جامعة الشهيـد حمه لخضر الوادي　　　كليــة العلـــــوم الدقيقــة　　　السنة الثانية ماستر رياضيات

أعمال موجهة في التحليل المركب　　　2018/ 09/28

تمرين 1 .أثبت في حالة $z = x + iy$ صحة القوانين : $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ و $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ استنتج مباشرة عدم هولومورفية $f(z) = \frac{\bar{z}^2}{|z|}$. أوجـد مجـال هولومورفية الدالة : $\tan^{-1} z = \frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z}$..نعتبر $g(x,y) = f(z)$ في الحقيقة لما f هولومورفية فان $\frac{\partial^{p+q} g}{\partial x^p \partial y^q}(x,y) = i^q f^{(p+q)}(z)$.تحقق من ذلك. بين أن $f(z) = \frac{\bar{z}^3}{z^2+2}$ ليست هولومورفية. أثبت أن $\sin z$ هولومورفية أحسب مشتقاتها التعاقبية ثم اوجد عبارة $|\sin(x+iy)|$ وكذلك $|\cos(x+iy)|$. استنتج عبارة $|\tan(x+iy)|$.

تمرين2. في حالة f هولومورفية يبـدو أن : $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = |f'(z)|^2$ تأكـد من ذلك. لتكـن $f = u + iv$ الهولومورفية أحسب $|f'(z)|^2$ ماذا تمثـــل فيزيائيا. أي لما $w = f(z)$ conforme يحول D الى D' فان مساحة D' يمكن حسابها وايضا طول كل منحنى راسمه داخل D' الذي هو بطبيعة الحال صورة لمنحنى آخر راسمه داخل D .باستخدام الاحداثيات القطبية أثبت أنه لما $f = u + iv$ هولومورفية و $z = re^{i\theta}$ فان : $zf'(z) = r\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}$.أعد حساب $|f'(z)|^2$ ثانية. أحسب مثلا مشتقات التوابع الهولومورفية $\sqrt{z}$ و $\ln z$.تحدث بعض الشيء عن خصوصية هذين التابعين المركبين. أثبت الخاصية التوافقية لـ $u = y^3 - 3x^2 y$ ثم اوجد مرافقتها التوافقية v بحيث $f = u + iv$ هولومورفية. عبر عن $f(z)$ و $f'(z)$ بدلالة z بطريقتين أو أكثر. أثبت أنــــه لما f هولومورفية و f مرتبطة خطيا بـ $\bar{f}$ فان f ثابتـة.

تمرين3 . f هولومورفيـــة على القرص المملوء : $D(0,r) = \{z, |z| \le r\}$ وتحقق : $|f(z)| \le \frac{M}{|y|}$ من أجل كل عدد مركب $z = x + iy$ يحقق $|z| = R$.(يقع على الحافة). أثيت صحـــة المتباينـــة : $|z^2 - R^2||f(z)| \le 2MR$ وهذا لكل z يحقق $|z| \le R$.ثم استنتــج المحدوديـــة $|f(z)| \le \frac{8M}{3R}$ لكل z يحقق $|z| \le R$.فرض أن f نشورة وفق سلسلة قوى عند الصفر Entire function وتحقق ما يلي لكل z عدد مركب فان: $|f(z)| \le \ln(|z|+1)$ أثبت الحقيــقة الآتية : f ثــــابته.

تمرين 4. f هولومورفيـــة على القرص الوحدة : $D(0,1) = \{z, |z| \le 1\}$ وتحقق $f(0) = 0$ و $|f'(z)| \le M$ لكل z ينتمي الى $D(0,1)$ أثيت صحـــة المتباينــتين : $|f'(z) - f'(0)| \le 2M|z|$ و $|f(z) - zf'(0)| \le M|z|^2$ لكل z ينتمي الى $D(0,1)$. برهن أن $\sqrt{\left|\frac{e^{iz}}{1+z+z^2}\right|} \le \frac{1}{r-1}$ لكل z ينتمي الى $\{z, |z| = r\} \cap \{z, \operatorname{Im} z \ge 0\}$.فسـر النتيجــة. أثبت أن كل جذور المعادلــــــــــــة ذات المتغير المركب : $1 + z + z^2 + \ldots z^{n-1} - nz^n = 0$ تقع داخل القرص الوحدة : $D(0,1) = \{z, |z| \le 1\}$.

تمريـن 5. صور الدائرة $D(0,r) = \{z, |z| = r\}$ بواسطة تحويل جوكفسكي $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.هل هو تقابلي.استنتج صور $\{z, |z| < 1\}$ و $\{z, |z| > 1\}$ بواسطة تحويـل جوكفسكي.(Jukovsky mapping)..ليكن التحويل الهوموغرافي: $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ جدمجال هولومورفيتها كيف تحدد صور الدوائر $C(0,r) = \{z, |z| = r\}$ بواسطة تحويـل هوموغرافي.ما طبيعة التحويلات العكسية لها.تحدث عن ميزات أخرى للمشتقة الهوموغرافية ..نسمي المشتقة لـ **شوارز** **Schwarzian** derivative لـ f هي دالة لـ z : $L_f(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$

أثبت أنه لما $g(z)$ دالة هولومورفية فان : $L_{g\circ f}(z) = L_g(z)$.مـــــــــــا تعليقك.

