p+iq$ و $r_2=p-iq$ مترافقان وعليه فالحلان هما $y_1(x)=x^p(\cos qx+i\sin qx)$ و $y_2(x)=x^p(\cos qx-i\sin qx)$ اذن الحل العام لهذه المعادلة هو

$$y(x)=x^p(c_1\cos qx+c_2\sin qx)$$

حيث c_2,c_1 ثابتان اختياريان.

مثال 1: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$x^2y''+5xy'-2y=0$$

الحل : هذه معادلة أولر الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية معادلتها المميزة هي : $r^2+4r-2=0$ المعادلة لها حلان حقيقيان هما $r_1=-2+\sqrt{6}$ و $r_2=-2-\sqrt{6}$ وبالتالي الحل العام هو

$$y(x)=c_1x^{-2+\sqrt{6}}+c_2x^{-2-\sqrt{6}}$$

مثال 2 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$x^2y''+5xy'-2y=0$$

الحل : معادلتها المميزة هي : $r^2+4r+4=0$ المعادلة لها جذر مضاعف $r_1=r_2=-2$ وعليه فالحلان هما $y_1(x)=x^{-2}$ و $y_2(x)=x^{-2}\ln|x|$ ومنه الحل العام هو

$$y(x)=x^{-2}\left(c_1+c_2\ln|x|\right)$$

حيث c_2,c_1 ثابتان اختياريان.

مثال 3 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$x^2y''+4xy'+6y=0$$

الحل : المعادلة المميزة لها هي $r^2+3r+6=0$ لها جذران مركبان مترافقان هما $r_1=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i$ و $r_2=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i$ ومنه الحل العام هو

$$y(x)=x^{-\frac{3}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{15}}{2}\ln|x|+c_2\sin\frac{\sqrt{15}}{2}\ln|x|\right)$$

الحل الخاص لمعادلة أولر التفاضلية : للحصول على الحل الخاص لمعادلة أولر غير المتجانسة نستخدم طريقة تغيير الثوابت، فنوجد أولاً الحلول الأساسية $y_1(x)$ و $y_2(x)$ للمتجانسة ثم نضع

$$y_p=u(x)y_1(x)+v(x)y_2(x)$$

وللحصول على الدوال $v(x),u(x)$ نقوم بالإشتقاق والتعويض نجد

$$v(x)=\int\frac{y_1f(x)}{x^2W(y_1,y_2)(x)}dx \quad ، \quad u(x)=\int\frac{-y_2f(x)}{x^2W(y_1,y_2)(x)}dx$$

مثال : أوجد الحل العام للمعادلة التالية :

$$x^2y''-4xy'+4y=x^4+x^2$$

الحل : هذه معادلة أولر غير المتجانسة من الرتبة الثانية، لحلها نجد أولاً الحل y_h للمتجانسة إن المعادلة المميزة لها هي : $r^2-5r+4=0$ ولها جذران حقيقيان هما $r_1=1$ و $r_2=4$ وبالتالي الحل العام هو

$$y(x)=c_1x+c_2x^4$$

الآن نبحث عن الحل الخاص y_p لنفرض أنه على الشكل $y_p=u(x)y_1(x)+v(x)y_2(x)$ اذن

ولدينا $y_p = xy_1(x) + x^4 v(x)$

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x & x^4 \\ 1 & 4x^3 \end{vmatrix}$$

$$= 3x^4 \neq 0$$

وللحصول على الدالتين v, u نستخدم العلاقتين السابقتين فنجد

$$v(x) = \frac{1}{3}\left(\ln|x| - \frac{1}{2x^2}\right) \text{ و } u(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + x\right)$$

وبالتالي الحل الخاص يكون $y_p = \frac{1}{3}x^4 \ln|x| - \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ وعليه فإن الحل العام هو

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^4 + \frac{1}{3}x^4 \ln|x| - \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{2}x^2$$

المحاضرة الرابعة عشر

المعادلات التفاضلية الخطية النونية ذات المعاملات الثابتة

2.3 المعادلة النونية المتجانسة

تعريف (المعادلة المميزة) : لتكن لدينا المعادلة التفاضلية النونية التالية

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

حيث $a_n \neq 0$، إن المعادلة المميزة المرتبطة بها هي

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

ملاحظة : المعادلة المميزة هي معادلة جبرية من الدرجة n (كثير حدود من الدرجة n) فلا مناص أن يكون لها n جذرًا، وهذه الجذور قد تكون حقيقية أو مركبة ومنها ما يكون مختلفًا أو قد يكون مكررًا.

أولاً : حالة الجذور المختلفة :

مبرهنة : إذا كانت المعادلة المميزة $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ ذات جذورًا مختلفة ولتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots\dots\dots, \lambda_n$ فالحل العام للمعادلة (E) هو

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots\dots\dots\dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

مثال : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$$

الحل : معادلتها المميزة هي : $\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$ وجذورها هي $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ وبالتالي فالحل العام هو

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية.

ثانيًا. حالة الجذور المكررة :

إذا كان للمعادلة المميزة λ جذر حقيقي يتكرر k مرة فإن الجزء من الحل العام للمعادلة (E) المقابل لهذا الجذر المتكرر يكون من الشكل

$$\left(c_1 + c_2 x + \dots\dots\dots + c_k x^{k-1}\right) e^{\lambda x}$$

وإذا كانت الجذور $(n-k)$ المتبقية حقيقية مختلفة $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots\dots\dots, \lambda_n$ فإن الحل العام يكون كما يلي

$$y = \left(c_1 + c_2 x + \dots\dots\dots + c_k x^{k-1}\right) e^{\lambda x} + \sum_{j=k+1}^{n} c_j e^{\lambda_j x}$$

مثال 1: حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y''' - 4y'' - 3y' + 18y = 0$$

الحل : معادلتها المميزة هي

$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 18 = 0$ وجذورها هي $3, 3, -2$ فيكون الحل العام كالتالي

$$y = \left(c_1 + c_2 x\right) e^{3x} + c_3 e^{-2x}$$

مثال 2: حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y^{(4)} - 5y''' + 6y'' + 4y' - 8y = 0$$

الحل : معادلتها المميزة هي $\lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$ جذورها هي $2, 2, 2, -1$ إذن الحل العام هو

$$y=\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)e^{2x}+c_4e^{-x}$$

ثالثا. حالة الجذور المركبة :

مبرهنة : إذا كان للمعادلة المميزة جذران مركبان مترافقان $\alpha-i\beta,\alpha+i\beta$ مكررين عدد k من المرات فإن الجزء المقابل لهما في عبارة الحل العام يكتب على الشكل التالي

$$y=e^{\alpha x}\left(c_1+c_2x+........+c_kx^{k-1}\right)\sin\beta x+e^{\alpha x}\left(c_{k+1}+c_{k+2}x+........+c_{2k}x^{k-1}\right)\cos\beta x$$

مثال 1: حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$3y'''-19y''+36y'-10y=0$$

الحل : معادلتها المميزة هي $3\lambda^3-19\lambda^2+36\lambda-10=0$ وجذورها هي $3-i,3+i,-\frac{1}{3}$ فيكون الحل العام كالتالي

$$y=c_1e^{-\frac{x}{3}}+e^{3x}\left(c_2\cos x+c_3\sin x\right)$$

2.4 المعادلة النونية غير المتجانسة

طريقة تغيير الثوابت :

طريقة تغيير الثوابت هي طريقة لإيجاد الحل الخاص لمعادلة تفاضلية نونية، فإذا كان الحل العام للمتجانسة هو

$$y_h=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+.......+c_ny_n(x)$$

حيث $c_1,c_2,.......c_n$ ثوابت اختيارية.

فيكون الحل الخاص على الصورة التالية

$$y_p=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)+.......+c_n(x)y_n(x)$$

حيث $c_1(x),c_2(x),.......c_n(x)$ دوال مجهولة يجب تعيينها، ولإيجاد هذه الدوال نحل أولاً جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{cases} c_1'y_1+c_2'y_2+.......+c_n'y_n=0 \\ c_1'y_1'+c_2'y_2'+.......+c_n'y_n'=0 \\ . \\ . \\ . \\ c_1'y_1^{(n-2)}+c_2'y_2^{(n-2)}+.......+c_n'y_n^{(n-2)}=0 \\ c_1'y_1^{(n-1)}+c_2'y_2^{(n-1)}+.......+c_n'y_n^{(n-1)}=f(x) \end{cases}$$

حيث $f(x)$ هو الطرف الثاني للمعادلة النونية، ثم نكامل كل من $c_1'(x),c_2'(x),.......c_n'(x)$ لنحصل على الدوال $c_1(x),c_2(x),.......c_n(x)$ مع إهمال ثوابت التكامل فهذا مسموح لأننا نبحث عن حل خاص واحد.

أمثلة :

- في حالة $n=3$ نحصل على الجملة التالية :

$$\begin{cases} c_1'y_1+c_2'y_2+c_3'y_3=0 \\ c_1'y_1'+c_2'y_2'+c_3'y_3'=0 \\ c_1'y_1''+c_2'y_2''+c_3'y_3''=f(x) \end{cases}$$

- في حالة $n=2$ نحصل على الجملة التالية :

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = \varphi(x) \end{cases}$$

- وفي حالة $n = 1$ نحصل على :

$$c_1'y_1 = \varphi(x)$$

مجال الطريقة : يُمكن تطبيق طريقة تغيير الثوابت لكل المعادلات التفاضلية الخطية سواء ذات المعاملات الثابتة أو المتغيرة.

