

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université de Hamma Lakhdar – EL-oued

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Polycopié de cours:

Méthodes numériques pour EDO et EDP

Niveau : 3^{ème} année licence

Option : Mathématiques Appliquées

Dr. DOUDI Nadjjet

2020 - 2021

Préface

Ce document contient des cours et des exercices avec solutions détaillées en « méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles ordinaires (EDO) et équations aux dérivées partielles (EDP) » pour les étudiants de troisième année mathématiques appliquées système LMD, Il couvre le programme proposé par le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique pour le sixième semestre. Le document n'est pas destiné seulement aux étudiants de mathématiques mais à toutes les disciplines et chercheurs dans les domaines scientifiques qui sont confrontés à des problèmes qui conduisent à des équations aux dérivées partielles qui n'ont pas de solution analytique, mais qui peuvent être résolues numériquement.

Dans ces pages, nous avons proposé aux étudiants et chercheurs une introduction à la méthode des différences finies pour la résolution des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, en donnant le principe de cette méthode et comment l'appliquer à des modèles de problèmes en utilisant quelques schémas numériques, ainsi que l'étude de la consistance, la stabilité et la convergence de chaque schéma. Et non seulement cela, mais nous avons donné une introduction simple à la méthode des éléments finis, qui est la méthode la plus importante pour résoudre des problèmes complexes.

Table des matières

1	Rappels sur les différents théorèmes d'existence	6
1.1	Notations, définitions et notions préliminaires	6
1.2	Réduction a une équation du premier ordre	7
1.3	Théorèmes d'existence et d'unicité	8
1.3.1	Théorèmes de Cauchy-Lipschitz	10
1.4	Exercices	11
1.5	Corrigé des exercices	12
2	Méthode de différences finies monodimensionnel	15
2.1	Discrétisation du domaine	15
2.2	Principe de la méthode de différences finies	16
2.3	Exemple simple en dimension 1 avec conditions de Dirichlet	17
2.4	Discrétisation de conditions aux limites	18
2.5	Exemple 2	19
2.6	Exemple numérique	20
2.7	Problème d'évolution	23
2.7.1	Schéma explicite	23
2.8	Schéma implicite	24
2.9	Convergence, consistance et stabilité	25
2.9.1	Définitions	25
2.10	Etude de l'équation de la chaleur en dimension 1	28
2.10.1	Principe du maximum	28

2.10.2	Discrétisation du problème	29
2.10.3	Consistance du schéma	29
2.10.4	Stabilité du schéma	30
2.11	Convergence	31
2.11.1	Exemple numérique	33
2.12	Méthode de différences finies pour un problème elliptique	36
2.12.1	Existence et unicité de la solution	39
2.12.2	Erreur de consistance	41
2.12.3	Stabilité	42
2.12.4	Convergence	44
2.13	Schéma de Crank-Nicolson pour l'équation de la chaleur	45
2.13.1	Stabilité au sens de Von-Neumann	47
2.14	Exercices	49
2.15	Corrigé des exercices	52
3	Méthode de différences finies pour EDP	73
3.1	Types d'EDP	73
3.2	Discrétisation du domaine	74
3.2.1	Dérivée croisée	75
3.2.2	Discrétisation de l'équation de la chaleur 2D stationnaire	76
3.3	Etude d'un problème elliptique en 2D	80
3.3.1	Discrétisation du domaine	80
3.3.2	Etude de la consistance	80
3.4	Principe du maximum discret	81
3.5	La stabilité	82
3.6	La convergence	84
3.7	Exemple numérique	84
3.8	Exercices	86
3.9	Corrigé des exercices	87

4	Introduction à la méthode des éléments finis	93
4.1	Introduction	93
4.2	Formulation variationnelle	93
4.2.1	Conditions aux limites de Neumann	94
4.3	Théorème de Lax-Milgram	95
4.4	La méthode de Galerkin	96
4.4.1	Estimation de l'erreur	98
4.5	Éléments finis de Lagrange	99
4.6	Exemples d'éléments finis de Lagrange	100
4.6.1	Espaces de polynômes	100
4.6.2	Exemple en 1D	100
4.6.3	Exemple 2D triangulaires	100
4.6.4	Exemple 2D rectangulaires	101
4.7	La méthode des éléments finis en 1D	101
4.7.1	Exemple détaillé	103
4.8	Éléments finis pour un problème non linéaire	108
4.8.1	Discrétisation du domaine	108
4.8.2	Formulation variationnelle	109
4.8.3	Approximation linéaire de $u(x)$	109
4.8.4	Technique d'assemblage	112
4.8.5	Code MATLAB	114

Table des figures

2.1	Discrétisation du domaine en dimension 1.	15
2.2	Points médians de la grille.	16
2.3	Solutions exacte et approchée pour différentes valeurs du nombre de discrétisation.	22
2.4	Solution exacte et solution approchée pour $N = 10$ et $M = 100$	35
2.5	Erreur de discrétisation pour $N = 10$ et $M = 100$	35
3.1	Domaine discret en dimension 2.	75
3.2	Présentation des conditions aux limites en dimension 2.	77
3.3	Présentation des $T_{i,j}$ sur le domaine discret.	78
4.1	Fonctions de base φ_j	102
4.2	Maillage du problème.	104
4.3	Les sept fonctions v_i	106
4.4	Maillage composé de cinq éléments.	108
4.5	Représentation de deux fonctions de base.	110
4.6	Approximation linéaire par éléments finis.	110
4.7	Solution exacte et solution approchée pour $N = 5$	118
4.8	Erreur de discrétisation pour $N = 5$	118
4.9	Solution exacte et solution approchée pour $N = 10$	119
4.10	Erreur de discrétisation pour $N = 10$	119

Chapitre 1

Rappels sur les différents théorèmes d'existence

Ce chapitre contient un petit rappel sur les théorèmes d'existence et d'unicité locale et globale de Cauchy Lipschitz avec quelques exemples et exercices corrigés, pour plus d'expansion, vous pouvez consulter quelques références comme [3], [4], [7], [8] et [18].

1.1 Notations, définitions et notions préliminaires

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , U un ouvert de \mathbb{R}^n , f une fonction continue de $I \times U$ dans \mathbb{R}^n .

Définition 1.1. (*Equation différentielle ordinaire*) Une équation différentielle ordinaire est une relation entre la variable réelle t , une fonction inconnue $t \rightarrow y(t)$ et ses dérivées $y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}$ au point t définie par

$$F(t, y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0. \quad (1.1)$$

On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 1.2. (*Equation différentielle normale*) On appelle une équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme

$$y^{(n)}(t) = f(t, y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)). \quad (1.2)$$

Exemple 1.1. *Equation différentielle du premier ordre sous la forme normale*

$$y' = f(t, y) \text{ ou } \frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

Définition 1.3. *(Solution) On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre n sur un intervalle I de \mathbb{R} , toute fonction y définie sur un cette intervalle I , n fois dérivable en tout point de I et vérifie cette équation différentielle sur I . On notera en générale cette solution (y, I) .*

Définition 1.4. *Soient (y, I) et (\tilde{y}, \tilde{I}) deux solutions d'une même équation différentielle. On dit que (\tilde{y}, \tilde{I}) est un prolongement de (y, I) si et seulement si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{y}|_I = y$.*

Définition 1.5. *(Solution maximale et solution globale)*

Soient (I_1) et (I_2) deux intervalles.

- 1. On dit qu'une solution (y, I_1) est maximale dans I_2 si et seulement si y n'admet pas de prolongement (\tilde{y}, \tilde{I}) solution de l'équation différentielle telle que $I_1 \subsetneq \tilde{I} \subset I_2$.*
- 2. On dit qu'une solution (y, I_1) est globale dans I_2 si et seulement si y admet un prolongement \tilde{y} défini sur l'intervalle I_2 tout entier.*

Remarque 1.1. *Toute solution globale sur un intervalle I est maximale sur I , mais la réciproque est fausse.*

1.2 Réduction a une équation du premier ordre

Considérons l'EDO d'ordre n , ($n \geq 3$)

$$F(t, y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0,$$

où y est à valeur dans \mathbb{R}^m (on prend $m = 1$ en générale) et

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p.$$

On fait le changement d'inconnues $Z = (y, y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)})$. On a alors $Z \in (\mathbb{R}^m)^n$. On note alors $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ où chacun de $z_i = y^{(i-1)} \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, n$. On se trouve alors avec

des relations entre les z_i

$$\begin{cases} z'_i = z_{i+1}, & i = 1, \dots, n-1, \\ F(t, y', y'', \dots, y^{(n)})(t) = 0. \end{cases}$$

On se ramène alors à une équation du premier ordre, à une variable et n inconnues du type

$$G(t, z_1, z_2, \dots, z_n, z'_1, z'_2, \dots, z'_n) = 0.$$

Cas particulier : ($n = 2$) (F scalaire)

$$F(t, y, y', y'') = 0,$$

cette équation peut se ramène à une équation du premier ordre à deux inconnues, z_1 et z_2 : On

pose $z_1 = y$ et $z_2 = y'$, on obtient

$$\begin{cases} z'_1 = z_2, \\ F(t, z_1, z_2, z'_1, z'_2) = 0. \end{cases}$$

Exemple 1.2. $ay'' + by' + cy = d$. On considérant $z_1 = y$, $z_2 = y'$.

$$\begin{cases} z'_1 = z_2, \\ bz'_1 + az'_2 = -cz_1 + d. \end{cases}$$

Où

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}.$$

1.3 Théorèmes d'existence et d'unicité

On s'intéresse à des systèmes différentiels de type suivant

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad (t, u) \in U. \quad (1.3)$$

Où : U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Définition 1.6. Le problème de Cauchy correspondant à l'équation (1.3) est la recherche des solutions u de (1.3) tel que $u(t_0) = u_0$

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & (t, u) \in U, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Définition 1.7. Une solution du problème (1.4) sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} , avec la condition initiale $(t_0, u_0) \in U$ et $t_0 \in I$ est une fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, telle que

1. Pour tout $t \in I$, $(t, u(t)) \in U$.
2. Pour tout $t \in I$, $u'(t) = f(t, u(t))$.
3. $u(t_0) = u_0$.

Notation :

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|$ désigne la norme euclidienne de x .

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application différentiable en $x \in U$, on notera indifféremment sa différentielle par $f'(x)$ ou $Df(x)$.

Définition 1.8. Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application Lipschitzienne de rapport k sur U si

$$|f(u_1) - f(u_2)| < k |u_1 - u_2|, \text{ pour tous } (u_1, u_2) \in U^2. \quad (1.5)$$

Définition 1.9. Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est localement Lipschitzienne sur \mathbb{R}_+^* , si pour tout $u_0 \in U$, il existe un voisinage $V_{u_0} \subset U$ de u_0 tel que $f|_{V_{u_0}}$ soit Lipschitzienne sur V_{u_0} .

Exemple 1.3. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est localement Lipschitzienne sur \mathbb{R}_+^* , mais pas Lipschitzienne.

Définition 1.10. Une fonction $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite continue et Lipschitzienne sur U uniformément par rapport à $t \in I$, si

1. f est continue sur $I \times U$.
2. Il existe $k > 0$ telque

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| < k |u_1 - u_2|,$$

pour tout $t \in I$ et tout $(u_1, u_2) \in U^2$.

Définition 1.11. Une fonction $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite continue et localement Lipschitzienne par rapport à $u \in U$ uniformément en $t \in I$, si

1. f est continue sur $I \times U$.

2. Pour tout (t_0, u_0) , Il existe un voisinage $V_{t_0} \times V_{u_0} \subset I \times U$ de (t_0, u_0) , telque $f|_{V_{t_0} \times V_{u_0}}$ soit Lipschitzienne sur V_{u_0} , uniformément par rapport à $t \in V_{t_0}$.

1.3.1 Théorèmes de Cauchy-Lipschitz

Théorème 1.1. (*Existence locale et unicité*)

Soit $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue sur $I \times U$, localement Lipschitzienne en $u \in U$ uniformément en $t \in I$. Pour tout $(t_0, u_0) \in I \times U$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & (t, u) \in I \times U, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (1.6)$$

admet une solution (u, I_u) , $(t_0 \in I_u)$. De plus la solution unique sur I_u .

Théorème 1.2. (*Existence locale d'une solution maximale*)

Toute solution (u, I_u) se prolonge en une solution maximale (pas nécessairement unique).

Théorème 1.3. (*Existence d'une solution maximale et unicité*) Les hypothèses sont celles du théorème d'existence locale.

Pout tout $(t_0, u_0) \in I \times U$, il existe une solution maximale unique $(u, I(t_0, u_0))$ de (1.6) vérifiant $u(t_0) = u_0$.

L'intervalle maximale $I(t_0, u_0) = (t^-(t_0, u_0), t^+(t_0, u_0))$ est ouvert dans I . De plus t^- vérifié

$$t^- = \inf I \quad \text{où} \quad \lim_{t \rightarrow t^-} \min \left(d(u(t), \partial u), \frac{1}{|u(t)|} \right) = 0.$$

De même t^+ vérifié

$$t^+ = \sup I \quad \text{où} \quad \lim_{t \rightarrow t^+} \min \left(d(u(t), \partial u), \frac{1}{|u(t)|} \right) = 0.$$

Théorème 1.4. (*Condition suffisante d'existence de solution globale*)

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue sur un ouvert $U = J \times \mathbb{R}^m$ où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. On suppose qu'il existe une fonction continue $k : J \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $t \in J$ fixé, l'application $y \longmapsto f(t, y)$ soit Lipschitzienne de rapport $k(t)$ sur \mathbb{R} .

Alors, l'unique solution maximale de l'équation $u' = f(t, u)$ est globale (i.e. définie sur J tout entier).

Exemple 1.4. On considère l'équation différentielle $u' = |u| + |t|$.

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(u, t) = |u| + |t|$. f est une application Lipschitzienne par rapport à la seconde variable. En effet :

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| = ||u_1| + |t| - |u_2| - |t|| = ||u_1| - |u_2|| \leq |u_1 - u_2|.$$

Remarquant que $u' \geq 0$ pour tout t et que pour tout $(0, u_0)$ passe une solution maximale unique (φ, J) .

1.4 Exercices

Exercice 1.1. Justifier l'existence de l'unique solution locale pour le problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) = 4 + y(t), \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Calculer explicitement cette solution et donner son domaine de définition.

Exercice 1.2. Même questions de l'exercice 1.1 pour le problème

$$\begin{cases} y'(t) = (y(t))^{\frac{8}{3}}, \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (1.8)$$

Exercice 1.3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(t, x) = 4 \frac{t^3 x}{t^4 + x^2}$ si $(t, x) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (1.9)$$

1. L'application f , est-elle continue ? est-elle localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable ?
2. Soit φ une solution de (1.9) qui est définie sur un intervalle I ne contenant pas 0. On définit une application ψ par $\varphi(t) = t^2 \psi, t \in I$. Déterminer une équation différentielle (E) telle que $\varphi(t)$ soit solution de cette équation, puis résoudre cette équation (E).

1.5 Corrigé des exercices

Corrigé de l'exercice 1.1

Il suffit de vérifier les hypothèses de Cauchy-Lipschitz :

La fonction $y \mapsto f(y)$ est de classe C^1 pour tout $y \in \mathbb{R}$ et ainsi elle est localement lipschitzienne.

On a : $y'(t) = 4 + y(t)$. Par séparation de variables, on trouve

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{4+y} dt &= \int dt \\ \Rightarrow \ln |4 + y(t)| &= t + k,\end{aligned}$$

k une constante à déterminer à l'aide de la condition initiale

$$\begin{aligned}\ln |4 + y_0| = t_0 + k &\Rightarrow k = \ln(5) \\ &\Rightarrow |4 + y_0| = 5e^t.\end{aligned}$$

Cet égalité donne deux solutions possibles pour le problème :

$y(t) = -5e^t - 4$ ne vérifie pas la condition initiale.

Donc, la seule solution est la fonction

$$y(t) = 5e^t - 4, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 1.2

Vérification des hypothèses de Cauchy-Lipschitz :

$f(y) = y^{\frac{8}{3}}$ est de classe C^1 pour tout $y \neq 0$ et ainsi elle est localement lipschitzienne au voisinage de $y_0 = 1$.

Calculons l'unique solution du problème de Cauchy. Car $y \neq 0$ au voisinage de $y_0 = 1$, par séparation de variables on trouve

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \frac{y'(t)}{y(t)^{\frac{8}{3}}} dt &= \int_{t_0}^t dt \\ &\Rightarrow -\frac{3}{5} (y(t))^{\frac{5}{3}} = t + k\end{aligned}$$

k une constante à déterminer à l'aide de la condition initiale

$$y(0) = 1 \Rightarrow k = -\frac{3}{5},$$

alors

$$\begin{aligned}
 -\frac{3}{5} (y(t))^{-\frac{5}{3}} &= t - \frac{3}{5} \\
 \Rightarrow (y(t))^{-\frac{5}{3}} &= -\frac{5}{3}t + 1 \\
 \Rightarrow y(t) &= \left[-\frac{5}{3}t + 1 \right]^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\left(-\frac{5}{3}t + 1\right)^3}}.
 \end{aligned}$$

avec $t > \frac{3}{5}$, la fonction $y(t)$ elle-même existe pour tout $t \neq \frac{3}{5}$, mais elle la solution du problème uniquement dans l'intervalle $\{t \in \mathbb{R}, \text{ tq } t > \frac{3}{5}\}$ (contenant la condition initiale).

Corrigé de l'exercice 1.3

$f(t, x) = \frac{4t^3x}{t^4 + x^2}$ si $(x, t) \neq (0, 0)$ est de classe C^∞ en tant que quotient, somme et produit de fonctions C^∞ .

$$1. |f(t, x)| = |2t| \cdot \left| \frac{2t^2x}{t^4 + x^2} \right| \leq |2t| \xrightarrow{(t,x) \rightarrow (0,0)} 0 = f(0, 0). f \text{ est donc continue en } (0, 0).$$

f n'est pas localement lipschitzienne au voisinage de $(0, 0)$ car sinon il existerait $k, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $t \in]-\alpha, \alpha[$, $x \in]-\beta, \beta[$ et

$$|f(t, x) - f(t, 0)| < k|x - 0|.$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \frac{4t^3x}{t^4 + x^2} &< kx \Rightarrow \frac{4t^3}{t^4 + x^2} < k \\
 \Rightarrow \frac{4}{t} &< k, \forall t \in]0, \alpha[,
 \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Nous ne pouvons pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

2. (φ, I) solution de (1.9) avec $0 \neq I$.

$$\begin{aligned}
 \psi(t) = t^{-2}\varphi(t) &\Rightarrow \psi'(t) = t^{-2}\varphi'(t) - 2t^{-3}\varphi(t) \\
 \Rightarrow \psi'(t) &= 4t^{-2} \frac{t^3\varphi(t)}{t^4 + \varphi^2(t)} - 2t^{-1}\psi(t),
 \end{aligned}$$

d'où en exprimant tout en fonction de $\psi(t)$:

$$\frac{\psi'(t)(1+\psi^2(t))}{\psi(t)(1-\psi(t))(1+\psi(t))} = \frac{2}{t}.$$

Or

$$\frac{(1+\psi^2(t))}{\psi(t)(1-\psi(t))(1+\psi(t))} = \frac{1}{\psi(t)} + \frac{1}{1-\psi(t)} - \frac{1}{1+\psi(t)},$$

d'où

$$\psi'(t) \left(\frac{1}{\psi(t)} + \frac{1}{1-\psi(t)} - \frac{1}{1+\psi(t)} \right) = \frac{2}{t}.$$

En intégrant par rapport à t , on obtient

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{\psi(t)}{1-\psi^2(t)} \right| &= \ln |t^2| + c \\ \Rightarrow \frac{\psi(t)}{1-\psi^2(t)} &= ct^2. \end{aligned}$$

$\psi(t)$ est donc une racine de l'équation

$$ct^2\psi^2(t) + \psi(t) - ct^2 = 0,$$

donc

$$\psi(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c^2t^4}}{2ct^2}$$

d'où

$$\varphi(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c^2t^4}}{2c}.$$

Chapitre 2

Méthode de différences finies monodimensionnel

La méthode de différences finies consiste à remplacer les dérivées par des différences divisées ou par combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets [1], [2], [5], [12], [13], [14] et [16].

2.1 Discrétisation du domaine

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} . On dit que $(x_k)_{0 \leq k \leq N+1}$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ si,

$x_k \in [a, b]$, $\forall 0 \leq k \leq N + 1$ et vérifiés :

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$.

Pour $i = 0, \dots, N$, on note $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$ et on définit le pas du maillage par $h = \max h_{i+\frac{1}{2}}$.

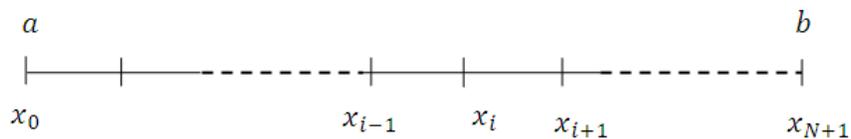


FIGURE 2.1 – Discrétisation du domaine en dimension 1.

2.2 Principe de la méthode de différences finies

Le principe de la méthode de différences finies (DF) consiste à se donner un certain nombre de points du domaine, qu'on notera, $(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. On approche l'opérateur différentiel par un quotient de manière à en déduire un système d'équations en fonction d'inconnus discrètes représentant des approximations d'inconnu u aux points de discrétisation.

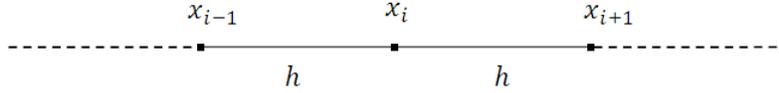


FIGURE 2.2 – Points médians de la grille.

Effectuons d'abord un développement de Taylor au voisinage de x_i à l'ordre 3.

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i + h) = u(x_i) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x_i) + o(h^3), \\ u(x_{i-1}) &= u(x_i - h) = u(x_i) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x_i) + o(h^3). \end{aligned}$$

La soustraction de ces deux relations donne

$$u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) = 2h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + o(h^3). \quad (2.1)$$

On note $u_i = u(x_i), \forall i = 1, \dots, N$. La relation (2.1) devient

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + o(h^3).$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre 2 (centré) pour approximer la dérivée première de u en x_i

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + o(h^2). \quad (2.2)$$

Effectuons un développement de Taylor au voisinage de x_i d'ordre 4,

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i + h) = u(x_i) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x_i) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial^3 x}(x_i) + o(h^4), \\ u(x_{i-1}) &= u(x_i - h) = u(x_i) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x_i) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial^3 x}(x_i) + o(h^4). \end{aligned}$$

En faisant la somme de deux égalités, on aboutit à

$$u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i = h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x_i) + o(h^4).$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux pour approximer la dérivée second de u

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + o(h^2). \quad (2.3)$$

Autres schémas d'approximation : D'après le développement de Taylor au voisinage de x_i , on a

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + o(h^2) \\ \implies \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) &= \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} + o(h), \end{aligned}$$

un schéma décentré **avant**.

Si on utilise le point x_{i-1} :

$$\begin{aligned} u(x_{i-1}) &= u(x_i) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + o(h^2) \\ \implies \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) &= \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h} + o(h), \end{aligned}$$

schéma décentré **arrière**.

2.3 Exemple simple en dimension 1 avec conditions de Dirichlet

Considérons l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), x \in [0, 1], \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta. \end{cases}$$

(conditions de Dirichlet non homogènes)

f : une fonction continue.

Le maillage est construit en introduisant $N + 2$ points (Nœuds) x_i avec $i = 0, \dots, N + 1$,

régulièrement espacés avec un pas h , la quantité u_i désignera la valeur de la fonction $u(x)$ au Nœud x_i .

En utilisant l'approximation de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ au moyen d'un schéma centré d'ordre 2, est ainsi

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f_i, \text{ pour } i = 1, \dots, N,$$

où $f_i = f(x_i)$.

La dernière expression représente un système de N équations et N inconnus peut s'écrire sous forme d'un système comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1 : \quad \frac{1}{h^2} (-u_0 + 2u_1 - u_2) = f_1, \quad (u_0 = u(0) = \alpha) \\ i = 2 : \quad \frac{1}{h^2} (-u_1 + 2u_2 - u_3) = f_2, \\ i = 3 : \quad \frac{1}{h^2} (-u_2 + 2u_3 - u_4) = f_3, \\ \vdots \\ i = N - 1 : \frac{1}{h^2} (-u_{N-2} + 2u_{N-1} - u_N) = f_{N-1}, \\ i = N : \quad \frac{1}{h^2} (-u_{N-1} + 2u_N - u_{N+1}) = f_N, \quad (u_{N+1} = u(1) = \beta). \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Ce système linéaire peut être écrit sous la forme matricielle suivante

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N + \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}.$$

2.4 Discrétisation de conditions aux limites

Considérons le même problème avec conditions mixtes de Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), x \in [0, 1], \\ u(0) = \alpha, u'(1) = \beta. \end{cases}$$

Les modifications du problème discrétisé par rapport au cas précédent sont les suivantes :

- Tout d'abord, le nombre d'inconnus a été changé, $N + 1$ inconnus u_i pour i variant de 1 à $N + 1$.

- D'autre part, il faut discrétiser la condition de Neumann $u'(1) = \beta$:

Utilisons l'approximation décentré arrière d'ordre 1

$$u'(1) = u'(x_{N+1}) = \frac{u_{N+1} - u_N}{h}.$$

Sous forme matricielle :

En ajoutant l'équation $\frac{1}{h}(u_{N+1} - u_N) = \beta$ au système (2.4), on obtient

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_N \\ u_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_N \\ \frac{\beta}{h} \end{bmatrix}.$$

2.5 Exemple 2

Soit le problème aux limites elliptique suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + x^2 u(x) = f(x), x \in]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$.

On se donne un pas du maillage $h = \frac{1}{N + 1}$ est une subdivision de $]0, 1[$, notée $(x_k)_{0 \leq k \leq N+1}$ avec :

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1.$$

En approchant $u''(x_i)$ par quotient différentiel par développement de Taylor, on obtient

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}) + x_i^2 u_i = f_i, i = 1, \dots, N, \\ u_0 = u_{N+1} = 0, \end{cases},$$

où u_i est l'inconnue discrète associée au noeud i ($i = 0, \dots, N + 1$), on pose $u_0 = u_{N+1} = 0$,
 $x_i = ih \Rightarrow x_i^2 = (ih)^2$, $f_i = f(x_i)$.

On peut écrire ces équations sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2} (-u_{i-1} + (2 + h^2 x_i^2)u_i - u_{i+1}) = f_i, & 1 \leq i \leq N, \\ u_0 = u_{N+1} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } i = 1 : & \frac{1}{h^2} (-u_0 + (2 + h^4)u_1 - u_2) = f_1, & (u_0 = 0), \\ i = 2 : & \frac{1}{h^2} (-u_1 + (2 + 4h^4)u_2 - u_3) = f_2, \\ i = 3 : & \frac{1}{h^2} (-u_2 + (2 + 9h^4)u_3 - u_4) = f_3, \\ & \vdots \\ i = N : & \frac{1}{h^2} (-u_{N-1} + (2 + N^2 h^4)u_N - u_{N+1}) = f_N, & (u_{N+1} = 0). \end{aligned}$$

On peut écrire sous forme matricielle $A_h u_h = b_h$, avec

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 + h^4 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 + 4h^4 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 + 9h^4 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 + N^2 h^4 \end{bmatrix}, u_h = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}, b_h = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix}.$$

2.6 Exemple numérique

Pour la validation numérique, nous exécutons un code numérique créé en langage MATLAB, pour un problème dont nous connaissons déjà la valeur exacte de la solution.