تمرين 6.نعتبر الدالة التحليلية $z \to f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ونـرفق بهـا الدالة التحليلية $z \to F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n z^n$ بحيث $|z| < R$

أثبت من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما ρ بحيث $0 < \rho < R$ يوجد $A(\rho) > 0$ متعلق بـ ρ بحيث : $|F(z)| \le A(\rho)\exp\left(\frac{|z|}{\rho}\right)$

لنفرض الآن أن $z \to F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ مع أن F تحقق فرضا المحدودية الآتية $|F(z)| \le B\exp\left(k|z|\right)$ بحيث B و k ثابتان معلومان.أثبت بالتالي أن : $|b_n| \le Br^{-n}\exp(kr)$ يث r هو نصف قطر دائرة مركزها0 ما لكوشي .استنتج ما يلي $\forall n = 0,1,2...$ فان : $|b_n| \le Bn^{-n}k^n \exp(n)$.

تمرين 7 .نعتبـــــــــر Ω الدائرة التي مركزها المبدأ 0 و نصف قطرها r بحيث $r \succ 0$.طبق دستور كوشي لحساب $\Xi(z)$ بدلالة z بحيث : $\Xi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega} \frac{z^n \exp(tz)}{n!t^n}\frac{dt}{t}$ مستنتجـــــا المتطابقـــــة : $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(2z\cos\theta)d\theta$

تمرين 8 .أثبت الاستلزام المنطـقي من أجل كل عدد مركب z يحقق $|z| < 1$ فان $|t| = 1 \Rightarrow |1 - \bar{z}t| = |z - t|$ طبق دستور كوشـــــي Cauchy لإثبات المتباينة التالية : في حالة $f(.)$ دالة هولومورفية على القرص الوحدة أي $f \in H(|z| < 1)$ فانه يوجد $K > 0$ يتعلق بـــ $f(.)$ فقط بحيث : $(1 - |z|^2)|f(z)| \le K$ و هذا لكل z يحقق $|z| < 1$. استنتج حــــــادا من الأعــــــــلى للكمية الآتية . ما يسمى (Area **of** $f(.)$).
$\iint_{|x+iy|<1} |f(x+iy)|^2 dxdy$.كمثال طبق ما سيق قوله على : $\iint_{|z|<1}\left|\frac{z}{1-z^2}\right|dxdy < 4.$.

تمرين 9 .نعتبر القطع الناقص Ω الذي معادلته في المستوي المركب (أي المعادلة القطبية) $|z-1| + |z+1| = 6$ أثبت أن المعادلة التحليلية لـ Ω من الشكل لما $z = x + iy$ فان $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1.$ أرســــــم Ω بعناية واهتمام مع تحديد العناصر المميزة . طبق دستور **Green** لحساب التكامل المساحي : $\iint_{\Omega}(4x^3 - 3y^2)dxdy$ ..ثــم أحسب التكـــــــــامل العقدي $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|<2\pi}\frac{\cos z}{z^2(z+i\pi)^3}dt$. أثبت بصراحــــــة أن $\left|\int_C \frac{\exp(z)}{1+z^2}dz\right| \le \frac{e^2}{3}.4\pi$ بحيث C هــي الدائرة $|z| = 2$ في الاتجاه الموجب .

تمرين 10 .نفرض أن $f_n(z) = \prod_{k=1}^{k=n}(z - a_k)$ والتي جذورها الثوابت المركبة $a_k, k = 1,2,3....n.$.أثبت الحقيقــة الآتية : كيف يتم انشاء الكانتور $\Gamma_R = \{z : |z| = R\}$.بحيث $\int_{\Gamma_R}\frac{1}{f_n(z)}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\prod_{j\ne k}(a_k - a_j)}$. في حالة : $f_n(z) = \prod_{k=1}^{k=n}(z - a_k) \ne 0, (n > 2.)$, من أجل $|z| \ge R$.فان : $\int_{\Gamma_R}\frac{1}{f_n(z)}dz = 0$.استنتج بالتالي : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\prod_{j\ne k}(a_k - a_j)} = 0$.أعط أمثلة ملموسة.. Γ هو منحنى كانتور مغلق بسيط و z_0 تقع داخل Γ أثبت انه لما تكون f تحليلية على Γ عندئذ :

$$\frac{\int_{\Gamma}\frac{f^{(m)}(z)}{(z-z_0)^n}dz}{\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+n}}dz} = \frac{(m-n+1)!}{(n-1)!}$$

بالتوفيــــــــــق **د.عبد الحميد رحومة**