Le transfert de chaleur par des surfaces à ailettes

1. Principe des ailettes

La quantité de chaleur transmis d'une surface à une température T_s vers le milieu environnant à T_∞ est donné par la loi de Newton comme suit :

$$Q = h.S.(T_s - T_\infty)$$

Où S est la surface de transfert de chaleur et h est le coefficient de transfert de chaleur par convection. Lorsque les températures T_s et T_∞ sont fixées par des considérations de conception, il existe deux façons d'augmenter le flux de chaleur transmis :

- Par l'augmentation de coefficient de transfert de chaleur par convection h.
- Par l'augmentation de la surface S.

L'augmentation de h peut nécessiter l'installation d'une pompe ou d'un ventilateur, ou remplacer l'existant par un plus grand, mais cette approche n'est pas pratique. La sélection consiste à augmenter la surface en fixant à la surface des surfaces supplémentaires appelées ailettes, faites de matériaux hautement conducteurs tels que l'aluminium.

Les ailettes améliorent la quantité de chaleur transmis à partir de l'augmentation artificiellement de la surface d'échange entre le système et le fluide, en exposant une plus grande surface à la convection et le rayonnement.

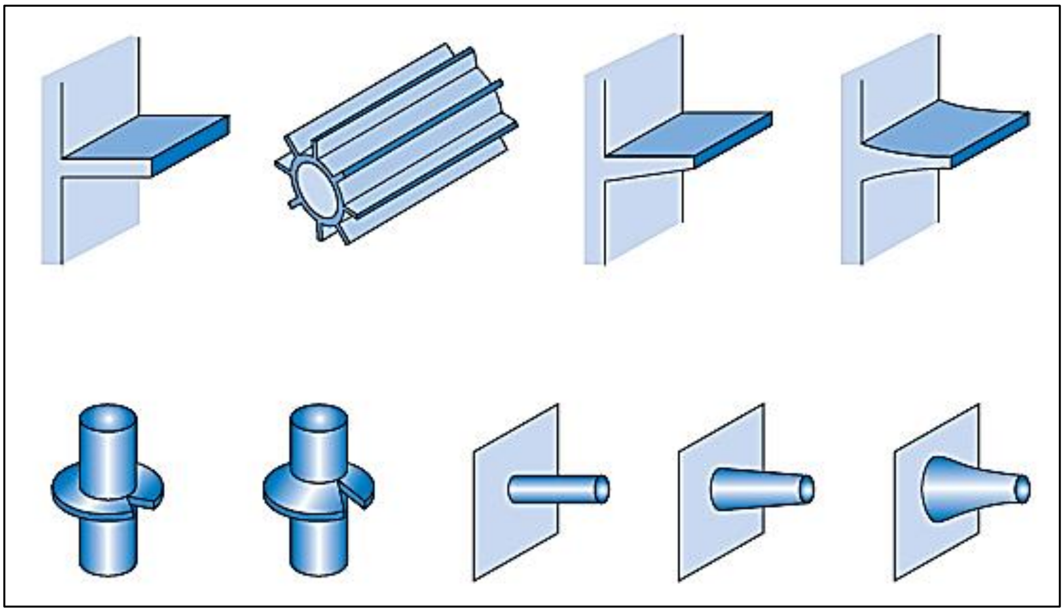

Figure III.1 : Schémas des différents types des ailettes

2. Développement de l'équation générale unidimensionnelle

Considérons une ailette ayant la forme d'une tige fixée à la base d'une paroi à la température de surface T_s (Figure III.2). L'ailette est refroidie le long de sa surface par un fluide à la température T_∞. La tige à un périmètre p et une surface de section latérale uniforme S, est faite d'un matériau ayant une conductivité uniforme k ; le coefficient de transfert de chaleur entre la surface de l`ailette et le fluide est h.