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y''' + y' = \sin x$$

الحل : هذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة، لدينا $y_h = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ أي أن $y_3 = \sin x, y_2 = \cos x, y_1 = 1$ وبالتالي نحصل على الجملة الآتية :

$$\begin{cases} c_1'(1) + c_2'\cos x + c_3'\sin x = 0 \\ c_1'(0) + c_2'(-\sin x) + c_3'(\cos x) = 0 \\ c_1'(0) + c_2'(-\cos x) + c_3'(-\sin x) = \sin x \end{cases}$$

وبحل الجملة نجد $c_3 = \ln|\cos x|, c_2 = -x, c_1 = -\cos x$ وبالتالي $y_p = -\cos x - x\cos x + (\ln|\cos x|)\sin x$ وعليه فالحل العام لها هو

$$y = -\cos x - x\cos x + (\ln|\cos x|)\sin x + c_1 + c_2\cos x + c_3 \sin x$$

2.5 تمارين للحل

التمرين الأول : حل المعادلات التفاضلية التالية :

1) $y'' - 2y' - 3y = x^2 - 3$ **2)** $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$

3) $y'' + y = x^2 \sin x$ **4)** $y'' - 2y' - y = (x^3+1)e^x$

التمرين الثاني : نعتبر المعادلة التفاضلية من الرتبة ذات المعاملات المتغيرة المعرفة كما يلي :

$$(E)\ (x+3)y'' - (4x+13)y' + (4x+14)y = (x+4)e^x$$

1. جد حلاً خاصًا y_1 للمعادلة المتجانسة لها إذا علمت أنه من الشكل $e^{\alpha x}$.

2. بإجراء التحويل $y = y_1 z$ أثبت أن المعادلة تصبح على النحو التالي :

$$(x+3)z'' - z' = (x+4)e^{-2x}\ (E')$$

3. حل المعادلة (E') ثم استنتج الحل العام للمعادلة.

التمرين الثالث : جد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية :

1) $y^{(4)} + 16y = 0$ **2)** $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ **3)** $x^2y'' + 2xy' - 2y = x$

4) $(x^2-1)y'' + 2(x-1)y' - 2y = 0$ **5)** $y^{(4)} - y = x^3 + 1$ **6)** $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$

التمرين الرابع (معادلات تنتظر الحل) : حل المعادلات التفاضلية التالية :

1) $y'' - y' = e^x(1 - e^{-x})^2$ **2)** $2y'' - 3y' + y = xshx$ **3)** $y''' - 3ay'' + 3a^2y' - a^3y = 0$

4) $y^{(4)} - y = 5\cos x$ **5)** $y^{(5)} - 4y''' = 0$ **6)** $y^{(4)} + 2a^2y'' + a^4y = 8\cos ax$

الأجوبة : **1** $y = c_1 + 2x + e^x(c_2 + x) + e^{-\frac{x}{2}}$. **2** $y = \left(\frac{1}{4}x^2 - x + c_1\right)e^x - \frac{1}{12}\left(x + \frac{7}{6}\right)e^{-x} + c_2 e^{\frac{x}{2}}$.

3 $y=\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)e^{\alpha x}$. **4.** $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x-\frac{5}{4}x\sin x$

5. $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{2x}+c_5e^{-2x}$ **6** $y=\left(c_1+c_2x\right)\cos ax+\left(c_3+c_4x\right)\sin ax-\frac{x^2}{a^2}\cos ax$.

التمرين الخامس : أثبت أن الحل العام للمعادلة التفاضلية $y^{(n)}=x^n$ هو :

$$y=\frac{m!x^{n+m}}{(m+n)!}+c_1x^{n-1}+.........+c_n$$

التمرين السادس : بإستخدام طريقة تغيير الثوابت

1. أوجد الحل العام للمعادلة : $x^3y'''+x^2y''-2xy'+2y=x\sin^3 x$ حيث $x>0$ وعلمًا أن حلول أساسية للمعادلة المتجانسة.

2. أثبت أن الحل العام للمعادلة : $y''+y=f(x)$ حيث f دالة مستمرة على مجال الحل $[a,b]$ يُعطى بالعلاقة التالية :

$y=c_1\cos x+c_2\sin x+\int_a^x f(t)\sin(x-t)dt$ حيث c_2,c_1 ثابتان اختياريان.

3. جد الحل العام للمعادلة : $y''+y=tgx$

التمرين السابع : بإستخدام طريقة تغيير الثوابت أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية :

1. $y'''-4y''+y'+6y=\cos^2 x$

2. $y''+16y=tg(4x)$

3. $y^{(4)}-16y=x$ حيث $y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$

التمرين الثامن : نعتبر المعادلة التفاضلية الآتية : $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ حيث p و q دالتين مستمرتين على مجال I من $\mathbb{R}$ وليكن y_2,y_1 حلين لها.

1. أثبت أن العلاقة التالية : $W(y_1,y_2)(x)=W(y_1,y_2)(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$

2. أثبت أن $y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$

3. تطبيق : a) جد حلا ثانيا للمعادلة : $y''+(tgx-2\cot gx)y'=0$ إذا كان $y_1=1$ حلا لها.

b) نفس السؤال من أجل : $y''-\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x}y=0$ حيث $x>0$ و $y_1=x$ حلا لها.

الفصل الثالث

الجمل التفاضلية الخطية

ومفاهيم أولية حول الإستقرار

المحاضرة الخامسة عشر

الجمل التفاضلية الخطية

3.1 عموميات

تعريف : نسمي جملة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى كل معادلة تفاضلية من الشكل :

$$Y'(t)=A(t)Y+B(t)................(s)$$

حيث $Y'=\frac{dY}{dt}$ ، $Y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n(t) \end{pmatrix}\in K^n$ ، $K=\mathbb{R}\cup\mathbb{C}$ ، $A(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{1\le i,j\le n}$ مصفوفة مربعة $n\times n$ ،

$B(t)=\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n(t) \end{pmatrix}\in K^n$ ، $t\in I\subset\mathbb{R}$.

ملاحظات :

1. الشكل (s) يسمى بالشكل المصفوفي للجملة التفاضلية.
2. يمكن كتابة الجملة (s) على الشكل التالي :

$$\begin{cases} y_1'=a_{11}(t)y_1+a_{12}(t)y_2+........+a_{1n}(t)y_n+b_1(t) \\ y_2'=a_{21}(t)y_1+a_{22}(t)y_2+........+a_{2n}(t)y_n+b_2(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ y_n'=a_{n1}(t)y_1+a_{n2}(t)y_2+........+a_{nn}(t)y_n+b_n(t) \end{cases}$$

ويسمى هذا الشكل بالشكل الناظمي للجملة التفاضلية.

3. إذا كان $B(t)=0$ تسمى الجملة (s) جملة تفاضلية متجانسة.
4. إذا كان $B(t)\neq 0$ تسمى الجملة (s) جملة تفاضلية متجانسة.

أمثلة :

1) إن الجملة التفاضلية

$$\begin{cases} y_1'=y_2+\sin t \\ \quad y_2'=y_1 \end{cases}$$

هي جملة تفاضلية غير متجانسة يمكن كتابتها على الشكل المصفوفي التالي : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

2) الجملة التفاضلية التالية :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - t y_2 \\ y_2' = t^2 y_1 - y_2 \\ y_3' = y_1 + y_2 - y_3 \end{cases}$$

هي جملة تفاضلية غير متجانسة.

مبرهنة : كل معادلة تفاضلية خطية نونية يمكن تحويلها إلى جملة تفاضلية من الرتبة الأولى.

البرهان : عرفنا مما مضى أن شكل المعادلة التفاضلية الخطية النونية هو :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

حيث $a_n \neq 0$، نضع $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \dots\dots\dots\dots, y_n = y^{(n-1)}$ وعليه يمكن كتابة المعادلة بالشكل الآتي :

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ y_n' = -\dfrac{a_0(t)}{a_n(t)} y_1 - \dfrac{a_1(t)}{a_n(t)} y_2 - \dots\dots\dots - \dfrac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} y_n + f(t) \end{cases}$$

أو بالشكل المصفوفي

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ -\dfrac{a_0}{a_n} & -\dfrac{a_1}{a_n} & . & . & . & . & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ f(t) \end{pmatrix}$$

مثال : حوَل المعادلة التفاضلية التالية إلى جملة تفاضلية :

$$y'' + y' - 3y = 0$$

الحل : كما ورد سابقًا نضع $y_2 = y', y_1 = y$ ومنه نحصل على الجملة التالية :

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2 = 3y_1 - y_2 \end{cases}$$

تعريف (حل الجملة التفاضلية) : نقول أن $Y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ أنه حل شعاعي للجملة (s) إذا تحقق الشرطان الآتيان

1. لكل مركبة $(y_i)_{1\le i\le n}$ مشتق مستمر.

2. الشعاع Y يحقق الجملة التفاضلية.

مثال : نعتبر الجملة التفاضلية التالية :

$$Y'=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}Y$$

إن $Y_1(t)=\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ و $Y_2(t)=\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ يعتبران حلان شعاعيان لها.

خاصية 1 : نعتبر الجملة المتجانسة (s_0)........... $Y'=A(t)Y$، إذا كانت $Y_1,Y_2,........,Y_n$ حلولاً لها فإن العبارة $c_1Y_1+c_2Y_2+.........+c_nY_n$ حلاً لها.

الإثبات : واضح

خاصية 2 : نعتبر الجملة التفاضلية غير المتجانسة (s)........... $Y'=A(t)Y+B(t)$ إذا كان Y_h حلاً خاصا للجملة المتجانسة (s_0) و Y_p حلاً خاصًا لها فإن الحل العام لها يكون $Y=Y_h+Y_p$.

ملاحظة مفيدة : في الخاصية 1 إذا كانت الحلول $Y_1,Y_2,........,Y_n$ مستقلة خطيا فإن $c_1Y_1+c_2Y_2+.........+c_nY_n$ هو الحل العام لها.

