

Ex01.Solution

a) Les conditions de réservoirs sont les propriétés de stagnation, qui sont valide à travers l'écoulement jusqu'à la section 1 puisque c'est un écoulement unidimensionnel (1D) adiabatique sans frottement :

$$P_{01} = 300 \text{ kPa}; \quad T_{01} = 500 \text{ K}$$

Une onde de choc ne peut exister si le nombre de mach n'est supersonique ; donc l'écoulement doit être accéléré à travers le col qui est sonique :

$$A_c = A_1^* = 1 \text{ m}^2$$

On pourra calculer le nombre de Mach M_1 à partir du rapport isentropique des sections

$$\frac{A_1}{A_1^*} = \frac{2 \text{ m}^2}{1 \text{ m}^2} = 2.0$$

D'après les tables : $M_1 \approx 2.20$

ou après les itérations $M_1 = 2.1972$

la pression P_1 s'obtient des relations isentropiques (ou des tables d'écoulements isentropiques)

$$\frac{P_{01}}{P_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left(1 + \frac{(1.4 - 1)}{2} \times 2.20^2\right)^{3.5} = 10.7$$

$$\text{ou } P_1 = \frac{300 \text{ kPa}}{10.7} = \mathbf{28.06 \text{ kPa}}$$

b) La pression P_2 est obtenue de M_1 et les relations du choc normal ou des tables d'écoulements isentropiques

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} = \frac{2 \times 1.4 \times (2.20)^2 - 0.4}{(1.4 + 1)} = 5.48$$

$$\text{ou } P_2 = 5.48 \times (28.06) = \mathbf{154 \text{ kPa}}$$

c) D'une manière similaire, pour $M_1 = 2.20$, $P_{02}/P_{01} = 0.628$, et $A_2^*/A_1^* = 1.592$, ou on peut utiliser les tables, donc :

$$P_{02} = 0.628 \times (300) = \mathbf{188 \text{ kPa}}$$

$$\text{d) Et } A_2^* = 1.592 \times (1) = \mathbf{1.592 \text{ m}^2}$$

e) l'écoulement entre la section 2 et la section 3 est isentropique (mais à entropie supérieure à celle en amont du choc), donc :

$$P_{03} = P_{02} = \mathbf{188 \text{ kPa}}$$

$$\text{f) Et } A_3^* = A_2^* = \mathbf{1.592 \text{ m}^2}$$

g) En connaissant A_3^* , on peut calculer P_3 après le calcul de M_3 , le rapport des sections à la section 3 est :

$$\frac{A_3}{A_3^*} = \frac{3 \text{ m}^2}{1.592 \text{ m}^2} = 1.884$$

Mais comme, M_3 est connu d'être subsonique puisque il est en aval du choc normal, on calcule

$$M_3 \approx \frac{1 + \frac{0.27}{(1.884)^2}}{1.728 \times (1.884)} = 0.330$$

La pression P_3 s'obtient des sections isentropiques ou des tables :

$$P_{03}/P_3 = 1.078 \quad \Rightarrow \quad P_3 = \frac{188}{1.078} = \mathbf{174 \text{ kPa}}$$

h) Aussi, l'écoulement est adiabatique à travers la conduite, donc :

$$T_{01} = T_{02} = T_{03} = 500 \text{ K}$$

i) Finalement, d'après la relation adiabatique :

$$\frac{T_{03}}{T_3} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} (M_3)^2 = 1 + 0.2 \times 0.33^2 = 1.022 \implies T_3 = \frac{500}{1.022} = 489 \text{ K.}$$