Pour cela, nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' + 6u = f(x), & x \in]-1, 1[, \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Où $f(x) = (-4x^4 - 6)e^{x^2}$. On peut vérifier que $u(x) = (x^2 - 1)e^{x^2}$ est une solution exacte de (2.5).

Le code numérique que nous avons utilisé pour obtenir les résultats requis est donné dans ce qui suit :

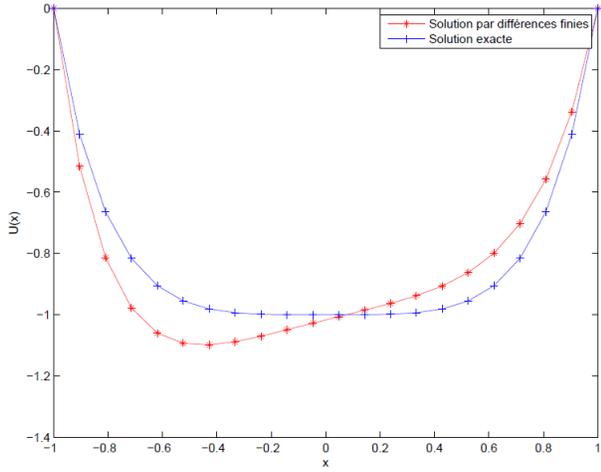
```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% Solution de l'équation u''(x)+6u(x)=(-4*x^4-6)*exp(x^2) par %%%%%%%%%
%%%%%%%% la méthode de différences finies %%%%%%%%%
%%%%%%%% solution exacte: Uexa(t)=(t^2-1)*exp(t^2) %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
N=input('N=');
h=2/(N+1);
A=zeros(N,N);
B=zeros(N,1);
for i=1:N+2
    x(i)=(i-1)*h-1;
    Ue(i)=(x(i)^2-1)*exp(x(i)^2);
end
for i=2:N
    A(1,1)=-(2+6*h^2); A(i,i)=-(2+6*h^2);
    A(i-1,i)=1;
    A(i,i-1)=1;
    B(1)=-h^2*(-4*(x(1))^4-6)*exp(x(1)^2);
    B(i)=-h^2*(-4*(x(i))^4-6)*exp(x(i)^2);
end
V=inv(A)*B;
Uap=[0;V;0]; % solution approchée par différences finies.
figure(11)
plot(x,Uap,'r-*',x,Ue,'b-+')
legend('Solution par différences finies','Solution exacte')
xlabel('x')
ylabel('U(x)')
print -dpdf Figure-11.pdf
open Figure-11.pdf

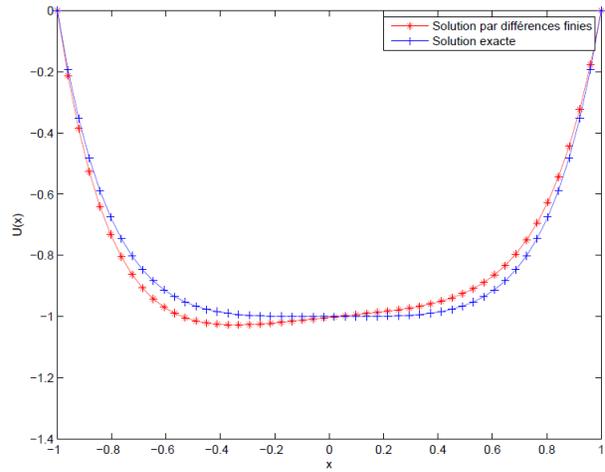
```

Les figures suivantes représentent la différence entre la solution exacte et la solution approchée obtenue par la méthode de différences finies pour la discrétisation $N = 20; 50; 100$ et 200 respectivement.

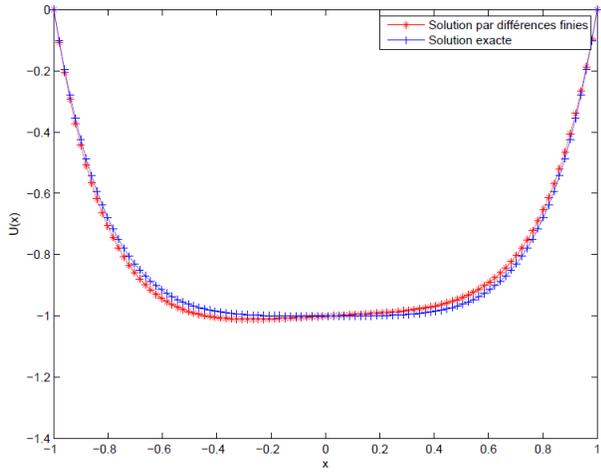
Dans chaque figure, nous avons dessiné les deux solutions exacte et approchée pour illustrer la différence entre elles dans chaque cas.



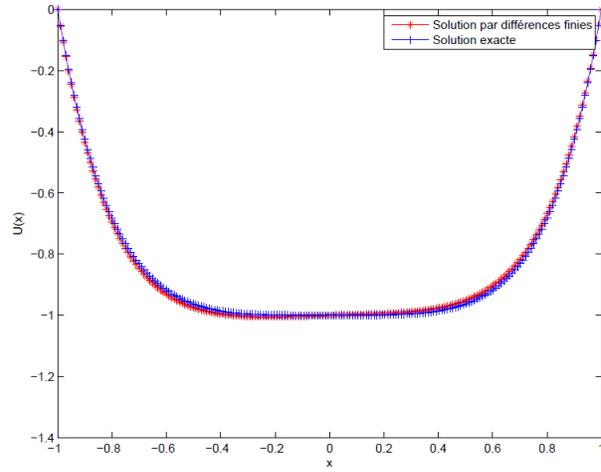
$N = 20.$



$N = 50.$



$N = 100.$



$N = 200.$

FIGURE 2.3 – Solutions exacte et approchée pour différentes valeurs du nombre de discrétisation.

2.7 Problème d'évolution

Considérons le problème monodimensionnel de la chaleur dans une barre de longueur 1 mètre.

Le champ de température $T(x, t)$ vérifie l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, & x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ T(0, t) = T_g, \\ T(1, t) = T_d, \\ T(x, 0) = T_0. \end{cases} \quad (2.6)$$

L'intervalle $[0, 1]$ est discrétisé en $N + 1$ noeuds de coordonnées $x_i, i = 0, \dots, N + 1$.

h : le pas de discrétisation (uniforme) de l'espace.

Le temps est discrétisé en intervalles de pas constant Δt , tel que $\Delta t = \frac{T}{M}$.

Notons T_i^n la température au noeud $x_i = ih$ et à l'instant $t_n = n\Delta t$.

On peut utiliser deux approches pour discrétiser cette équation :

2.7.1 Schéma explicite

Utilise une discrétisation au noeud x_i et à l'instant courant t_n :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t}(x_i, t_n) - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t_n) &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t}(x_i, t_n) &= \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}, \quad (\text{schéma décentré avant}) \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t_n) &= \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2}. \end{aligned}$$

Alors, l'équation discrétisée est donnée par

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \alpha \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2} = 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad n = 0, \dots, M - 1,$$

ou

$$T_i^{n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{h^2} T_{i+1}^n + \left(1 - 2\frac{\alpha \Delta t}{h^2}\right) T_i^n + \frac{\alpha \Delta t}{h^2} T_{i-1}^n, \quad i = 1, \dots, N; \quad n = 0, \dots, M - 1.$$

On pose $\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{h^2}$, avec $T_0^n = T_g$, $T_{N+1}^n = T_d$.

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ T_4^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ T_3^n \\ T_4^n \\ \vdots \\ \vdots \\ T_N^n \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} T_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ T_d \end{bmatrix}.$$

D'où

$$\begin{bmatrix} T_1^0 \\ T_2^0 \\ T_3^0 \\ T_4^0 \\ \vdots \\ T_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_0 \\ T_0 \\ T_0 \\ \vdots \\ T_0 \end{bmatrix}.$$

(Car $T(x, 0) = T_0$ ou $T_i^0 = T_0$, $i = 1, \dots, N$).

On peut calculer le vecteur T^{n+1} à partir de T^n explicitement.

2.8 Schéma implicite

Nous utilisons un schéma arrière d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace.

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x_i, t_{n+1}) = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t_{n+1}) = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2}.$$

L'équation discrétisée est donnée alors par

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \alpha \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} = 0.$$

En posant $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{h^2}$, on obtient

$$(1 + 2\lambda) T_i^{n+1} - \lambda T_{i+1}^{n+1} - \lambda T_{i-1}^{n+1} = T_i^n, \quad i = 1, \dots, N; \quad n = 0, \dots, M - 1.$$

On constate que les inconnus à l'itération $n + 1$ sont reliées entre elles par une relation implicite (d'où le nom de la méthode).

Le schéma implicite peut être écrire sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 1 + 2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1 + 2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ T_4^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ T_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ T_3^n \\ T_4^n \\ \vdots \\ \vdots \\ T_N^n \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} T_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ T_d \end{bmatrix}.$$

2.9 Convergence, consistance et stabilité

2.9.1 Définitions

Supposons le problème suivant avec L un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 en t

$$\begin{cases} Lu(x, t) = f(x, t) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(x, 0) = \phi(x), \text{ pour } x \in \Omega \text{ (ouvert de } \mathbb{R}). \end{cases} \quad (2.7)$$

En remplaçant les dérivées partielles par des différences finies on obtient un opérateur discret $L_{h,k}$. Ainsi l'équation aux dérivées partielles homogène discrétisée s'écrit sous la forme $L_{h,k}v = 0$ (h le pas de l'espace, k le pas du temps). Un schéma aux différences finies général associée à l'équation (2.7) s'écrit donc comme suit

$$L_{h,k}v = f_i^n.$$

La condition initiale est simplement $v_m^0 = \phi(x_m)$ pour $x_m \in \Omega$.

Définition 2.1. (*Consistance*)

On dit que le schéma $L_{h,k}v = f_i^n$ est consistant avec l'équation aux dérivées partielles (2.7) si pour toute fonction φ de classe C^∞ , on a :

En tout point (x_i, t_n)

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (L\varphi - L_{h,k}\varphi) = 0.$$

La consistance entraîne en particulier qu'une solution régulière de l'équation aux dérivées partielles est une solution du schéma aux différences finies quand le pas de discrétisation tendent vers 0.

Cette propriétés est facile à vérifier.

Considérons par exemple :

$$L\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Donc

$$L_{h,k}\varphi = \frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{k} + c \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h}.$$

Grâce à la formule de Taylor

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1}^n &= \varphi(x_i + h, t_n) = \varphi_i^n + h\varphi_x(x_i, t_n) + o(h^2), \\ \implies \varphi_x(x_i, t_n) &= \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} + o(h), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_i^{n+1} &= \varphi(x_i, t_n + k) = \varphi_i^n + k\varphi_t(x_i, t_n) + o(k^2) \\ \implies \varphi_t(x_i, t_n) &= \frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{k} + o(k). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$L_{h,k}\varphi = \varphi_t(x_i, t_n) + c\varphi_x(x_i, t_n) + o(h) + o(k).$$

Donc

$$L\varphi - L_{h,k}\varphi = o(h) + o(k) \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0.$$

Où d'autre manière :

L'équation continue

$$\varphi_t(x_i, t_n) + c\varphi_x(x_i, t_n) = f(x_i) \Leftrightarrow \frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{k} + c \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} + o(h) + o(k) = f_i.$$

L'équation discrète

$$\frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{k} + c \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} = f_i.$$

Alors, l'erreur de consistance est donnée par

$$\begin{aligned} E_{\text{consistance}} &= \text{L'équation continue} - \text{L'équation discrète} \\ &= \frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{k} + c \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} + o(h) + o(k) - f_i - \frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{k} - c \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} + f_i \\ &= o(h) + o(k) \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0. \end{aligned}$$

Définition 2.2. (Ordre du schéma)

On dit qu'un schéma de discrétisation à N points est d'ordre p s'il existe $c \in \mathbb{R}$ ne dépend que de la solution exacte, tel que l'erreur de consistance satisfait

$$\max_{i=1,\dots,N} |R_i| \leq ch^p. \quad (2.8)$$

Définition 2.3. (Stabilité)(au sens L^2) Le schéma aux différences finies $L_{h,k}v = 0$ associé à l'équation aux dérivées partielles $Lu = 0$ est **stable** s'il existe $\Lambda \subset \mathbb{R}_+^*$, avec $(0,0) \in \Lambda$ tel que

$$h \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |v_i^n|^2 \leq C_T \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |v_i^0|^2$$

pour tout $0 \leq t_n \leq T$ et $(h, k) \in \Lambda$.

Remarque 2.1.

1. La définition utilise une norme sur l'espace $L^2(h\mathbb{Z})$,

$(v_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ est un élément de $L^2(h\mathbb{Z})$,

$\|v^n\|_{L^2(h\mathbb{Z})} = (h \sum |v_i^n|^2)^{\frac{1}{2}}$ est finie,

Le critère de stabilité s'écrit alors, pour tout h et k suffisamment petits dans Λ

$\forall T > 0, \exists C_T > 0, \forall t_n \in [0, T]$

$$\|v^n\|_{L^2(h\mathbb{Z})} \leq C_T \|v^0\|_{L^2(h\mathbb{Z})}.$$

2. La stabilité garantit qu'à chaque instant $t_n \in [0, T]$, la norme de la solution discrète est **bornée**, à un facteur constant près, par la norme des données initiales.

Définition 2.4. Soit $u(x, t)$ la solution de (2.7) et v une solution du schéma discret $L_{h,k}v = f_i^n$ telle que v_i^0 converge vers $\phi(x)$ quand x_i tendant vers x .

On dit que le schéma aux différences finies $L_{h,k}$ est un schéma convergent si v_i^n converge vers $u(x, t)$ quand (x_i, t_n) converge vers (x, t) pour (h, k) tendant vers $(0, 0)$ c'est-à-dire la solution d'un schéma aux différences finies converge vers la solution exacte de l'équation aux dérivées partielles.

Remarque 2.2. La consistence est une condition nécessaire de convergence mais n'est pas une condition suffisante.

2.10 Etude de l'équation de la chaleur en dimension 1

On considère le problème de la chaleur en dimension 1 suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in]0, 1[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \forall t \in]0, T[. \end{cases} \quad (2.9)$$

$u(x, t)$: La température.

x : Point d'espace.

t : Le temps.

Théorème 2.1. (Existence et unicité)

Si $u_0 \in C^2(]0, 1[; \mathbb{R})$, alors il existe une unique solution $u \in C^2(]0, 1[\times]0, T[; \mathbb{R})$ qui vérifie (2.9).

Si $u_0 \in C^\infty(]0, 1[; \mathbb{R})$, ceci appelé effet "régularisant" de l'équation de la chaleur.

2.10.1 Principe du maximum

Sous les hypothèses du théorème précédent, soit u la solution du problème (2.9). Si $u_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$, alors $u(x, t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ et $x \in]0, 1[$.

2.10.2 Discrétisation du problème

La discrétisation consiste à donner un ensemble de points t_n , $n = 0, \dots, M$ de l'intervalle $[0, T]$ et un ensemble de points x_i , $i = 0, \dots, N + 1$. Pour simplifier, on considère un pas constant en temps et en espace.

Soient $h = \frac{1}{N+1}$ le pas de discrétisation en espace et $k = \frac{T}{M}$ le pas de discrétisation en temps.

On pose : $t_n = nk$ pour $n = 0, \dots, M$ et $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N + 1$. Les inconnues discrètes sont notées : u_i^n , $i = 1, \dots, N$, $n = 1, \dots, M$.

L'approximation en temps par la méthode d'Euler explicite consiste à écrire la première équation de (2.9) en chaque point x_i et en temps t_n .

$u_t(x_i, t_n)$ est approché par le quotient différentiel

$$\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{k},$$

et $-u_{xx}(x_i, t_n)$ par

$$\frac{1}{h^2} (2u(x_i, t_n) - u(x_{i+1}, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)).$$

On obtient le schéma suivant

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{1}{h^2} (2u_i^n - u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) = 0, & i = 1, \dots, N; n = 0, \dots, M - 1, \\ u_i^0 = u_0(x_i), & i = 1, \dots, N, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, & n = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (2.10)$$

2.10.3 Consistance du schéma

Soit $\bar{u}_i^n = u(x_i, t_n)$ la valeur de la solution exacte en x_i et t_n . l'erreur de consistance R_i^n en (x_i, t_n) peut s'écrire comme des erreurs de consistance en temps et en espace

$$R_i^n = \hat{R}_i^n + \tilde{R}_i^n,$$

avec

$$\tilde{R}_i^n = \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} - u_t(x_i, t_n) \quad \text{et} \quad \hat{R}_i^n = \frac{2\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i+1}^n - \bar{u}_{i-1}^n}{h^2} - u_{xx}(x_i, t_n).$$

Proposition 2.1. *Le schéma (2.10) est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace, c'est-à-dire qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u telque*

$$|R_i^n| \leq c(k + h^2).$$

Démonstration. Grace à la formule de Taylor pour les deux termes de l'équation, on obtient

$$\begin{aligned}
R_i^n &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - u_t(x_i, t_n) + \frac{2u_i^n - u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{h^2} - u_{xx}(x_i, t_n) \\
&= \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + o(k) \\
&\quad + \frac{2u_i^n - u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{h^2} - \frac{2u_i^n - u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{h^2} + o(h^2) \\
&= o(k) + o(h^2) \leq c(k + h^2) \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0.
\end{aligned}$$

Le schéma est consistant. □

2.10.4 Stabilité du schéma

D'après la proposition précédente la solution exacte vérifie

$$\|u^n\|_{L^\infty(]0,1[\times]0,T])} \leq \|u_0\|_{L^\infty(]0,1])}.$$

Si on choisi correctement le pas d'espace, nous allons voir qu'en avoir l'équivalent discret sur la solution.

Définition 2.5. *On dit qu'un schéma est L^∞ -stable si la solution approchée est bornée dans L^∞ indépendamment du pas du maillage.*

Proposition 2.2. *Si la condition de stabilité $\lambda = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ est vérifiée alors, le schéma (2.10) est L^∞ -stable au sens où*

$$\sup_{\substack{i=1,\dots,N \\ n=1,\dots,M}} |u_i^n| \leq \|u_0\|_{L^\infty(]0,1])}.$$

Démonstration. On peut écrire le schéma (2.10) sous la forme

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda (2u_i^n - u_{i+1}^n - u_{i-1}^n).$$

Soit encore

$$u_i^{n+1} = (1 - 2\lambda) u_i^n + \lambda u_{i+1}^n + \lambda u_{i-1}^n. \tag{2.11}$$

Si $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$, on a $\lambda \geq 0$ et $(1 - 2\lambda) \geq 0$, (2.11) est donc une combinaison convexe de u_i^n , u_{i+1}^n et u_{i-1}^n .

Soit $M^n = \max_{i=1,\dots,N} u_i^n$, on a alors

$$u_i^{n+1} \leq (1 - 2\lambda) M^n + \lambda M^n + \lambda M^n$$

et donc

$$u_i^{n+1} \leq M^n, \forall i = 1, \dots, N \implies \max_{i=1, \dots, N} u_i^{n+1} \leq \max_{i=1, \dots, N} u_i^n.$$

On montre de la même manière que

$$\min_{i=1, \dots, N} u_i^{n+1} \geq \min_{i=1, \dots, N} u_i^n.$$

On en déduit par récurrence

$$\max_{i=1, \dots, N} u_i^{n+1} \leq \max_{i=1, \dots, N} u_i^0$$

et

$$\min_{i=1, \dots, N} u_i^{n+1} \geq \min_{i=1, \dots, N} u_i^0.$$

Alors

$$\max_{i=1, \dots, N} |u_i^{n+1}| \leq \max_{i=1, \dots, N} |u_i^0|.$$

C'est-à-dire

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty.$$

□

2.11 Convergence

Définition 2.6. Soit u la solution du problème (2.9) et $(u_i^n)_{\substack{i=1, \dots, N \\ n=1, \dots, M}}$ la solution du schéma (2.10), on appelle erreur de discrétisation au points (x_i, t_n) la quantité

$$e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n.$$

(Solution exacte – solution approchée au point (x_i, t_n)).

Théorème 2.2. Sous les hypothèses du théorème 2.1 (d'existence et unicité) et sous la condition de stabilité il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ ne dépend que de u telque

$$\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^0\|_\infty + Tc(k + h^2),$$

pour tout $i = 1, \dots, N$, $n = 0, \dots, M - 1$.

Ainsi que si $\|e^0\|_\infty = 0$. Alors

$$\max_{i=1, \dots, N} |e_i^{n+1}| = \|e^{n+1}\|_\infty \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0,$$

pour tout $n = 0, \dots, M - 1$.

Le schéma est converger.

Démonstration. On note $\tilde{u}_i^n = u(x_i, t_n)$. On a donc, par définition de l'erreur de consistance

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - \tilde{u}_i^n}{k} + \frac{1}{h^2} (2\tilde{u}_i^n - \tilde{u}_{i+1}^n - \tilde{u}_{i-1}^n) = R_i^n, \quad i = 1, \dots, N; \quad n = 0, \dots, M - 1. \quad (2.12)$$

D'autre part le schéma numérique s'écrit :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{1}{h^2} (2u_i^n - u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) = 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad n = 0, \dots, M - 1, \quad (2.13)$$

(2.12)–(2.13) donne

$$\begin{aligned} & \frac{(\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^{n+1}) - (\tilde{u}_i^n - u_i^n)}{k} + \frac{1}{h^2} (2(\tilde{u}_i^n - u_i^n) - (\tilde{u}_{i+1}^n - u_{i+1}^n) - (\tilde{u}_{i-1}^n - u_{i-1}^n)) = R_i^n \\ \implies & \frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{k} + \frac{1}{h^2} (2e_i^n - e_{i+1}^n - e_{i-1}^n) = R_i^n. \end{aligned}$$

Soit donc

$$e_i^{n+1} = (1 - 2\lambda) e_i^n + \lambda e_{i+1}^n + \lambda e_{i-1}^n + kR_i^n.$$

Or

$$|(1 - 2\lambda) e_i^n + \lambda e_{i+1}^n + \lambda e_{i-1}^n| \leq \max_{i=1, \dots, N} |e_i^n| = \|e^n\|_\infty,$$

donc, comme le schéma est consistant

$$\begin{aligned} |e_i^{n+1}| &= |(1 - 2\lambda) e_i^n + \lambda e_{i+1}^n + \lambda e_{i-1}^n + kR_i^n| \\ &\leq \max_{i=1, \dots, N} |e_i^n| + kc(k + h^2) \\ \implies \|e^{n+1}\|_\infty &\leq \|e^n\|_\infty + kc(k + h^2). \end{aligned}$$

Par récurrence

$$\implies \|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^0\|_\infty + Mkc(k + h^2), \quad (Mk = T),$$

($e^0 = 0$).

□

2.11.1 Exemple numérique

On considère comme un exemple des problèmes d'évolutions le problème simple suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & 0 < x < 1; 0 < t < T, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (2.14)$$

Il est très facile de vérifier que $u(x, y) = \sin(\pi x) e^{-\pi^2 t}$ est une solution exacte de (2.14).

Pour l'intérêt général, nous présentons dans ce qui suit le code numérique utilisé pour obtenir ces résultats. Ce code est créé en utilisant la langage MATLAB.

Le programme est basé sur les résultats de la discrétisation réalisée au paragraphe 2.10 ou nous avons utilisé un schéma d'Euler explicite. Parce que les problèmes sont identiques sauf la condition initiale, nous ne répéterons donc pas tous ces calculs.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
#####      Solution de l'équation du/dt=u''(x), u(0,t)=u(1,t)=0,      #####
#####      u(x,0)=sin(pi*x) par la méthode de différences finies      #####
#####      solution exacte Uexa(t)=sin(pi*t)*exp(-pi^2*t)      #####
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
nx=input('nx=');
nt=input('nt=');
a=0; b=1; t0=0; tf=0.2;
dx=(b-a)/(nx-1);
dt=(tf-t0)/(nt-1);
x=a:dx:b;
t=t0:dt:tf;
s=dt/dx^2
#####      Solution exacte      #####
UA=zeros(nx,nt);
for j=1:nt
    for i=1:nx
        UA(i,j)=sin(pi*x(i))*exp(-pi^2*t(j));
    end
end
end
```