3.3.1 الرونسكيان للجملة التفاضلية :

تعريف : الرونسيكان للجملة (s_0) للحلول $Y_1,Y_2,........,Y_n$ هو

$$W(Y_1,Y_2,......,Y_n)(t)=\det(Y_1(t),Y_2(t),......,Y_n(t))$$

مبرهنة 1 : تكون الحلول $Y_1,Y_2,........,Y_n$ للجملة المتجانسة (s_0) مستقلة خطيًا إذا وفقط إذا كان

$$W(Y_1,Y_2,......,Y_n)(t)\neq 0$$

مثال : في المثال السابق الحلان $Y_1(t)=\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ و $Y_2(t)=\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ مستقلان خطيًا وذلك لأن

$$W(Y_1,Y_2)(t)=\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix}=1\neq 0$$

مبرهنة 2 : إذا كانت $Y_1,Y_2,........,Y_n$ حلولاً مستقلة للجملة (s_0) فإن الإثباتات التالية متكافئة :

1) $\forall t\in I, W(Y_1,Y_2,......,Y_n)(t)\neq 0$

2) $\exists t_0\in I, W(Y_1,Y_2,......,Y_n)(t_0)\neq 0$

3) الجملة $\{Y_1,Y_2,......,Y_n\}$ هي جملة أساسية للحلول.

3.1.2 المصفوفة الأساسية لحلول الجملة التفاضلية

تعريف : نسمي مصفوفة أساسية لحلول الجملة (s_0) كل مصفوفة أعمدتها حلول مستقلة خطيا لها، ونرمز لها بالرمز $\Phi(t)$.

مثال : في المثال السابق إن المصفوفة $\phi(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$ تعتبر مصفوفة أساسية للجملة السابقة.

- السؤال الذي يتبادر إلى الأذهان أننا فرض أننا وجدنا مصفوفة أعمدتها تحقق الجملة (s_0) نسميها مصفوفة حلول، فهل نستطيع أن نعرف أن نعرف هل هي مصفوفة هي مصفوفة أساسية أم لا؟. إن الجواب عن هذا التساؤل في النظرية التالية

نظرية : تكون مصفوفة الحلول ϕ مصفوفة أساسية للجملة المتجانسة (s_0)........... $Y'=A(t)Y$ إذا وفقط إذا كان

$$\forall t\in I,\det\phi(t)\neq 0$$

نتيجة : إذا كانت ϕ مصفوفة حلول للجملة (s_0) فيكون لدينا

$$\exists t_0\in I,\det\phi(t_0)\neq 0\Rightarrow \forall t\in I,\det\phi(t)\neq 0$$

ملاحظة : إذا كانت المصفوفة ϕ تحقق الجملة (s_0) فإن كل عمود فيها يكون حلاً أيضًا للجملة (s_0).

تحذير : لنعتبر المصفوفة التالية $\phi(t)=\begin{pmatrix}1 & t & t^2\\ 0 & 2 & t\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ واضح أن $\forall t\in\mathbb{R},\det\phi(t)=0$ وأعمدتها مستقلة خطيًا، فحسب النظرية السابقة المصفوفة $\phi(t)$ لا يمكن أبدًا أن تكون مصفوفة أساسية لأية جملة تفاضلية.

مثال : بين أن المصفوفة $\phi(t)=\begin{pmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{pmatrix}$ هي مصفوفة أساسية للجملة التفاضلية

$$Y'=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}Y$$

حيث $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$.

الحل : أولاً يجب أن نثبت أن هذه المصفوفة هي مصفوفة حلول، ليكن $\phi_1(t)$ هو العمود الأول لها إذن لدينا

$$\phi_1'(t)=\begin{pmatrix}e^t\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\phi_1(t)$$

وبالمثل إذا كان $\phi_2(t)$ هو العمود الثاني لها فإن

$$\phi_2'(t)=\begin{pmatrix}(t+1)e^t\\ e^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\phi_2(t)$$

إذن $\phi(t)$ هي مصفوفة حلول.

ومن جهة أخرى لدينا $\det\phi(0)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$ وعليه فإن $\forall t\in\mathbb{R},\det\phi(t)\neq 0$ وبالتالي قالمصفوفة $\phi(t)$ هي مصفوفة أساسية للجملة المعطاة.

3.1.3 الحل العام للجملة التفاضلية المتجانسة :

مبرهنة : إذا كانت $\phi(t)$ مصفوفة أساسية للجملة المتجانسة (s_0)........... $Y'=A(t)Y$ فإن الحل العام لها يعطى بالعلاقة التالية :

$$Y(t)=\phi(t)C$$

حيث C شعاع اختياري ثابت من $\mathbb{R}^n$ أي على الشكل $C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}$ و $c_1,c_2,...........,c_n$ ثوابت اختيارية.

مثال : أوجد الحل العام للجملة التفاضلية :

$$Y'=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$$

حيث $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

الحل : حسب ما سبق المصفوفة الاساسية لهذه الجملة هي $\Phi(t)=\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ وبالتالي فالحل العام حسب المبرهنة السابقة هو $Y(t)=\Phi(t)C$ حيث C شعاع اختياري ثابت من $\mathbb{R}^2$ أي على الشكل $C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ و c_1,c_2 ثوابت اختيارية.

ومنه $Y(t)=\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ وبالتالي

$$Y(t)=\begin{pmatrix} c_1e^t+c_2te^t \\ c_2e^t \end{pmatrix}$$

أي أن $y_1=c_1e^t+c_2te^t$ و $y_2=c_2e^t$.

حل مسألة القيمة الإبتدائية (مسألة كوشي) : لتكن مسألة القيمة الإبتدائية المكوَنة من الجملة $Y'=A(t)Y$ ....(s_0) مع الشرط الإبتدائي $Y(t_0)=Y_0$ ولدينا سابقا $Y(t)=\Phi(t)C$ ومنه نجد $Y(t_0)=\Phi(t_0)C$ و بما أن $\det\Phi(t_0)\neq 0$ إذن المصفوفة $\Phi^{-1}(t_0)$ تكون موجودة وعليه فإن $C=\Phi^{-1}(t_0)Y_0$ و بالتعويض نحصل على عبارة الحل العام التالية :

$$Y(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)Y_0$$

مثال : حل مسألة القيمة الإبتدائية الآتية :

$$Y'=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$$

مع الشرط الإبتدائي $Y_0=Y(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

الحل : حسب ما سبق لدينا $Y(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)Y_0$ ومنه

$$Y(t)=\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي نجد

$$Y(t)=\begin{pmatrix} (t+1)e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

3.1.4 الحل العام للجملة التفاضلية غير المتجانسة :

مبرهنة : لتكن الجملة التفاضلية غير المتجانسة (s)............$Y' = A(t)Y + B(t)$، إن الحل العام لهذه الجملة هو

$$Y = Y_h + Y_p$$

حيث Y_h هو الحل العام للجملة المتجانسة و Y_p الحل الخاص للجملة غير المتجانسة.

الإثبات : لدينا $Y' = Y_h' + Y_p'$ وبالتالي نجد

$$\begin{aligned} Y' &= A(t)Y_h + A(t)Y_p + B(t) \\ &= A(t)\left(Y_h + Y_p\right) + B(t) \\ &= A(t)Y + B(t) \end{aligned}$$

المحاضرة السادسة عشر

الجمل التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة

تعريف : نسمي جملة تفاضلية ذات معاملات ثابتة إذا كانت من الشكل :

$$Y' = AY + B(t)$$

(أي المصفوفة A غير متعلقة بالمتغير t).

3.2 الحلول الأسية الأساسية للجملة المتجانسة

نبحث عن حل للجملة (s_0) .... $Y' = AY$ يكون من الشكل $Y(t) = e^{\lambda t}V$ حيث V شعاع ثابت من K^n ومنه $Y'(t) = \lambda e^{\lambda t}V$ وبالتعويض في الجملة (s_0) نجد $\lambda e^{\lambda t}V = Ae^{\lambda t}V$ وبالتالي $AV = \lambda V$ وهذا يعني القيمة λ تمثل قيمة ذاتية للمصفوفة A و V شعاع ذاتي مرفق بها وعليه فإننا نبحث عن القيم الذاتية للمصفوفة A والأشعة الذاتية المرفقة بها.

حالة A قابلة للتأقطر:

يوجد في هذه الحالة أساس $(v_1, v_2, ..., v_n)$ من الأشعة الذاتية وتوجد $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ قيم ذاتية مرفقة به وبالتالي نحصل على n دالة حل $t \mapsto e^{\lambda_j t}v_j$ (حيث $j = 1, 2, ..., n$) مستقلة خطيًا، وعليه فإن الحل العام في هذه الحالة يعطى بالعلاقة الآتية :

$$Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}v_2 + ... + c_n e^{\lambda_n t}v_n$$

حيث $c_1, c_2, ..., c_n$ ثوابت اختيارية.

مثال : حل الجملة التفاضلية التالية :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 6y_1 + 3y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 2y_1 + y_2 \end{cases}$$

الحل : نكتب الجملة على الشكل المصفوفي $Y' = AY$ حيث $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ و $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ لنبحث عن القيم الذاتية للمصفوفة A فنجدها $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4$ ونجد الأشعة الذاتية المرفقة $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ومنه حل الجملة المعطاة هو :

$$Y(t) = c_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ملاحظة : إذا كانت A غير قابلة للتأقطر نلجأ إلى أسية مصفوفة (ستأتي).