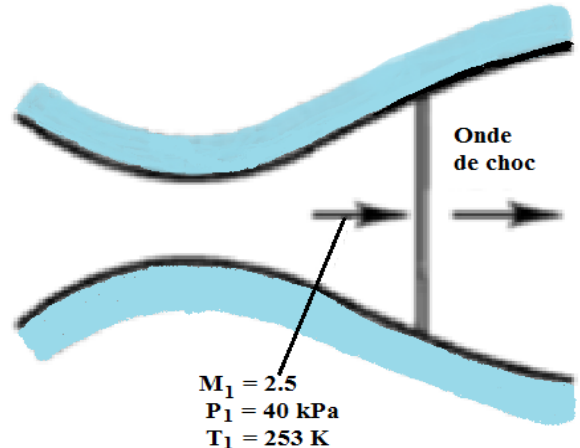
On note que ce type de problème d'écoulement dans les tuyères avec ou sans onde de choc, requiert l'application directe des relations algébriques des gaz parfaits couplées à une légère réflexion pour décider quelle est la formule appropriée pour une situation particulière.

ExO2.Solution

Les relations du choc normal donnent :

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{(\gamma-1)}}{\frac{2\gamma}{(\gamma-1)}M_1^2 - 1} = \frac{2.5^2 + \frac{2}{(1.67-1)}}{\frac{2 \times 1.67}{(1.67-1)}2.5^2 - 1} = 0.306$$

d'où : $M_2 = 0.553$



Les relations du choc normal aussi donnent :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][2 + (\gamma - 1)M_1^2]}{(\gamma - 1)^2 M_1^2} = \frac{[2 \times 1.67 \times 2.5^2 - 0.67][2 + (0.67) \times 2.5^2]}{(1.67 - 1)^2 \times 2.5^2} = 2.806$$

Et par conséquent : $T_2 = 710 \text{ K} = 437^\circ\text{C}$

Aussi, en utilisant les relations du choc normal :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} = \frac{2 \times 1.67 \times 2.5^2 - 0.67}{(1.67 + 1)} = 7.5674$$

Et donc $p_2 = 303 \text{ kPa}$

Par conséquent, le nombre de Mach, la pression et la température en aval de l'onde de choc sont **0.553**, **303 kPa** et **437°C**, respectivement.

ExO3.Solution

La pression la plus élevée possible serait exercée si l'avion avait essentiellement un choc normal devant lui qui, lorsque l'avion a survolé le bâtiment, la pression à l'extérieur de la fenêtre a fortement augmenté pour atteindre la valeur derrière l'onde de choc et si la pression à l'intérieur du bâtiment est restée essentiellement, pendant un court instant, à la pression ambiante initiale.

En supposant que $p_1 = 101.3 \text{ kPa}$, la pression derrière l'onde de choc, qui est supposée être une onde de choc normale, est donnée par:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}$$

c.-à-d., $p_2/p_1 = 1.513$. Par conséquent, la force maximale sur la fenêtre est donnée par $(p_1 - p_2) \times \text{surface} = (1.513 \times 101.3 - 101.3) \times (1 \times 2) = 103.9 \text{ kN}$. Si l'on rappelle que le poids moyen d'une personne est d'environ 0.67 kN , on se rendra compte que la force exercée sur la fenêtre par le passage de l'avion a le potentiel de briser la fenêtre.

ExO4.Solution

Le rapport de pression nous indique le nombre de Mach du mouvement de choc:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{377}{1} = \frac{2.8 M_1^2 - (0.4)}{(2.4)}, \quad \text{résoudre pour } M_1 \approx 17.98$$

$$a_1 = \sqrt{1.4(287)(294)} = 343.7 \frac{m}{s}, \therefore V_1 = \mathfrak{U} = 17.98(343.7) = \mathbf{6179.73 \frac{m}{s}}.$$

Nous calculons ensuite le rapport de vitesse à travers le choc et de là la vitesse de mouvement relatif à l'intérieur:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{0.4(17.98)^2 + 2}{2.4(17.98)^2} = 0.1692, \therefore V_2 = 0.1692(6179.73) = 1045.88 \text{ m/s}$$

$$\text{Alors } V_{\text{inside}} = \mathfrak{U} - V_2 = 6179.73 - 1045.88 = \mathbf{5133.85 \frac{m}{s}}.$$

