

CHAPITRE 2: TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION

1. Concept de la conduction

Le transfert de la chaleur par conduction est associée aux mouvements de translation, vibration et rotation des molécules et atomes constituant le milieu considéré.

Quand la température d'un corps croît, l'énergie cinétique des molécules et atomes le constituant croît aussi entraînant une augmentation du transfert de chaleur par conduction.

2. Lois fondamentales de la conduction

2.1 Définitions

Considérons une plaque (D) de surface S. Soit dQ la quantité de chaleur échangée entre la plaque et l'air ambiant pendant le temps dt.

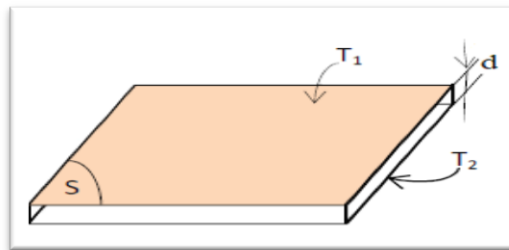


Figure II.1 : Plaque plane

On définit :

- Le flux thermique comme la puissance échangée par la surface S de la plaque. Il s'exprime :

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} [\Phi] : \text{Watts} \quad (\text{II.1})$$

- La densité de flux thermique comme la puissance échangée par une surface unité de la plaque. Elle s'exprime :

$$\varphi = \frac{dQ}{Sdt} [\varphi] : \text{Watts/m}^2 \quad (\text{II.2})$$

- La source de chaleur par la puissance thermique qu'elle produit. Dans le cas d'une réaction chimique, elle s'exprime :

$$Q' = A_0 e^{-\alpha t} \quad (\text{II.3})$$

Où: A_0 et α sont des constantes.

2.2 Loi élémentaire de Fourier

Les principes fondamentaux de la thermodynamique nous font savoir que :

- L'énergie est conservée en l'absence de source de chaleur,

- La chaleur transmise passe toujours du corps chaud vers le corps froid.

Si on considère la plaque (D) :

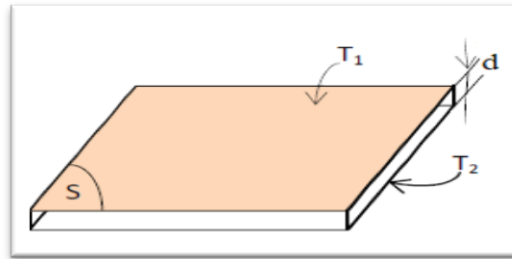


Figure II.2: Plaque plane à travers laquelle se transmet la chaleur

On peut vérifier expérimentalement que :

$$Q = K \frac{S}{d} (T_1 - T_2) \quad (\text{II.4})$$

Avec:

- $T_1 > T_2$
- Q : la quantité de chaleur transférée à travers (D).
- K : le facteur de proportionnalité appelé conductivité thermique qui est une caractéristique du matériau.

Pour un élément infinitésimal dS , la relation (II.4) s'écrit :

$$dQ = -K dS \frac{\partial T}{\partial \eta} \quad (\text{II.5})$$

η : indice normal à la surface

L'équation (II.5) est attribuée au mathématicien Jean Baptiste Fourier qui énonça sa loi qui peut se traduire comme suit :

« En tout point d'un milieu isotrope, la densité de flux thermique instantanée est proportionnelle à la conductivité thermique k du milieu et au gradient de la température »

Ceci nous conduit à la forme vectorielle de la loi de Fourier qui exprime la densité du flux thermique définie comme la quantité de chaleur transmise par unité de surface. Soit :

$$\vec{Q} = -K \overrightarrow{\text{Grad}T} \quad (\text{II.6})$$

✚ Remarque

Par convention \vec{Q} est compte positivement dans le sens d'écoulement de la chaleur c'est-à-dire vers les températures décroissantes. $\overrightarrow{\text{Grad}}$ est un vecteur porte par le même axe mais de sens contraire à Q , d'où le signe négatif de la loi de Fourier.