3.2.1 حساب المصفوفة الأساسية :

مبرهنة : لتكن A مصفوفة عناصرها ثوابت (حقيقية أو عقدية) ولتكن $v_1, v_2, ..., v_n$ أشعة ذاتية مستقلة خطيا مرفقة بالقيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ عندئذ المصفوفة الأساسية للجملة $Y' = AY$ هي بالشكل الآتي :

$$\Phi(t) = \left[e^{\lambda_1 t}v_1, e^{\lambda_2 t}v_2, ..., e^{\lambda_n t}v_n \right]$$

مثال : المصفوفة الأساسية للجملة السابقة هي :

$$\phi(t)=\begin{pmatrix} e^{3t} & 2e^{4t} \\ e^{3t} & 3e^{4t} \end{pmatrix}$$

3.3 أسية مصفوفة

تعريف : إذا كانت A مصفوفة مربعة $n\times n$ نعرف أسية المصفوفة A ونرمز لها بالرمز e^A كما يلي :

$$e^A=I+A+\frac{A^2}{2!}+.............+\frac{A^n}{n!}+.......$$

ملاحظة : إذا كان t متغير حقيقي فإننا نعوض tA بدل A فتصبح

$$e^{tA}=I+tA+\frac{t^2}{2!}A^2+.............+\frac{t^n}{n!}A^n+.......$$

(بالطبع tA يمكن الحصول عليها عن طريق ضرب أي عنصر من المصفوفة A في المتغير t).

خواص :

خاصية أساسية : لتكن A و B مصفوفتين مربعتين$(n\times n)$ قابلتين للتبادل (بمعنى $AB=BA$) فإن

$$e^{A+B}=e^Ae^B$$

تنبيه : عموما $e^{A+B}\neq e^Ae^B$ (إلا في حالة $AB=BA$).

مثال : نعتبر المصفوفتين $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ يمكن التأكد من أن $e^{A+B}\neq e^Ae^B$.

خاصية 1 : من التعريف نجد $e^0=I$.

خاصية 2 : المصفوفة e^A قابلة للقلب ومقلوبها هو e^{-A} بمعنى $\left(e^A\right)^{-1}=e^{-A}$.

الإثبات : من الخاصية الأساسية عندما يكون $A=-B$ نحصل على

$$\begin{aligned}e^Ae^{-A}&=e^{A+(-A)}\\&=e^0=I\end{aligned}$$

أي أن المصفوفة e^A قابلة للقلب ومقلوبها هو e^{-A}.

خاصية 3 : لدينا دوما $\left(e^{tA}\right)'=Ae^{tA}$.

الإثبات : نضع $f(t)=e^{tA}$ لدينا

$$\begin{aligned}f'(t)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{e^{(t+h)A}-e^{tA}}{h}\\&=e^{tA}\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{hA}-I}{h}\right)\\&=e^{tA}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(hA+\frac{h^2}{2!}A^2+..........\right)\\&=Ae^{tA}\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مبرهنة : المصفوفة e^{tA} وفة هي مصفوفة أساسية للجملة(s_0).

الإثبات : حسب الخاصية 3 إن e^{tA} مصفوفة حلول للجملة (s_0) وبما أنها قابلة للقلب حسب الخاصية 2 وبالتالي فهي مصفوفة أساسية.

3.3.1 حساب أسية مصفوفة في بعض الحالات الخاصة

إن عملية حساب e^{tA} بإستخدام التعريف تنطوي على كثير من التعقيد, لكن هناك حالات خاصة لحسابها

نذكرمنها :

1) حالة A **قطرية :** في هذه حالة يمكن A كتابتها على الشكل الآتي

$$A=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & . & & & & \\ . & & . & & & \\ . & & & . & & \\ . & & & & . & \\ 0 & & & & & d_n \end{pmatrix}$$

فإن

$$e^{tA}=\begin{pmatrix} e^{td_1} & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & . & & & & \\ . & & . & & & \\ . & & & . & & \\ . & & & & . & \\ 0 & & & & & e^{td_n} \end{pmatrix}$$

$$e^{tA}=t\begin{pmatrix} d_1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & . & & & & \\ . & & . & & & \\ . & & & . & & \\ . & & & & . & \\ 0 & & & & & d_n \end{pmatrix}+\frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} d^2_1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & . & & & & \\ . & & . & & & \\ . & & & . & & \\ . & & & & . & \\ 0 & & & & & d^2_n \end{pmatrix}+\dots\dots\dots\dots+\frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix} d^n_1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & . & & & & \\ . & & . & & & \\ . & & & . & & \\ . & & & & . & \\ 0 & & & & & d^n_n \end{pmatrix}+\dots..$$

لأن

$$=\begin{pmatrix} e^{td_1} & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & . & & & & \\ . & & . & & & \\ . & & & . & & \\ . & & & & . & \\ 0 & & & & & e^{td_n} \end{pmatrix}$$

مثال : إذا كانت $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ فأوجد e^{tA}.

الحل : نستطيع كتابة $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ والمصفوفتين قابلتين للتبادل إذن

$$e^{tA}=e^{t\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$=\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\left[I+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}t+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2\frac{t^2}{2!}+\dots\dots..\right]$$

لكن $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ومنه نجد

$$e^{tA}=e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) إذاكانت A قابلة للتأقطر:

نذكر أن المصفوفة المربعة A تكون قابلة للتأقطر إذا وجدت مصفوفة قطرية D ومصفوفة قابلة للقلب P بحيث $A = PDP^{-1}$ ، ففي هذه الحالة يكون $e^{A} = Pe^{D}P^{-1}$ ويمكن حساب D حسب الحالة 1 وفيما يخص بحساب e^{tA} يكون لدينا

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$$

3) إذاكانت A عديمة القوى:

تسمى مصفوفة عديمة القوى إذا وجد عدد طبيعي r بحيث $A^{r} = 0$ ينتج عن ذلك $\forall k \geq r, A^{r} \geq 0$ وبإستخدام التعريف نحصل على

$$e^{A} = I + A + \frac{A^{2}}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{A^{r-1}}{(r-1)!}$$

مثال : نعتبر المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ أوجد e^{tA}.

الحل : لدينا $A^{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $A^{3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ إذن المصفوفة A عديمة القوى ومنه

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^{2}}{2!}A^{2}$$

وبالتالي نجد

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 3t & 4t + 9t^{2} \\ 0 & 1 & 6t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

المحاضرة السابعة عشر

حل الجمل التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة

3.4 أولاً: حل مسألة القيمة الإبتدائية

مبرهنة 1 (حل الجملة المتجانسة) : حل الجملة (s_0) ....$Y' = AY$ مع الشرط : $Y(t_0) = Y_0$ هو كما يلي :

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0$$

البرهان : لنتحقق من أن $Y(t_0) = Y_0$ بالتعويض نجد

$$\begin{aligned} Y(t_0) &= e^{(t_0-t_0)A} Y_0 \\ &= Y_0 \end{aligned}$$

و

ومن جهة ثانية عندنا $\left(e^{tA}\right)' = Ae^{tA}$ وعليه فإن

$$\begin{aligned} Y' &= \frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{(t-t_0)A} Y_0\right) \\ &= Ae^{(t-t_0)A} Y_0 \\ &= AY(t) \end{aligned}$$

وبهذا ينتهي البرهان.

مبرهنة 2 (حل الجملة غير المتجانسة) : حل الجملة $Y' = AY + B(t)$ مع الشرط $Y(t_0) = Y_0$ هو كالتالي :

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\, ds$$

البرهان : لإثبات ذلك نستخدم طريقة تغيير الثابت، لدينا $Y = Y_h + Y_p$

أولاً : نبحث عن Y_h أي حل الجملة المتجانسة علمنا سابقًا أن $Y_h = e^{tA}C$ حيث C شعاع ثابت اختياري.

ثانيًا : نبحث عن Y_p أي الحل الخاص للجملة $Y' = AY + B(t)$ هنا نستخدم طريقة الثابت نجعل $Y_p = e^{tA}C(t)$ ومنه

ومنه $Y_p' = Ae^{tA}C(t) + e^{tA}C'(t)$ ، $e^{tA}C'(t) = B(t)$، من أجل $t_0 \in I$ نجد

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-sA} B(s)\, ds$$

وعليه فالحل الخاص يكون كالتالي :

$$Y_p(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\, ds$$

ومنه الحل العام للجملة هو

$Y(t) = e^{tA}C + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\, ds$ وبإستخدام الشرط الإبتدائي $Y(t_0) = Y_0$ نجد $Y(t_0) = e^{t_0A}C$ ومنه $C = e^{-t_0A} Y_0$

وبالتعويض نحصل على

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\, ds$$

3.5 ثانيًا : حل الجملة بدون شروط ابتدائية

إذا كان لا يوجد شروط ابتدائية يكون حل الجملة المتجانسة هو

$$Y=e^{tA}C$$

وحل الجملة غير المتجانسة هو

$$Y(t)=e^{tA}C+e^{tA}\int e^{-sA}B(s)ds$$

حيث C شعاع ثابت اختياري، ويمكن اهمال جميع ثوابت التكامل عند حسابها.