ExO5.Solution

En raison de la finesse de la couche limite sur le coin, nous approchons l'angle de déflexion du choc oblique à demi-angle du coin, c.-à-d. $\theta \cong \delta = 10^\circ$. avec $M_1 = 2.0$ et $\theta = 10^\circ$, nous résolvons l'équation

$$\tan \theta = \frac{2 \cot \beta (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2}$$

pour les deux valeurs possibles de l'angle de choc oblique β : $\beta_{\text{faible}} = 39.3^\circ$ et $\beta_{\text{fort}} = 83.7^\circ$. A partir de ces valeurs, nous pouvons calculer le nombre de Mach normal en amont $M_{1,n}$,

$$\text{Choc faible: } M_{1,n} = M_1 \sin \beta \rightarrow M_{1,n} = 2.0 \sin 39.3^\circ = 1.267$$

$$\text{pour le choc fort: } M_{1,n} = M_1 \sin \beta \rightarrow M_{1,n} = 2.0 \sin 83.7^\circ = 1.988$$

Nous substituons ces valeurs de $M_{1,n}$ dans

$$M_{2,n} = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)M_{1,n}^2 + 2}{2\gamma M_{1,n}^2 - \gamma + 1}}$$

pour calculer le nombre de Mach normal en aval $M_{2,n}$. Pour le choc faible, $M_{2,n} = \mathbf{0.8032}$ et pour le choc fort, $M_{2,n} = \mathbf{0.5794}$. Nous calculons également la pression en aval pour chaque cas, en utilisant

l'équation $\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_{1,n}^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}$, qui donne ;

$$\text{Pour le choc faible: } \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_{1,n}^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} \rightarrow p_2 = (75.0) \frac{2 \times 1.4 \times 1.267^2 - 0.4}{(1.4 + 1)} = \mathbf{128 \text{ kPa}}$$

Et pour le choc violent (fort):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_{1,n}^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} \rightarrow p_2 = (75.0) \frac{2 \times 1.4 \times 1.988^2 - 0.4}{(1.4 + 1)} = \mathbf{333 \text{ kPa}}$$

Finalement, on calcule le nombre de Mach en aval,

$$\text{Choc faible: } M_2 = \frac{M_{2,n}}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{0.8032}{\sin(39.3^\circ - 10^\circ)} = \mathbf{1.64}$$

$$\text{Et pour le choc fort: } M_2 = \frac{M_{2,n}}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{0.5794}{\sin(83.7^\circ - 10^\circ)} = \mathbf{0.604}$$

Les changements du nombre de Mach et de la pression à travers le choc fort sont beaucoup plus importants que les changements à travers le choc faible, comme prévu.

Discussion Puisque l'équation $\tan \theta = \frac{2 \cot \beta (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2}$ est implicite en β , nous la résolvons par une

approche itérative ou avec un solveur d'équation (software) tel que EES. Pour les deux cas de choc oblique faible et fort, $M_{1,n}$ est supersonique et $M_{2,n}$ est subsonique. Cependant, M_2 est *supersonique* à travers le choc oblique faible, mais *subsonique* à travers le choc oblique fort. Nous pourrions également utiliser les tables de chocs normales à la place des équations, mais avec une perte de précision.

ExO6.Solution

La situation considérée est représentée sur la **Fig. 6a**.

En amont de l'onde initiale, les conditions suivantes existent:

$$p_1 = 60 \text{ kPa}, \quad T_1 = 253 \text{ K}, \quad M_1 = 2.5$$

Les conditions en aval de l'onde initiale, c.-à-d. dans la région 2, sont d'abord obtenues.

