ExO1.*Solution*

La constante du gaz d'oxygène est $r_{O_2} = \frac{8314}{16} = 520\, J/kg.K$:

a) pour un écoulement isotherme : $\left(\frac{\dot{m}}{A}\right)^2 = \left[\frac{20}{(\pi/4)(0.81)^2}\right]^2 = \frac{p_1^2 - p_2^3}{rT\left[\frac{fL}{D} + 2\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right]}$

résoudre pour $\boldsymbol{p_1 \approx 892\ kPa}$.

b) la partie **(a)** indique un faible nombre de Mach d'entrée ≈ 0.02, donc $T_e \approx T_0, a_e \approx a_0 \approx 475\, m/s$.

Ensuite on utilise les équations :

$\frac{V_1}{V_2} \approx \frac{p_2}{p_1}$ et $V_1^2 = \frac{a_0^2\left[1-\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2\right]}{\gamma\left(\frac{fL}{D}\right)+(\gamma+1)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = \frac{(475)^2\left[1-\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2\right]}{1.3(2963)+(2.3)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$,

aussi $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \frac{\dot{m}}{A} = 38.81 \frac{kg}{s.m^2}$.

Résoudre pour $V_1 = 7.54 \frac{m}{s}$, $\rho_1 = 5.15 \frac{kg}{m^3}$,

donc ; $\boldsymbol{p_1} = \rho_1 r T_1 = 5.15 \times 520 \times 333 = \boldsymbol{892\ kPa}$.

ExO2.*Solution*

Calculons d'abord le nombre de Mach d'entrée, qui est décidément supersonique: $M_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{900}{\sqrt{1.4(287)(300)}} \approx 2.59$,

On lit $(fL/D)_1 \approx 0.451$, d'où $L^*|_{M=1} = 0.451\left(\frac{0.05}{0.02}\right) \approx 1.13\, m$.

[Nous prenons le "diamètre hydraulique" du conduit carré pour être $5\, cm$.] Si la longueur réelle du conduit $= 2\, m > L^*$, il doit alors y avoir un choc normal dans le conduit. Par essais et erreurs, nous aurons besoin d'une longueur adimensionnelle totale $(fL/D) = 0.02(2)/0.05 \approx 0.8$.

Le résultat est: $M_1 = 2.59$, $\left.\frac{fL}{D}\right|_1 = 0.451$, $M_2 = 2.14$, $\left.\frac{fL}{D}\right|_2 = 0.345$,

choc: $M_3 = 0.555$, $\left.\frac{fL}{D}\right|_3 = 0.695$

Au total $fL/D = 0.451 - 0.345 + 0.695 = 0.801$ (assez proche)

$\therefore \boldsymbol{M_2 = 2.14}$

ExO3.*Solution*

Nous déterminons d'abord la vitesse d'entrée et le nombre de Reynolds d'entrée,

$a_1 = \sqrt{\gamma r T_1} = \sqrt{(1.4)(287)(300)} = 347\, m/s$

$V_1 = M_1 a_1 = 0.4(347) = 139\, m/s$

$$Re_1 = \frac{V_1 D}{\nu} = \frac{(139)(0.03)}{1.58 \times 10^{-5}} = 2.637 \times 10^5$$

Le facteur de friction est déterminé à partir de l'équation de Colebrook, $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0\, log\left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}}\right)$

D'où l'équation : $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0\, log\left(\frac{0}{3.7} + \frac{2.51}{2.637\times10^5\sqrt{f}}\right)$

Sa solution est $f = 0.0148$

Les valeurs des fonctions d'écoulement de Fanno correspondant au nombre de Mach d'entrée de 0.4 sont (d'après les tables) :

$$\frac{p_{01}}{p_0^*} = 1.5901;\ \ \frac{T_1}{T^*} = 1.1628;\ \frac{p_1}{p^*} = 2.6958;\ \frac{V_1}{V^*} = 0.4313;\ \ \frac{fL_1^*}{D} = 2.3085$$

Notant que $*$ indique les conditions soniques qui existent à l'état de sortie, la longueur du conduit et la température, la pression et la vitesse de sortie sont déterminées comme étant ;

$$\boldsymbol{L_1^*} = \frac{2.3085D}{f} = \frac{2.3085(0.03)}{0.0148} = \boldsymbol{4.68\ m}$$

$$\boldsymbol{T^*} = \frac{T_1}{1.1628} = \frac{300}{1.1628} = \boldsymbol{258\ K}$$

$$\boldsymbol{p^*} = \frac{p_1}{2.6958} = \frac{150}{2.6958} = \boldsymbol{55.6\ kPa}$$

$$\boldsymbol{V^*} = \frac{V_1}{0.4313} = \frac{139}{0.4313} = \boldsymbol{322\ m/s}$$

Ainsi, pour le facteur de friction donné, la longueur du conduit doit être de $4.68\ m$ pour que le nombre de Mach atteigne $M = 1$ à la sortie du conduit. La fraction de la pression de stagnation à l'entrée p_0, perdue dans le conduit à cause du frottement est

$$\frac{\boldsymbol{p_{01} - p_0^*}}{\boldsymbol{p_{01}}} = 1 - \frac{p_0^*}{p_{01}} = 1 - \frac{1}{1.5901} = 0.371 \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{37.1}\%$$

Discussion : Ce problème peut également être résolu en utilisant les relations appropriées au lieu de valeurs tabulées pour les fonctions de Fanno. De plus, nous avons déterminé le facteur de friction aux conditions d'entrée et l'avons supposé rester constant le long du conduit. Pour vérifier la validité de cette hypothèse, nous calculons le facteur de friction aux conditions de sortie. On peut montrer que le facteur de friction à la sortie du conduit est de 0.0121, soit une baisse de 18%, ce qui est important. Par conséquent, nous devons répéter le calcul en utilisant la valeur moyenne du facteur de friction $(0.0148 + 0.0121)/2 = 0.0135$. Cela donnerait une longueur de conduit $L_1^* = 2.3085(0.03)/0.0135 = 5.13\ m$, et nous considérons qu'il s'agit de la longueur de conduit requise.

Autres solutions à suivre…