مثال 1 : حل الجملة التفاضلية التالية :

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=3y\end{cases}$$

مع الشرط الإبتدائي : $Y(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

الحل : نعتبر $Y=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ومنه $Y'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ إن الشكل المصفوفي للجملة يمكن كتابته كما يلي :

$$Y'=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}Y$$

نضع $A=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$ وعلمنا سابقا أن حل الجملة هو $Y(t)=e^{(t-t_0)}Y_0$ إذن من أجل $t_0=0$ نجد $Y(t)=e^{tA}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$، وجدنا

سابقا $e^{tA}=e^{3t}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$ وبالتالي نحصل على حل المسألة كما يلي :

$$Y(t)=e^{3t}\begin{pmatrix}1+t\\1\end{pmatrix}$$

مثال 2 : حل الجملة التفاضلية :

$$Y'=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}Y+\begin{pmatrix}e^{3t}\\0\end{pmatrix}$$

مع الشرط $Y(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

الحل : لدينا $Y(t)=e^{(t-t_0)A}Y_0+\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)A}B(s)ds$ وبالتعويض نجد

$$Y(t)=e^{tA}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\int_0^t e^{3(t-s)}\begin{pmatrix}1&t-s\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{3s}\\0\end{pmatrix}ds$$

ومنه نجد

$$Y(t)=e^{3t}\begin{pmatrix}1+2t\\1\end{pmatrix}$$

3.6 ايجاد أسية مصفوفة عن طريق المصفوفة الأساسية

بما أن e^{tA} و $\Phi(t)$ مصفوفتان أساسيتان للجملة المتجانسة $Y'=AY$ فإنه توجد مصفوفة غير شاذة C بحيث

$e^{tA}=\Phi(t)C$ بأخذ $x=0$ يكون $C=\Phi^{-1}(0)$ وبالتالي :

$$e^{tA}=\Phi(t)\Phi^{-1}(0)$$

مثال : جد e^{tA} من أجل $A=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

الحل : وجدنا سابقا $\Phi(t)=\begin{pmatrix}e^{3t} & 2e^{4t}\\ e^{3t} & 3e^{4t}\end{pmatrix}$ ومنه $\Phi^{-1}(0)=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ وبالتعويض في العلاقة السابقة نجد

$$e^{tA}=\begin{pmatrix}3e^{3t}-8e^{4t} & -3e^{3t}+2e^{4t}\\ 3e^{3t}-6e^{4t} & -e^{3t}+3e^{4t}\end{pmatrix}$$

3.7 مبرهنة كايلي-هاملتون (Cayly-Hamilten)

أي مصفوفة مربعة تحقق معادلتها المميزة أي إذا كان

$$\det(A-\lambda I)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+..........+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$$

فإن $a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+..........+a_2A^2+a_1A+a_0I=0$

مثال : بإستخدام مبرهنة كايلي-هاملتون حل الجملة التفاضلية التالية :

$$Y'=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}Y$$

الحل : لدينا $\det(A-\lambda I)=\lambda^2-4\lambda+4=0$ وهذا يعني أن $(2-\lambda)^2=0$ وبالتالي حسب مبرهنة كايلي-هاملتون فإن $(A-2I)^2=0$ ومنه

$$\begin{aligned}e^{tA}&=e^{t(A-2I+2I)}\\ &=e^{2tI}e^{t(A-2I)}\\ &=e^{2tI}\left[I+t(A-2I)\right]\\ &=e^{2t}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right]\\ &=e^{2t}\begin{pmatrix}1+t & -t\\ t & 1-t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

وبالتالي فالحل العام للجملة المعطاة هو

$$Y(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}1+t & -t\\ t & 1-t\end{pmatrix}C$$

حيث C شعاع اختياري من $\mathbb{R}^2$.

المحاضرة الثامنة عشر

الجمل التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة

الهدف من هذه المحاضرة هو تعميم النتائج السابقة (حالة المعاملات الثابتة) من أجل الجمل التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة.

3.8 حالة (résolvante) الجملة التفاضلية

نعتبر الجملة التفاضلية المتجانسة (s_0)........... $Y' = AY$ حيث A مصفوفة $n \times n$ على K معاملاتها مستمرة.

تعريف (الحالة) : نسمي الحالة (La résolvante) للجملة (s_0) المصفوفة $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ ونرمز لها بالرمز $R(t,t_0)$, ونكتب

$$R(t,t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$$

حيث $t \in I$ ؛ $t_0 \in I$.

نتيجة : لدينا دومًا

$$\frac{d}{dt}R(t,t_0) = A(t)R(t,t_0)$$

الإثبات : علمنا أن $R(t,t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ ومنه

$$\frac{d}{dt}R(t,t_0) = \frac{d}{dt}\left(\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\right)$$
$$= \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)$$

وبما أن $\Phi(t)$ مصفوفة حلول أساسية، إذن $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ وبالتالي يكون $\frac{d}{dt}R(t,t_0) = A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$

وهذا يعني أن $\frac{d}{dt}R(t,t_0) = A(t)R(t,t_0)$ وبهذا يتم البرهان.

مبرهنة : الحالة $R(t,t_0)$ هي مصفوفة أساسية للجملة (s_0).

الإثبات : حسب النتيجة السابقة $R(t,t_0)$ هي مصفوفة حلول، ولدينا

$$\det R(t,t_0) = \det\left(\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\right)$$
$$= \det\Phi(t)\det\Phi^{-1}(t_0) \neq 0$$

وعليه $R(t,t_0)$ هي مصفوفة أساسية للجملة (s_0).

نتيجة : الحل العام للجملة التفاضلية المتجانسة (s_0) هو كما يلي :

$$Y(t) = R(t,t_0)C$$

حيث C شعاع اختياري.

خصائص الحالة :

1. من أجل كل t من I يكون : $R(t,t) = I$.
2. من أجل كل t,s,r من I يكون : $R(t,s)R(s,r) = R(t,r)$.

3. من أجل كل t,s من I يكون : $R(t,s)R(s,t)=I$.

4. من أجل كل t,s من I يكون : $\left(R(t,s)\right)^{-1}=R(s,t)$.

الإثبات :

1. لدينا $R(t,t)=\varphi(t)\varphi^{-1}(t)=I$.

2. من أجل كل t,s,r من I يكون :

$$\begin{aligned}R(t,s)R(s,r)&=\left(\varphi(t)\varphi^{-1}(s)\right)\left(\varphi(s)\varphi^{-1}(t)\right)\\&=\varphi(t)\varphi^{-1}(r)\\&=R(t,r)\end{aligned}$$

3. حسب 1 من أجل $r=t$ نجد المطلوب.

4. عندنا

$$\begin{aligned}\left(R(t,s)\right)^{-1}&=\left(\varphi(t)\varphi^{-1}(s)\right)^{-1}\\&=\left(\varphi^{-1}(s)\right)^{-1}\varphi^{-1}(t)\\&=R(s,t)\end{aligned}$$

مبرهنة : إذا كانت $A(t)$ مصفوفة مربعة $n\times n$ بحيث من أجل كل t,u من I يكون

$$A(t)A(u)=A(u)A(t)$$

فإن

$$R(t,t_0)=e^{\int_{t_0}^{t}A(u)du}$$

3.9 حل الجمل التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة

أولاً. بدون شروط ابتدائية : رأينا فيما سبق أن حل الجملة المتجانسة (s_0) هو $Y(t)=R(t,t_0)C$ حيث C شعاع اختياري.

مبرهنة (حل الجملة غير المتجانسة) : حل الجملة التفاضلية $Y'=A(t)Y+B(t)$ هو

$$Y(t)=R(t,t_0)C+R(t,t_0)\int R(t,t_0)B(t)dt$$

الإثبات : نعلم أن $Y=Y_h+Y_p$، حسب ما سبق لدينا $Y_h=R(t,t_0)C$ ولإيجاد الحل الخاص Y_p نستخدم طريقة تغيير الثابت فيكون $Y_p=R(t,t_0)C(t)$ ومنه

$$\begin{aligned}Y_p'&=R'(t,t_0)C(t)+R(t,t_0)C'(t)\\&=A(t)R(t,t_0)C(t)+B(t)\end{aligned}$$

وبالتالي نحصل على $R(t,t_0)C'(t)=B(t)$ ومنه نجد

$$\begin{aligned}C'(t)&=R^{-1}(t,t_0)B(t)\\&=R(t_0,t)B(t)\end{aligned}$$

إذن $C(t)=\int R(t_0,t)B(t)dt$ ومنه $Y_p=R(t,t_0)\int R(t_0,t)B(t)dt$ وبالتالي

$$Y(t)=R(t,t_0)C+R(t,t_0)\int R(t,t_0)B(t)dt$$

ثانيًا. بشروط ابتدائية (مسألة القيمة الإبتدائية) :

مبرهنة (حل الجملة المتجانسة) : حل الجملة $Y'=A(t)Y$ مع الشرط $Y(t_0)=Y_0$ هو كما يلي

$$Y(t)=R(t,t_0)Y_0$$

الإثبات : رأينا أن حل الجملة المتجانسة بدون شروط ابتدائية هو $Y(t)=R(t,t_0)C$ من أجل $t=t_0$ نجد $Y(t_0)=R(t_0,t_0)C$ ومنه $Y(t_0)=C$ وعليه فإن $Y(t)=R(t,t_0)Y_0$.

مبرهنة (حل الجملة غير المتجانسة) : حل الجملة غير المتجانسة $Y'=A(t)Y+B(t)$ مع الشرط $Y(t_0)=Y_0$ هو

$$Y(t)=R(t,t_0)Y_0+\int_{t_0}^{t}R(t,s)B(s)ds$$

الإثبات : نعلم أن $Y=Y_h+Y_p$ وأن $Y_h=R(t,t_0)C$ وبإستخدام طريقة تغيير الثابت نضع $Y_p=R(t,t_0)C(t)$ وبالتعويض نجد $C'(t)=R(t_0,t)B(t)$ ومنه يصبح $C(t)=\int_{t_0}^{t}R(t_0,s)B(s)ds$ وبالتالي نحصل على

$$Y_p=R(t,t_0)\int_{t_0}^{t}R(t_0,s)B(s)ds$$

$$=\int_{t_0}^{t}R(t,s)B(s)ds$$

ومنه نجد $Y(t)=R(t,t_0)C+\int_{t_0}^{t}R(t,s)B(s)ds$ وبإستجدام الشرط الإبتدائي نجد $C=Y_0$ وبه يتم البرهان.