Maintenant pour: $M_1 = 2.5$, $\delta = 4^\circ$

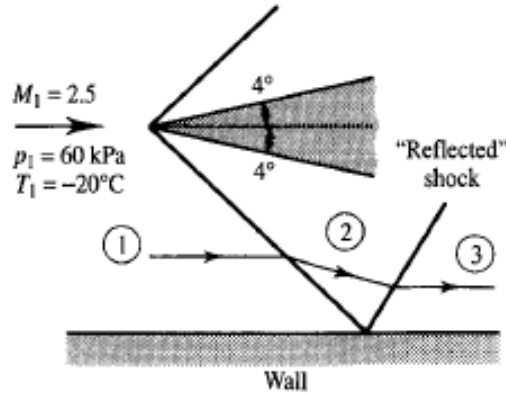


Fig. 6a

les graphiques ou les tables de choc oblique donnent $\beta = 26.6^\circ$

$$\text{D'où } M_{1,n} = M_1 \cdot \sin \beta = 2.5 \sin 26.6 = 1.12$$

Cette valeur est également donnée directement par les logiciels.

Ensuite, en utilisant des relations du choc normal ou les tables ou un logiciel pour un nombre de Mach en amont ($M_{1,n}$) de 1.12, les résultats suivants sont obtenus:

$$M_{n,2} = 0.897, \quad \frac{p_2}{p_1} = 1.336, \quad \frac{T_2}{T_1} = 1.087$$

$$\text{Mais: } M_{n,2} = M_2 \sin(\beta - \delta)$$

$$\text{Par conséquent: } M_2 = \frac{0.897}{\sin(26.6 - 4)} = 2.334$$

Les conditions derrière l'onde réfléchie, c.-à-d. dans la région 3 seront ensuite dérivées en considérant les changements de la région 2 à la région 3 comme indiqué sur la **Fig. 6b**

$$\text{Maintenant pour: } M_2 = 2.334, \quad \delta = 4^\circ$$

Le graphique des chocs obliques, les tables ou le logiciel donnent: $\beta_2 = 28.5^\circ$

$$\text{D'où: } M_{2,n} = M_2 \cdot \sin \beta_2 = 2.334 \sin 28.5 = 1.113$$

Cette valeur est également donnée directement par le logiciel.

Ensuite, en utilisant des relations du choc normales, les tables ou des logiciels pour un nombre de Mach en amont ($M_{1,n}$) de 1.113, on obtient:

$$M_{n,3} = 0.90176, \quad \frac{p_3}{p_2} = 1.297, \quad \frac{T_3}{T_2} = 1.078$$

$$\text{Mais: } M_{3,n} = M_3 \cdot \sin(\beta - \delta)$$

$$\text{Par conséquent: } M_3 = \frac{0.90176}{\sin(28.5^\circ - 4^\circ)} = 2.17$$

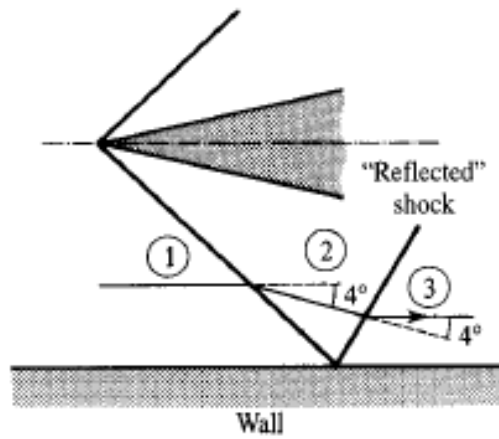


Fig. 6b

Également: $p_3 = \left(\frac{p_3}{p_2} \times \frac{p_2}{p_1}\right) p_1 = 1.297 \times 1.336 \times 60 = \mathbf{104.0 \text{ kPa}}$

$$T_3 = \left(\frac{T_3}{T_2} \times \frac{T_2}{T_1}\right) T_1 = 1.078 \times 1.087 \times 253 = 296 \text{ K}$$

$$a_3 = \sqrt{\gamma r T_3} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 296} = 345 \text{ m/s}$$

De ces résultats, il résulte que: $V_3 = M_3 a_3 = 2.17 \times 345 = \mathbf{749 \text{ m/s}}$

Par conséquent, après la réflexion, la pression et la vitesse sont respectivement de **104 kPa** et **749 m/s**.