```

figure(13)
contourf(UA,200,'linecolor','non')
xlabel('t')
ylabel('x')
title('Solution exacte')
colormap(jet(256))
colorbar
caxis([0,1])
print -dpdf Figure-13.pdf
open Figure-13.pdf
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Solution approchée %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
UN=zeros(nx,nt);
UN(:,1)=sin(pi*x);
for j=1:nt-1
    for i=2:nx-1
        UN(i,j+1)=s*UN(i-1,j)+(1-2*s)*UN(i,j)+s*UN(i+1,j);
    end
end
figure(14)
contourf(UN,200,'linecolor','non')
xlabel('t')
ylabel('x')
title('Solution approchée')
colormap(jet(256))
colorbar
caxis([0,1])
print -dpdf Figure-14.pdf
open Figure-14.pdf
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% L'erreur de discrétisation %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
EE= abs(UA-UN);
figure(15)
contourf(EE,200,'linecolor','non')
xlabel('t')
ylabel('x')
title('Erreur')
colormap(jet(256))
colorbar
print -dpdf Figure-15.pdf
open Figure-15.pdf

```

Les figures suivantes représentent les solutions exacte et approchée avec l'erreur de discrétisation pour $N = 10$ et $M = 100$ de sorte que la condition de stabilité soit satisfaite.

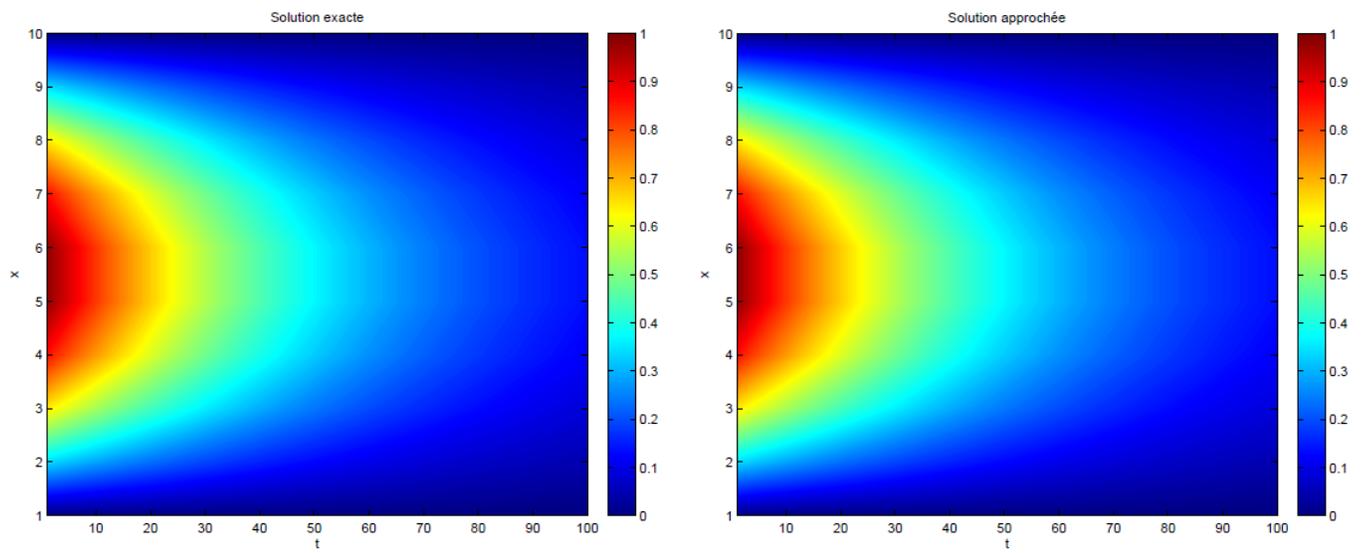


FIGURE 2.4 – Solution exacte et solution approchée pour $N = 10$ et $M = 100$.

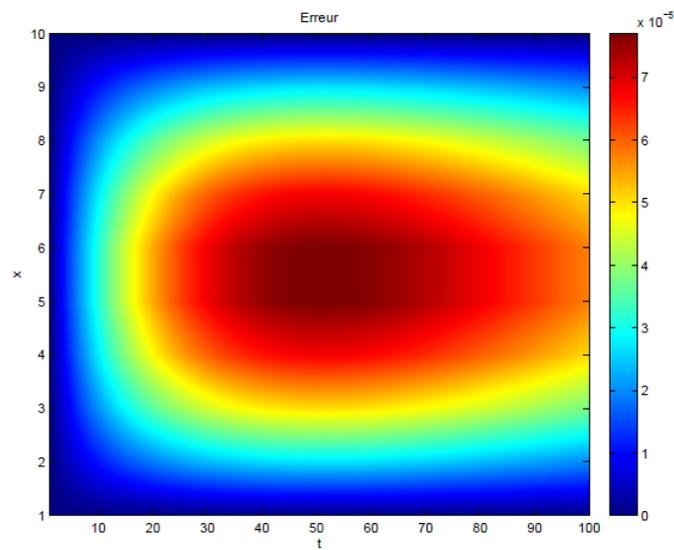


FIGURE 2.5 – Erreur de discrétisation pour $N = 10$ et $M = 100$.

2.12 Méthode de différences finies pour un problème elliptique

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

où $c \in C([0, 1], \mathbb{R}_+)$ et $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, qui peut modéliser par exemple un phénomène de diffusion-réaction d'une espèce chimique. On se donne un pas du maillage constant $h = \frac{1}{N+1}$ et une subdivision de $[0, 1]$, notés $(x_k)_{0 \leq k \leq N+1}$ avec

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1.$$

En approchant $u''(x_i)$ par quotient différentiel en utilisant le développement de Taylor, on obtient

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2} (2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}) + c_i u_i = f_i, & i = 1, \dots, N, \\ u_0 = u_{N+1} = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

où :

u_i est l'inconnue discrète associée au noeud i , $i = 0, \dots, N + 1$, on pose $u_0 = u_{N+1} = 0$.

$c_i = c(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$.

On peut écrire ces équations sous la forme matricielle

$$A_h U_h = b_h. \quad (2.17)$$

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 + c_1 h^2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 + c_2 h^2 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 + c_3 h^2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2 + c_{N-1} h^2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 + c_N h^2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

et

$$u_h = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}, \quad b_h = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{bmatrix}.$$

Questions

1. Le système (2.17) admet-il une unique solution ?
2. A-t-on convergence de u_h vers u et en quel sens ?

Définition 2.7. Une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,M}}$ est dite :

1. Symétrique si $A^t = A$.
2. Définie positive si

$$\forall v = (v_1, v_2, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N, vAv^t \geq 0.$$

Proposition 2.3. Soit $c = (c_1, c_2, \dots, c_N) \in \mathbb{R}^N$ tel que $c_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, N$, alors la matrice A_h définie par (2.18) est symétrique définie positive et donc inversible.

Démonstration. La matrice A_h est évidemment symétrique.

Montrons qu'elle est définie positive, soit $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)$, on pose $v_0 = v_{N+1} = 0$.

Calculons le produit vA_hv^t .

On a donc, par un changement d'indice

$$vA_hv^t = \frac{1}{h^2} \left[\sum_{i=1}^{i=N} (-v_{i-1}v_i) + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} (2 + c_2h^2) v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=2}^{i=N+1} (-v_{i-1}v_i) \right].$$

et comme on a posé $v_0 = 0$ et $v_{N+1} = 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} vA_hv^t &= \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} (2 + c_2h^2) v_i^2 - \frac{2}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} (v_{i-1}v_i) \\ &= \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} c_i v_i^2 - \frac{2}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} (v_{i-1}v_i) \\ &= \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=2}^{i=N+1} v_{i-1}^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} c_i v_i^2 - \frac{2}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} (v_{i-1}v_i) \\ &= \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} c_i v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} v_{i-1}^2 - \frac{2}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} (v_{i-1}v_i) + v_N^2 \\ &= \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} c_i v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} [v_i^2 + v_{i-1}^2 - 2(v_{i-1}v_i)] + v_N^2 \\ &= \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} c_i v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} (v_i - v_{i-1})^2 + v_N^2 \geq 0, \quad \forall v = (v_1, v_2, \dots, v_N). \end{aligned}$$

Remarque 2.3. Si on pose $vA_hv^t = 0$, on a alors,

$$\frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{i=N} c_i v_i^2 = 0 \text{ et } (v_i - v_{i-1}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

on a donc $v_1 = v_2 = \dots = v_N = v_0 = v_{N+1} = 0$. Remarquons que ces égalités sont vérifiées même si les c_i sont nuls. Ceci démontre que la matrice A_h est bien définie. □

2.12.1 Existence et unicité de la solution

On a montré ci-dessus que A_h est symétrique définie positive, donc inversible, ce qui entraîne l'existence et l'unicité de la solution de (2.17).

Définition 2.8. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de coefficients (a_{ij}) , $i = 1, \dots, N$ et $j = 1, \dots, N$.

1. On dit que A est positive (ou $A \geq 0$) si $a_{ij} \geq 0, \forall i, j = 1, \dots, N$.
2. On dit que A est monotone si A est inversible et $A^{-1} \geq 0$.

L'avantage des schémas à matrices monotones est de satisfaire la propriétés de conservation de positivité, qui peut être cruciale dans les applications physiques.

Définition 2.9. On dit que A est conserve la positivité si

$$Av \geq 0, \forall v = (v_1, v_2, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N \implies v \geq 0. \quad (2.19)$$

On a en effet la proposition suivante :

Proposition 2.4. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Alors :

$$A \text{ conserve la positivité} \iff A \text{ est monotone.}$$

Démonstration.

$\implies?$ Supposons d'abord que A conserve la positivité, et montrons que A est inversible et que A^{-1} a coefficients positive (≥ 0).

Si x est tel que $Ax = 0$. Alors $Ax \geq 0$ soit par hypothèse $x \geq 0$, Mais on a aussi $Ax \leq 0$, alors $A(-x) \geq 0$ et donc $-x \geq 0 \implies x \leq 0$.

On en déduit que $x = 0$, ce qui prouve que A est inversible.

La conservation de positivité donne alors que $y \geq 0 \implies A^{-1}y \geq 0$, En prenant $y = e_1$, ($e_1 = (1, 0, \dots, 0)$) on obtient $A^{-1}e_1 \geq 0$ c'est-à-dire la première colonne de la matrice A est positive. Puis en prenant $y = e_i$ on obtient que la i -ème colonne de A^{-1} est positive pour $i = 2, 3, \dots, N$, donc A^{-1} est positive.

$\impliedby?$ Réciproquement supposons maintenant que A est inversible et que A^{-1} à des coefficients positifs. Soit $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $Ax = y \geq 0$, alors $x = A^{-1}y \geq 0$. Donc A conserve la positivité. \square

Remarque 2.4. (*Principe du maximum*)

On appelle le principe du maximum contenu le fait que si $f \geq 0$ alors le minimum de la fonction u solution du problème (2.15) est atteint sur les bords.

Lemme 2.1. Soient $c = (c_1, c_2, \dots, c_N) \in \mathbb{R}^N$ et $A_h \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ définie par (2.18). Si $c_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$, alors la matrice A_h est monotone.

Démonstration. On va montrer que $A_h v \geq 0 \implies v \geq 0$.

Posons $v_0 = v_N = 0$, supposons que $A_h v \geq 0$, on a donc

$$-\frac{1}{h^2}v_{i-1} + \left(\frac{2}{h^2} + c_i\right)v_i - \frac{1}{h^2}v_{i+1} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Soit $p = \min \left\{ i \in \{1, \dots, N\} ; v_i = \min_{j=1, \dots, N} v_j \right\}$. Supposons que $\min_{j=1, \dots, N} v_j < 0$, on a alors $p \geq 1$ et

$$\frac{1}{h^2}(v_p - v_{p-1}) + c_p v_p + \frac{1}{h^2}(v_p - v_{p+1}) \geq 0.$$

On en déduit que

$$c_p v_p \geq \frac{1}{h^2}(v_{p-1} - v_p) + \frac{1}{h^2}(v_{p+1} - v_p) \geq 0.$$

Si $c_p > 0$, on a donc $v_p \geq 0$ et donc $v_i \geq 0, \forall i$, (contradiction).

Si $c_p = 0$, on a donc $v_p = v_{p+1} = v_{p-1}$ ce qui est impossible car p est le plus petit indice i telque $v_i = \min_{j=1, \dots, N} v_j$. Donc dans ce cas le minimum ne peut pas être atteint pour $j = p > 1$. On a ainsi finalement montré que $\min_{j=1, \dots, N} v_j \geq 0$, on a donc $v \geq 0$. \square

2.12.2 Erreur de consistance

Définition 2.10. On appelle *erreur de consistance* la quantité obtenue en remplaçant l'inconnue par la solution exacte dans le schéma numérique. Dans le cas du schéma (2.16) l'erreur de consistance au point x_i est donc définie par

$$R_i = \frac{1}{h^2}(2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})) + c_i u(x_i) - f(x_i) = 0.$$

L'erreur de consistance R_i est donc l'erreur qu'on connaît en remplaçant l'opérateur $-u''$ par le quotient différentiel

$$-\frac{1}{h^2}(u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})).$$

Cette erreur peut être évaluée si u est suffisamment régulière en effectuant des développements de Taylor.

Lemme 2.2. *Si la solution de (2.15) vérifie $u \in C^4([0, 1])$, alors le schéma (2.16) est consistant d'ordre 2 et on a plus précisément*

$$R_i \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0,1]} |u^{(4)}|.$$

Démonstration. Par développement de Taylor

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i) + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i), \quad x_i < \xi_i < x_{i+1}, \\ u(x_{i-1}) &= u(x_i) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i) + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i), \quad x_{i-1} < \xi_{i-1} < x_i. \end{aligned}$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient que

$$\frac{1}{h^2} (u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})) = u''(x_i) + \frac{h^2}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_{i-1}) \right).$$

Ce qui entraîne que

$$R_i = \frac{h^2}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_{i-1}) \right) \leq \frac{h^2}{24} \sup_{[0,1]} |u^{(4)}|.$$

□

2.12.3 Stabilité

Proposition 2.5. *On dit que le schéma (2.16) est stable, au sens où la norme infinie de la solution approchée est bornée par un nombre ne dépendant que de f . Plus précisément, la matrice A_h satisfait*

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8},$$

inégalité qui peut aussi s'écrire comme une estimation sur les solutions du système (2.17)

$$\|U_h\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|f\|_\infty.$$

Démonstration. On rappelle que par définition, si $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$

$$\|M\|_\infty = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^N \\ v \neq 0}} \frac{\|Mv\|_\infty}{\|v\|_\infty}, \quad \text{avec } \|v\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq N} |v_i|.$$

Pour montrer que $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$, on décompose la matrice A_h sous la forme $A_h = A_{oh} + \text{diag}(c_i)$ où A_{oh} est la matrice de discrétisation de l'opérateur $-u''$ avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes et $\text{diag}(c_i)$ désigne la matrice diagonale de coefficients diagonaux c_i .

$$A_{oh} = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{bmatrix} \quad \text{et } c_i = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & c_{N-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c_N \end{bmatrix}.$$

Les matrices A_{oh} et A_h sont inversibles et on a

$$A_{oh}^{-1} - A_h^{-1} = A_{oh}^{-1} A_h A_h^{-1} - A_{oh}^{-1} A_{oh} A_h^{-1} = A_{oh}^{-1} (A_h - A_{oh}) A_h^{-1},$$

comme $A_h - A_{oh} = \text{diag}(c_i) \geq 0$, on a $A_h \geq A_{oh}$ et comme A_h et A_{oh} sont monotones, on en déduit que

$$0 \leq A_h^{-1} \leq A_{oh}^{-1}, \quad (\text{composante par composante}).$$

On peut maintenant remarquer que si $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, et si $B \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \|B\|_\infty &= \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^N \\ \|v\|_\infty = 1}} \sup_{i=1, \dots, N} |(Bv)_i| \\ &= \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^N \\ \|v\|_\infty = 1}} \sup_{i=1, \dots, N} \left| \sum_{j=1}^N B_{ij} v_j \right| \\ &= \sup_{i=1, \dots, N} \left| \sum_{j=1}^N B_{ij} \right|. \end{aligned}$$

On a donc

$$\|A_h^{-1}\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, N} \left| \sum_{j=1}^N (A_h^{-1})_{ij} \right| \leq \sup_{i=1, \dots, N} \left| \sum_{j=1}^N (A_{oh}^{-1})_{ij} \right| \quad (A_h^{-1} \leq A_{oh}^{-1}),$$

d'où on déduit que $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \|A_{oh}^{-1}\|_\infty$.

Il ne reste plus qu'à estimer $\|A_{oh}^{-1}\|_\infty$. Comme $A_{oh}^{-1} \geq 0$, on a

$$\|A_{oh}^{-1}\|_\infty = \|A_{oh}^{-1} e\|_\infty \quad \text{avec } e = (1, 1, \dots, 1).$$

Soit $d = A_{oh}^{-1}e \in \mathbb{R}^N$. On veut calculer $\|d\|_\infty$, où d vérifie $A_{oh}d = e$. Or le système linéaire $A_{oh}d = e$ n'est autre que la discrétisation par différences finies du problème

$$\begin{cases} -u''(x) = 1, & x \in]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

dont la solution exacte est $u_0(x) = \frac{x(1-x)}{2}$ qui vérifie $u_0^{(4)}(x) = 0$. On en conclut que $u_0(x_i) = d(i)$, $\forall i = 1, \dots, N$.

Donc $\|d\|_\infty = \sup \frac{ih(ih+1)}{2}$ où $h = \frac{1}{N+1}$ est le pas de discrétisation. Ceci entraîne que

$$\|d\|_\infty \leq \sup_{[0,1]} \left| \frac{x(x-1)}{2} \right| = \frac{1}{8},$$

et donc que

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}.$$

□

2.12.4 Convergence

Définition 2.11. On appelle *erreur de discrétisation en x_i* , la différence entre la solution exacte en x_i et la i -ème composante de la solution donnée par le schéma numérique

$$e_i = u(x_i) - u_i, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (2.20)$$

Théorème 2.3. Soit u la solution exacte de

$$\begin{cases} -u''(x) + cu(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

On suppose $u \in C^4([0, 1])$. Soit U_h la solution de (2.16). Alors l'erreur de discrétisation définie par (2.20) satisfait

$$\max_{i=1, \dots, N} |e_i| \leq \frac{h^2}{96} \|u^{(4)}\|_\infty.$$

Le schéma donc est convergent d'ordre 2.

Démonstration. Soient $U_h = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ et $\tilde{U}_h = (u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N))$, on cherche à majorer $\|\tilde{U}_h - U_h\|_\infty$.

On a $A(\tilde{U}_h - U_h) = R$ où R est l'erreur de consistance. On a donc

$$\|\tilde{U}_h - U_h\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|R\|_\infty \leq \frac{1}{8} \times \frac{h^2}{12} \|u^{(4)}\|_\infty = \frac{h^2}{96} \|u^{(4)}\|_\infty.$$

□

2.13 Schéma de Crank-Nicolson pour l'équation de la chaleur

Précédemment on a évoqué deux schémas classiques pour l'équation de la chaleur, Euler explicite et Euler implicite. Considérons l'équation de la chaleur suivante

$$\begin{cases} u_t(x) - \alpha u_{xx}(x, t) = f(x, t), & (x, t) \in]0, 1[\times]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in]0, T[. \end{cases} \quad (2.21)$$

Euler explicite

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = f_i^n.$$

Euler implicite

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \alpha \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} = f_i^{n+1}.$$

Ces schémas sont conditionnellement stables et sont d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

L'idée du schéma de Crank-Nicolson est le choisir une sorte de moyenne entre Euler explicite et

Euler implicite

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{\alpha}{2} \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right] = \frac{f_i^n + f_i^{n+1}}{2}. \quad (2.22)$$

Que l'on peut écrire de manière matricielle

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{k} + \frac{1}{2} A [U^{n+1} + U^n] = \frac{1}{2} [F^{n+1} + F^n]. \quad (2.23)$$

Telle que

$$A = \alpha \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{bmatrix}$$

Sans pertes de généralités, on peut supposer dans la suite $f \equiv 0$. U^{n+1} est alors obtenue en une itérée par

$$\left(Id + \frac{k}{2}A \right) U^{n+1} = \left(Id - \frac{k}{2}A \right) U^n.$$

On note que le cout en calcul est très similaire à celui d'Euler implicite puisque on doit résoudre un système linéaire à chaque itération. Cependant, il va être intéressant de noter quelque petits miracles.

Proposition 2.6. *Le schéma (2.23) est consistant avec (2.21) à l'ordre 2 en espace et 2 en temps.*

Démonstration. Il est évident que la partie spatiale (donnée par A) est d'ordre 2 en espace. Démontrons l'ordre 2 en temps.

Par le développement de Taylor

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + k \frac{\partial u}{\partial t}(t_n) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_n) + o(k^4), \quad (2.24)$$

$$\implies \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{k} = \frac{\partial u}{\partial t}(t_n) + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n) + \frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_n) + o(k^3), \quad (2.25)$$

de (2.24) on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Au(t_{n+1}) &= \frac{1}{2}Au(t_n) + \frac{k}{2}A \frac{\partial u}{\partial t}(t_n) + \frac{k^2}{4}A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n) + o(k^3) \\ \implies \frac{1}{2}A(u(t_{n+1}) + u(t_n)) &= Au(t_n) + \frac{k}{2}A \frac{\partial u}{\partial t}(t_n) + \frac{k^2}{4}A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n) + o(k^3) \end{aligned} \quad (2.26)$$

d'où l'erreur de consistance

$$\begin{aligned} R &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}(t_n) + Au(t_n) - \left[\frac{U^{n+1} - U^n}{k} + \frac{1}{2}A(U^{n+1} + U^n) \right] \right\} \\ &= \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{du(t_n)}{dt} + Au(t_n) \right] + \frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t_n) + \frac{k^2}{4}A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n) + o(k^3), \end{aligned} \quad (2.27)$$

donc on peut conclure

$$|R| = \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t_n) + Au(t_n) - \frac{U^{n+1} - U^n}{k} - \frac{1}{2}A(U^{n+1} + U^n) \right| = o(k^2).$$

On a donc la consistance du schéma de Crank-Nicolson d'ordre 2 en temps. \square

2.13.1 Stabilité au sens de Von-Neumann

Pour cela, commençons par définir la transformation de Fourier discrète :

On a transformation de Fourier d'une fonction u

$$\hat{u} = \mathcal{F}u = \int_{\mathbb{R}} u e^{-2i\pi t} dt, \quad \text{où } i^2 = -1.$$

Alors, on peut définir la transformation de Fourier discrète comme suite

$$\hat{u}^n = \sum_j u_j^n e^{-\frac{2i\pi k j}{N}}. \quad (2.28)$$

De plus, on remarque que

$$\sum_j u_{j+1}^n e^{-\frac{2i\pi k j}{N}} = \sum_j u_j^n e^{-\frac{2i\pi k (j-1)}{N}} = \left(\sum_j u_j^n e^{-\frac{2i\pi k j}{N}} \right) e^{\frac{2i\pi k}{N}} = \hat{u}^n e^{\frac{2i\pi k}{N}},$$

et

$$\sum_j u_{j-1}^n e^{-\frac{2i\pi k j}{N}} = \sum_j u_j^n e^{-\frac{2i\pi k (j+1)}{N}} = \left(\sum_j u_j^n e^{-\frac{2i\pi k j}{N}} \right) e^{-\frac{2i\pi k}{N}} = \hat{u}^n e^{-\frac{2i\pi k}{N}}.$$

Proposition 2.7. *Le schéma (2.23) est inconditionnellement stable au sens de Von-Neumann.*

Démonstration. On part de l'équation (2.23) avec $f \equiv 0$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} - \frac{1}{2} \left[\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} \right] = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

On multiplie cette équation par $e^{-\frac{2i\pi k j}{N}}$ et on somme sur j , on a alors grâce aux propriétés de la transformée de Fourier

$$\frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{k} - \frac{1}{2} \left[\frac{\hat{u}^n e^{\frac{2i\pi k}{N}} - 2\hat{u}^n + \hat{u}^n e^{-\frac{2i\pi k}{N}}}{h^2} + \frac{\hat{u}^{n+1} e^{\frac{2i\pi k}{N}} - 2\hat{u}^{n+1} + \hat{u}^{n+1} e^{-\frac{2i\pi k}{N}}}{h^2} \right] = 0.$$

Alors, on a

$$\hat{u}^{n+1} = a(k)\hat{u}^n$$

avec

$$a(k) = \frac{1 + \frac{k}{2h^2} \left(e^{-\frac{2i\pi k}{N}} + e^{\frac{2i\pi k}{N}} - 2 \right)}{1 - \frac{k}{2h^2} \left(e^{-\frac{2i\pi k}{N}} + e^{\frac{2i\pi k}{N}} - 2 \right)},$$

$a(k)$ est appelé la facteur d'amplification. Il reste à voir que $a(k)$ est strictement inférieur à 1 en module. Or on sait que

$$e^{-\frac{2i\pi k}{N}} + e^{\frac{2i\pi k}{N}} - 2 = 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right) - 2 = 2 \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right) - 1 \right) = -4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right).$$

Donc,

$$a(k) = \frac{1 - \frac{2k}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right)}{1 + \frac{2k}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right)}.$$

Il est alors trivial que $a(k) < 1$.

Observons que

$$\begin{aligned} 1 - \lambda \sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right) &> -1 - \lambda \sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right) \\ \implies \frac{1 - \lambda \sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right)}{1 + \lambda \sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right)} &> -1, \quad \left(\lambda = \frac{2k}{h^2} \right). \end{aligned}$$

Remarque 2.5. *On vient de voir que le schéma de Crank-Nicolson est consistant à l'ordre 2 en temps et en espace avec l'équation de la chaleur. De plus, le schéma de Crank-Nicolson est inconditionnellement stable. Donc, d'après le théorème de Lax, il est convergent et*

$$\hat{e}^{n+1} = a(k)\hat{e}^n.$$

□

2.14 Exercices

Exercice 2.1. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' + u' = x, & x \in]0, 1[, \\ u(0) = a, u(1) = b. \end{cases} \quad (2.29)$$

On cherche à approcher cette solution par la méthode de différences finies. Soit $N \in \mathbb{N}$, et $h = \frac{1}{N+1}$. On note u_i la valeur approchée recherchée de u au point ih pour $i = 0, \dots, N+1$. On utilise les approximations centrées les plus simples de u' et u'' au point $ih, i = 1, \dots, N$. On pose $U_h = (u_1, u_2, \dots, u_N)$.

1. Donner une discrétisation par différences finies de ce problème.
2. Ecrire le système obtenu sous la forme matricielle $A_h U_h = b_h$. Donner A_h et b_h .
3. Montrer que le schéma obtenu est consistant et donner une majoration de l'erreur de consistance si u est suffisamment régulière.

Exercice 2.2. On s'intéresse au problème elliptique unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + 2u'(x) = x, & x \in]0, 1[, \\ u(0) = 1, u'(1) + u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

1. Donner une discrétisation de ce problème par différences finies pour un maillage uniforme en utilisant les approximations centrées aux points $x_i = ih, i = 1, \dots, N$.
2. Prouver que ce système s'écrit sous la forme : $A_h U = F$.
3. Etudier la consistance de ce schéma et donner une majoration de l'erreur de consistance.

Exercice 2.3. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + \frac{1}{1+x}u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u(0) = a, u(1) = b. \end{cases} \quad (2.31)$$

On admettra qu'il existe une unique solution $u \in C^4(0, 1)$ à ce problème. On cherche à approcher cette solution par une méthode de différences finies. Soit $N \in \mathbb{N}$, et $h = \frac{1}{N+1}$. On note u_i la valeur approchée recherchée de u au point ih pour $i = 0, \dots, N+1$.

On utilise les approximations centrées les plus simples de u' et u'' au point ih , $i = 1, \dots, N$. On pose $U_h = (u_1, u_2, \dots, u_N)$.

1. Montrer que u_h est solution d'un système linéaire de la forme $A_h U_h = b_h$, donner A_h et b_h .
2. Montrer que le schéma obtenu est consistant et donner une majoration de l'erreur de consistance (on rappelle que l'on a supposé $u \in C^4(0, 1)$).
3. Soit $v \in \mathbb{R}^N$, montrer que $A_h v \geq 0$, $v \geq 0$.
4. On définit θ par :

$$\theta(t) = -\frac{1}{2}(1+x)^2 \ln(1+x) + \frac{2}{3}(x^2 + 2x) \ln 2, \quad x \in]0, 1[.$$

(a) Montrer qu'il existe $C \geq 0$, indépendante de h telle que

$$\max \left| \frac{1}{h^2} (-\theta_{i-1} + 2\theta_i - \theta_{i+1}) + \frac{1}{2h(1+ih)} (\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) - 1 \right| \leq Ch^2,$$

avec $\theta_i = \theta(x_i)$.

(b) On pose $\theta_h = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$, montrer que $(A_h \theta_h)_i \geq 1 - Ch^2$.

(c) Montrer qu'il existe $M \geq 0$ ne dépend pas de h telle que $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq M$.

5. Montrer la convergence, en un sens à définir, de u_h vers u .

Exercice 2.4. On s'intéresse au problème elliptique unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + (1+x^2)u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u'(0) + u(0) = 0, & u(1) = 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

On cherche une solution de (2.32) par la méthode de différences finies. Soit $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N+1}$.

1. Donner une discrétisation par différences finies en utilisant les approximations centrées aux points x_i , $i = 1, \dots, N$.
2. Etudier la consistance de ce schéma et déterminer son ordre si $f \in C^2([0, 1])$.
3. Prouver que ce système s'écrit sous la forme : $A_h U = F$.
4. Montrer que la matrice A_h est inversible.

Exercice 2.5. Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in]0, 1[\\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in]0, T[. \end{cases} \quad (2.33)$$

Où u_0 et ε sont donnés ($\varepsilon > 0$).

1. Donner un schéma d'approximation de (2.33) par différences finies centrées à pas constant en espace et Euler explicite en temps.
2. Ecrire la forme matricielle de ce schéma.
3. Montrer que l'erreur de consistance est majorée par $C(k + h^2)$, avec C dépendant de la solution exacte de (2.33).
4. Sous quelle condition sur k et h a-t-on $\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty, \forall n = 1, \dots, M$.
5. Donner un résultat de convergence pour ce schéma.

Exercice 2.6. Considérons le schéma suivant