ملاحظة : في حالة $A(t)=A$ أي المصفوفة A ذات معاملات ثابتة نجد الشكل الذي مر بنا سابقًا

$$Y(t)=e^{(t-t_0)A}Y_0+\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)A}B(s)ds$$

أي أنه في هذه الحالة يكون

$$R(t,t_0)=e^{(t-t_0)A}$$

المحاضرة التاسعة عشر

مفاهيم أولية حول استقرار الجمل التفاضلية

3.10 تمهيدات

نعتبر الجملة التفاضلية التالية :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t,x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t,x,y) \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(s)$$

ليكن $x = x(t)$ و $y = y(t)$ حلين لها يحققان الشروط الإبتدائية التالية :

$$\begin{cases} x_{t=0} = x_0 \\ y_{t=0} = y_0 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots(H_0)$$

وليكن أيضًا $\overline{x} = \overline{x}(t)$ و $\overline{y} = \overline{y}(t)$ حلين للجملة (s) يحققان الشروط الإبتدائية التالية :

$$\begin{cases} \overline{x}_{t=0} = x_0 \\ \overline{y}_{t=0} = y_0 \end{cases}$$

تعريف : نقول أن الحلان $x = x(t)$ و $y = y(t)$ للجملة (s) اللذان يحققان الشروط الإبتدائية (H_0) أنهما مستقران بمفهوم ليبانوف (Liapounov) إذا تحقق الشرط الآتي : عندما $t \to +\infty$ يكون

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t > 0 : \begin{cases} \left|\overline{x}(t) - x(t)\right| < \varepsilon \\ \left|\overline{y}(t) - y(t)\right| < \varepsilon \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

والشروط الإبتدائية تحقق :

$$\begin{cases} \left|\overline{x_0} - x_0\right| < \delta \\ \left|\overline{y_0} - y_0\right| < \delta \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

مثال : نعتبر المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى التالية :

$$\frac{dy}{dt} = -y + 1$$

إن حلها العام هو $y = ce^{-t} + 1$ والحل الخاضع للشرط $y(0) = 1$ هو $y = 1$، الآن لنبحث عن الحل الذي يحقق الشرط $\overline{y}_{t=0} = y_0$ نحدد قيمة c فنجد $c = \overline{y_0} - 1$ وبالتالي الحل هو

$$\overline{y} = \left(\overline{y_0} - 1\right)e^{-t} + 1$$

من الواضح أن الحل $y = 1$ مستقر، بالفعل $\overline{y} - y = \left(\overline{y_0} - 1\right)e^{-t} \to 0$ عندما $t \to +\infty$. كذلك المتباينة (2) محققة من أجل كل $\varepsilon > 0$ لأن

$$\overline{y_0} - 1 = \delta < \varepsilon$$

تعريف : نقول أن الجملة (s) مستقلة إذا أمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(x,y) \end{cases}$$

3.11 دراسة استقرار الجمل التفاضلية الخطية

نعتبر الجملة التفاضلية الآتية :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=cx+gy \\ \dfrac{dx}{dt}=ax+by \end{cases} \quad ....(s')$$

حيث g,c,b,a أعداد ثابتة.

من الواضح أن $x=0$ ، $y=0$ هو حلاً للجملة (s')، لنبحث عن الشروط التي يجب أن تحققها الأعداد g,c,b,a حتى يكون الحل $x=0$ ، $y=0$ مستقرًا، نكتب الجملة (s') على الشكل المصفوفي $Y'=AY$ حيث $A=\begin{pmatrix} c & g \\ a & b \end{pmatrix}$ و $Y=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$، لدينا

$$|A-\lambda I|=\lambda^2-(b+c)\lambda-(ag-cb)$$

حيث λ قيمة ذاتية، فالمعادلة المميزة لها حلان و ليكنا λ_1,λ_2.

الحالة الأولى. الحلان حقيقيان مختلفان سالبان : بمعنى $\lambda_1\neq\lambda_2, \lambda_1<0, \lambda_2<0$ فنجد في هذه الحالة

$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$ و $y=\left[c_1(\lambda_1-c)e^{\lambda_1 t}+c_2(\lambda_2-c)e^{\lambda_2 t}\right]\dfrac{1}{g}$.

لنميز الحالتين التاليتين :

1. إذا كان $a\neq 0, g=0$ فإن الجملة (s') تحول إلى المعادلة التالية :

$$\frac{d^2x}{dt^2}-(b+c)\frac{dx}{dt}-(ag-bc)x=0$$

ويمكن كتابتها أيضا من أجل التابع y.

2. إذا كان $a=0, g=0$ فإن حلول الجملة (s') هي $x=c_1e^{\lambda_1 t}, y=c_2e^{\lambda_2 t}$ والحل الذي يحقق الشروط الإبتدائية $\overline{y}_{t=0}=y_0$ و $\overline{x}_{t=0}=x_0$ هو كالتالي :

$$x=\frac{cx_0+gy_0-\lambda_1 x}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 t}+\frac{\lambda_1 x_0-cx_0-gy_0}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 t}$$

$$y=\frac{1}{g}\left[\frac{cx_0+gy_0-\lambda_1 x}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1-c)e^{\lambda_1 t}+\frac{\lambda_1 x_0-cx_0-gy_0}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_2-c)e^{\lambda_2 t}\right]$$

من أجل $\varepsilon>0$ يمكن اختيار $|x_0|$ و $|y_0|$ بحيث

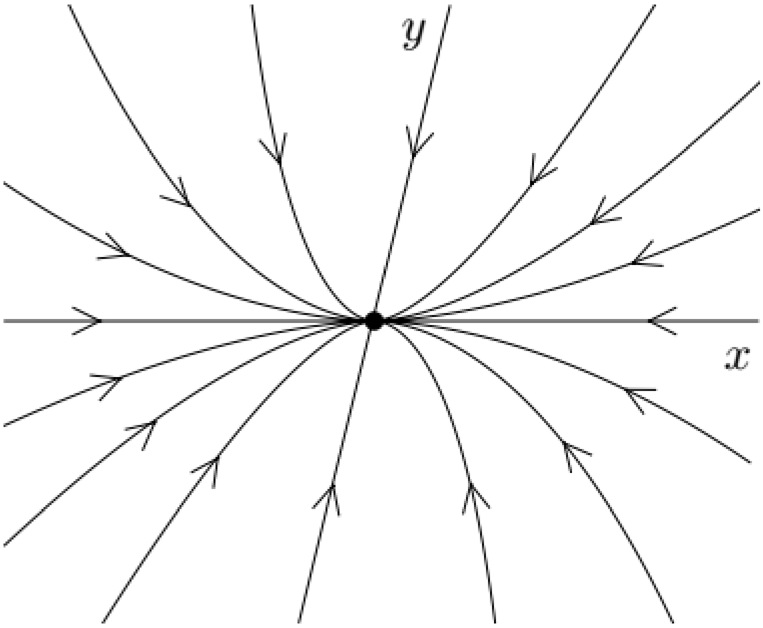
$$\forall\ t>0: |x(t)|<\varepsilon, |y(t)|<\varepsilon$$

عندنا $e^{\lambda_1 t}<1, e^{\lambda_2 t}<1$ اذن

$$\begin{cases} \lim_{t\to+\infty} x(t)=0 \\ \lim_{t\to+\infty} y(t)=0 \end{cases}$$

وعليه فالحل لهذه الجملة مستقر.

- الشكل التالي يبين استقرار الحل في هذه الحالة



مثال : أدرس استقرار الحل المعدوم $x=0, y=0$ للجملة التفاضلية التالية :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y \end{cases}$$

الحل : المعادلة المميزة للجملة هي $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ أي أن $(-1-\lambda)(-2-\lambda)=0$ وبالتالي نجد $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$ وعليه فالحل في هذه الحالة هو

$$x=c_1e^{-t}, y=c_2e^{-2t}$$

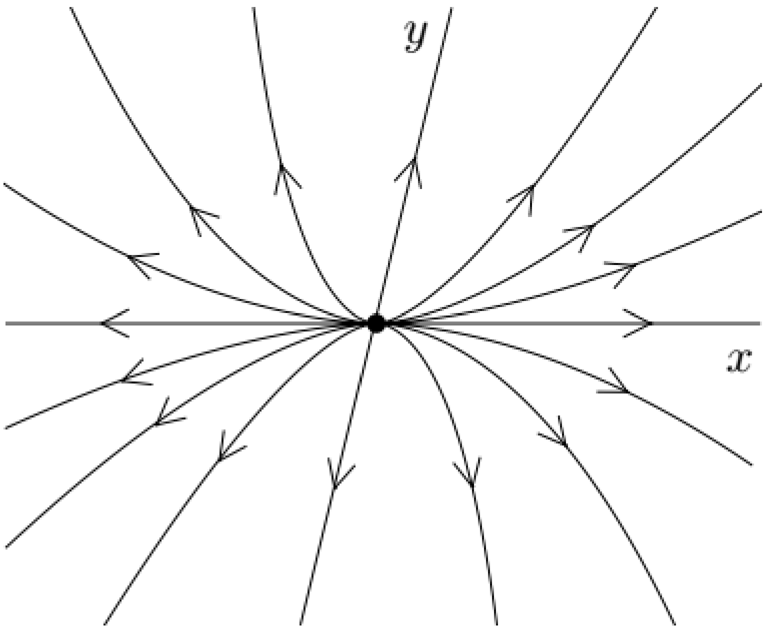
إذن الحلول مع الشرط $x_{t=0}=x_0$ و $y_{t=0}=y_0$ هي كما يلي :

$$x=x_0e^{-t}, y=y_0e^{-2t}$$

من الواضح أنه عندما $t\to+\infty$ نحصل على $x(t)\to 0$ و $y(t)\to 0$ وعليه فالحل المعدوم يتمتع بالإستقرار.

الحالة الثانية. الحلان حقيقيان مختلفان وموجبان : بمعنى $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1>0, \lambda_2>0$ في هذه الحالة لما $t\to+\infty$ نجد $e^{\lambda_1 t}\to+\infty$ و $e^{\lambda_2 t}\to+\infty$ وهذا يعني أن $|x(t)|\to+\infty$ و $|y(t)|\to+\infty$ مما يدل أن الحل غير مستقر.