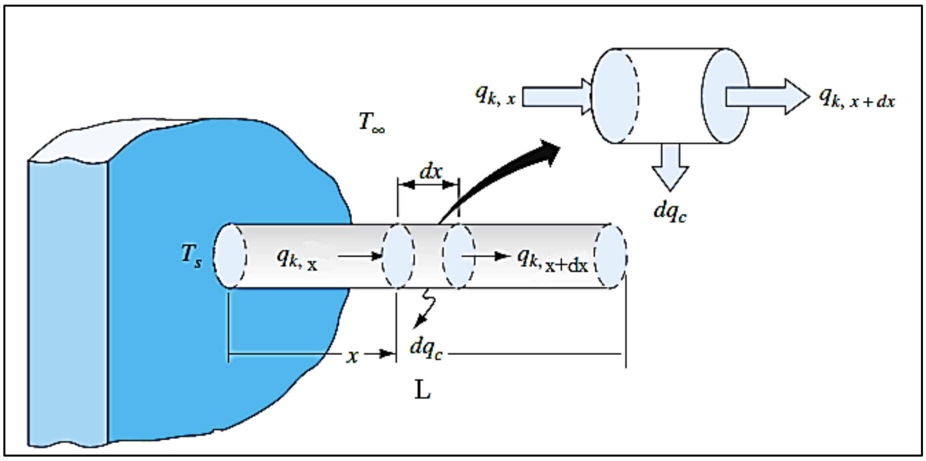

Figure III.2 : Schéma d'une ailette qui a été placée sur un mur

Le bilan énergétique de cet élément de volume peut être exprimé comme suit :

$$\begin{bmatrix}\text{Le flux de chaleur}\\ \text{par conduction}\\ \text{dans l'élément à x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Le flux de chaleur}\\ \text{par conduction}\\ \text{dans l'élément à x + dx}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Le flux de chaleur}\\ \text{par convection}\\ \text{à partir de la surface entre x + dx}\end{bmatrix}$$

Cette équation devient, sous forme symbolique :

$$\mathrm{Q}_{cond,x} = \mathrm{Q}_{cond,x+dx} + \mathrm{Q}_{conv} \qquad (\mathrm{II.1})$$

$$-\mathrm{KS}\left(\frac{dT}{dx}\right)_x = -\mathrm{KS}\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} + \mathrm{hpdx}[T(x) - T_\infty]$$

$$-\mathrm{KS}\left(\frac{dT}{dx}\right)_x + KS\left[\left(\frac{dT}{dx}\right)_x + \frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right)_x dx\right] - \mathrm{hpdx}[T(x) - T_\infty] = 0 \qquad (\mathrm{III.2})$$

Admettons les paramètres ci-dessous relatifs au problème considéré :

- p : Le périmètre de la section droite de la tige, ($\mathrm{p} = \pi.\mathrm{d}$).
- K : La conductivité thermique [w/m.k].
- h : Le coefficient d'échange convectif [w/m^2.k]
- T_s : La température ambiante [k]
- S : La surface de la section droite de la tige, ($\mathrm{S} = \pi.d^2/4$)

En développant et simplifiant cette expression, on arrive à l'équation décrivant le transfert de chaleur à travers la tige comme suit :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \mathrm{m}^2[T(x) - T_\infty] = 0 \qquad (\mathrm{II.3})$$

Avec :

$$\mathrm{m}^2 = \frac{\mathrm{hp}}{KS} \qquad (\mathrm{II.4})$$

L'équation (III.3) est une équation différentielle linéaire, du second ordre, dont la solution générale est de la forme :

$$T(x) - T_\infty = A.cosh(mx) + B.sinh(mx) \qquad (\mathrm{III.5})$$

Pour évaluer les constantes A et B, il est nécessaire d'utiliser les conditions aux limites qui sont :

- à $x = 0; T(0) = T_s$ remplacées dans l'équation (III.5) donne :

$$T_s - T_\infty = A.cosh(m.0) + B.sinh(m.0)$$

$$T_s - T_\infty = A$$

- à $x = L$; le flux transmis par convection est égal au flux transmis par conduction à travers la section droite, donc :

$$-KS\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = \mathrm{hS}[T_L - T_\infty]$$

$$-K\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = \mathrm{h}[T_L - T_\infty]$$

- à $x = 0$

$$T_s - T_\infty = A$$

- à $x = L$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_x = A.m.sinh(mx) + B.m.cosh(mx)$$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = A.m.sinh(mL) + B.m.cosh(mL)$$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = (T_s - T_\infty).m.sinh(mL) + B.m.cosh(mL)$$

$$-K\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = -K.m.(T_s - T_\infty).sinh(mL) - K.B.m.cosh(mL)$$

$$\Rightarrow \mathrm{h}[T_L - T_\infty] = -K.m.(T_s - T_\infty).sinh(mL) - K.B.m.cosh(mL)$$

Et puisque à partir de l'équation (III.5) :

$$T_L - T_\infty = (T_s - T_\infty).cosh(mL) + B.sinh(mL)$$

$$h[(T_s - T_\infty).cosh(mL) + B.sinh(mL)]$$
$$= -K.m.(T_s - T_\infty).sinh(mL) - K.B.m.cosh(mL)$$

$$B.[h.sinh(mL) + K.m.cosh(mL)] = -(T_s - T_\infty).[h.cosh(mL) + K.m.sinh(mL)]$$

$$\Rightarrow B = \frac{-(T_s - T_\infty).[h.cosh(mL) + K.m.sinh(mL)]}{[h.sinh(mL) + K.m.cosh(mL)]}$$