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} - \gamma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0, \\ j = 1, \dots, N; n = 0, \dots, M. \end{cases}$$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, $h = \frac{1}{N+1}$ et u_j la valeur approchée de u au point $x_j = jh$ pour $j = 0, \dots, N+1$.

1. Etudier la consistance de ce schéma avec un problème à déterminer.
2. Dans la suite on va montrer que le schéma implicite vérifie le principe du maximum discret avec $V = 0$.

On impose des conditions aux limites de Dirichlet, c'est-à-dire que la formule est valable pour $1 \leq j \leq N$ et on fixe $u_0^n = u_{N+1}^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit deux constantes $m \leq 0 \leq M$ telles que $m \leq u_j^0 \leq M$ pour $1 \leq j \leq N$.

- (a) Ecrire le système sous la forme matricielle $AU^{n+1} = U^n$.
- (b) Montrer que la matrice A est symétrique définie positive.
- (c) Montrer que pour tous les temps $n \geq 0$ on a encore les inégalités $m \leq u_j^n \leq M$ pour $1 \leq j \leq N$ (par récurrence).

Exercice 2.7. *Monter que ce schéma est consistant avec un problème à déterminer.*

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{6 + 2\Delta x}{4(\Delta x)^2} u_{j+1}^n - \frac{6}{2(\Delta x)^2} u_j^n + \frac{6 - 2\Delta x}{4(\Delta x)^2} u_{j-1}^n = 0, & j = 1, \dots, N; n = 0, \dots, M \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0; & u_j^0 = u_0(x_j), j = 1, \dots, N; n = 0, \dots, M - 1. \end{cases} \quad (2.34)$$

Exercice 2.8. *Nous reprendrons le même problème dans l'exercice 2.5*

1. *Donner une discrétisation par différences finies en utilisant un schéma d'Euler implicite, puis donner la forme matricielle associée.*
2. *Etudier la consistance de ce schéma.*
3. *Monter que le schéma est stable sous la condition $\frac{k}{2h} < \frac{\varepsilon k}{h^2}$.*

2.15 Corrigé des exercices

Corrigé de l'exercice 2.1

Soit $\Omega_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N + 1\}$ où $h = \frac{1}{N+1}, N \in \mathbb{N}^*$

1. Avec un schéma centrée, on a

$$u''(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + o(h^2), \quad (2.35)$$

$$u'(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + o(h^2). \quad (2.36)$$

L'équation discrète

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = ih \quad i = 1, \dots, N. \quad (x_i = ih) \quad (2.37)$$

Pour les conditions aux limites, On a : $u_0 = u(0) = a$. et $u_{N+1} = u(1) = b$.

Donc, le problème discret devient

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{2h} + \frac{1}{h^2}\right) u_{i-1} + \frac{2}{h^2} u_i + \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2}\right) u_{i+1} = ih & i = 1, \dots, N. \\ u_0 = a. \\ u_{N+1} = b. \end{cases}$$

En effectuons la somme, on trouve

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = u''(x_i) + \frac{h^2}{4!} (u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\xi_{i-1})). \quad (2.43)$$

Pour la condition aux limites,

$$u_N = u_{N+1} - hu'(x_N) + \frac{h^2}{2}u''(\theta_N) \implies u'(x_{N+1}) = \frac{u_{N+1} - u_N}{h} + \frac{h}{2}u''(\theta_N) \quad (2.44)$$

où $x_N < \theta_N < x_{N+1}$.

D'après (2.43) et (2.44), on a

$$\begin{aligned} R_i &= \left(-u''(x_i) + \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \right) + \left(u'(x_{N+1}) - \frac{u_{N+1} - u_N}{h} \right) \\ &= \frac{h^2}{4!} (u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\xi_{i-1})) + \frac{h}{2}u''(\theta_N) \\ \implies |R_i| &\leq \frac{h^2}{12} \max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| + \frac{h}{2} \max_{x \in [0,1]} |u''(x)|. \end{aligned}$$

$\implies \|R\|_\infty \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Alors, le schéma est consistant d'ordre 1.

Corrigé de l'exercice 2.3

1. $\Omega_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N+1\}$ où $h = \frac{1}{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$.

D'après (2.35) et (2.36), on obtient le problème discret

$$\begin{cases} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \left(\frac{1}{1+ih} \right) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = f(ih), & (x_i = ih) \quad i = 1, \dots, N, \\ u_0 = a, \\ u_{N+1} = b. \end{cases}$$

Ou

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h(1+ih)} \right) u_{i-1} + \frac{2}{h^2} u_i + \left(\frac{1}{2h(1+ih)} - \frac{1}{h^2} \right) u_{i+1} = f_i, & (x_i = ih) \quad i = 1, \dots, N, \\ u_0 = a, \\ u_{N+1} = b. \end{cases}$$

(a) Supposons d'abord que $p = 1$, on a alors $v_1 \leq v_j, \forall j = 1, \dots, N$, donc

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{h^2}v_1 + \left(\frac{1}{2h(1+h)} - \frac{1}{h^2} \right) v_2 \geq 0 \implies \frac{1}{h^2}(v_1 - v_2) + \frac{1}{2h(1+h)}v_2 + \frac{1}{h^2}v_1 \geq 0 \\
& \implies \frac{1}{h^2}(v_1 - v_2) + \frac{1}{2h(1+h)}v_2 + \frac{1}{2h(1+h)}v_1 - \frac{1}{2h(1+h)}v_1 + \frac{1}{h^2}v_1 \geq 0 \\
& \implies \frac{1}{h^2}(v_1 - v_2) + \frac{1}{2h(1+h)}v_1 - \frac{1}{2h(1+h)}(v_1 - v_2) + \frac{1}{h^2}v_1 \geq 0 \\
& \implies \frac{1}{h^2}(v_1 - v_2) - \frac{1}{2h(1+h)}(v_1 - v_2) + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h(1+h)} \right) v_1 \geq 0 \\
& \implies \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h(1+h)} \right) v_1 \geq \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h(1+h)} \right) (v_2 - v_1) \geq 0.
\end{aligned}$$

Comme $v_2 - v_1 \geq 0$ et $\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h(1+h)} \right) \geq 0$. Donc $v_1 \geq 0$. Alors, $v_1 \geq 0 \implies v_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, N \implies v \geq 0$.

(b) Un raisonnement similaire permet de montrer que si $p = N$, on a $v_p \geq 0 \implies v_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, N \implies v \geq 0$.

(c) Si $0 < p < N$, donc

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{2h(1+ph)} + \frac{1}{h^2} \right) v_{p-1} + \frac{2}{h^2}v_p + \left(\frac{1}{2h(1+ph)} - \frac{1}{h^2} \right) v_{p+1} \geq 0 \\
& \implies \frac{1}{h^2}(v_p - v_{p-1}) + \frac{1}{h^2}(v_p - v_{p+1}) + \frac{1}{2h(1+ph)}(v_{p+1} - v_p + v_p - v_{p-1}) \geq 0 \\
& \implies \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h(1+ph)} \right) (v_p - v_{p-1}) + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h(1+ph)} \right) (v_p - v_{p+1}) \geq 0.
\end{aligned}$$

Comme $\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h(1+ph)} \right) \geq 0, \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h(1+ph)} \right) \geq 0$. Alors, $v_p = v_{p+1} = v_{p-1}$ ce qui est impossible car p est le plus petit indice j tel que $v_j = \min_{i=1, \dots, N} v_i$. Donc, dans ce cas le minimum ne peut pas être atteint pour $1 < p < N$.

Alors $\min_{i=1, \dots, N} v_i \geq 0 \implies v \geq 0$.

4. (a)

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= -\frac{1}{2}(1+x)^2 \ln(1+x) + \frac{2}{3}(x^2 + 2x) \ln 2, x \in]0, 1[, \\
\theta'(x) &= -(1+x) \ln(1+x) - \frac{1}{2}(1+x) + \frac{4}{3}(x+1) \ln 2, \\
\theta''(x) &= -\ln(1+x) - 1 - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \ln 2.
\end{aligned}$$

θ vérifait alors

$$-\theta''(x) + \frac{1}{(1+x)}\theta'(x) = 1$$

avec $\theta(0) = 0, \theta(1) = 0$.

Alors, il existe C tel que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2}(\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}) + \frac{1}{2h(1+ih)}(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) - 1 = O(h^2) \\ \implies \max_i & \left| \frac{1}{h^2}(-\theta_{i-1} + 2\theta_i - \theta_{i+1}) + \frac{1}{2h(1+ih)}(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) - 1 \right| \leq Ch^2. \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \theta^{(3)}(x) &= \frac{-1}{(1+x)} \implies \max |\theta^{(3)}(x)| = 1, \\ \theta^{(4)}(x) &= \frac{1}{(1+x)^2} \implies \max |\theta^{(4)}(x)| = 1. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a

$$C = \frac{1}{12} \left(\max |\theta^{(4)}(x)| + 2 \max |\theta^{(3)}(x)| \right) = \frac{1}{4}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \max_i |(A_h \theta_h)_i - f_i| &= \max_i \left| \frac{1}{h^2}(-\theta_{i-1} + 2\theta_i - \theta_{i+1}) + \frac{1}{2h(1+ih)}(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) - 1 \right| \leq \frac{h^2}{4} \\ &\implies |(A_h \theta_h)_i - 1| \leq \frac{h^2}{4} \\ &\implies -\frac{h^2}{4} + 1 \leq (A_h \theta_h)_i \leq \frac{h^2}{4} + 1 \\ &\implies (A_h \theta_h)_i \geq 1 - \frac{h^2}{4}. \end{aligned}$$

(c) Par définition de la norme, on a

$$\|B\|_\infty = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Bv\|}{\|v\|} = \sup_{i \in \{1, \dots, N\}} \sum_{j=1}^N |B_{ij}|$$

et comme A_h^{-1} est une matrice positive, on a

$$\|A_h^{-1}\|_\infty = \sup_{i \in \{1, \dots, N\}} \sum_{j=1}^N (A_h^{-1})_{ij}.$$

On se donne $v = \left(1 - \frac{h^2}{4}, \dots, 1 - \frac{h^2}{4}\right)$ et on note $d = A_h^{-1}v$, on a donc $A_h d = v$. D'après la question (4.b) on a

$$(A_h \theta_h)_i \geq v_i, \forall i = 1, \dots, N$$

ce qui peut encore s'écrire

$$A_h (\theta_h - A_h^{-1}v) \geq 0.$$

D'après la conservation de positivité de A_h , on en déduit que

$$\theta_h - A_h^{-1}v \geq 0 \implies (\theta_h)_i \geq \left(1 - \frac{h^2}{4}\right) (A_h^{-1}e)_i,$$

où $e = (1, 1, \dots, 1)$.

Or $e \geq 0$, $A_h^{-1}e \geq 0$ et $1 - \frac{h^2}{4} > 0$, on en déduit que

$$(A_h^{-1}e)_i \leq \frac{1}{1 - \frac{h^2}{4}} (\theta_h)_i$$

soit encore

$$\|A_h^{-1}e\|_\infty = \|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{1 - \frac{h^2}{4}} \|\theta_h\|_\infty$$

θ une fonction continue et bornée sur $[0, 1]$, il existe donc K telque $|\theta(x)| \leq K$. De plus $\frac{1}{1 - \frac{h^2}{4}} \leq \frac{4}{3}$, on déduit que

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq M \quad (\text{avec } M = \frac{4}{3}K).$$

5. Dans la question 2. On a montré que le schéma est consistant d'ordre 2 avec la majoration suivante

$$\|R_h\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \left[\max_{x \in [0,1]} \|u^{(4)}(x)\| + 2 \max_{x \in [0,1]} \|u^{(3)}(x)\| \right].$$

Soit $\tilde{U} = (u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N))$ le vecteur dont les composantes sont les valeurs de la solution exacte aux points de discrétisation. Par définition, on a

$$A_h \tilde{U}_h - A_h U_h = (b_h + R_h) - b_h$$

et donc l'erreur de discrétisation vérifie

$$e_h = U_h - \tilde{U}_h = A_h^{-1}R_h$$

$$\implies \|e_h\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|R_h\|_\infty \leq Ch^2 \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0$$

ce qui prouve la convergence au sens L_∞ .

Corrigé de l'exercice 2.4

Soit $\Omega_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N+1\}$ où $h = \frac{1}{N+1}$, $N \in \mathbb{N}^*$

1. Avec un schéma centrée, on a $u''(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$.

L'équation discrète

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + (1 + x_i^2) u_i = f_i \quad i = 1, \dots, N. \quad (x_i = ih)$$

Pour les conditions aux limites, On a : $u_{N+1} = u(1) = 1$.

Discrétisation de condition de Neumann $u'(0) + u(0) = 0$, on utilise un schéma décentré avant

$$\begin{aligned} u'(x_0) + u(x_0) &= 0 \\ \implies \frac{u(x_1) - u(x_0)}{h} + u(x_0) &= 0 \\ \implies \left(1 - \frac{1}{h}\right) u_0 + \frac{1}{h} u_1 &= 0. \end{aligned}$$

Donc, le problème discret devient

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{h^2} + (1 + i^2 h^2)\right) u_i - \frac{1}{h^2} u_{i+1} - \frac{1}{h^2} u_{i-1} = f_i & i = 1, \dots, N. \\ u_0 = 1. \\ \left(\frac{1}{h} + 1\right) u_{N+1} - \frac{1}{h} u_N = 0. \end{cases}$$

2. La consistance : D'après (2.38), on a

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = u''(x_i) + \frac{h^2}{4!} (u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\xi_{i-1})).$$

Pour la condition au limite :

$$\begin{aligned} u'(x_0) - \frac{u_1 - u_0}{h} &= \frac{h}{2} u''(\theta) \\ R_i &= \frac{h^2}{4!} (u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\xi_{i-1})) + \frac{h}{2} u''(\theta) \\ \implies \|R\|_\infty &\leq \frac{h^2}{12} \max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| + \frac{h}{2} \max_{x \in [0,1]} |u''(x)| \\ &\leq \frac{h}{2} \left[\frac{h}{6} \max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| + \max_{x \in [0,1]} |u''(x)| \right]. \end{aligned}$$

Alors, le schéma est consistant d'ordre 1.

(b) Si $0 < p < N + 1$, donc

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h^2}v_{p-1} + \left(\frac{2}{h^2} + c_p\right)v_p - \frac{1}{h^2}v_{p+1} &\implies \frac{1}{h^2}(v_p - v_{p-1}) + \frac{1}{h^2}(v_p - v_{p+1}) + c_p v_p \geq 0 \\ &\implies c_p v_p \geq \frac{1}{h^2}(v_{p+1} - v_p) + \frac{1}{h^2}(v_{p-1} - v_p) \end{aligned}$$

Comme $v_{p+1} - v_p \geq 0$, $v_{p-1} - v_p \geq 0$ et $c_p \geq 0$. Donc $v_p \geq 0$ (contradiction).

Alors $v_p \geq 0 \implies v_j \geq 0 \implies v \geq 0$.

(c) Si $p = N + 1$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h}v_N + \left(\frac{1}{h} + 1\right)v_{N+1} &\geq 0 \implies \frac{1}{h}(v_{N+1} - v_N) + v_{N+1} \geq 0 \\ &\implies v_{N+1} \geq \frac{1}{h}(v_N - v_{N+1}) \geq 0 \\ &\implies v_{N+1} \geq 0 \end{aligned}$$

(contradiction).

Donc, $\forall i = 1, \dots, N + 1$, $v_i \geq 0 \implies v \geq 0$.

$$Av \geq 0 \implies v \geq 0 \implies A \text{ inversible.}$$

Corrigé de l'exercice 2.5

- Soient $M \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$, et soient k le pas du temps, choisi tel que $Mk = T$ et h le pas d'espace, choisi tel que $h = \frac{1}{N+1}$.

$$\Omega_{h,k} = \{(x_i, t_n) = (ih, nk) / i = 0, \dots, N + 1; n = 0, \dots, M\}.$$

On applique un schéma d'Eluer explicite en temps et un schéma de différences finies centrées en espace. On obtient donc

$$\begin{aligned} u_t(x_i, t_n) &\simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k}, \\ u_x(x_i, t_n) &\simeq \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h}, \end{aligned}$$

$$u_{xx}(x_i, t_n) \simeq \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}.$$

Alors, l'équation discrète est

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} - \varepsilon \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = 0 \quad (2.45)$$

$$\implies \begin{cases} u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2}\right) u_i^n + \left(\frac{\varepsilon k}{h^2} - \frac{k}{2h}\right) u_{i+1}^n + \left(\frac{\varepsilon k}{h^2} + \frac{k}{2h}\right) u_{i-1}^n, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \forall n = 1, \dots, M, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \forall i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.46)$$

2. On peut écrire le système (2.46) sous la forme matricielle $\left(\alpha = \frac{\varepsilon k}{h^2}, \beta = \frac{k}{2h}\right)$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} (1-2\alpha) & (\alpha-\beta) & & & \\ (\alpha+\beta) & (1-2\alpha) & (\alpha-\beta) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & (\alpha+\beta) & (1-2\alpha) & (\alpha-\beta) \\ & & & & (\alpha+\beta) & (1-2\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}^n$$

3. **L'erreur de consistance** : En utilisant le développement de Taylor, on obtient :

$$\begin{cases} u(x_{i+1}, t_n) = u_i^n + hu_x(x_i, t_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_i, t_n) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_i, t_n) + \frac{h^4}{4!}u_{xxxx}(\alpha_i, t_n), \\ u(x_{i-1}, t_n) = u_i^n - hu_x(x_i, t_n) + \frac{h^2}{2}u''(x_i, t_n) - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_i, t_n) + \frac{h^4}{4!}u_{xxxx}(\alpha_{i-1}, t_n), \end{cases}$$

$$\implies u_{xx}(x_i, t_n) = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + \frac{h^2}{4!}(u_{xxxx}(\alpha_i, t_n) + u_{xxxx}(\alpha_{i-1}, t_n)). \quad (2.47)$$

Pour $u_x(x_i, t_n)$

$$\begin{cases} u_{i+1}^n = u_i^n + hu_x(x_i, t_n) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t_n) + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(\beta_i, t_n), \\ u_{i-1}^n = u_i^n - hu_x(x_i, t_n) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t_n) - \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(\beta_{i-1}, t_n), \end{cases}$$

$$\implies u_x(x_i, t_n) = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + \frac{h^2}{12}(u_{xxx}(\beta_i, t_n) + u_{xxx}(\beta_{i-1}, t_n)). \quad (2.48)$$

Pour $u_t(x_i, t_n)$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + ku_t(x_i, t_n) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(x_i, t_n)$$

$$\implies u_t(x_i, t_n) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{k}{2} u_{tt}(x_i, \theta_n) \quad (2.49)$$

On a

$$R_i^n = \widehat{R}_i^n + \widetilde{R}_i^n.$$

D'après (2.47), (2.48) et (2.49), on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{R}_i^n &= u_x(x_i, t_n) - \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} - \varepsilon \left(u_{xx}(x_i, t_n) - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right) \\ &= \frac{h^2}{12} (u_{xxx}(\beta_i, t_n) + u_{xxx}(\beta_{i-1}, t_n)) - \varepsilon \frac{h^2}{4!} (u_{xxxx}(\alpha_i, t_n) + u_{xxxx}(\alpha_{i-1}, t_n)) \\ \implies \left| \widehat{R}_i^n \right| &\leq \frac{h^2}{12} \left[2 \max_{[0,1]} |u_{xxx}(x, t)| + \varepsilon \max_{[0,1]} |u_{xxxx}(x, t)| \right] \leq C_1 h^2. \\ \widetilde{R}_i^n &= u_t(x_i, t_n) - \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} = \frac{k}{2} u_{tt}(x_i, \theta_n) \\ \implies \left| \widetilde{R}_i^n \right| &\leq \frac{k}{2} \max_{[0,T]} |u_{tt}(x, t)| \leq C_2 k. \end{aligned}$$

Alors,

$$|R_i^n| \leq \left| \widehat{R}_i^n \right| + \left| \widetilde{R}_i^n \right| \leq C (h^2 + k),$$

où

$$C = \max(C_1, C_2) = \max \left(\frac{1}{12} \left[2 \max_{[0,1]} |u_{xxx}(x, t)| + \varepsilon \max_{[0,1]} |u_{xxxx}(x, t)| \right], \frac{1}{2} \max_{[0,T]} |u_{tt}(x, t)| \right).$$

Alors, $\implies \|R\|_\infty \rightarrow 0$ quand $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ et le schéma est consistant d'ordre **2** pour l'espace et d'ordre **1** pour le temps.

4. La stabilité.

De (2.46), on a

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2} \right) u_i^n + \left(\frac{\varepsilon k}{h^2} - \frac{k}{2h} \right) u_{i+1}^n + \left(\frac{\varepsilon k}{h^2} + \frac{k}{2h} \right) u_{i-1}^n.$$

La condition CFL (Courant Friedrichs-Lax))

- Toutes les coefficients soient positives, c'est-à-dire

$$1 \geq \frac{2\varepsilon k}{h^2}, \quad (2.50)$$

$$\frac{\varepsilon k}{h^2} \geq \frac{k}{2h} \implies \frac{\varepsilon}{h} \geq \frac{1}{2}. \quad (2.51)$$

Sous les conditions (2.50) et (2.51), on a

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &\leq \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2}\right) \max_i(u_i^n) + \left(\frac{\varepsilon k}{h^2} - \frac{k}{2h}\right) \max_i(u_i^n) + \left(\frac{\varepsilon k}{h^2} + \frac{k}{2h}\right) \max_i(u_i^n) \\
&\implies u_i^{n+1} \leq \max_i(u_i^n) \\
&\implies \max_i(u_i^{n+1}) \leq \max_i(u_i^n)
\end{aligned}$$

par récurrence

$$\max_i(u_i^{n+1}) \leq \max_i(u_i^0). \quad (2.52)$$

De même pour le minimum :

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &\geq \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2}\right) \min_i(u_i^n) + \left(\frac{\varepsilon k}{h^2} - \frac{k}{2h}\right) \min_i(u_i^n) + \left(\frac{\varepsilon k}{h^2} + \frac{k}{2h}\right) \min_i(u_i^n) \\
&\implies \min_i(u_i^{n+1}) \geq \min_i(u_i^n)
\end{aligned}$$

par récurrence

$$\min_i(u_i^{n+1}) \geq \min_i(u_i^0). \quad (2.53)$$

De (2.52) et (2.53), on a

$$\max_i |u_i^n| \leq \max_i |u_i^0| \implies \|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty, \forall n = 1, \dots, M.$$

5. La convergence

On a : $e_i^n = \tilde{u}_i^n - u_i^n$ telque \tilde{u}_i^n la solution exacte au point (x_i, t_n) . Par définition

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - \tilde{u}_i^n}{k} + \frac{\tilde{u}_{i+1}^n - \tilde{u}_{i-1}^n}{2h} - \varepsilon \frac{\tilde{u}_{i+1}^n - 2\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i-1}^n}{h^2} = R_i^n, \quad (2.54)$$

(2.54)-(2.45), donne

$$\begin{aligned}
&\frac{(\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^{n+1}) - (\tilde{u}_i^n - u_i^n)}{k} + \frac{(\tilde{u}_{i+1}^n - u_{i+1}^n) - (\tilde{u}_{i-1}^n - u_{i-1}^n)}{2h} \\
&\quad - \varepsilon \frac{(\tilde{u}_{i+1}^n + u_{i+1}^n) - 2(\tilde{u}_i^n - u_i^n) + (\tilde{u}_{i-1}^n - u_{i-1}^n)}{h^2} = R_i^n \\
&\implies \frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{k} + \frac{e_{i+1}^n - e_{i-1}^n}{2h} - \varepsilon \frac{e_{i+1}^n - 2e_i^n + e_{i-1}^n}{h^2} = R_i^n \\
&\implies e_i^{n+1} = \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2}\right) e_i^n + \left(\frac{\varepsilon k}{h^2} - \frac{k}{2h}\right) e_{i+1}^n + \left(\frac{\varepsilon k}{h^2} + \frac{k}{2h}\right) e_{i-1}^n + kR_i^n
\end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \implies |e_i^{n+1}| &\leq \max |e_i^n| + k |R_i^n| \\ \implies |e_i^{n+1}| &\leq \max |e_i^n| + kC (k + h^2). \end{aligned}$$

Par récurrence

$$\begin{aligned} |e_i^n| &\leq \max |e_i^0| + nkC (k + h^2) \\ \implies |e_i^n| &\leq \max |e_i^0| + MkC (k + h^2) \\ \implies |e_i^n| &\leq \max |e_i^0| + CT (k + h^2) \\ \implies \|e^n\|_\infty &\leq \|e^0\|_\infty + CT (k + h^2). \end{aligned}$$

Comme $\|e^0\|_\infty = 0$, alors,

$$\|e^n\|_\infty \leq CT (k + h^2) \implies \|e^n\|_\infty \rightarrow 0 \text{ quand } (k, h) \rightarrow (0, 0).$$

Corrigé de l'exercice 2.6

1. Le schéma présente une discrétisation par différences finies en utilisant un schéma implicite centré pour l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Etude de la consistance

D'après les développements de Taylor, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{n+1}) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{k}{2} u_{tt}(x_i, \theta_n), \quad t_n \leq \theta_n \leq t_{n+1}, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{n+1}) = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{h^2}{4!} (u_{xxxx}(\xi_i, t_{n+1}) + u_{xxxx}(\xi_{i-1}, t_{n+1})), \quad (2.57)$$

$$x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}, \quad x_{i-1} \leq \xi_{i-1} \leq x_i.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{n+1}) = \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} + \frac{h^2}{12} (u_{xxx}(\zeta_i, t_{n+1}) + u_{xxx}(\zeta_{i-1}, t_{n+1})), \quad (2.58)$$

$$x_i \leq \zeta_i \leq x_{i+1}, \quad x_{i-1} \leq \zeta_{i-1} \leq x_i.$$

D'après (2.56), (2.57) et (2.58), on obtient

$$\begin{aligned} R_i^n &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{n+1}) - \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + V \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{n+1}) - \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} \right] \\ &\quad - \gamma \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{n+1}) - \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right] \\ &= \frac{k}{2} u_{tt}(x_i, t_n) + V \frac{h^2}{12} (u_{xxx}(\zeta_i, t_{n+1}) + u_{xxx}(\zeta_{i-1}, t_{n+1})) \\ &\quad + \gamma \frac{h^2}{4!} (u_{xxxx}(\xi_i, t_{n+1}) + u_{xxxx}(\xi_{i-1}, t_{n+1})) \\ \implies |R_i^n| &\leq \frac{h^2}{12} \left[2V \max_{[0,1]} |u_{xxx}(x, t)| + \gamma \max_{[0,1]} |u_{xxxx}(x, t)| \right] + \frac{k}{2} \max_{[0,T]} |u_{tt}(x, t)| \\ &\leq C_1 h^2 + C_2 k \leq C(h^2 + k), \end{aligned}$$

où

$$C = \max(C_1, C_2) = \max \left(\frac{1}{12} \left[2V \max_{[0,1]} |u_{xxx}(x, t)| + \gamma \max_{[0,1]} |u_{xxxx}(x, t)| \right], \frac{1}{2} \max_{[0,T]} |u_{tt}(x, t)| \right).$$

Alors, $\|R\|_\infty \rightarrow 0$ quand $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ et le schéma est consistant d'ordre **2** pour l'espace et d'ordre **1** pour le temps.

2. Pour $V = 0$:

(a) L'équation discrète devienne

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \gamma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0, & j = 1, \dots, N; n = 0, \dots, M, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0. \end{cases}$$

Alors, on peut écrire la forme matricielle en posant $c = \frac{\gamma \Delta t}{\Delta x^2}$, comme suit

$$\begin{bmatrix} (1+2c) & -c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -c & (1+2c) & -c & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -c & (1+2c) & -c \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -c & (1+2c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} \\ u_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \\ u_N^n \end{bmatrix}$$

(b) La matrice A est évidemment symétrique.

Définies positive $\Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{R}^N : v^t A v \geq 0$?

$$\begin{aligned}
 v^t A v &= (v_1, v_2, \dots, v_N) \begin{bmatrix} (1+2c) & -c & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -c & (1+2c) & -c & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -c & (1+2c) & -c \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -c & (1+2c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (1+2c)v_1 - cv_2 \\ -cv_1 + (1+2c)v_2 - cv_3 \\ \vdots \\ -cv_{p-1} + (1+2c)v_p - cv_{p+1} \\ \vdots \\ -cv_{N-1} + (1+2c)v_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{p=1}^N (-cv_{p-1}v_p + (1+2c)v_p^2 - cv_{p+1}v_p), (v_0 = v_{N+1} = 0).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow v^t A v &= \sum_{p=1}^N (-cv_{p-1}v_p) + \sum_{p=1}^N (1+2c)v_p^2 + \sum_{p=1}^N (-cv_{p+1}v_p) \\
 &= \sum_{p=0}^N -cv_p v_{p+1} + \sum_{p=1}^N 2cv_p^2 + \sum_{p=1}^N v_p^2 + \sum_{p=0}^N -cv_{p+1}v_p \\
 &= c \left[\sum_{p=0}^N -2v_p v_{p+1} + \sum_{p=0}^N v_p^2 + \sum_{p=0}^N v_{p+1}^2 \right] + \sum_{p=1}^N v_p^2 \\
 &= c \sum_{p=0}^N (v_p - v_{p+1})^2 + \sum_{p=1}^N v_p^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A$ est SDP.

(c) On raisonne par récurrence sur n

Supposons que $m \leq u_j^{n-1} \leq M, \forall j = 0, \dots, N+1$. D'après les conditions aux limites $m \leq 0 \leq M$.

Soient $m' = \inf_{1 \leq j \leq N} u_j^n$ et $M' = \sup_{1 \leq j \leq N} u_j^n$.

Montrons que $M' \leq M$. Si $M' = 0$ on a rien à démontrer, sinon

Soit $k \in \{1, \dots, N\}$ tel que $M' = u_k^n$, d'après le schéma

$$(1 + 2c) u_k^n = u_k^{n-1} + 2c \left(\frac{u_{k-1}^n + u_{k+1}^n}{2} \right)$$

comme $\frac{u_{k-1}^n + u_{k+1}^n}{2} \leq u_k^n$:

$$\begin{aligned} (1 + 2c) u_k^n &\leq u_k^{n-1} + 2c u_k^n \\ \Rightarrow M' = u_k^n &\leq u_k^{n-1} \leq M. \end{aligned}$$

En remplaçant u par $-u$, on obtient $m' \geq m$.

Corrigé de l'exercice 2.7

On a

$$\frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{6 + 2\Delta x}{4(\Delta x)^2} u_{j+1}^n - \frac{6}{2(\Delta x)^2} u_j^n + \frac{6 - 2\Delta x}{4(\Delta x)^2} u_{j-1}^n = 0, \quad j = 1, \dots, N; \quad n = 0, \dots, M$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad j = 1, \dots, N; \quad n = 0, \dots, M$$

avec $u_0^n = u_{N+1}^n = 0$; $u_j^0 = u_0(x_j)$. Alors, cette formule présente la forme discrète du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, & x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in]0, 1[\\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in]0, T[. \end{cases}$$