2.3 Equation générale de la conduction

Dans un système de coordonnées cartésien (O, x, y, z), l'équation de la conduction de la chaleur ou simplement l'équation de la chaleur peut être développée en considérant un volume infinitésimal v et en effectuant le bilan thermique relatif à ce volume pendant le temps dt.

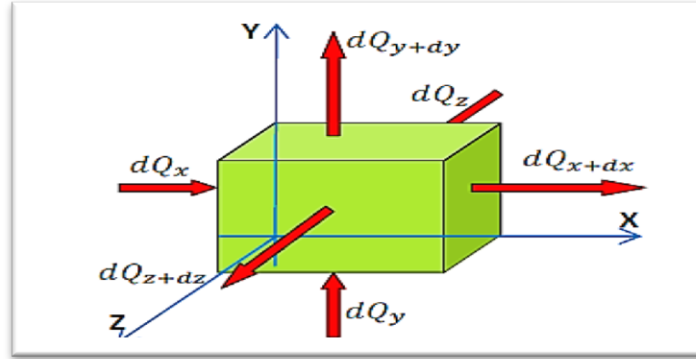


Figure II.3: Bilan thermique à travers un volume infinitésimal relativement au système de coordonnées cartésien

Relativement à la section perpendiculaire à l'axe des x, les quantités de chaleur s'expriment grâce à la loi de Fourier :

$$dQ_x = -K(dydz) \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$dQ_{x+dx} = dQ_x + \frac{\partial}{\partial x}(dQ_x)dx + \dots \text{ (Série de Taylor)}$$

$$dQ_{x+dx} = -K(dydz) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}[-K(dydz) \frac{\partial T}{\partial x}]dx$$

$$dQ_{x+dx} = -K \frac{\partial}{\partial x} \left[T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right] dydz$$

Le bilan thermique relativement à l'axe des x est :

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = -K \frac{\partial T}{\partial x} (dydz) + K \frac{\partial T}{\partial x} (dydz) + K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (dx dy dz)$$

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx dy dz \quad \text{(II.7)}$$

En exprimant les différentes quantités de chaleur mises en jeu relativement aux parois perpendiculaires aux axes y et z, et en développant les équations de la même manière que pour la direction x, on aura :

$$dQ_y - dQ_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y} \left[K \frac{\partial T}{\partial y} \right] dx dy dz \quad (\text{II.8})$$

$$dQ_z - dQ_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial T}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (\text{II.9})$$

Le bilan des quantités de chaleur transmises par conduction à travers le volume V est :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) dx dy dz$$

Si par unité de temps et de volume, la quantité Q' (x, y, z, t) est fournie, alors la quantité de chaleur générée dans l'élément sera :

$$Q' dx dy dz \quad (\text{II.10})$$

La chaleur transmise dans l'élément de volume due à la conduction et la quantité générée ensemble servent à augmenter l'énergie interne de l'élément. Cet accroissement s'exprime :

$$\rho c dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.11})$$

Le bilan énergétique final donne :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial T}{\partial z} \right] + Q' \quad (\text{II.12})$$

Qui est l'équation générale de la conduction en coordonnées cartésiennes. Elle est générale et est valable pour les milieux hétérogènes anisotropes car :

$$K = K(x, y, z, t)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

$$c = c(x, y, z, t)$$

Pour un corps isotrope et homogène, l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{Q'}{\rho c} \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{Q'}{\rho c} \quad (\text{II.14})$$

Où : $\alpha = k / \rho c$ est le coefficient de diffusivité thermique.

2.4 Equation générale de la conduction en coordonnées cylindriques

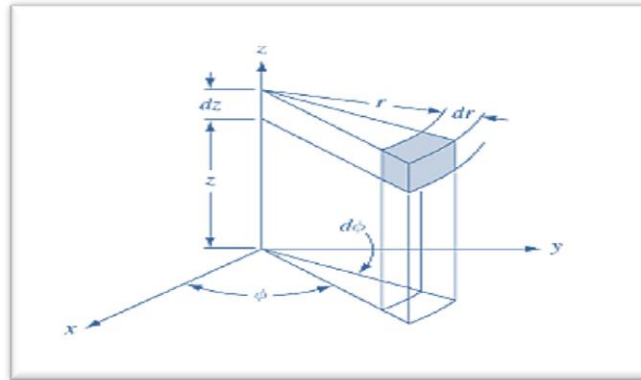


Figure II.4: Système de coordonnées cylindriques

Sachant que :