La solution dans ce cas est donnée par :

$$T(x) - T_\infty = (T_s - T_\infty).\left[cosh(mx) - \frac{\frac{h}{Km}cosh(mL) + sinh(mL)}{\frac{h}{Km}sinh(mL) + cosh(mL)}.sinh(mx)\right]$$

On pose :

$$G = \frac{h}{Km}$$

$$\frac{T(x) - T_\infty}{(T_s - T_\infty)} = \left[cosh(mx) - \frac{G.cosh(mL) + sinh(mL)}{G.sinh(mL) + cosh(mL)}.sinh(mx)\right]$$

$$= \left[\frac{G.sinh(mL).cosh(mx) + cosh(mx).cosh(mL) - G.cosh(mL).sinh(mx) - sinh(mL).sinh(mx)}{G.sinh(mL) + cosh(mL)}\right]$$

Sachant que :

$$sinh[m(L - x)] = sinh(mL).cosh(mx) - cosh(mL).sinh(mx)$$

$$cosh[m(L - x)] = cosh(mx)cosh(mL) - sinh(mL)sinh(mx)$$

$$\frac{T(x) - T_\infty}{(T_s - T_\infty)} = \frac{G.sinh[m(L - x)] + cosh[m(L - x)]}{G.sinh(mL) + cosh(mL)} \qquad \text{(III. 6)}$$

C'est l'équation générale de transfert de chaleur par des surfaces à ailettes unidimensionnelle.

3. Flux total dissipé par l'ailette

Dans le présent exemple ou le régime est permanent, le flux total dissipe le long de la tige est égal à celui transférer par conduction à travers la section latérale de l'ailette et égal à celui dissipé par convection à travers la surface extrême de l'ailette :

$$Q_{cond} = Q_{conv} \qquad \text{(III. 7)}$$

- Puissance dissipé par l'ailette :

$$Q = -KS\left(\frac{dT}{dx}\right)_x = KmS(T_s - T_\infty)\frac{sinh(mL) + Gcosh(mL)}{cosh(mL) + Gsinh(mL)} \qquad \text{(III. 8)}$$

Après développement, simplification et arrangement, le flux de chaleur est donné par :

$$Q = KmS(T_s - T_\infty)\frac{tanh(mL) + G}{1 + Gtanh(mL)} \qquad (III.9)$$

Avec :

$$\mathrm{m} = \sqrt{\frac{\mathrm{hp}}{\mathrm{KS}}} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{Km}}$$

4. L'efficacité de l'ailette

Rappelons que les ailettes sont utilisées pour augmenter la quantité de chaleur transmis à partir d'une paroi en augmentant la surface effective. Pour cette raison, l'évaluation de la qualité d'une ailette peut être faite en évaluant l'efficacité des ailettes η. L'efficacité d'une ailette η est définie comme le rapport entre la quantité de chaleur réelle échangée par les ailettes et la quantité de chaleur échangée par convection (maximum). L'efficacité de l'ailette est donnée comme :

$$\eta = \frac{Q_{\text{réel échangé}}}{Q_{\text{maximum}}} \qquad (III.10)$$

$$\begin{cases} Q_{\text{réel échangé}} = KmS(T_s - T_\infty)\dfrac{tanh(mL) + G}{1 + Gtanh(mL)} \\ Q_{maximum} = \mathrm{hpL}(T_s - T_\infty) \end{cases}$$

Après arrangements mathématiques pour simplification, l'expression finale de l'efficacité est donnée par :

- Ailette rectangulaire très longue (L→∞) :

$$\eta = \frac{1}{mL} \qquad (III.11)$$

- Ailette rectangulaire isolée à l'extrémité :

$$\eta = \frac{tanh(mL)}{mL} \qquad (III.12)$$

- Ailette rectangulaire et circulaire avec transfert de chaleur à l'extrémité :

$$\eta = \frac{tanh(mL) + G}{mL + Gtanh(mL)} \qquad (III.13)$$

Les relations d'efficacité des ailettes sont développées pour des ailettes de différents profils et sont représentées à la Figure III.3 pour des ailettes sur une surface plane et à la Figure III.4

pour des ailettes circulaires d'épaisseur constante. Pour la plupart des ailettes d'épaisseur constante rencontrées dans la pratique, l'épaisseur « t » de l'ailette est trop faible par rapport à la longueur L de l'ailette, et la surface de l'extrémité de l'ailette est donc négligeable.