Etude de la consistance : D'après les développements de Taylor (2.56), (2.57) et (2.58), on obtient

$$\begin{aligned}
R_i^n &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) - \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) - \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right] \\
&\quad + \frac{3}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right] \\
&= \frac{k}{2} u_{tt}(x_i, t_n) + \frac{h^2}{12} (u_{xxx}(\zeta_i, t_n) + u_{xxx}(\zeta_{i-1}, t_n)) \\
&\quad + \frac{3h^2}{2 \cdot 4!} (u_{xxxx}(\xi_i, t_n) + u_{xxxx}(\xi_{i-1}, t_n)) \\
\implies |R_i^n| &\leq \frac{h^2}{12} \left[2 \max_{[0,1]} |u_{xxx}(x, t)| + \frac{3}{2} \max_{[0,1]} |u_{xxxx}(x, t)| \right] + \frac{k}{2} \max_{[0,T]} |u_{tt}(x, t)| \\
&\leq C_1 h^2 + C_2 k \leq C(h^2 + k),
\end{aligned}$$

où

$$C = \max(C_1, C_2) = \max \left(\frac{1}{12} \left[2 \max_{[0,1]} |u_{xxx}(x, t)| + \frac{3}{2} \max_{[0,1]} |u_{xxxx}(x, t)| \right], \frac{1}{2} \max_{[0,T]} |u_{tt}(x, t)| \right).$$

Alors, $\|R\|_\infty \rightarrow 0$ quand $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ et le schéma est consistant d'ordre **2** pour l'espace et d'ordre **1** pour le temps.

Corrigé de l'exercice 2.8

1. Schéma d'Euler implicite : Soient $M \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, et soient k le pas du temps, choisi tel que $Mk = T$ et h le pas d'espace, choisi tel que $h = \frac{1}{N+1}$.

$$\Omega_{h,k} = \{(x_i, t_n) = (ih, nk) / i = 0, \dots, N+1; n = 0, \dots, M\}.$$

On applique un schéma d'Euler implicite en temps et un schéma de différences finies centrées en espace. On obtient donc

$$\begin{aligned}
u_t(x_i, t_n) &\simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k}, \\
u_x(x_i, t_{n+1}) &\simeq \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h}, \\
u_{xx}(x_i, t_{n+1}) &\simeq \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2}.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} - \varepsilon \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(1 + \frac{2\varepsilon k}{h^2}\right) u_i^{n+1} + \left(\frac{k}{2h} - \frac{\varepsilon k}{h^2}\right) u_{i+1}^{n+1} + \left(-\frac{k}{2h} - \frac{\varepsilon k}{h^2}\right) u_{i-1}^{n+1} = u_i^n, \\ \forall i = 1, \dots, N; \forall n = 0, \dots, M-1, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \forall n = 1, \dots, M, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \forall i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

On peut écrire le système sous la forme matricielle $\left(\lambda = \frac{\varepsilon k}{h^2}, \alpha = \frac{k}{2h}\right)$

$$\begin{bmatrix} (1+2\lambda) & (\alpha-\lambda) & & & \\ (-\alpha-\lambda) & (1+2\lambda) & (\alpha-\lambda) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & (-\alpha-\lambda) & (1+2\lambda) & (\alpha-\lambda) \\ & & & (-\alpha-\lambda) & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}^n$$

2. Pour la consistance, nous pouvons suivre le même raisonnement que l'exercice 2.5. On obtient alors que le schéma est consistant d'ordre 1 pour le temps et d'ordre 2 pour l'espace.

3. Pour la stabilité, on a

$$u_i^n = (1+2\lambda) u_i^{n+1} + (\alpha-\lambda) u_{i+1}^{n+1} + (-\alpha-\lambda) u_{i-1}^{n+1}.$$

Soit $u_{i_0}^{n+1} = \max_{1 \leq i \leq N} u_i^{n+1}$, alors

$$u_{i_0}^n = (1+2\lambda) u_{i_0}^{n+1} + (\alpha-\lambda) u_{i_0+1}^{n+1} + (-\alpha-\lambda) u_{i_0-1}^{n+1}.$$

D'après l'hypothèse, on a

$$u_{i_0+1}^{n+1} \leq u_{i_0}^{n+1} \text{ et } u_{i_0-1}^{n+1} \leq u_{i_0}^{n+1}.$$

Sous la condition $\alpha - \lambda < 0 \implies \frac{k}{2h} < \frac{\varepsilon k}{h^2}$,

$$(\alpha - \lambda) u_{i_0+1}^{n+1} \geq (\alpha - \lambda) u_{i_0}^{n+1} \text{ et } (-\alpha - \lambda) u_{i_0-1}^{n+1} \geq (-\alpha - \lambda) u_{i_0}^{n+1}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} u_{i_0}^n &\geq [(1 + 2\lambda) + (\alpha - \lambda) + (-\alpha - \lambda)] u_{i_0}^{n+1} \\ &\geq u_{i_0}^{n+1} = \max_{1 \leq i \leq N} u_i^{n+1} \\ &\implies \max_{1 \leq j \leq N} u_j^n \geq \max_{1 \leq j \leq N} u_j^{n+1}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

De même, on peut montrer que

$$\min_{1 \leq j \leq N} u_j^n \leq \min_{1 \leq j \leq N} u_j^{n+1}. \tag{2.60}$$

De (2.59) et (2.60), on a

$$\begin{aligned} &\implies \max_{1 \leq j \leq N} |u_j^n| \geq \max_{1 \leq j \leq N} |u_j^{n+1}| \\ &\implies \|u^n\|_\infty \geq \|u^{n+1}\|_\infty. \end{aligned}$$

Par récurrence,

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty.$$

Le schéma est stable au sens L_∞ si $\frac{k}{2h} < \frac{\varepsilon k}{h^2} \implies \frac{1}{2} < \frac{\varepsilon}{h}$.

Chapitre 3

Méthode de différences finies pour EDP

Définition 3.1. Une équation aux dérivées partielles (EDP) d'ordre 2 linéaire est une relation entre la fonction $u(x, y)$ et ses dérivées partielles de type

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \quad (3.1)$$

où a, b, c, d, e, f et g sont en fonction de x et y .

3.1 Types d'EDP

Il existe une classification des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre. Considérons par exemple une EDP écrite sous la forme (3.1). L'appellation 'hyperbolique', 'parabolique' et 'elliptique' d'une EDP correspond à la nature de la conique d'écrite par l'équation caractéristique correspondante, c'est-à-dire

1. Si $b^2 - ac > 0$ dans un domaine D l'équation est dite hyperbolique.
2. Si $b^2 - ac = 0$ l'équation est dite parabolique.
3. Si $b^2 - ac < 0$ l'équation est dite elliptique.

Exemple 3.1.

1. *Equation elliptique, modèle stationnaire : Equation de Laplace*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{sur } \Omega, \\ + \text{ conditions aux limites.} \end{cases}$$

2. *Equation parabolique, modèle instationnaire : Equation de la chaleur*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_*^+, \\ + \text{ conditions aux limites + conditions initiales.} \end{cases}$$

3. *Equation hyperbolique : Equation d'ondes*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f, & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_*^+, \\ + \text{ conditions aux limites + conditions initiales.} \end{cases}$$

3.2 Discrétisation du domaine

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d ($d = 2$) où $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω .

On considère Ω un domaine rectangulaire $\Omega = (0, a) \times (0, b)$.

Soient deux entières N et P qui permettent de définir les paramètres de discrétisation :

$$h = \frac{a}{N+1} \text{ et } k = \frac{b}{P+1} \text{ on notera } h_{xy} = \max(h, k).$$

En introduit les points $p_{ij} = (x_i, y_j)$ de $\bar{\Omega}$ avec

$$x_i = ih, \quad i = 0, \dots, N+1; \quad y_j = jk, \quad j = 0, \dots, P+1.$$

Ces points appelés aussi noeuds définissent un maillage du domaine $\bar{\Omega}$. plus précisément on définit Ω_h le maillage intérieur à Ω par

$$\Omega_h = \{P_{ij} = (x_i, y_j), \quad i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, P\}.$$

On désignera par Γ_h les points du maillage complet $\bar{\Omega}$ qui sont le bord $\partial\Omega$

$$\Gamma_h = \{P_{ij} = (x_i, y_j), \text{ avec } i = 0 \text{ ou } N+1 \text{ et } j = 0, \dots, P+1; \quad j = 0 \text{ ou } P+1 \text{ et } i = 0, \dots, N+1\}.$$

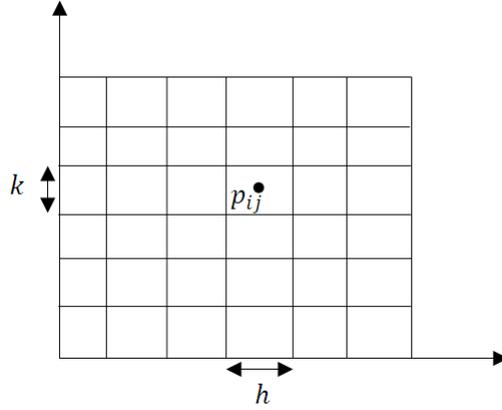


FIGURE 3.1 – Domaine discret en dimension 2.

On effectuant les développements de Taylor de $u(x, y)$ (comme en dimension 1) dans les deux directions

$$u(x_i + h, y_j) = u(x_i, y_j) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + o(h^3),$$

$$u(x_i - h, y_j) = u(x_i, y_j) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + o(h^3).$$

La soustraction donne

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + o(h^2). \quad (3.2)$$

Pour la direction y

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + o(k^2), \quad (3.3)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + o(h^2), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + o(k^2). \quad (3.5)$$

3.2.1 Dérivée croisée

Déterminons une approximation de la dérivée $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ de la fonction $u(x, y)$.

Soient h le pas suivant la direction x et k le pas suivant la direction y .

Le principe est toujours basé sur les développements de Taylor

$$\begin{aligned} u(x_i + h, y_j + k) &\simeq u(x_i, y_j) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + k \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \\ &\quad + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) + hk \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j). \end{aligned}$$

Alors, au voisinage du point (i, j) , on a

$$u_{i+1,j+1} \simeq u_{i,j} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + k \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \right)_{i,j} + \frac{k^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \right)_{i,j} + hk \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j}, \quad (3.6)$$

$$u_{i-1,j-1} \simeq u_{i,j} - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} - k \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \right)_{i,j} + \frac{k^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \right)_{i,j} + hk \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j}, \quad (3.7)$$

$$u_{i+1,j-1} \simeq u_{i,j} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} - k \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \right)_{i,j} + \frac{k^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \right)_{i,j} - hk \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j}, \quad (3.8)$$

$$u_{i-1,j+1} \simeq u_{i,j} - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + k \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \right)_{i,j} + \frac{k^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \right)_{i,j} - hk \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j}, \quad (3.9)$$

Effectuant une combinaison linéaire des équations : (3.6)+(3.7)-(3.8)-(3.9), nous obtenons une approximation de la dérivée croisée à l'ordre 1

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} \simeq \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4hk}. \quad (3.10)$$

3.2.2 Discrétisation de l'équation de la chaleur 2D stationnaire

Considérons le problème bidimensionnel stationnaire de la conduction de la chaleur dans un domaine rectangulaire $[0, L_x] \times [0, L_y]$. Le champ de température $T(x, y)$ vérifie l'équation de Laplace

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in]0, L_x[\times]0, L_y[, \\ T(0, y) = T_g \text{ et } T(L_x, y) = T_d, & 0 < y < L_y, \\ T(x, 0) = T_b \text{ et } T(x, L_y) = T_h, & 0 < x < L_x. \end{cases} \quad (3.11)$$

$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ opérateur de Laplace en deux dimensions.

Le domaine de calcul est discrétisé en $(N + 2) \times (P + 2)$ nœuds (i variant de 0 à $N + 1$ et j variant de 0 à $P + 1$).

On supposera que les pas d'espace dans chaque direction h et k sont constants. La température discrète au nœuds (x_i, y_j) sera noté $T_{i,j}$.

Nous utilisons un schéma centré d'ordre 2 pour les approximations des dérivées seconds en espace

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, y_j) &= \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x_i, y_j) &= \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{k^2}. \end{aligned}$$

La formulation discrétisée est alors, pour i variant de 1 à N et j de 1 à P

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{k^2} = 0.$$

Multiplions par (k^2h^2) , on obtient

$$k^2 (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) + h^2 (T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) - 2 (h^2 + k^2) T_{i,j} = 0.$$

Discrétisation des conditions aux limites

$$T(0, y) = T_g \implies T_{0,j} = T_g, \quad j = 1, \dots, P,$$

$$T(L_x, y) = T_d \implies T_{N+1,j} = T_d, \quad j = 1, \dots, P,$$

$$T(x, 0) = T_b \implies T_{i,0} = T_b, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$T(x, L_y) = T_h \implies T_{i,P+1} = T_h, \quad i = 1, \dots, N.$$

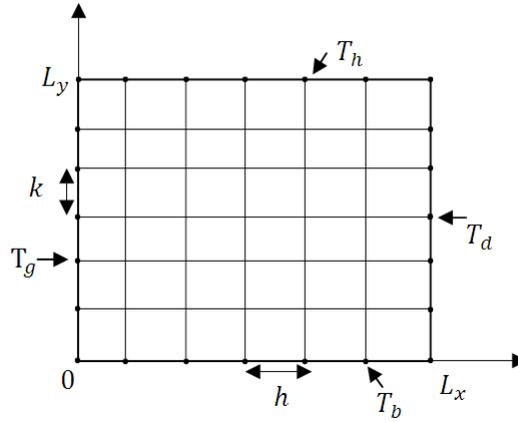


FIGURE 3.2 – Présentation des conditions aux limites en dimension 2.

Soit sous forme matricielle, pour $N = P = 4$, en posant $A = h^2 + k^2$:

$$i = 1 : j = 1 : k^2 (T_{2,1} + T_{0,1}) + h^2 (T_{1,2} + T_{1,0}) - 2 (h^2 + k^2) T_{1,1} = 0,$$

$$j = 2 : k^2 (T_{2,2} + T_{0,2}) + h^2 (T_{1,3} + T_{1,1}) - 2 (h^2 + k^2) T_{1,2} = 0,$$

$$j = 3 : k^2 (T_{2,3} + T_{0,3}) + h^2 (T_{1,4} + T_{1,2}) - 2 (h^2 + k^2) T_{1,3} = 0,$$

$$j = 4 : k^2 (T_{2,4} + T_{0,4}) + h^2 (T_{1,5} + T_{1,3}) - 2 (h^2 + k^2) T_{1,4} = 0,$$

$$i = 2 : j = 1 : k^2 (T_{3,1} + T_{1,1}) + h^2 (T_{2,2} + T_{2,0}) - 2 (h^2 + k^2) T_{2,1} = 0,$$

$$j = 2 : k^2 (T_{3,2} + T_{1,2}) + h^2 (T_{2,3} + T_{2,1}) - 2 (h^2 + k^2) T_{2,2} = 0,$$

$$j = 3 : k^2 (T_{3,3} + T_{1,3}) + h^2 (T_{2,4} + T_{2,2}) - 2 (h^2 + k^2) T_{2,3} = 0,$$

$$j = 4 : k^2 (T_{3,4} + T_{1,4}) + h^2 (T_{2,5} + T_{2,3}) - 2 (h^2 + k^2) T_{2,4} = 0,$$

$$\begin{aligned}
i = 3 : j = 1 : k^2 (T_{4,1} + T_{2,1}) + h^2 (T_{3,2} + T_{3,0}) - 2 (h^2 + k^2) T_{3,1} &= 0, \\
j = 2 : k^2 (T_{4,2} + T_{2,2}) + h^2 (T_{3,3} + T_{3,1}) - 2 (h^2 + k^2) T_{3,2} &= 0, \\
j = 3 : k^2 (T_{4,3} + T_{2,3}) + h^2 (T_{3,4} + T_{3,2}) - 2 (h^2 + k^2) T_{3,3} &= 0, \\
j = 4 : k^2 (T_{4,4} + T_{2,4}) + h^2 (T_{3,5} + T_{3,3}) - 2 (h^2 + k^2) T_{3,4} &= 0, \\
i = 4 : j = 1 : k^2 (T_{5,1} + T_{3,1}) + h^2 (T_{4,2} + T_{4,0}) - 2 (h^2 + k^2) T_{4,1} &= 0, \\
j = 2 : k^2 (T_{5,2} + T_{3,2}) + h^2 (T_{4,3} + T_{4,1}) - 2 (h^2 + k^2) T_{4,2} &= 0, \\
j = 3 : k^2 (T_{5,3} + T_{3,3}) + h^2 (T_{4,4} + T_{4,2}) - 2 (h^2 + k^2) T_{4,3} &= 0, \\
j = 4 : k^2 (T_{5,4} + T_{3,4}) + h^2 (T_{4,5} + T_{4,3}) - 2 (h^2 + k^2) T_{4,4} &= 0.
\end{aligned}$$

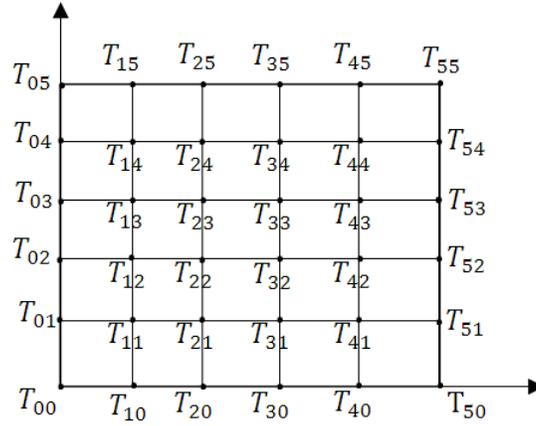


FIGURE 3.3 – Présentation des $T_{i,j}$ sur le domaine discret.

Pour les conditions aux limites, on a

$$T_{0,j} = T_g, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$$T_{5,j} = T_d, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$$T_{i,0} = T_b, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$T_{i,5} = T_h, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Finalement, on peut écrire le système sous une forme matricielle comme suite

$$\begin{bmatrix}
-2A & h^2 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
h^2 & -2A & h^2 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & h^2 & -2A & h^2 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & h^2 & -2A & 0 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k^2 & 0 & 0 & 0 & -2A & h^2 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & k^2 & 0 & 0 & h^2 & -2A & h^2 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & h^2 & -2A & h^2 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & h^2 & -2A & 0 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & -2A & h^2 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & h^2 & -2A & h^2 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & h^2 & -2A & 0 & 0 & 0 & k^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & -2A & h^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & h^2 & -2A & h^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & h^2 & -2A & h^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & h^2 & -2A
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
T_{1,1} \\
T_{1,2} \\
T_{1,3} \\
T_{1,4} \\
T_{2,1} \\
T_{2,2} \\
T_{2,3} \\
T_{2,4} \\
T_{3,1} \\
T_{3,2} \\
T_{3,3} \\
T_{3,4} \\
T_{4,1} \\
T_{4,2} \\
T_{4,3} \\
T_{4,4}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-k^2T_g - h^2T_b \\
-k^2T_g \\
-k^2T_g \\
-k^2T_g - h^2T_h \\
-h^2T_b \\
0 \\
0 \\
-h^2T_h \\
-h^2T_b \\
0 \\
0 \\
-h^2T_h \\
-k^2T_d - h^2T_b \\
-k^2T_d \\
-k^2T_d \\
-k^2T_d - h^2T_h
\end{bmatrix}$$

3.3 Etude d'un problème elliptique en 2D

Soit $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. On se propose d'étudier un schéma numérique pour le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) + \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.12)$$

où $\alpha > 0$ est un réel donné et $f \in C(\bar{\Omega})$ est donné. On note u la solution exacte de (3.12) et on suppose que $u \in C^4(\bar{\Omega})$.

3.3.1 Discrétisation du domaine

Soit $N \in \mathbb{N}$, on note $h = \frac{1}{N+1}$ et la valeur approchée de $u(ih, jh)$, $(i, j) \in 0, 1, \dots, N+1$. On pose $f_{i,j} = f(ih, jh)$. On cherche à approcher la solution de (3.12) par une méthode de différences finies en utilisant les approximations centrées.

D'après les développements de Taylor (3.2),(3.4) et (3.5), on a

$$-\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} + \alpha \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = f_{i,j}, \quad i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, N.$$

Alors, nous avons le problème discret suivant

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{\alpha}{2h} \right) u_{i+1,j} + \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{\alpha}{2h} \right) u_{i-1,j} + \frac{4}{h^2} u_{i,j} - \frac{1}{h^2} u_{i,j+1} - \frac{1}{h^2} u_{i,j-1} = f_{i,j}, & i, j = 1, \dots, N, \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

3.3.2 Etude de la consistance

Comme $u \in C^4(\bar{\Omega})$. On utilise les développements de Taylor suivant

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} &= u_{i,j} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{i,j}, \\ u_{i-1,j} &= u_{i,j} - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{i,j}, \end{aligned}$$

tel que $x_i < \xi_i < x_{i+1}$ et $x_{i-1} < \xi_{i-1} < x_i$.

En sommant

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_{i-1}, y_j) \right). \quad (3.14)$$

Pour $\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)$:

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} &= u_{i,j} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) (\mu_i, y_j), \quad x_i < \mu_i < x_{i+1}, \\ u_{i-1,j} &= u_{i,j} - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) (\mu_{i-1}, y_j), \quad x_{i-1} < \mu_{i-1} < x_i. \end{aligned}$$

La soustraction donne

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{h^2}{2 \times 3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\mu_i, y_j) - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\mu_{i-1}, y_j) \right). \quad (3.15)$$

Pour $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} + \frac{h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(\theta_i, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(\theta_{i-1}, y_j) \right), \quad (3.16)$$

tel que $y_i < \theta_i < y_{i+1}$ et $y_{i-1} < \theta_{i-1} < y_i$.

Alors, d'après (3.14), (3.15) et (3.16), l'erreur de consistance est donné par

$$\begin{aligned} R_{i,j} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \\ &\quad + \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) - \alpha \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \\ &= \frac{h^2}{24} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_{i-1}, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(\theta_i, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(\theta_{i-1}, y_j) \right] \\ &\quad + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\mu_i, y_j) - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\mu_{i-1}, y_j) \right] \\ \implies |R_{i,j}| &\leq \frac{h^2}{12} \left\{ \max_{[0,1] \times [0,1]} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) \right| + \max_{[0,1] \times [0,1]} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y) \right| + 2\alpha \max_{[0,1] \times [0,1]} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) \right| \right\} \\ \implies \|R\|_\infty &\leq Ch^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

$$\text{où } C = \frac{1}{12} \left\{ \max_{[0,1] \times [0,1]} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) \right| + \max_{[0,1] \times [0,1]} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y) \right| + 2\alpha \max_{[0,1] \times [0,1]} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) \right| \right\}.$$

Alors, le schéma est consistant d'ordre 2.

3.4 Principe du maximum discret

Proposition 3.1. Dans le schéma (3.13) si $\frac{1}{h^2} - \frac{\alpha}{2h} \geq 0$ et $\omega_{i,j}$ vérifie

$$\left(-\frac{1}{h^2} + \frac{\alpha}{2h} \right) \omega_{i+1,j} + \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{\alpha}{2h} \right) \omega_{i-1,j} + \frac{4}{h^2} \omega_{i,j} - \frac{1}{h^2} \omega_{i,j+1} - \frac{1}{h^2} \omega_{i,j-1} \leq 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Alors,

$$\omega_{i,j} \leq \max_{n,m \in \gamma} (\omega_{n,m}), \quad \forall i, j = 1, \dots, N,$$

où : $\gamma = \{i \in \{0, N+1\} \text{ ou } j \in \{0, N+1\}\} = \text{les points de la frontière de } \Omega_h.$

Démonstration. La famille $\omega_{i,j}$, $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$ vérifie

$$\frac{1}{h^2} (\omega_{i,j} - \omega_{i,j+1}) + \frac{1}{h^2} (\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1}) + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{\alpha}{2h} \right) (\omega_{i,j} - \omega_{i-1,j}) + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\alpha}{2h} \right) (\omega_{i,j} - \omega_{i+1,j}) \leq 0.$$

On pose $M = \max \{ \omega_{i,j} / (i, j) \in \{0, \dots, N+1\}^2 \}$ et $m = \max \{ \omega_{i,j} / (i, j) \in \gamma \}$.

On a bien sur que $m \leq M$, il reste à montrer que $M \leq m$. Soit $A = \{ (i, j) \in \{0, \dots, N+1\}^2, \omega_{i,j} = M \}$ et soient $(\bar{i}, \bar{j}) \in A$ tel que

$$\bar{i} = \max \{ i / (i, j) \in A \} \quad \text{et} \quad \bar{j} = \{ j / (\bar{i}, j) \in A \}.$$

On distingue deux cas :

1. Si $\bar{i} = 0, N+1$ ou $\bar{j} = 0, N+1$, on a alors $(\bar{i}, \bar{j}) \in \gamma$ et donc $M = \omega_{\bar{i}, \bar{j}} \leq m$.
2. Si non, on a $\bar{i} \notin \{0, N+1\}$ et $\bar{j} \notin \{0, N+1\}$ et donc $(\bar{i}, \bar{j}) \in \{1, \dots, N\}^2$, on en déduit que

$$\frac{1}{h^2} (\omega_{\bar{i}, \bar{j}} - \omega_{\bar{i}, \bar{j}+1}) + \frac{1}{h^2} (\omega_{\bar{i}, \bar{j}} - \omega_{\bar{i}, \bar{j}-1}) + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{\alpha}{2h} \right) (\omega_{\bar{i}, \bar{j}} - \omega_{\bar{i}-1, \bar{j}}) + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\alpha}{2h} \right) (\omega_{\bar{i}, \bar{j}} - \omega_{\bar{i}+1, \bar{j}}) \leq 0,$$

ce qui est impossible car $M = \omega_{\bar{i}, \bar{j}}$ et donc $(\omega_{\bar{i}, \bar{j}} - \omega_{\bar{i}, \bar{j}+1}) \geq 0$, $(\omega_{\bar{i}, \bar{j}} - \omega_{\bar{i}, \bar{j}-1}) \geq 0$, $(\omega_{\bar{i}, \bar{j}} - \omega_{\bar{i}-1, \bar{j}}) \geq 0$ et $(\omega_{\bar{i}, \bar{j}} - \omega_{\bar{i}+1, \bar{j}}) \geq 0$.

On a donc bien montré que $M \leq m$, c'est-à-dire

$$\omega_{i,j} \leq \max_{n,m \in \gamma} (\omega_{n,m}), \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

□

3.5 La stabilité

Proposition 3.2. *Le schéma (3.13) est stable au sens*

$$\|u\|_{\infty} \leq C \|f\|_{\infty},$$

sous la condition $\frac{1}{h^2} - \frac{\alpha}{2h} \geq 0$.

Démonstration. Soit la fonction ϕ telle que $\phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2$, la fonction ϕ vérifie

$$\phi_x = 0, \phi_y = y, \phi_{yy} = 1,$$

et donc

$$-\Delta\phi + \alpha \frac{\partial\phi}{\partial x} = -1.$$

On pose maintenant $\phi_{i,j} = \phi(ih, jh)$ pour $(i, j) \in \{0, \dots, N+1\}^2$ (noté que ϕ ne vérifie pas la condition $\phi_{i,j} = 0$ si $(i, j) \in \gamma$).

Comme $\phi_{xx} = \phi_{xxx} = \phi_{xxxx} = \phi_{yyy} = \phi_{yyyy} = 0$,

$$\frac{4}{h^2}\phi_{i,j} + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{\alpha}{2h}\right)\phi_{i+1,j} + \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{\alpha}{2h}\right)\phi_{i-1,j} - \frac{1}{h^2}\phi_{i,j+1} - \frac{1}{h^2}\phi_{i,j-1} = -1, \text{ pour } (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2.$$

En posant $\omega_{i,j} = u_{i,j} + c\phi_{i,j}$, pour $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$ (et u la solution de (3.13)), on a donc

$$\frac{4}{h^2}\omega_{i,j} + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{\alpha}{2h}\right)\omega_{i+1,j} + \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{\alpha}{2h}\right)\omega_{i-1,j} - \frac{1}{h^2}\omega_{i,j+1} - \frac{1}{h^2}\omega_{i,j-1} = f_{i,j} - c.$$

On prend $c = \|f\|_\infty$ de sorte que $f_{i,j} - c \leq 0$ pour tout (i, j) , de la proposition 3.1, pour $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$

$$\omega_{i,j} \leq \max\{\omega_{k,l}; k, l \in \gamma\} \leq \frac{c}{2},$$

car $u_{i,j} = 0$ sur γ et $\max_\Omega \phi = \frac{1}{2}$, on en déduit pour $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$

$$\omega_{i,j} \leq \frac{c}{2} = \frac{1}{2}\|f\|_\infty \implies u_{i,j} \leq \frac{\|f\|_\infty}{2} \quad (3.17)$$

pour montrer que $-\omega_{i,j} \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty$, on prend maintenant $\omega_{i,j} = c\phi_{i,j} - u_{i,j}$ pour $(i, j) \in \{0, \dots, N+1\}^2$ avec $c = \|f\|_\infty$. On a donc

$$\frac{4}{h^2}\omega_{i,j} + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{\alpha}{2h}\right)\omega_{i+1,j} + \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{\alpha}{2h}\right)\omega_{i-1,j} - \frac{1}{h^2}\omega_{i,j+1} - \frac{1}{h^2}\omega_{i,j-1} = -c - f_{i,j} \leq 0,$$

$\forall i, j \in \{1, \dots, N\}^2$.

Ici encore, avec la condition $h \leq \frac{2}{\alpha}$, la proposition 3.1 donne

$$\omega_{i,j} \leq \max\{\omega_{k,l}; k, l \in \gamma\} = \frac{c}{2}. \quad (3.18)$$

Donc, $u_{i,j} \geq -\frac{c}{2} = -\frac{\|f\|_\infty}{2}$ pour $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$, alors

$$\|u\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{2}.$$

□

3.6 La convergence

Pour $i, j \in \{0, \dots, N + 1\}^2$, on pose

$$e_{i,j} = u(ih, jh) - u_{i,j},$$

on a donc, de (3.14), (3.15) et (3.16)

$$\frac{4}{h^2}e_{i,j} + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{\alpha}{2h}\right)e_{i+1,j} + \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{\alpha}{2h}\right)e_{i-1,j} - \frac{1}{h^2}e_{i,j+1} - \frac{1}{h^2}e_{i,j-1} = R_{i,j}; \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Sous la condition de la proposition 3.2 ($\frac{1}{h^2} - \frac{\alpha}{2h} \geq 0$), on a

$$\max \left\{ |e_{i,j}|; (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2 \right\} \leq \frac{1}{2}Ch^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Alors, le schéma est convergent.

3.7 Exemple numérique

Considérons le problème de la chaleur 2D (3.11), pour $L_x = 1$ et $L_y = 2$, avec les conditions aux limites : $T_g = 0$, $T_d = 0$, $T_h = 0$ et $T_b = 200$. Les résultats numériques obtenus à l'aide d'un code numérique en utilisant de langage MATLAB :