- الشكل الآتي يبين أن الحل في حالة غير مستقرة



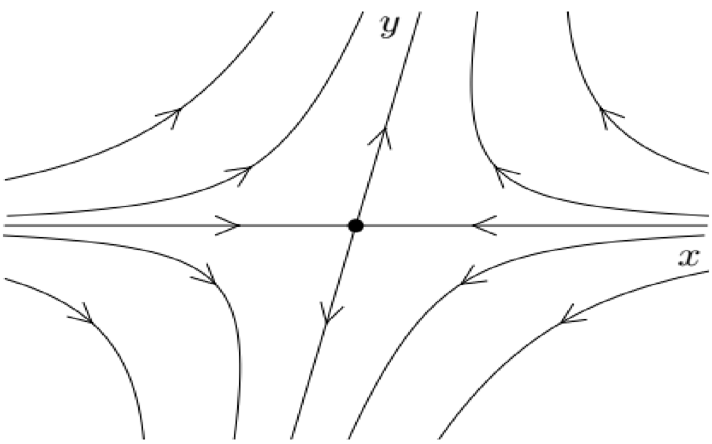
مثال : أدرس استقرار حلول الجملة الآتية :

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=2y\end{cases}$$

الحل : المعادلة المميزة للجملة هي $\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$ أي أن $(1-\lambda)(2-\lambda)=0$ وبالتالي نجد $\lambda_1=1,\lambda_2=2$ وعليه فالحل في هذه الحالة هو $x=c_1e^{t}, y=c_2e^{2t}$ إذن الحلول وفق الشرط $x_{t=0}=x_0$ و $y_{t=0}=y_0$ هي كما يلي : $x=x_0e^{t}, y=y_0e^{2t}$ إن الحل غير مستقر وذلك لأن $|x(t)|\to+\infty$ و $|y(t)|\to+\infty$.

الحالة الثالثة. الجذران حقيقيان و مختلفان في الإشارة : أي $\lambda_2<0,\lambda_1>0$ في الشكل (*) من أجل $|x_0|$ و $|y_0|$ صغيرين، وإذا كان $cx_0+gy_0-x_0\lambda_2\neq 0$ فنجد $|x(t)|\to+\infty$ و $|y(t)|\to+\infty$ وذلك لما $t\to+\infty$ عندئذ الحل غير مستقر في هذه الحالة.

- الشكل التالي يبين أن الحل في هذه الحالة لا يتمتع بالإستقرار



مثال : أدرس استقرار حلول الجملة الآتية :

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-2y\end{cases}$$

الحل : المعادلة المميزة للجملة هي $\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0$ أي أن $(\lambda-1)(2+\lambda)=0$ وبالتالي نجد $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$

وعليه فالحل في هذه الحالة هو $x=c_1e^{t},y=c_2e^{-2t}$ إذن الحلول وفق الشرط $x_{t=0}=x_0$ و $y_{t=0}=y_0$ هي كما يلي : $x=x_0e^{t},y=y_0e^{-2t}$ إن الحل غير مستقر وذلك لأن $|x(t)|\to+\infty$.

الحالة الرابعة. الجذران مركبان والجزء الحقيقي سالب : بمعنى $\lambda_1=\alpha+i\beta$ و $\lambda_2=\alpha-i\beta$ حيث $\alpha<0$، إن حل الجملة في هذه الحالة هو

$$x=e^{\alpha t}\left[c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t\right]..........(**)$$ و $$y=e^{\alpha t}\left[(\alpha c_1+\beta c_2-cc_1)\cos\beta t+(\alpha c_2-\beta c_1-cc_2)\sin\beta t\right]\frac{1}{\gamma}$$

بوضع $c=\sqrt{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}}$، $\sin\delta=\frac{c_1}{c}$ و $\cos\delta=\frac{c_2}{c}$ نجد

$$x=ce^{\alpha t}\sin(\beta t+\delta)$$ و $$y=\frac{ce^{\alpha t}}{\gamma}\left[(\alpha-c)\sin(\beta t+\delta)+\beta\cos(\beta t+\delta)\right]$$

حيث c_2,c_1 ثابتان حقيقيان، بإستخدام الشرط $x_{t=0}=x_0$ و $y_{t=0}=y_0$ نجد

$$x=x_0\sin\delta$$ و $$y=\frac{c}{\delta}\left[(\alpha-c)\sin\delta+\beta\cos\delta\right]$$

وبالتالي فإن $c_1=x_0$ و $c_2=\frac{\gamma y_0-x_0(\alpha-c)}{\beta}$ فمن الواضح أنه من أجل كل $\varepsilon>0$ و $|x_0|,|y_0|$ يكون $|x(t)|<\varepsilon$ و $|y(t)|<\varepsilon$ وهذا يعني أن $x(t)\to0$ و $y(t)\to0$،عليه فالحل في هذه الحالة مستقرًا.

مثال : أدرس استقرار حلول الجملة الآتية :

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-x+y\end{cases}$$

الحل : المعادلة المميزة للجملة هي $\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1\\ -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$ أي أن $\lambda^2+2\lambda+2=0$ وبالتالي نجد $\lambda_1=-1+i,\lambda_2=-1-i$ ففي هذه الحالة $\alpha=-1$، $\beta=1$ وحسب الشكل السابق $c_1=x_0,c_2=y_0$ ومنه الحل يكون كما يلي :

$$\begin{cases}x=e^{-t}\left(x_0\cos t+y_0\sin t\right)\\ y=e^{-t}\left(y_0\cos t-x_0\sin t\right)\end{cases}$$

ينتج من أجل قيم t كيفية أن $|x|\le|x_0|+|y_0|$، $|y|\le|x_0|+|y_0|$، وبالتالي عندما $t\to+\infty$ فإن $x(t)\to0$ و $y(t)\to0$ وعليه فالحل لهذه الجملة يتمتع بالإستقرار.

الحالة الخامسة. الجذران مركبان والجزء الحقيقي موجب : بمعنى $\lambda_1=\alpha+i\beta$ و $\lambda_2=\alpha-i\beta$ حيث $\alpha<0$

حسب العلاقة (**) من الواضح جدًا أنه عندما $t\to+\infty$ فإن $|x(t)|\to+\infty$ و $|y(t)|\to+\infty$ وعليه فالحل لهذه الجملة غيرمستقر.

مثال : أدرس استقرار حلول الجملة الآتية :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

الحل : المعادلة المميزة للجملة هي $0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ أي أن $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ وبالتالي نجد $\lambda_1 = 1+i, \lambda_2 = 1-i$
وبالتالي حل الجملة حسب (**) هو كما يلي :

$$\begin{cases} x = e^t \left(x_0 \cos t + y_0 \sin t\right) \\ y = e^t \left(y_0 \cos t - x_0 \sin t\right) \end{cases}$$

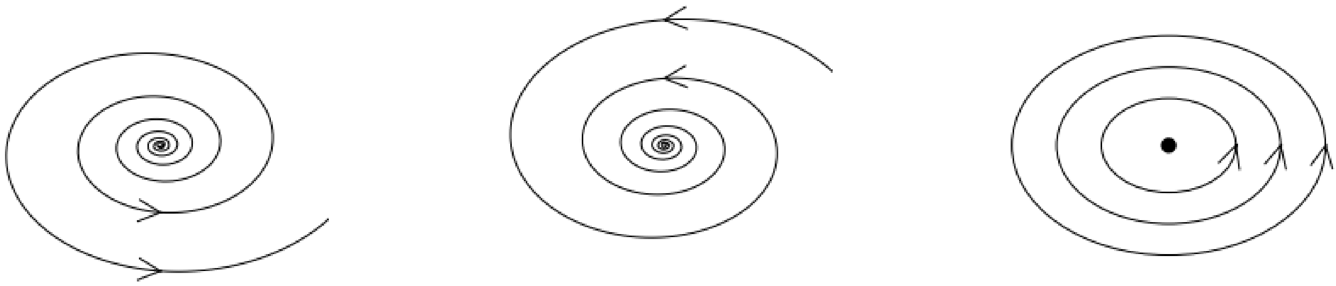
إذن لما $t \to +\infty$ فإن $|x(t)| \to +\infty$ و $|y(t)| \to +\infty$ وعليه فالحل لهذه الجملة غيرمتمتع بالإستقرار.

الحالة السادسة. الجذران تخيليان صرفيان : أي أن $\lambda_1 = i\beta$ و $\lambda_2 = -i\beta$، إن شكل الحل في هذه الحالة هو كالتالي :

$$y = \frac{1}{\gamma}\left(\beta c_2 - c c_1\right)\cos \beta t + \left(-\beta c_1 - c c_2\right)\sin \beta t \quad \text{و} \quad x = c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t$$

حيث c_2, c_1 ثابتان حقيقيان محددان كالتالي $c_1 = x_0, c_2 = \dfrac{\gamma y_0 + c x_0}{\gamma}$, من الواضح أن من أجل t كيفية و $|x_0|, |y_0|$ صغيران بقدر كافٍ فإنه ينتج $|x(t)| < \varepsilon$ و $|y(t)| < \varepsilon$ إذن الحل مستقر في هذه الحالة.

- الأشكال الموالية تبيّن سلوكيات الحل في الحالات الثلاث السابقة



$\alpha > 0$ $\qquad$ $\alpha < 0$ $\qquad$ $\alpha = 0$

الحالة السابعة. الجذران أحدهما معدوم والآخر سالب : بمعنى $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ فالحل في هذه الحالة يكون على النحو التالي :

$$y = \frac{1}{\gamma}\left[-c_1 c + c_2\left(\lambda_2 - c\right)e^{\lambda_2 t}\right] \quad \text{و} \quad x = c_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

من الواضح جدًا أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ و $|x_0|, |y_0|$ صغيرين بما فيه الكفاية، يكون $|x(t)| < \varepsilon$ و $|y(t)| < \varepsilon$ وهذا يعني أن $x(t) \to 0$ و $y(t) \to 0$، عليه فالحل في هذه الحالة مستقرًا.