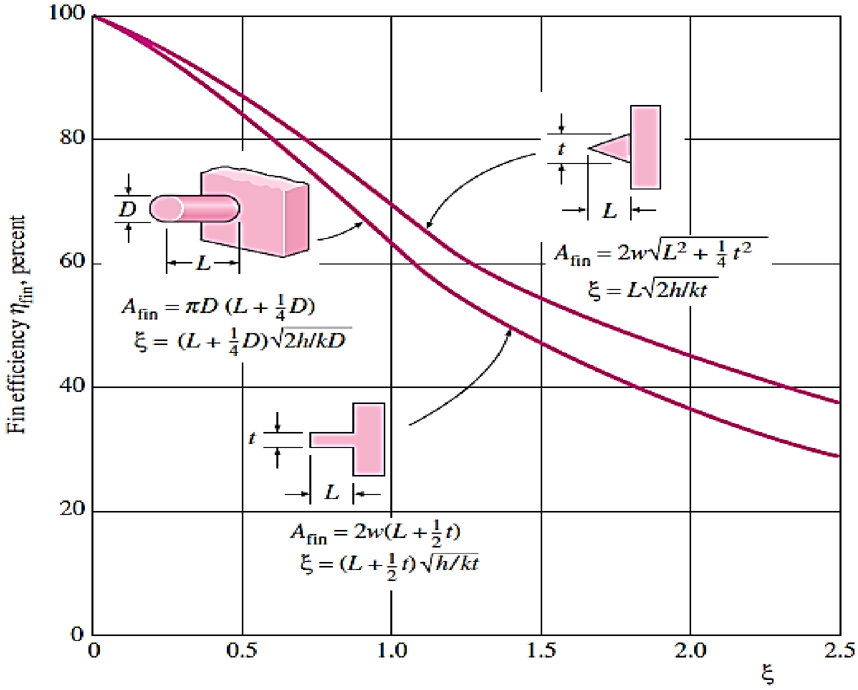

Figure III.3 : Efficacité d'ailettes circulaires, rectangulaires et triangulaires sur une surface plane de largeur w

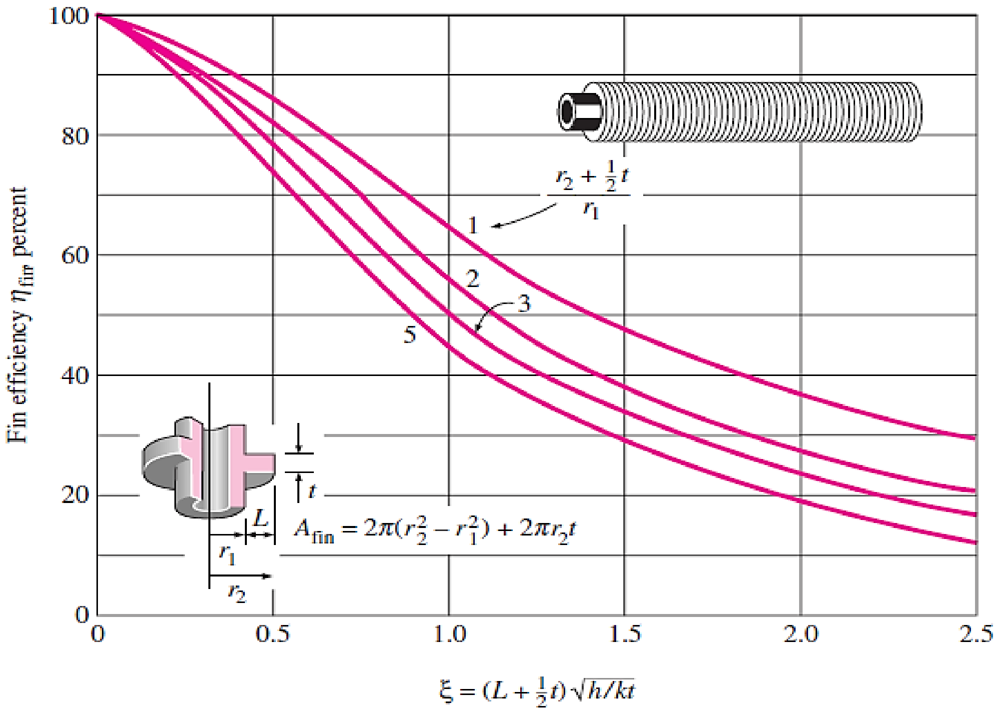

Figure III.4 : Efficacité d'ailettes circulaires de longueur L et d'épaisseur constante t