```
L=2;           % Longueur suivant la direction x.
W=1;           % Longueur suivant la direction y.
N=20;          % Nombre de points de discrétisation suivant x.
M=20;          % Nombre de points de discrétisation suivant y.
dx=L/(N-1);    % Le pas de discrétisation suivant x.
dy=W/(M-1);    % Le pas de discrétisation suivant y.
x=0:dx:L;
y=0:dy:W;
K=M*N;
Z=zeros(K,K);  % Initiation de la matrice.
z=ones(K,1);
Dx=spdiags(z,1,Z); % remplace la diagonale supérieure de Z par 1.
Dx=spdiags(-z,-1,Dx); % remplace la diagonale inférieure de Z par -1.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% La matrice de l'opérateur d^2/dx^2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D2x=spdiags(z,1,Z);
D2x=spdiags(z,-1,D2x);
D2x=spdiags(-2*z,0,D2x);
```

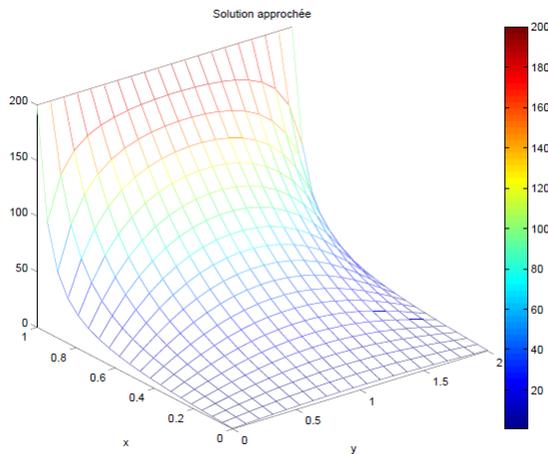
```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Dy=spdiags(z,1,Z);
Dy=spdiags(-z,-1,Dy);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D2y=spdiags(z,N,Z);
D2y=spdiags(z,-N,D2y);
D2y=spdiags(-2*z,0,D2y);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% les conditions aux limites de Direchlet %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for m=1:M-1
    Dx(m*N,m*N+1)=0;
    Dx(m*N+1,m*N)=0;
    D2x(m*N,m*N+1)=0;
    D2x(m*N+1,m*N)=0;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% L'opérateur d^2/dx^2+d^2/dy^2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D=D2x+D2y;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Les conditions aux limites de Neumann %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
BC=zeros(K,1);
for n=0:N-1
    BC(K-n)=200;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% La matrice finale %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for n=0:N-1
    D(K-n,:)=0;
    D(K-n,K-n)=1;
end