مثال : أدرس استقرار حلول الجملة الآتية :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$

الحل : المعادلة المميزة للجملة هي $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$ وبالتالي نجد $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$، في هذه الحالة $\gamma = 0$ والحلول

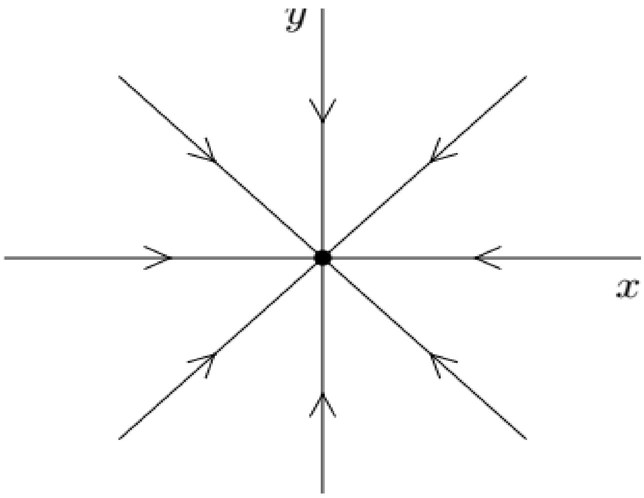
هي $x=c_1$ و $y=c_2e^{-t}$ والحل المشروط يكون $x=x_0$ و $y=y_0e^{-t}$، فمن الواضح أن هذا الحل يتمتع بالإستقرار.

الحالة الثامنة. الجذران متساويان و سالبان : أي أن $\lambda_1=\lambda_2<0$، الحل في هذه الحالة هو كما يلي :

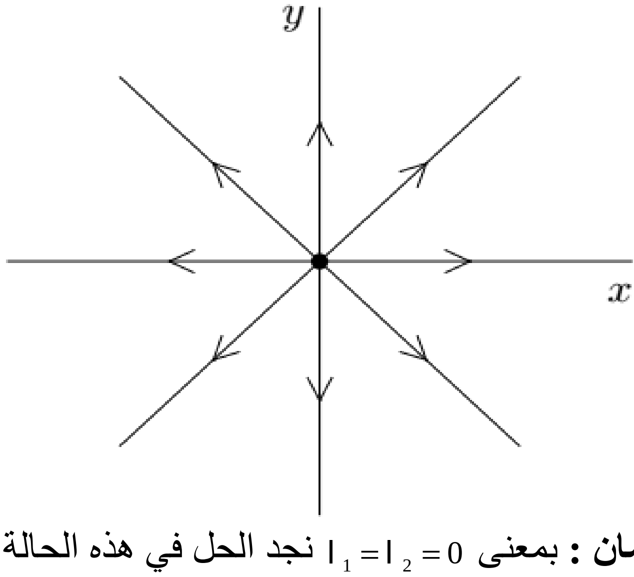
$$x=(c_1+c_2t)e^{\lambda_1 t} \quad و \quad y=\frac{1}{\gamma}e^{\lambda_1 t}\left[c_1(\lambda_1-c)+c_2(1+\lambda_1 t-ct)\right]$$

إذن لما $t\to+\infty$ يكون $e^{\lambda_1 t}\to 0$ وكذلك $te^{\lambda_1 t}\to 0$ ومنه من أجل كل $\varepsilon>0$ يمكن أن نختار c_1,c_2 بحيث يكون $|x(t)|<\varepsilon$ و $|y(t)|<\varepsilon$ وعليه فالحل في هذه الحالة مستقرًا.

- الشكل التالي يبين أن الحل في هذه الحالة يتمتع بالإستقرار



الحالة التاسعة. الجذران متساويان و موجبان : بمعنى $\lambda_1=\lambda_2>0$ من الواضح في هذه الحالة أن $|x(t)|\to+\infty$ و $|y(t)|\to+\infty$ وبالتالي الحل غير مستقر، كما يوضحه الشكل الآتي :



الحالة العاشرة. الجذران معدومان : بمعنى $\lambda_1=\lambda_2=0$ نجد الحل في هذه الحالة $x=c_1+c_2t$ و $y=\frac{1}{\gamma}(-cc_1+c_2-cc_2t)$ وعليه فإن $|x(t)|\to+\infty$ إذن الحل غير مستقر.

مثال : أدرس استقرار حلول الجملة الآتية :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

الحل : المعادلة المميزة للجملة هي $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ وبالتالي نجد $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$، ولدينا $x = c_1 + c_2 t$ و $y = c_2$ من الواضح أن $|x(t)| \to +\infty$ إذن الحل غير مستقر.

3.12 تمارين للحل

التمرين الأول : نعتبر الجملة التفاضلية الخطية التالية : $Y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y$

1. أثبت أن $\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ هما حلين شعاعيين لها.
2. شكل المصفوفة الأساسية لها مع التبرير.
3. جد الحل المشروط ب : $Y(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
4. جد الحل العام للجملة $\begin{pmatrix} e \\ t^2 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Y'$:

التمرين الثاني : نعتبر الجملة التفاضلية الخطية غير المتجانسة التالية : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -2x - 3y + \sin t \end{cases}$

1) تحقق أن الشعاع : $\begin{pmatrix} 0,1\sin t - 0,3\cos t \\ 0,1\cos t + 0,3\sin t \end{pmatrix}$ هو حلا خاصا لها.

2) حدد الحل العام لها.

3) جد الحل المشروط ب $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

التمرين الثالث : نعتبر المصفوفة التالية : $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \\ 13 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

1. جد e^{tA} .
2. جد الحل العام للجملة $Y' = AY$.
3. جد الحل المشروط ب : $Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

التمرين الرابع : نفس الأسئلة السابقة من أجل : $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \\ 8 & 12 & 6 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 14 & -5 \end{pmatrix}$

التمرين الخامس : نعتبر الجملة التفاضلية التالية :

$$Y' = \begin{pmatrix} 7 & -9 & 9 \\ 3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) حدد المصفوفة الأساسية للجملة المتجانسة.

2) استنتج e^{tA} .

3) أوجد الحل العام لها .

التمرين السادس : بإستخدام أسية مصفوفة جد الحل العام للجملة : $Y' = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} Y$

التمرين السابع : نعتبر الجملة التفاضلية التالية :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{t}{t^2+1}x + \dfrac{1}{t^2+1}y + \dfrac{2t^2-1}{t^2+1} \\ y' = -\dfrac{1}{t^2+1}x + \dfrac{t}{t^2+1}y + \dfrac{3t}{t^2+1} \end{cases}$$

1. أوجد حلين شعاعيين لها. هل هما مستقلين خطيا ؟ علل.

2. عين المصفوفة الأساسية.

3. باستخدام طريقة تغيير الثابت جد الحل العام لها.

4. جد حالة الجملة المتجانسة .

5. جد الحل الذي يحقق الشرط : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

التمرين الثامن : نعتبر الجملة التفاضلية التالية $Y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: حيث $t > 0$

ولتكن $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t^{\alpha} & -t^{\alpha}\ln t \\ -t^{\beta} & t^{\beta}(1+\ln t) \end{pmatrix}$

1) أوجد α, β حتى تكون $\Phi(t)$ مصفوفة حلول للجملة المتجانسة.

2) أوجد المعادلة التفاضلية التي $\det \Phi(t)$ حلا لها.

3) استنتج بطريقتين مختلفتين $\det \Phi(t)$ بدلالة t

4) هل $\Phi(t)$ مصفوفة أساسية ؟ علل.

5) جد الحل الذي يحقق الشرط : $Y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

6) هل أن الحالة للمتجانسة هي : $R(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(u)\,du\right)$ ؟ علل.

التمرين التاسع : أدرس استقرار حلول الجمل التفاضلية التالية :

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 6y \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 10y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 12x + 18y \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 12y \end{cases}$

4) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = y + z \\ z' = x + 3y + z \end{cases}$

المراجع

I. المراجع العربية

1) د. اسماعيل بوقفة، د. عايش الهنادوة، المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات، جامعة صنعاء، اليمن، 2007.

2) د. إميل شكر الله، المعادلات التفاضلية العادية وتحويلات لابلاس، مؤسسة بيتر للطباعة والتوزيعات، القاهرة، 2006.

3) د. حسن العويضي، د. عبد الوهاب عباس، د. سناء علي الزراع، المعادلات التفاضلية العادية، الجزء 1 و 2، دار الرشد، القاهرة، 2005.

4) د. رشدي خليل، مقدمة في المعادلات التفاضلية، دارالمناهج للنشر والتوزيع، عمان – الأردن، 2008.

5) د. ريتشارد برنسون، المعادلات التفاضلية (سلسلة ملخصات شوم)، ترجمة د. عبد الوهاب عباس، الدارالدولية للإستثمارات الثقافية، القاهرة، 2001.

6) د. زيد الأمير، المعادلات التفاضلية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1979.

7) د. سالم بن أحمد سحاب، مقدمة في المعادلات التفاضلية، مركز النشر العلمي، السعودية، 1994.

8) د. موفق دعبول، نظرية المعادلات، نشر جامعة دمشق، سوريا، 1981.

II. المراجع الأجنبية

9) An Introduction to Ordinary Differential Equations, RP. Agarwal, D. O'Regan, Springer, 2008.

10) Ordinary and Partial Differential Equations, RP. Agarwal, D. O'Regan, Springer, 2009.

11) Elementary Differential Equation, W. Boyce, C. Diprima and J. Wiley, Inc. New York, 2001.

12) Ordinary Differential Equation with Applications, C. chicone, Springer, 1999.

13) Analyse numérique et equations différentielles (nouvelle edition), JP. Demailly, EDP Sciences, Paris, 2006.

14) Theory of differential equations, A. Forsyth, Cambidge, 1978.

15) Calcul Différentiel et integral (tome 2), 4 éme Edtion, N. Piskounov, OPU, Algérie, 2013.

16) A first course in Differential Equation, JD, Logan, Springer, 2000.

المحتويات

تمت بحمد الله