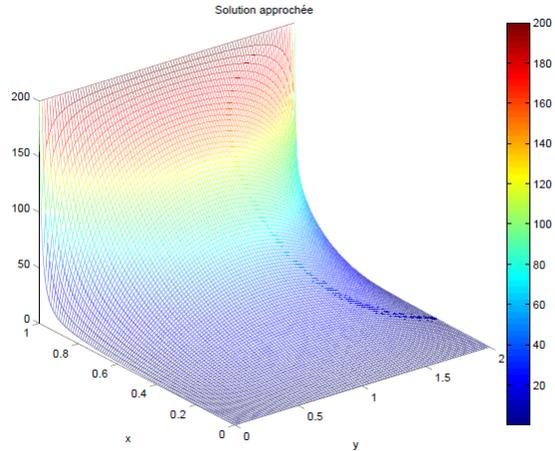
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Solution du système %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
F=D\BC;
Fxy=vec2mat(F,N);
figure(40);mesh(x,y,Fxy);
grid
xlabel('y')
ylabel('x')
title('Solution approchée')
colorbar
print -dpdf Figure-40.pdf
open Figure-40.pdf

```

Les figures suivantes représentent les résultats numériques obtenus pour deux valeurs différentes de discrétisation, Ces résultats montrent la réalisation du principe de maximum démontré dans le paragraphe 3.4.



Solution numérique pour $N_x = N_y = 20$.



Solution numérique pour $N_x = N_y = 100$.

3.8 Exercices

Exercice 3.1. Soit le problème suivant

$$\begin{cases} y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2, & (x, y) \in \Omega =]0, 1[^2, \\ u = 0. & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

1. Donner une discrétisation par différences finies centré de ce problème en utilisant un maillage uniforme.
2. Ecrire le système obtenu pour $N = 3$, puis donner la forme matricielle.

Exercice 3.2. On considère le problème en dimension deux suivant

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in]0, L[\times]0, L[, \\ u(x, 0) = u(x, L) = u(0, y) = u(L, y) = 0. \end{cases}$$

On suppose que la solution $u(x, y)$ est suffisamment régulière. On cherche à approcher cette solution par une méthode de différences finies. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = \frac{1}{N+1}$. On note $u_{i,j}$ la valeur approchée recherchée de u au point (ih, jh) pour $i, j = 0, \dots, N+1$.

1. Donner une discrétisation par différences finies de ce problème en utilisant le schéma centré.
2. Donner l'ordre de consistance de ce schéma.
3. Quel est le principe du maximum de ce schéma.

4. Montrer que $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}y^2$ est une solution exacte de l'équation

$$-\Delta u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -1.$$

5. Montrer que le schéma est stable au sens $\|u\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ sous la condition $\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} \geq 0$.

Exercice 3.3. On considère le problème en dimension 2 suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = 0, & \text{sur }]0, 1[\times]0, 1[\times]0, T[, \\ T(t, 0, y) = T(t, x, 0) = T(t, 1, y) = T(t, x, 1) = 0, \\ T(0, x, y) = T_0(x, y). \end{cases}$$

On suppose que la solution $T(t, x, y)$ est suffisamment régulière. On cherche à approcher cette solution par une méthode de différences finies. Soit $N, M \in (\mathbb{N}^*)^2$, $h = \frac{1}{N+1}$ et $k = \frac{T}{M}$. On note $T_{i,j}^n$ la valeur approchée recherchée de T au point (nk, ih, jh) pour $i, j = 0, \dots, N+1$; $k = 0, \dots, M$.

1. Donner une discrétisation par différences finies en utilisant le schéma d'Euler explicite en temps.
2. Ecrire la forme matricielle pour $N = 3$.
3. Montrer que le schéma obtenu est consistant et donner une majoration de l'erreur de consistance.
4. Montrer que ce schéma est stable et sous quelle condition.

3.9 Corrigé des exercices

Corrigé de l'exercice 3.1

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = \frac{1}{N+1}$,

$$\Omega_h = \{(x_i, y_j) = (ih, jh) / i, j = 0, \dots, N+1\}.$$

D'après les développements de Taylor, on peut écrire les approximations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + o(h^2), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} + o(h^2). \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$jh \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} - ih \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} = (ih)^2 + (jh)^2, \quad i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, N.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{j}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) - \frac{i}{2}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) = h^2(i+j), & i, j = 1, \dots, N. \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0 \end{cases}$$

2- Pour $N = 3$, on obtient le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1 : \quad j = 1 : \quad \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{0,1}) - \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{1,0}) = 2h^2, \\ \quad \quad \quad j = 2 : \quad \frac{2}{2}(u_{2,2} - u_{0,2}) - \frac{1}{2}(u_{1,3} - u_{1,1}) = 5h^2, \\ \quad \quad \quad j = 3 : \quad \frac{3}{2}(u_{2,3} - u_{0,3}) - \frac{1}{2}(u_{1,4} - u_{1,2}) = 10h^2, \\ i = 2 : \quad j = 1 : \quad \frac{1}{2}(u_{3,1} - u_{1,1}) - \frac{2}{2}(u_{2,2} - u_{2,0}) = 5h^2, \\ \quad \quad \quad j = 2 : \quad \frac{2}{2}(u_{3,2} - u_{1,2}) - \frac{2}{2}(u_{2,3} - u_{2,1}) = 8h^2, \\ \quad \quad \quad j = 3 : \quad \frac{3}{2}(u_{3,3} - u_{1,3}) - \frac{2}{2}(u_{2,4} - u_{2,2}) = 13h^2, \\ i = 3 : \quad j = 1 : \quad \frac{1}{2}(u_{4,1} - u_{2,1}) - \frac{3}{2}(u_{3,2} - u_{3,0}) = 10h^2, \\ \quad \quad \quad j = 2 : \quad \frac{2}{2}(u_{4,2} - u_{2,2}) - \frac{3}{2}(u_{3,3} - u_{3,1}) = 13h^2, \\ \quad \quad \quad j = 3 : \quad \frac{3}{2}(u_{4,3} - u_{2,3}) - \frac{3}{2}(u_{3,4} - u_{3,2}) = 18h^2. \end{array} \right.$$

Finalement, on peut écrire ce système sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{2} & 0 & \frac{2}{2} & 0 & -\frac{2}{2} & 0 & \frac{2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{2}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{3,1} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h^2 \\ 5h^2 \\ 10h^2 \\ 5h^2 \\ 8h^2 \\ 13h^2 \\ 10h^2 \\ 13h^2 \\ 18h^2 \end{bmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 3.2

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = \frac{L}{N+1}$,

$$\Omega_h = \{(x_i, y_j) = (ih, jh) / i, j = 0, \dots, N+1\}.$$

1. On a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + o(h^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} + o(h^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{h^2} + o(h^2).$$

Alors, l'équation discrète est donner par

$$\begin{cases} -\frac{(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})}{h^2} - \frac{(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})}{h^2} - \frac{(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})}{2h} = 0, & i, j = 1, \dots, N, \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0. & i, j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.19)$$

2. L'erreur de consistance :

$$\begin{aligned} R_{i,j} = & -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(x_i, y_j) + \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}\right) \\ & + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) - \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{h^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

D'après les développements de Taylor (voir le cours), on a

$$\begin{aligned} R_{i,j} = & \frac{h^2}{24} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_{i-1}, y_j) \right] + \frac{h^2}{24} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \theta_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \theta_{j-1}) \right] \\ & + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\mu_i, y_j) - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\mu_{i-1}, y_j) \right] \\ \implies |R_{i,j}| \leq & \frac{h^2}{12} \left\{ \max_{[0,L] \times [0,L]} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) \right| + \max_{[0,L] \times [0,L]} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y) \right| + 2 \max_{[0,L] \times [0,L]} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) \right| \right\} \\ \implies \|R\|_\infty \leq & Ch^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

$$\text{où } C = \frac{1}{12} \left\{ \max_{[0,L] \times [0,L]} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) \right| + \max_{[0,L] \times [0,L]} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y) \right| + 2 \max_{[0,L] \times [0,L]} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) \right| \right\}.$$

Alors, le schéma est consistant d'ordre 2.

3. Le principe de maximum :

Le problème (3.19) satisfait le principe du maximum si $f_{i,j} \leq 0$ ($-(x^2 + y^2) \leq 0$), $\forall x, y \in]0, L[\times]0, L[$.

Alors, si $\omega_{i,j}$ solution de (3.19), on a

$$\omega_{i,j} \leq \max_{l,m \in \gamma} \{\omega_{l,m}\}, \quad \forall i, j \in \{0, \dots, N+1\},$$

tel que $\gamma = \{l \in \{0, N+1\} \text{ ou } m \in \{0, N+1\}\} =$ les points de la frontière

sous la condition $\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} \geq 0$, (voir le cours).

4. $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}y^2$, satisfait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 1,$$

alors, φ vérifier

$$-\Delta\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -1.$$

5. Pour la stabilité voir la proposition 3.1.

Corrigé de l'exercice 3.3

1. D'après les développements de Taylor, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{i,j}^n &= \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{k} + o(k), \\ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j}^n &= \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{h^2} + o(h^2), \\ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{i,j}^n &= \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{h^2} + o(h^2), \end{aligned}$$

donc, l'équation discrète est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{k} - \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{h^2} - \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{h^2} &= 0, i, j = 1, \dots, N \\ T_{0,j}^n = T_{N+1,j}^n = T_{i,0}^n = T_{i,n+1}^n &= 0, \forall n = 1, \dots, M, \\ T_{i,j}^0 &= T_0(x_i, y_j), \forall i, j = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

2. La forme matricielle pour $N = 3$: D'abord, on a besoin d'écrire le système sous la forme suivante

$$\begin{cases} T_{i,j}^{n+1} = \left(1 - \frac{4k}{h^2}\right) T_{i,j}^n + \frac{k}{h^2} T_{i+1,j}^n + \frac{k}{h^2} T_{i-1,j}^n + \frac{k}{h^2} T_{i,j+1}^n + \frac{k}{h^2} T_{i,j-1}^n \\ T_{0,j}^n = T_{4,j}^n = T_{i,0}^n = T_{i,4}^n = 0, \forall n = 1, \dots, M; \forall i, j = 1, 2, 3, \\ T_{i,j}^0 = T_0(x_i, y_j), \forall i, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} i = 1 : \quad j = 1 : \quad T_{1,1}^{n+1} &= \left(1 - \frac{4k}{h^2}\right) T_{1,1}^n + \frac{k}{h^2} T_{2,1}^n + \frac{k}{h^2} T_{0,1}^n + \frac{k}{h^2} T_{1,2}^n + \frac{k}{h^2} T_{1,0}^n \\ j = 2 : \quad T_{1,2}^{n+1} &= \left(1 - \frac{4k}{h^2}\right) T_{1,2}^n + \frac{k}{h^2} T_{2,2}^n + \frac{k}{h^2} T_{0,2}^n + \frac{k}{h^2} T_{1,3}^n + \frac{k}{h^2} T_{1,1}^n \\ j = 3 : \quad T_{1,3}^{n+1} &= \left(1 - \frac{4k}{h^2}\right) T_{1,3}^n + \frac{k}{h^2} T_{2,3}^n + \frac{k}{h^2} T_{0,3}^n + \frac{k}{h^2} T_{1,4}^n + \frac{k}{h^2} T_{1,2}^n \\ i = 2 : \quad j = 1 : \quad T_{2,1}^{n+1} &= \left(1 - \frac{4k}{h^2}\right) T_{2,1}^n + \frac{k}{h^2} T_{3,1}^n + \frac{k}{h^2} T_{1,1}^n + \frac{k}{h^2} T_{2,2}^n + \frac{k}{h^2} T_{2,0}^n \\ j = 2 : \quad T_{2,2}^{n+1} &= \left(1 - \frac{4k}{h^2}\right) T_{2,2}^n + \frac{k}{h^2} T_{3,2}^n + \frac{k}{h^2} T_{1,2}^n + \frac{k}{h^2} T_{2,3}^n + \frac{k}{h^2} T_{2,1}^n \\ j = 3 : \quad T_{2,3}^{n+1} &= \left(1 - \frac{4k}{h^2}\right) T_{2,3}^n + \frac{k}{h^2} T_{3,3}^n + \frac{k}{h^2} T_{1,3}^n + \frac{k}{h^2} T_{2,4}^n + \frac{k}{h^2} T_{2,2}^n \\ i = 3 : \quad j = 1 : \quad T_{3,1}^{n+1} &= \left(1 - \frac{4k}{h^2}\right) T_{3,1}^n + \frac{k}{h^2} T_{4,1}^n + \frac{k}{h^2} T_{2,1}^n + \frac{k}{h^2} T_{3,2}^n + \frac{k}{h^2} T_{3,0}^n \\ j = 2 : \quad T_{3,2}^{n+1} &= \left(1 - \frac{4k}{h^2}\right) T_{3,2}^n + \frac{k}{h^2} T_{4,2}^n + \frac{k}{h^2} T_{2,2}^n + \frac{k}{h^2} T_{3,3}^n + \frac{k}{h^2} T_{3,1}^n \\ j = 3 : \quad T_{3,3}^{n+1} &= \left(1 - \frac{4k}{h^2}\right) T_{3,3}^n + \frac{k}{h^2} T_{4,3}^n + \frac{k}{h^2} T_{2,3}^n + \frac{k}{h^2} T_{3,4}^n + \frac{k}{h^2} T_{3,2}^n \end{aligned}$$

La forme matricielle $\lambda = \frac{k}{h^2}$

$$T^{n+1} = A_{h,k} T^n,$$

tels que

$$T^{n+1} = \left(T_{1,1}^{n+1}, T_{1,2}^{n+1}, T_{1,3}^{n+1}, T_{2,1}^{n+1}, T_{2,2}^{n+1}, T_{2,3}^{n+1}, T_{3,1}^{n+1}, T_{3,2}^{n+1}, T_{3,3}^{n+1} \right)^t,$$

$$A_{h,k} = \begin{bmatrix} (1-4\lambda) & \lambda & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (1-4\lambda) & \lambda & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & (1-4\lambda) & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & (1-4\lambda) & \lambda & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda & (1-4\lambda) & \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \lambda & (1-4\lambda) & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & (1-4\lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \lambda & (1-4\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \lambda & (1-4\lambda) \end{bmatrix}$$

et

$$T^n = \left(T_{1,1}^n, T_{1,2}^n, T_{1,3}^n, T_{2,1}^n, T_{2,2}^n, T_{2,3}^n, T_{3,1}^n, T_{3,2}^n, T_{3,3}^n \right)^t$$

3. Comme les exercices précédents on peut trouver une estimation de l'erreur de consistance

$$\begin{aligned} R_{i,j}^n &= \frac{k}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} (x_i, y_j, \theta_n) \\ &+ \frac{h^2}{24} \left[\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} (\xi_i, y_j, t_n) + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} (\xi_{i-1}, y_j, t_n) \right] + \frac{h^2}{24} \left[\frac{\partial^4 T}{\partial y^4} (x_i, \zeta_j, t_n) + \frac{\partial^4 T}{\partial y^4} (x_i, \zeta_{j-1}, t_n) \right] \\ \implies |R_{i,j}^n| &\leq \frac{h^2}{12} \left\{ \max_{[0,L] \times [0,L] \times [0,T]} \left| \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} (x, y, t) \right| + \max_{[0,L] \times [0,L] \times [0,T]} \left| \frac{\partial^4 T}{\partial y^4} (x, y, t) \right| \right\} \\ &+ \frac{k}{2} \max_{[0,L] \times [0,L] \times [0,T]} \left| \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} (x, y, t) \right| \\ \implies \|R\|_\infty &\leq C_1 h^2 + C_2 k \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0. \end{aligned}$$

Alors, le schéma est consistant d'ordre 2 pour l'espace et d'ordre 1 pour le temps.

4. La stabilité :

On a

$$T_{i,j}^{n+1} = \left(1 - \frac{4k}{h^2} \right) T_{i,j}^n + \frac{k}{h^2} (T_{i+1,j}^n + T_{i-1,j}^n + T_{i,j+1}^n + T_{i,j-1}^n).$$

Sous la condition $1 - \frac{4k}{h^2} \geq 0$, on a

$$\left| T_{i,j}^{n+1} \right| = \left(1 - \frac{4k}{h^2} \right) \left| T_{i,j}^n \right| + \frac{k}{h^2} (|T_{i+1,j}^n| + |T_{i-1,j}^n| + |T_{i,j+1}^n| + |T_{i,j-1}^n|).$$

Donc

$$\begin{aligned} |T_{i,j}^{n+1}| &\leq \max_{i,j} |T_{i,j}^n|, \quad \forall i, j \\ \max_{i,j} |T_{i,j}^{n+1}| &\leq \max_{i,j} |T_{i,j}^n| \\ \implies \|T^{n+1}\|_\infty &\leq \|T^n\|_\infty \leq \dots \leq \|T^0\|_\infty. \end{aligned}$$

Alors, le schéma est stable sous la condition $1 - \frac{4k}{h^2} \geq 0$ au sens L_∞ .

Chapitre 4

Introduction à la méthode des éléments finis

4.1 Introduction

La méthode des éléments finis consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres, par exemple, ses valeurs en certains points (les noeuds du maillage) [6], [9], [17], [10],[11] et [19].

Cette méthode est particulièrement bien adaptée aux problèmes d'équilibre. Elle permet de traiter des géométries complexes contrairement aux différences finies mais elle demande un grand coût de temps de calcul et de mémoire, .

4.2 Formulation variationnelle

Considérons le problème de Poisson en une dimension avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

Trouver une fonction u définie sur $[0, 1]$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

La présentation très succincte faite sur cet exemple simple a pour but de donner les idées de base et

ne constitue qu'une introduction à la méthodes des Eléments Finis. L'approche repose sur la méthode de Galerkin qui permet d'écrire le système différentiel sous forme variationnelle dans un espace de dimension finie.

Soit une fonction $v(x) \in C^1([0, 1])$. On peut écrire :

$$-\int_0^1 u''(x) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx. \quad (4.2)$$

La fonction v est appelée fonction test. Si on fait une intégration par parties dans le membre de gauche de cette égalité, on obtient :

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx - [u'(x) v(x)]_0^1 = \int_0^1 f(x) v(x) dx, \quad (4.3)$$

et si v est une fonction telle que $v(0) = v(1) = 0$, alors

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx. \quad (4.4)$$

Pour cela, nous considérons les espaces des fonctions suivants :

$$L^2(\Omega) = \left\{ u \in C^1(\Omega), \int_{\Omega} |u|^2 < \infty \right\}, \quad (\Omega \subset \mathbb{R}),$$

$$H_0^1 = \{ u \in L^2(\Omega), u' \in L^2(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

Définition 4.1. On appelle *formulation intégrale ou formulation variationnelle du problème*, le problème qui consiste à

Trouver une fonction u appartenant à l'espace $H_0^1(]0, 1[)$ telle que

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx, \quad \text{pour toute fonction } v \in H_0^1(]0, 1[). \quad (4.5)$$

Définition 4.2. Une solution de la forme variationnelle (4.5) s'appelle *solution faible du problème différentiel de départ*.

4.2.1 Conditions aux limites de Neumann

On considère maintenant le problème suivant où les conditions aux limites sont données par la valeur de la dérivée de l'inconnue u .

Trouver une fonction u définie sur $[0, 1]$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u'(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta. \end{cases} \quad (4.6)$$

La formulation intégrale pour ce type de problème diffère par la prise en compte des conditions aux limites. Nous reprenons la démarche qui permet d'écrire une formulation variationnelle. On suppose que u est une solution et on multiplie l'équation par une fonction test régulière v puis on intègre sur $[0, 1]$

$$-\int_0^1 u''(x) v(x) dx + \int_0^1 u(x) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx.$$

Après intégration par parties, on obtient

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx - [u'(x) v(x)]_0^1 + \int_0^1 u(x) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx + \int_0^1 u(x) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx + \beta v(1) - \alpha v(0), \quad (4.7)$$

puisque $u'(0) = \alpha$ et $u'(1) = \beta$. Ainsi, la condition aux limites de Neumann est directement prise en compte dans la formulation variationnelle, et il n'est pas nécessaire de l'inclure dans le choix de l'espace vectoriel de résolution. Pour que (4.7) soit définie, il suffit que u et v soient continues et C^1 par morceaux sur $[0, 1]$. On introduit donc l'espace

$$H^1 = \{u \in L^2([0, 1]), u' \in L^2([0, 1])\}.$$

Alors, la formulation variationnelle de ce problème devient

Trouver $u \in H^1(0, 1)$ telle que

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx + \int_0^1 u(x) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx + \beta v(1) - \alpha v(0), \quad \forall v \in H^1(0, 1). \quad (4.8)$$

Dans ce cas

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx + \int_0^1 u(x) v(x) dx,$$

$$L(v) = \int_0^1 f(x) v(x) dx + \beta v(1) - \alpha v(0).$$

4.3 Théorème de Lax-Milgram

D'abord, nous introduisons les notations suivantes : Si $u, v \in H_0^1(]0, 1[)$, on pose

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx,$$

$$L(v) = \int_0^1 f(x) v(x) dx.$$

Les applications a et L sont respectivement une forme bilinéaire continue et une forme linéaire continue sur $H_0^1(]0, 1[)$ et l'équation (4.5) est équivalente à

Trouver $u \in H_0^1(]0, 1[)$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(]0, 1[).$$

Le théorème de Lax-Milgram montre que ce problème abstrait admet une unique solution sous des conditions très générales.

On considère un espace de Hilbert V dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\|\cdot\|$. On introduit l'hypothèse suivante sur a

(H) La forme bilinéaire $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, i.e. il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que

$$a(u, v) \leq M \|u\| \cdot \|v\|, \quad \text{pour tout } u, v \in V$$

et coercive, i.e. il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad \text{pour tout } u \in V.$$

Théorème 4.1. (*Théorème de Lax-Milgram*) *Si la forme bilinéaire symétrique a satisfait (H) et si L est une application linéaire continue sur V , alors il existe un unique $u \in V$ tel que*

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

4.4 La méthode de Galerkin

On souhaite maintenant trouver une méthode pour calculer des solutions approchées d'un problème de Poisson. Comme nous souhaitons également pouvoir traiter des cas où la solution est peu régulière, nous allons en fait résoudre de façon approchée la formulation variationnelle. La formulation variationnelle que nous avons vues peut être mise sous la forme

Trouver une fonction u dans V , telle que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \text{pour tout } v \in V \tag{4.9}$$

où

- V est un espace vectoriel de fonctions,

- $(u, v) \mapsto a(u, v)$ est une forme bilinéaire sur $V \times V$,
- $v \mapsto \langle f, v \rangle$ est une forme linéaire sur V .

Dans le cas du problème de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes, l'espace vectoriel où l'on cherche la solution est $V = H_0^1(]0, 1[)$ et les formes a et $\langle f, \cdot \rangle$ sont définies par

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx, \quad \langle f, v \rangle = \int_0^1 f(x) v(x) dx. \quad (4.10)$$

L'espace de résolution V étant de dimension infinie, le principe de la méthode de Galerkin consiste à le remplacer par un espace vectoriel V_h de dimension finie et à résoudre le problème approché

Trouver une fonction u_h dans V_h telle que

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \text{pour toute fonction } v_h \in V_h. \quad (4.11)$$

Dans le cadre de ce cours, nous prendrons toujours des espaces $V_h \subset V$, on parle alors d'approximation conforme. Comme V_h est de dimension finie, la résolution de (4.11) se ramène en fait à la résolution d'un système linéaire. En effet, si on se donne une base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ de V_h , la solution recherchée peut se décomposer sur cette base selon

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x). \quad (4.12)$$

Résoudre (4.11) est alors équivalent à trouver un vecteur $U = (u_1, u_2, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$\begin{aligned} a\left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x), v_h\right) &= \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h, \\ \iff \sum_{j=1}^N a(\varphi_j(x), v_h) u_j &= \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h, \\ \iff \sum_{j=1}^N a(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) u_j &= \langle f, \varphi_i(x) \rangle, \quad \forall i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

puisque $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ est une base de V_h . En posant la matrice

$$A = (A_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad A_{i,j} = a(\varphi_j(x), \varphi_i(x))$$

et le vecteur

$$F = (F_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N, \quad F_i = \langle f, \varphi_i(x) \rangle,$$

c'est-à-dire résoudre le système linéaire

$$\begin{bmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a(\varphi_1, \varphi_N) & \cdots & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_N \rangle \end{bmatrix}$$

Sous forme matricielle on écrit ceci

$$AU = F.$$

La matrice A est appelée matrice de rigidité, en référence aux problèmes de mécanique où elle a été introduite pour la première fois. Cette matrice a des propriétés qui proviennent directement des propriétés satisfaites par la forme bilinéaire a , et F comme le vecteur de chargement.

4.4.1 Estimation de l'erreur

Lemme 4.1. (Orthogonalité de Galarkin) Soient $u \in V$ la solution exacte du problème continue (4.9) et u_h la solution exacte du problème discret (4.11). Alors l'erreur $e = u - u_h$ satisfait

$$a(e, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (4.13)$$

Démonstration. La solution exacte u satisfait $a(u, v) = L(v)$ pour tout $v \in V$. Puisque $V_h \subset V$, on peut prendre une fonction test de V_h et en déduire que $a(u, v_h) = L(v_h)$ pour tout $v_h \in V_h$. En utilisant $a(u_h, v_h) = L(v_h)$ pour tout $v_h \in V_h$, nous obtenons immédiatement le résultat. \square

Lemme 4.2. (Lemme de Céa) Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, soient u la solution de (4.9) et u_h la solution de (4.11). Alors

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|, \quad \forall v_h \in V_h \quad \text{c'est à dire} \quad \|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} d(u, V_h),$$

où d est la distance induite par la norme $\|\cdot\|$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h), \quad \forall v_h \in V_h \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \end{aligned}$$

or $v_h - u_h \in V_h$. Donc, d'après (4.13) $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$. On a donc :

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (4.14)$$

a étant coercive, il existe $\alpha > 0$ tel que $a(u - u_h, u - u_h) \geq \alpha \|u - u_h\|^2$ où $\|\cdot\|$ est une norme sur V . Par ailleurs, a étant continue, il existe $M > 0$ tel que $a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|$.

En réinjectant ces deux inégalités de part et d'autre de (4.14) et en simplifiant par $\|u - u_h\|$, on obtient

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - u_h\|, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (4.15)$$

□

4.5 Eléments finis de Lagrange

Les éléments de Lagrange sont les plus simples des éléments finis.

Définition 4.3. (Unisolvance) Soit $\Sigma = a_1, \dots, a_N$ un ensemble de N points distincts de \mathbb{R}^n . Soit P un espace vectoriel de dimension finie de fonctions de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que Σ est P -unisolvant SSI pour tous réels $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, il existe un unique élément p de P tel que $\forall i = 1, \dots, N; p(a_i) = \alpha_i$. (Ce qui revient à dire que la fonction de P dans \mathbb{R}^n qui à p fait correspondre $(p(a_1), \dots, p(a_N)) = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ est bijective).

Définition 4.4. (EF de Lagrange) Un élément fini de Lagrange est un triplet (K, Σ, P) telque :

- K est un élément géométrique de \mathbb{R}^n , compact, connexe et d'intérieur non vide ;
- $\Sigma = a_1, \dots, a_N$ un ensemble de N points distincts de \mathbb{R}^n ;
- P est un espace vectoriel de dimension finie de fonctions réelles définies sur K , et tel que Σ soit P -unisolvant (donc $\dim P = N$).

Les fonctions de bases locales de l'élément fini de Lagrange (K, Σ, P) sont les N fonctions de P telles que $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i \leq j \leq N$.

Définition 4.5. On appelle un opérateur de P -interpolation sur Σ est un opérateur π_K qui à toute fonction v définie sur K associe la fonction $\pi_K v$ de P définie par : $\pi_K v = \sum_{i=1}^N v(a_i) p_i$. $\pi_K v$ est donc l'unique élément de P qui prend les mêmes valeurs que v sur les points de Σ .

4.6 Exemples d'éléments finis de Lagrange

4.6.1 Espaces de polynômes

On notera P_k l'espace vectoriel des polynômes de degré total inférieur ou égal à k .

- Sur \mathbb{R} , $P_k = Vect \{1, X, \dots, X^k\}$ et $\dim P_k = k + 1$.

- Sur \mathbb{R}^2 , $P_k = Vect \{X^i Y^j, 0 \leq i + j \leq k\}$ et $\dim P_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

- Sur \mathbb{R}^3 , $P_k = Vect \{X^i Y^j Z^l, 0 \leq i + j + l \leq k\}$ et $\dim P_k = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$

On notera Q_k l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à k par rapport à chaque variable.

- Sur \mathbb{R} , $Q_k = P_k$.

- Sur \mathbb{R}^2 , $P_k = Vect \{X^i Y^j, 0 \leq i, j \leq k\}$ et $\dim P_k = (k + 1)^2$

- Sur \mathbb{R}^3 , $P_k = Vect \{X^i Y^j Z^l, 0 \leq i, j, l \leq k\}$ et $\dim P_k = (k + 1)^3$.

4.6.2 Exemple en 1D

Elément P_1

- $K = [a, b]$

- $\Sigma = \{a, b\}$

- $P = P_1$

Elément P_2

- $K = [a, b]$

- $\Sigma = \{a, \frac{a+b}{2}, b\}$

- $P = P_2$

Elément P_m

- $K = [a, b]$

- $\Sigma = \{a + i \frac{b-a}{m}, i = 0, \dots, m\}$

- $P = P_m$

4.6.3 Exemple 2D triangulaires

Elément P_1

- K = triangle de sommets a_1, a_2, a_3

$$- \Sigma = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$- P = P_1$$

Elément P_2

$$- K = \text{triangle de sommets } a_1, a_2, a_3$$

$$- \Sigma = \{a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}\} \text{ où } a_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2}.$$

$$- P = P_2$$

4.6.4 Exemple 2D rectangulaires

Elément Q_1

$$- K = \text{rectangle de sommets } a_1, a_2, a_3, a_4, \text{ de côtés parallèles aux axes.}$$

$$- \Sigma = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

$$- P = Q_1$$

Les fonctions de bases sont $p_i = \frac{(X - x_j)(Y - y_j)}{(x_i - x_j)(y_i - y_j)}$ où (x_i, y_i) sont les coordonnées de a_i , et où a_j de coordonnées (x_j, y_j) est le coin opposé à a_i .

4.7 La méthode des éléments finis en 1D

On va considérer le problème modèle de l'introduction :

Trouver une fonction u appartenant à l'espace $H_0^1(]0, 1[)$ telle que

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx, \quad \text{pour toute fonction } v \in H_0^1(]0, 1[). \quad (4.16)$$

Pour construire l'espace V_h , on introduit une discrétisation, comme dans le cas des différences finies, avec une grille uniforme

$$x_j = j\Delta x, \quad j = 0, \dots, N,$$

où $\Delta x = \frac{1}{N+1}$. On pose $h = \Delta x$.

Puis, pour $1 \leq j \leq N$, on introduit les fonctions φ_j définies par

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, N.$$

Donc

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{si } x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} & \text{si } x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions $\varphi_j(x)$ sont des polynômes de degré 1.

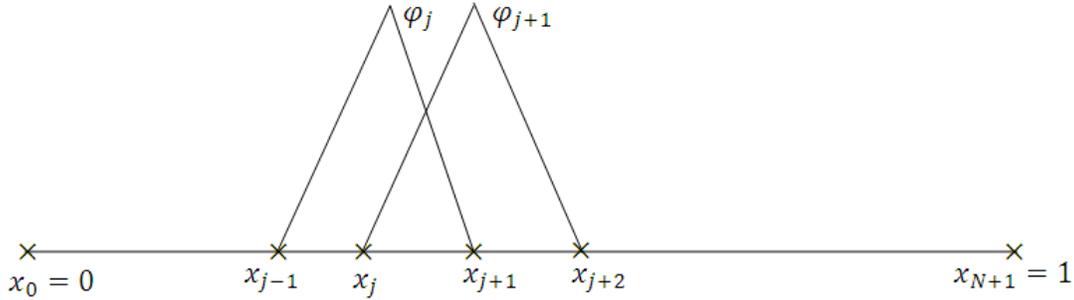


FIGURE 4.1 – Fonctions de base φ_j .

Ces fonctions sont appelées les éléments finis de degré 1. Avec ces éléments finis, la matrice A est tridiagonale. Il est aussi possible de choisir pour éléments finis des fonctions de degré 2 ou plus.

Le calcul de la matrice A fait intervenir les dérivées $\varphi'_j(x)$ simples à calculer

$$\varphi'_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_j - x_{j-1}} & \text{si } x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{1}{x_j - x_{j+1}} & \text{si } x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculons maintenant les coefficients $A_{i,j}$ en sommant les contributions des différents éléments selon :

$$A_{i,j} = a(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx = \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx.$$

Considérons par exemple l'élément $T_i = [x_i, x_{i+1}]$. Sur cet élément, il n'y a que deux fonctions de base non nulles : φ_i et φ_{i+1} . L'élément T_i produira donc effectivement une contribution non nulle aux quatre coefficients $A_{i,i}$, $A_{i+1,i}$, $A_{i+1,i+1}$ et $A_{i,i+1}$ de la matrice globale A . Calculons les contributions élémentaires de T_i et disposons les sous la forme d'une matrice élémentaire 2×2

$$ElemT_i = \begin{pmatrix} e_{1,1}^i & e_{1,2}^i \\ e_{2,1}^i & e_{2,2}^i \end{pmatrix}$$

avec

$$e_{1,1}^i = a(\varphi_i(x), \varphi_i(x)) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x) \varphi_i'(x) dx = \frac{1}{x_{i+1} - x_i},$$

$$e_{1,2}^i = e_{2,1}^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x) \varphi_{i+1}'(x) dx = -\frac{1}{x_{i+1} - x_i},$$

$$e_{2,2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}'(x) \varphi_{i+1}'(x) dx = \frac{1}{x_{i+1} - x_i}.$$

D'où :

$$ElemT_i = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour les $F_j = \langle f, \varphi_j(x) \rangle$, on doit utiliser une méthode de calcul approché d'intégrale : par exemple, la méthode des trapèze

$$F_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx = \left(\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2} \right) f_j.$$

La méthode de Simpson permet aussi un calcul approché et donne dans le même cas

$$F_j = \frac{h}{6} (F_{j-1} + 4F_j + F_{j+1}).$$

4.7.1 Exemple détaillé

On se propose de rechercher une solution approchée du problème suivant :

Trouver $u(x)$ dans le domaine $\Omega = [0, 1]$ satisfaisant l'équation différentielle

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + 2\frac{du(x)}{dx} - 3x = 0 \tag{4.17}$$

avec les condions aux frontières de Ω

$$u(0) = 0 \text{ and } \left[\frac{du(x)}{dx} \right]_{x=1} = 0.$$

Dans ce problème, est un domaine de dimension 1 et le temps n'apparait pas. Pour décrire les points du domaine, on n'a besoin que d'une seule variable x . L'équation à résoudre est donc une équation différentielle ordinaire. La frontière $\partial\Omega$ se réduit à deux points.

La solution exacte de ce problème est

$$u(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e^{2-2x}.$$

Formulation variationnelle du problème

On a

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega) / u(0) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(1) = 0 \right\}.$$

Résoudre l'équation différentielle est équivalent à chercher $u(x) \in V$ tel que

$$\int_{\Omega} v(x) \left(\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + 2 \frac{du(x)}{dx} - 3x \right) dx = 0, \quad \forall v \in V, \quad (4.18)$$

avec

$$u(0) = 0 \text{ and } \left[\frac{du(x)}{dx} \right]_{x=1} = 0.$$

Cette formulation est la formulation variationnelle du problème (4.17).

On obtient une autre formulation variationnelle en utilisant l'intégration par parties et les conditions

aux limites $u(0) = 0$ and $\left[\frac{du(x)}{dx} \right]_{x=1} = 0$:

Trouver $u(x)$ tel que

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 \frac{dv(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} dx + 0 - v(0) \left[\frac{du(x)}{dx} \right]_{x=0} \\ & - 2 \int_0^1 \frac{dv(x)}{dx} u(x) dx + 2v(1)u(1) - 0 \\ & - 3 \int_0^1 v(x)u(x) dx = 0, \quad \forall v(x) \in V. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Choix du maillage

On divise arbitrairement Ω en trois mailles de même taille (voir la figure 4.2)

$$\Omega_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \Omega_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad \Omega_3 = \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

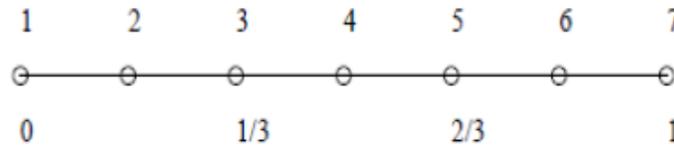


FIGURE 4.2 – Maillage du problème.

Choix des noeuds et des champs locaux

On décide de prendre des éléments à 3 noeuds, et pour la famille de champs locaux des polynômes de degré 2. Les noeuds sont choisis aux extrémités et au milieu de chaque maille. On peut alors déterminer chaque champ local en fonction des valeurs aux 3 noeuds. Remarquer que le fait d'avoir utilisé des noeuds aux extrémités de chaque élément présente deux avantages :

1. Le nombre de noeuds est réduit, car il y a des noeuds communs à deux éléments.
2. On assure ainsi une continuité c_0 de la solution approchée : les champs locaux de deux éléments voisins auront la même valeur à leur noeud commun.

Remarquer encore qu'il n'est pas nécessaire de prendre les éléments identiques : on aurait pu prendre certains à deux noeuds et d'autres à trois noeuds.

Chaque champ local peut donc s'exprimer en fonction des valeurs aux noeuds. En effet, il n'existe qu'un seul polynôme du second degré qui satisfasse les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1 = u_1, \\ a_1 x_2^2 + b_1 x_2 + c_1 = u_2, \\ a_1 x_3^2 + b_1 x_3 + c_1 = u_3. \end{cases}$$

où x_1 , x_2 , et x_3 sont les coordonnées des 3 noeuds des éléments, et u_1 , u_2 , et u_3 sont des valeurs de u aux 3 noeuds de l'élément.

On obtient

$$a_1 = \frac{x_2 u_1 - x_2 u_3 + x_1 u_3 - u_1 x_3 - u_2 x_1 + u_2 x_3}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)}, \quad (4.20)$$

$$b_1 = \frac{x_1^2 u_3 - x_1^2 u_2 + x_3^2 u_2 - u_1 x_3^2 - u_3 x_2^2 + u_1 x_2^2}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)}, \quad (4.21)$$

$$c_1 = \frac{x_1^2 x_2 u_3 - x_1^2 u_2 x_3 - u_3 x_2^2 x_1 + x_3^2 u_2 x_1 + u_1 x_2^2 x_3 - x_3^2 x_2 x_1}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)}. \quad (4.22)$$

Le polynôme avec les coefficients a_1 , b_1 et c_1 ci-dessus est appelé fonction d'interpolation de l'élément 1. Les polynômes d'interpolation des 2 autres sont de la même forme : Pour le second, on remplace les indices 1, 2, 3 par les indices 3, 4, 5, et pour le troisième, on remplace les indices 1, 2, 3 par les indices 5, 6, 7.

Dans cet exemple, on a 7 noeuds. Si on donne une valeur arbitraire à chaque noeud, les fonctions d'interpolations sont déterminées et définissent par morceaux une fonction C_0 continue sur le domaine Ω . L'espace des fonctions \tilde{U} , définies en 3 morceaux, est de dimension 7.

Les trois fonctions d'interpolations sur les 3 éléments sont

$$\tilde{u}_1 = (18u_3 - 36u_2 + 18u_1)x^2 + (-3u_3 + 12u_2 - 9u_1)x + u_1, \quad (4.23)$$

$$\tilde{u}_2 = (18u_5 - 36u_4 + 18u_3)x^2 + (-15u_5 + 36u_4 - 21u_3)x + 3u_5 - 8u_4 + 6u_3, \quad (4.24)$$

$$\tilde{u}_3 = (18u_7 - 36u_6 + 18u_5)x^2 + (-27u_7 + 60u_6 - 33u_5)x + 10u_7 - 24u_6 + 15u_5. \quad (4.25)$$

Discrétisation du problème

Dans notre exemple, si on choisit la formulation (4.19), les fonctions $v_i(x)$ doivent avoir une dérivée non nulle partout, pour que la formulation ne soit pas triviale. Par contre, dans cette formulation, la dérivée seconde de la fonction $u(x)$, qui sera remplacée par l'approximation \tilde{u} ; n'apparaît plus. On pouvait donc choisir une famille d'approximation \tilde{u} plus simple. On choisit par exemple les 7 fonctions test v_1, v_2, \dots, v_7 définies par la figure suivante :

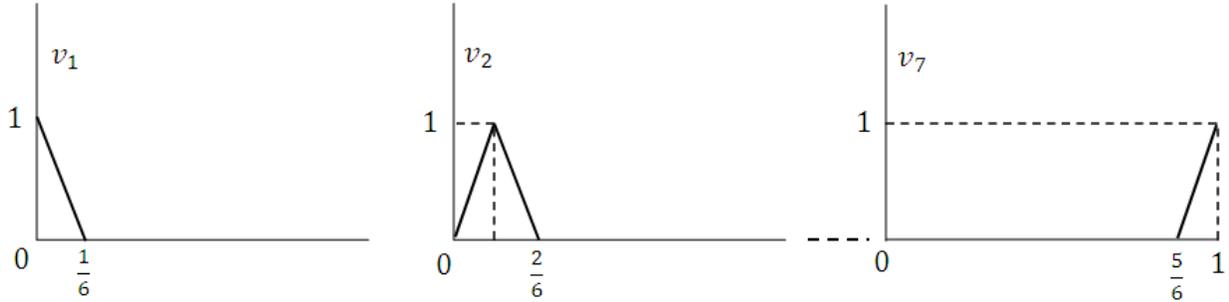


FIGURE 4.3 – Les sept fonctions v_i .

Leurs dérivées sont constantes (+6 ou -6) ou nulles et on a $v_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Pour chaque fonction test v_i on écrit une équation scalaire

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 \frac{dv_i(x)}{dx} \frac{d\tilde{u}(x)}{dx} dx - v_i(0) \left[\frac{d\tilde{u}(x)}{dx} \right]_{x=0} - 2 \int_0^1 \frac{dv_i(x)}{dx} \tilde{u}(x) dx + 2v_i(1)\tilde{u}(1) \\ & - 3 \int_0^1 v_i(x) x dx = 0 \text{ pour } i = \overline{1, 7}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

où les $\tilde{u}(x)$ sont des fonctions de x et des valeurs aux noeuds u_1, u_2 , and u_3 .

Les intégrales de ces 7 équations sont faciles à calculer : elles se réduisent à des intégrales sur le segment où les dérivées de v_i sont non nulles.

La construction de ce système d'équations s'appelle **l'assemblage**. Pour un choix différent de fonctions $v_i(x)$, les intégrales sur chaque élément sont moins simples à calculer. Par exemple, la première équation (avec $v_1(x)$) est

$$\begin{aligned} & - \int_0^{\frac{1}{6}} \frac{dv_1(x)}{dx} \frac{d\tilde{u}_1(x)}{dx} dx - v_1(0) \left[\frac{d\tilde{u}_1(x)}{dx} \right]_{x=0} \\ & - 2 \int_0^{\frac{1}{6}} \frac{dv_1(x)}{dx} \tilde{u}_1(x) dx + 2v_1(1)\tilde{u}_1(1) - 3 \int_1^{\frac{1}{6}} v_1(x) x dx = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Soit encore

$$- \int_0^{\frac{1}{6}} (-6) \frac{d\tilde{u}_1(x)}{dx} dx - \left[\frac{d\tilde{u}_1(x)}{dx} \right]_{x=0} - 2 \int_0^{\frac{1}{6}} (-6) \tilde{u}_1(x) dx - 3 \int_0^{\frac{1}{6}} (1 - 6x) x dx = 0. \quad (4.28)$$

où $\tilde{u}(x) = ax^2 + bx + c$ dans le segment $[0, \frac{1}{6}]$, avec a, b, c définis en (4.20), (4.21), (4.22).

On procède de même pour les 6 autres équations. On obtient ainsi un système de 7 équations à 7 inconnues (les valeurs aux noeuds u_1, u_2, \dots, u_7) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{23}{6}u_1 - \frac{14}{6}u_2 + \frac{17}{6}u_3 - \frac{1}{72} = 0, \\ 5u_1 - 12u_2 + 7u_3 - \frac{1}{12} = 0, \\ \frac{1}{6}u_1 + \frac{14}{3}u_2 - 12u_3 + \frac{22}{3}u_4 - \frac{1}{6}u_5 - \frac{1}{6} = 0, \\ 5u_3 - 12u_4 + 7u_5 - \frac{1}{4} = 0, \\ \frac{1}{6}u_3 + \frac{14}{3}u_4 - 12u_5 + \frac{22}{3}u_6 - \frac{1}{6}u_7 - \frac{1}{3} = 0, \\ 5u_5 - 12u_6 + 7u_7 - \frac{5}{12} = 0, \\ \frac{1}{6}u_5 + \frac{14}{3}u_6 - \frac{29}{6}u_7 - \frac{17}{72} = 0. \end{array} \right. \quad (4.29)$$

Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$AU = F,$$

d'où

$$\begin{bmatrix} \frac{23}{16} & -\frac{14}{6} & \frac{17}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -12 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{14}{6} & -12 & \frac{22}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -12 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{14}{3} & -12 & \frac{22}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -12 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{14}{3} & -\frac{29}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{72} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} \\ \frac{17}{72} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

La matrice A est inversible donc $U = A^{-1}F$.

La solution de ce système donne les valeurs aux noeuds de l'approximation $\tilde{u}(x)$ cherchée :

$$u_1 = \frac{4107}{54872}, \quad u_2 = -\frac{7063}{8664}, \quad u_3 = -\frac{236893}{164616}, \quad u_4 = -\frac{25563}{13718},$$

$$u_5 = -\frac{350779}{164616}, \quad u_6 = -\frac{374605}{164616}, \quad u_7 = -\frac{127275}{54872}.$$

4.8 Eléments finis pour un problème non linéaire

Considérons le problème non linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} + u \frac{du}{dx} - u = e^{2x}, & x \in (0, 1), \\ u(0) = 1, \quad u(1) = e. \end{cases} \quad (4.31)$$

Il est clair que $u = e^x$ est la solution exacte de (4.31).

Nous allons résoudre ce problème numériquement en utilisant la méthode des éléments finis. On va expliquer toutes les étapes en détail pour faciliter la compréhension de l'algorithme sur lequel nous sommes appuyés en programmation.

Pour plus d'informations sur les problèmes résolus en détail, veuillez vous référer à [6].

4.8.1 Discrétisation du domaine

On subdivise l'intervalle $[0, 1]$ en 5 sous intervalles ($N = 5$), où la longueur de chaque sous intervalle est $h_e = \frac{1}{N} = 0.2$,

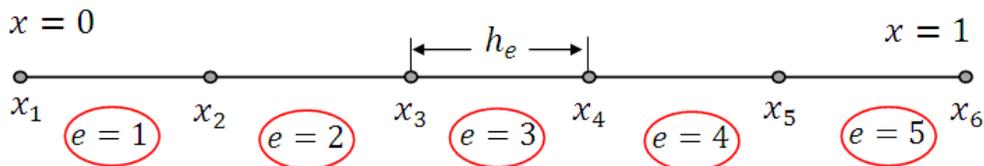


FIGURE 4.4 – Maillage composé de cinq éléments.

4.8.2 Formulation variationnelle

$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} w \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \bar{u} \frac{du}{dx} - u - e^{2x} \right\} dx = 0. \quad (4.32)$$

Par integration par partie, on obtient

$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} \left\{ \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + w \bar{u} \frac{du}{dx} - w u \right\} dx = \left(w \frac{du}{dx} \right)_{x_e}^{x_{e+1}} + \int_{x_e}^{x_{e+1}} e^{2x} w dx. \quad (4.33)$$

Donc, la formulation variationnelle du problème

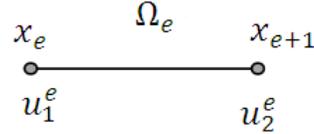
$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} \left\{ \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + w \bar{u} \frac{du}{dx} - w u \right\} dx = w(x_e) Q_1 + w(x_{e+1}) Q_2 + \int_{x_e}^{x_{e+1}} e^{2x} w dx. \quad (4.34)$$

Où

$$Q_1 = - \left(\frac{du}{dx} \right)_{x_e} \quad \text{and} \quad Q_2 = \left(\frac{du}{dx} \right)_{x_{e+1}}.$$

4.8.3 Approximation linéaire de $u(x)$

$$u^e(x) = c_1 + c_2 x.$$



En appliquant les conditions

$$\left. \begin{aligned} u^e(x_e) = c_1 + c_2 x_e = u_1^e \\ u^e(x_{e+1}) = c_1 + c_2 x_{e+1} = u_2^e \end{aligned} \right\} \implies u^e(x) = u_1^e \varphi_1^e(x) + u_2^e \varphi_2^e(x) = \sum_{j=1}^{j=2} u_j^e \varphi_j^e(x), \quad (4.35)$$

où

$$\varphi_1^e(x) = \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e}, \quad \varphi_2^e(x) = \frac{x - x_e}{x_{e+1} - x_e},$$

sont connues sous le nom fonctions de base.

Propriétés des fonctions de base

1. $\varphi_i^e(x_j^e) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$
2. $\sum_{j=1}^{j=2} \varphi_j^e(x) = 1.$

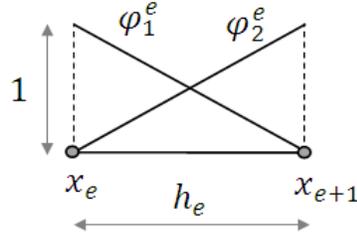


FIGURE 4.5 – Représentation de deux fonctions de base.

Le modèle par éléments finis peut être obtenu à partir de l'équation (4.34) en substituant l'approximation linéaire par éléments finis de la forme

$$u^e(x) = \sum_{j=1}^{j=2} a_j^e \varphi_j^e(x),$$

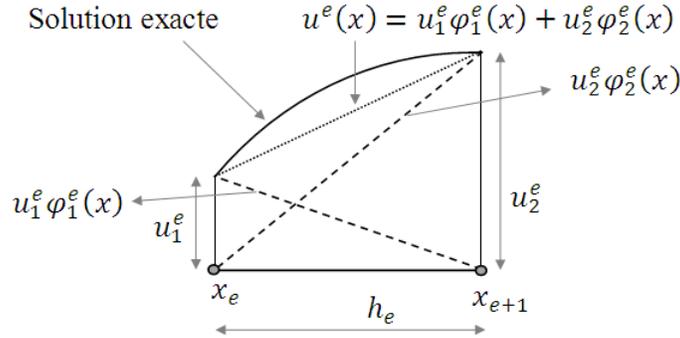


FIGURE 4.6 – Approximation linéaire par éléments finis.

Avec

$$w = \varphi_i^e(x), \quad i = 1, 2,$$

où $\varphi_i^e(x)$ sont les fonctions de base sur l'élément (x_e, x_{e+1}) .

Substitution les valeurs de u et w dans l'équation (4.34)

$$\begin{aligned} & \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left\{ \frac{d\varphi_1^e}{dx} \frac{d}{dx} (u_1^e \varphi_1^e + u_2^e \varphi_2^e) + \varphi_1^e \bar{u} \frac{d}{dx} (u_1^e \varphi_1^e + u_2^e \varphi_2^e) - \varphi_1^e (u_1^e \varphi_1^e + u_2^e \varphi_2^e) \right\} dx \\ & = \varphi_1^e(x_e) Q_1 + \varphi_1^e(x_{e+1}) Q_2 + \int_{x_e}^{x_{e+1}} \varphi_1^e e^{2x} dx, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left\{ \frac{d\varphi_2^e}{dx} \frac{d}{dx} (u_1^e \varphi_1^e + u_2^e \varphi_2^e) + \varphi_2^e \bar{u} \frac{d}{dx} (u_1^e \varphi_1^e + u_2^e \varphi_2^e) - \varphi_2^e (u_1^e \varphi_1^e + u_2^e \varphi_2^e) \right\} dx \\
& = \varphi_2^e(x_e) Q_1 + \varphi_2^e(x_{e+1}) Q_2 + \int_{x_e}^{x_{e+1}} \varphi_2^e e^{2x} dx.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Dans la notation matricielle, les équations algébriques peuvent être écrites comme

$$\begin{aligned}
K_{11}^e u_1^e + K_{12}^e u_2^e &= f_1^e + Q_1^e, \\
K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e &= f_2^e + Q_2^e.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Ou en d'autres termes

$$[K^e] \{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\} \tag{4.39}$$

tels que

$$\begin{aligned}
K_{ij}^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left\{ \frac{d\varphi_i^e}{dx} \frac{d\varphi_j^e}{dx} + \varphi_i^e \bar{u} \frac{d\varphi_j^e}{dx} - \varphi_i^e \varphi_j^e \right\} dx \\
f_i^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \varphi_i^e e^{2x} dx.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Supposons que

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^{j=2} \bar{u}_j \varphi_j^e(x) = \bar{u}_1 \varphi_1^e(x) + \bar{u}_2 \varphi_2^e(x).$$

On obtient, alors

$$\begin{aligned}
K_{ij}^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left\{ \frac{d\varphi_i^e}{dx} \frac{d\varphi_j^e}{dx} + \left(\varphi_i^e \varphi_1^e \frac{d\varphi_j^e}{dx} \right) \bar{u}_1 + \left(\varphi_i^e \varphi_2^e \frac{d\varphi_j^e}{dx} \right) \bar{u}_2 - \varphi_i^e \varphi_j^e \right\} dx \\
&= A_{ij}^e + B_{ij}^e \bar{u}_1 + C_{ij}^e \bar{u}_2 + D_{ij}^e
\end{aligned} \tag{4.41}$$

tels que

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(\frac{d\varphi_i^e}{dx} \frac{d\varphi_j^e}{dx} \right) dx, & B_{ij}^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(\varphi_i^e \varphi_1^e \frac{d\varphi_j^e}{dx} \right) dx, \\
C_{ij}^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(\varphi_i^e \varphi_2^e \frac{d\varphi_j^e}{dx} \right) dx, & D_{ij}^e &= - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(\varphi_i^e \varphi_j^e \right) dx.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

En calculant ces intégrales, on trouve

$$\begin{aligned}
 A_{ij}^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(\frac{d\varphi_i^e}{dx} \frac{d\varphi_j^e}{dx} \right) dx = \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\
 B_{ij}^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(\varphi_i^e \varphi_1^e \frac{d\varphi_j^e}{dx} \right) dx = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \\
 C_{ij}^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(\varphi_i^e \varphi_2^e \frac{d\varphi_j^e}{dx} \right) dx = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \\
 D_{ij}^e &= - \int_{x_e}^{x_{e+1}} (\varphi_i^e \varphi_j^e) dx = \frac{h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \\
 f_i^e &= - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \varphi_i^e e^{2x} dx = \begin{bmatrix} \frac{1}{4h_e} (e^{2x_e} - e^{2x_{e+1}}) + \frac{e^{2x_e}}{2} \\ \frac{1}{4h_e} (e^{2x_{e+1}} - e^{2x_e}) + \frac{e^{2x_{e+1}}}{2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

4.8.4 Technique d'assemblage

Initiation du système linéaire

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1^{ière} Élément $e = 1$:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2^{ième} Élément $e = 2$:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & (k_{22}^1 + k_{11}^2) & k_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3^{ième} Élément $e = 3$:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & (k_{22}^1 + k_{11}^2) & k_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & (k_{22}^2 + k_{11}^3) & k_{12}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 + Q_1^3 \\ Q_2^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4^{ième} Élément $e = 4$:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & (k_{22}^1 + k_{11}^2) & k_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & (k_{22}^2 + k_{11}^3) & k_{12}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & (k_{22}^3 + k_{11}^4) & k_{12}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21}^4 & k_{22}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 + f_1^4 \\ f_2^4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 + Q_1^3 \\ Q_2^3 + Q_1^4 \\ Q_2^4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5^{ième} Élément $e = 5$:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & (k_{22}^1 + k_{11}^2) & k_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & (k_{22}^2 + k_{11}^3) & k_{12}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & (k_{22}^3 + k_{11}^4) & k_{12}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21}^4 & (k_{22}^4 + k_{11}^5) & k_{12}^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}^5 & k_{22}^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 + f_1^4 \\ f_2^4 + f_1^5 \\ f_2^5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 + Q_1^3 \\ Q_2^3 + Q_1^4 \\ Q_2^4 + Q_1^5 \\ Q_2^5 \end{bmatrix}$$

Le second membre du système linéaire est évalué comme suit

$$Q_2^e + Q_1^{e+1} = \begin{cases} 0 & \text{si aucune source ponctuelle externe n'est appliquée,} \\ Q_o & \text{si une source ponctuelle externe de magnitude } Q_o \text{ est appliquée.} \end{cases}$$

Imposition des conditions aux limites

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & (k_{22}^1 + k_{11}^2) & k_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & (k_{22}^2 + k_{11}^3) & k_{12}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & (k_{22}^3 + k_{11}^4) & k_{12}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21}^4 & (k_{22}^4 + k_{11}^5) & k_{12}^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}^5 & k_{22}^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 + f_1^4 \\ f_2^4 + f_1^5 \\ f_2^5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_2^5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & (k_{22}^1 + k_{11}^2) & k_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & (k_{22}^2 + k_{11}^3) & k_{12}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & (k_{22}^3 + k_{11}^4) & k_{12}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21}^4 & (k_{22}^4 + k_{11}^5) & k_{12}^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 + f_1^4 \\ f_2^4 + f_1^5 \\ u(1) \end{bmatrix}$$

Après l'assemblage des équations des éléments, un système d'équations non linéaires est obtenu, par conséquent un schéma itératif a été appliqué pour le résoudre. Ce système est linéarisé en incorporant la fonction \bar{u} , qui est supposée connue de l'itération précédente et les calculs pour u sont alors effectués pour l'itération actuelle. Ce processus est répété jusqu'à la précision souhaitée.

4.8.5 Code MATLAB

Ce code est créé en langage Matlab suivant les étapes mentionnées ci-dessus.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
#####  Méthode des éléments finis pour résoudre le problème: #####
#####  u''+uu'-u=exp(2x) , u(0)=1, u(1)=e #####
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function bvpsolution()
clear all; close all; clc
n=10; % Nombre des éléments.
nn=n+1; % Nombre de noeuds.
lgth=1; % Dimension du domaine.
he=lgth/n; % Dimension de chaque élément.
x=[0:he:lgth]; % Points de données pour la variable indépendante.
AC=0.00005; % Précision
F=zeros(nn,1); % Initialisation
F(1)=exp(0); F(nn)=exp(1); % Conditions aux limites.
#####
#####  Processus itératif direct pour traiter #####
#####  un problème non linéaire #####
#####
c=1.0;
count=0; % Initialisation pour le comptage des itérations.
tic % Temps de début.
while (c>0)
    F1=assembly(F,n,he);
    c=0.0;
    for i=1:nn
        if (abs(F(i)-F1(i))>AC)
            c=c+1;
            break
        end
    end
    F=F1;
    count=count+1;

end
disp('Donc, la solution=:');
#####
#####  Sortie pour les variables #####
#####
diff=abs(F-exp(x)');
fprintf('No des éléments=%d\n',n)
disp('x FEM exacte Erreur')
disp([x',F,exp(x)',diff])
fprintf('No des iterations=%d\n',count)

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Tracé des variables résultantes %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
VV=exp(x);
figure (48)
plot(x,VV,'-rs')
xlabel('x')
ylabel('U(x)')
title('Solution exacte')
print -dpdf Figure-48.pdf
open Figure-48.pdf
figure (49)
plot(x,F,'-bs')
xlabel('x')
ylabel('U(x)')
title('Solution par éléments finis')
print -dpdf Figure-49.pdf
open Figure-49.pdf
figure (50)
plot(x,diff,'-gs')
title('Erreur de discrétisation')
xlabel('x')
ylabel('E(x)')
print -dpdf Figure-50.pdf
open Figure-50.pdf
toc
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calcul de matrices élémentaires et assemblage %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [F1]=assembly(F,n,he)
nn=n+1;
K=zeros(nn,nn); % Initiation de la matrice principale.
R=zeros(nn,1); % Initiation de la matrice RHB.
syms x % x comme variable symbolique.
s=[1-x/he,x/he]; % Fonction linéaire de base.
ds=diff(s,x); % Différenciation de la fonction de base.
lmm=[]; % Matrice de connectivité.
for i=1:n
    lmm=[lmm;[i,i+1]];
end
for i=1:n
    lm=lmm(i,:);

```

```

#####
####  Génération des matrices élémentaires (K11) et F1  #####
#####
k11=-int(ds'*ds,x,0,he)+(int(s'*ds*s(1),x,0,he)*F(lm(1))...
      +int(s'*ds*s(2),x,0,he)*F(lm(2)))-int(s'*s,x,0,he);
f1=int(exp(2*(x+(i-1)*he))*s',x,0,he);
#####
#####  Assemblage selon la matrice de connectivité  #####
#####
K(lm,lm)=K(lm,lm)+k11;
R(lm)=R(lm)+f1;
end
#####
#####  Imposition des conditions aux limites  #####
#####
K(1,:)=0.0 ; K(nn,:)=0.0;
K(1,1)=1.0 ; K(nn,nn)=1.0;
R(1,1)=F(1) ; R(nn,1)=F(nn);
#####
#####  solution du système linéaire  #####
#####
d=K\R ;
F1=d;
end

```

Les figures suivantes représentent les résultats numériques obtenus pour deux valeurs différentes de discrétisation $N = 5$ et $N = 10$, Nous dessinons les solutions exactes et approchée dans deux figures différentes, et la troisième figure représente la différence entre elles dans chaque cas.

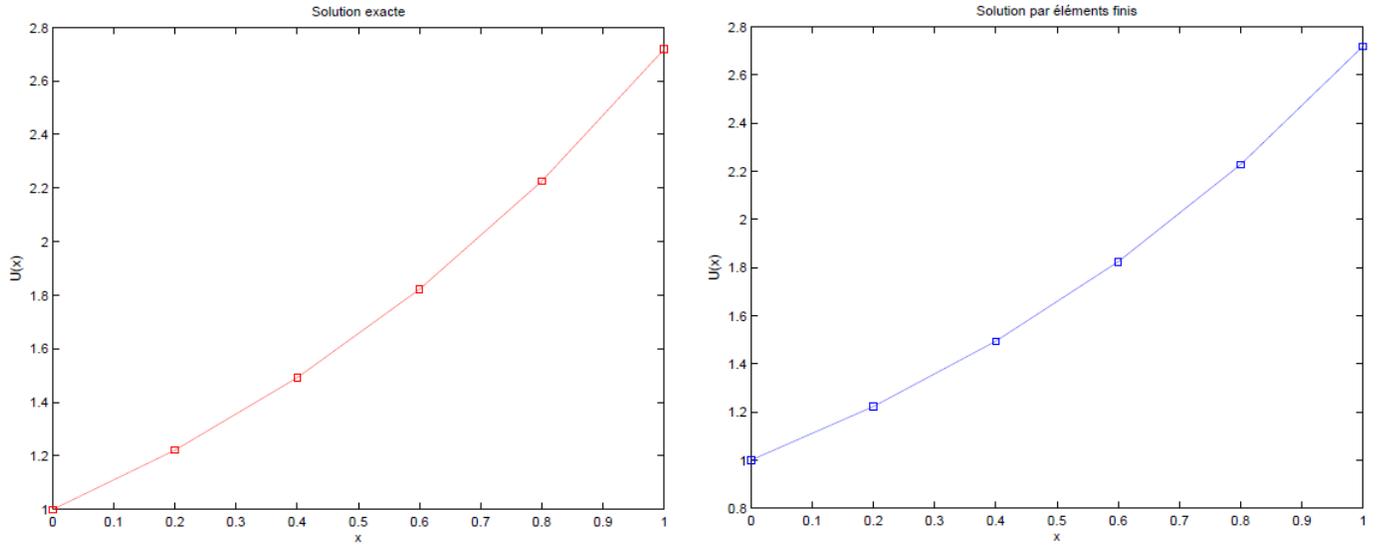


FIGURE 4.7 – Solution exacte et solution approchée pour $N = 5$.

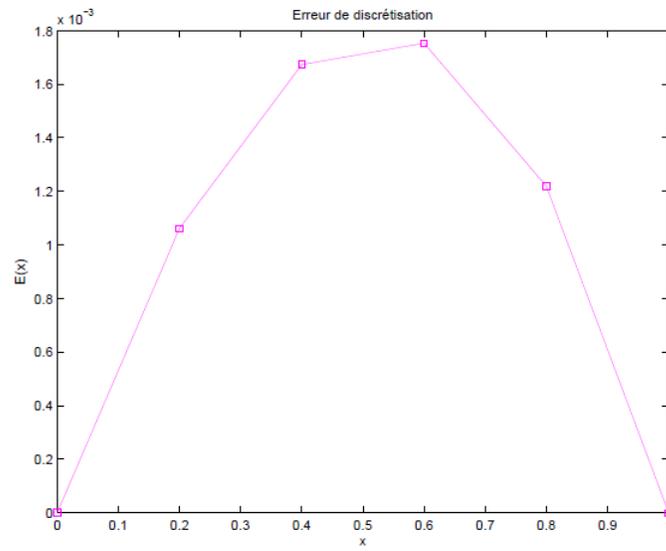


FIGURE 4.8 – Erreur de discrétisation pour $N = 5$.

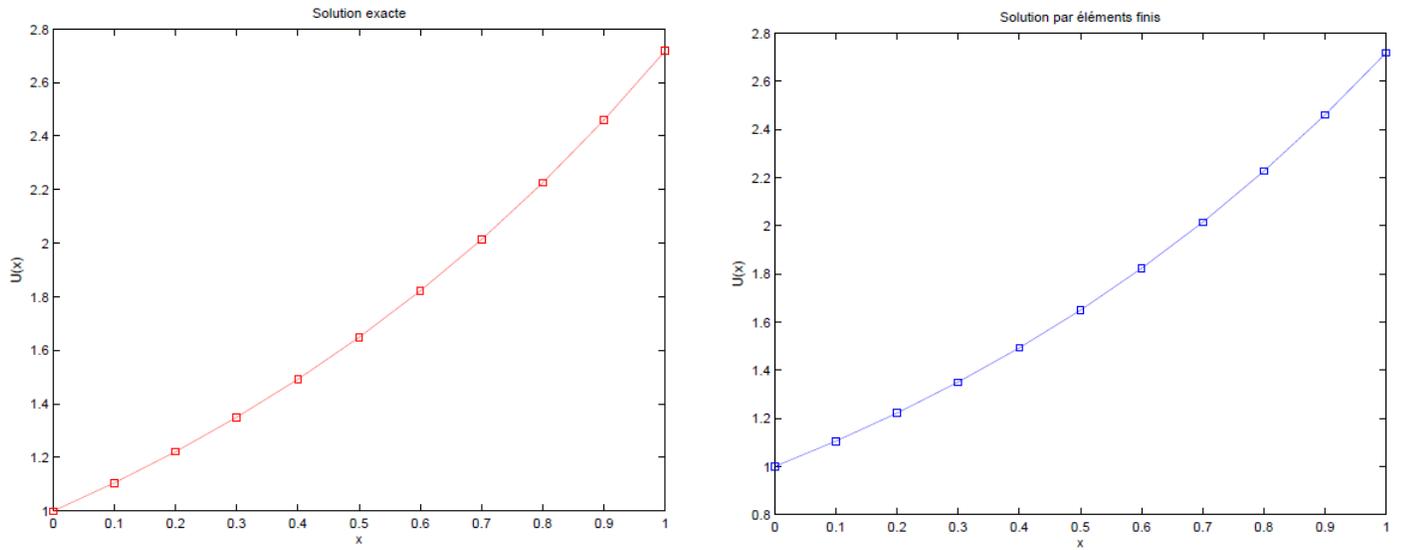


FIGURE 4.9 – Solution exacte et solution approchée pour $N = 10$.

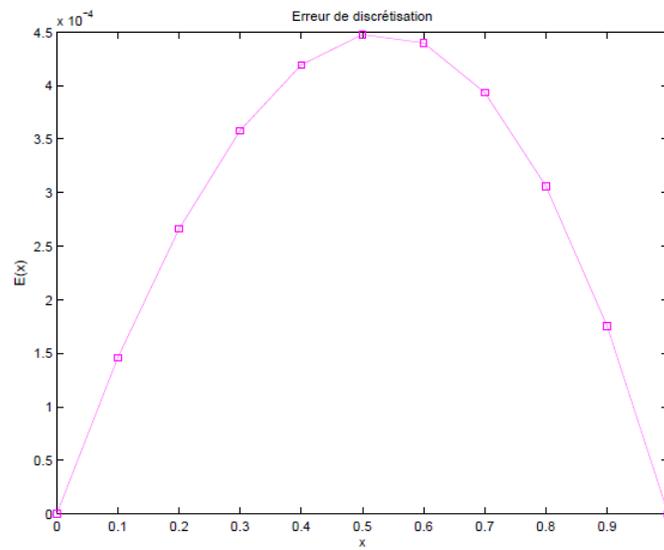


FIGURE 4.10 – Erreur de discrétisation pour $N = 10$.

Nous avons également imprimé les solutions exacte et approchée avec l'erreur pour chaque point de la discrétisation dans un tableau pour chaque cas.

x ($N = 10$)	MEF	Exacte	Erreur
0.0000	1.0000	1.0000	0.0000
0.1000	1.1053	1.1052	0.0001
0.2000	1.2217	1.2214	0.0003
0.3000	1.3502	1.3499	0.0004
0.4000	1.4922	1.4918	0.0004
0.5000	1.6492	1.6487	0.0004
0.6000	1.8226	1.8221	0.0004
0.7000	2.0141	2.0138	0.0004
0.8000	2.2258	2.2255	0.0003
0.9000	2.4598	2.4596	0.0002
1	2.7183	2.7183	0

x ($N = 5$)	MEF	Exacte	Erreur
0	1.0000	1.0000	0.0000
0.2000	1.2225	1.2214	0.0011
0.4000	1.4935	1.4918	0.0017
0.6000	1.8239	1.8221	0.0018
0.8000	2.2268	2.2255	0.0012
1.0000	2.7183	2.7183	0

Bibliographie

- [1] D. M. Causon, *Introductory Finite Difference Methods for PDEs*, Mingham and Ventus Publishing ApS 2010.
- [2] Daveau Christian, *Cours méthodes d'approximation des équations aux dérivées partielles par différences finies et volumes finis*, Master MAP M1 Math Appliquée UE2 EDP2, Université de Cergy-Pontoise, France 2010/2011.
- [3] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *cours de mathématiques spéciales : 4 SÉRIES, équations différentielles et intégrales multiples*, 3^e édition, MASSON 1993.
- [4] F. Boyer, *Equations Différentielles Ordinaires Equations aux Dérivées Partielles*, M1 Enseignement Supérieur et Recherche, Université Paul Sabatier - Toulouse 3, 2021.
- [5] G. D. Smith, *Numerical solution of partial differential equations : finite difference methods*, Thitd edition, CLARENDON PRESS OXFORD, 1984.
- [6] J. N. REDDY, *Solutions manual for : An Introduction to The Finite Element Method*, (Third Edition). Department of Mechanical Engineering, Texas A and M University College Station, Texas 77843-3123.
- [7] L. Halpern, *Equations différentielles Etude mathématique et numérique*, Spécialité MACS 1ère année, INSTITUT GALILEE, 99 avenue Jean-Baptiste-Clément 93430 VILLETANEUSE. Janvier 2016.
- [8] Laurent Schwartz, *Analyse II : calcul différentiel et équations différentielles*, HERMANN, éditeur de sciences et des arts, ISBN 27056-61625, 1993.
- [9] LI. ZHILIN, ZHONGHUA QIAO end TAO TANG, *NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS : Introduction to Finite Difference and Finite Element Methods*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2018.

- [10] P.G. Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation, Masson 1982.
- [11] P.G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, (North-Holland, Amsterdam) 1978.
- [12] R. J. Leveque, Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, SIAM 2007.
- [13] R. Herbin, Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, cours et exercices, Master de Mathématiques, Université Aix Marseille 1, décembre 2008.
- [14] R. Herbin. Analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Engineering school. Marseille, HAL Id 2011. cel-00637008v1
- [15] S. Tordeux et V. Peron, Analyse numérique : La méthode des différences finies, cours pour MASTER 1 MMS, UNIVERSITE DE PAu,2020/2021.
- [16] Sandip Mazumder, Numerical Methods for Partial Differential Equations : Finite Difference and Finite Volume Methods, 2016 Elsevier.
- [17] V. Manet, Méthode des éléments finis, Vulgarisation des aspects mathématiques et illustration de la méthode, 2015.
- [18] W. Oukil, Notes et exercices du cours d'Équations Différentielles, HAL Id : cel-01627453, (v3) 2018. <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01627453v2>
- [19] Y. Debard, Méthode des éléments finis : élasticité à une dimension, Université du Mans. Master Modélisation Numérique et Réalité Virtuelle. 24 mars 2006 - 29 mars 2011, IUT le main, <http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>