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

L'équation de la chaleur s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{Q}{\rho c} \quad (II.15)$$

2.5 Equation générale de la conduction en coordonnées sphériques

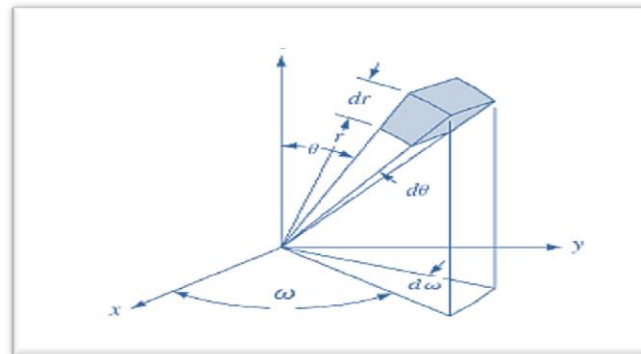


Figure II.5: Système de coordonnées sphériques

Sachant que :

$$x = r \cos \varphi \sin \omega$$

$$y = r \sin \varphi \sin \omega$$

$$z = r \cos \omega$$

L'équation de la chaleur s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\sin \omega \frac{\partial T}{\partial \omega} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \omega} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{Q'}{\rho c} \quad (\text{II.16})$$

3. Conditions aux limites

L'équation générale de la conduction est une équation aux dérivées partielles, linéaire de deuxième ordre. Elle admet une infinité de solutions et ne peut avoir de sens physique que pour des conditions définies représentant les causes qui déterminent l'évolution du phénomène : ce sont les conditions aux limites.

4. Conduction permanente

En régime permanent ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$) sans sources ($Q' = 0$), la répartition des températures dans un milieu isotrope et homogène obéit à l'équation :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II.17})$$

Dans ce qui suit, nous n'intéresserons pas à la résolution de l'équation dans le cas général mais considérerons plutôt des cas simples qui souvent sont les plus utilisés dans la pratique.

➤ **Exemple de mur**

Le mur est un milieu conducteur homogène limité par deux plans parallèles infinis maintenus à une température uniforme.

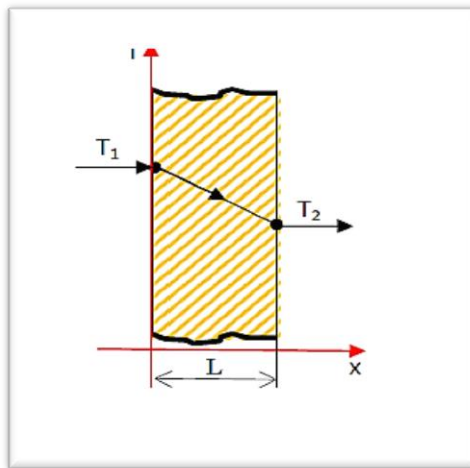


Figure II.6: Distribution de la température à travers un mur en régime permanent

Les sources de chaleur assumées inexistantes en régime permanent, l'équation fondamentale de la chaleur notée (II.13) se réduit à :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (\text{II.18})$$

Qui possède une solution de la forme :

$$T(x) = C_1x + C_2 \quad (\text{II.19})$$

Les constantes C_1 et C_2 sont évaluées à partir des conditions aux limites :

$$T = T_1 \text{ pour } x = 0$$

$$T = T_2 \text{ pour } x = L$$

Appliquant ces conditions, on obtient :

$$C_2 = T_1 \text{ et } C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

D'où

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \quad (\text{II.20})$$

Le flux de chaleur est constant en régime permanent et la loi élémentaire de Fourier permet de l'exprimer :

$$Q = -KS \frac{dT}{dx} \quad (\text{II.21})$$

$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L}$: est la pente de la droite représentée en figure II.6

Donc :

$$Q = K.S \frac{T_1 - T_2}{L}$$

5. Convection de la chaleur des surfaces

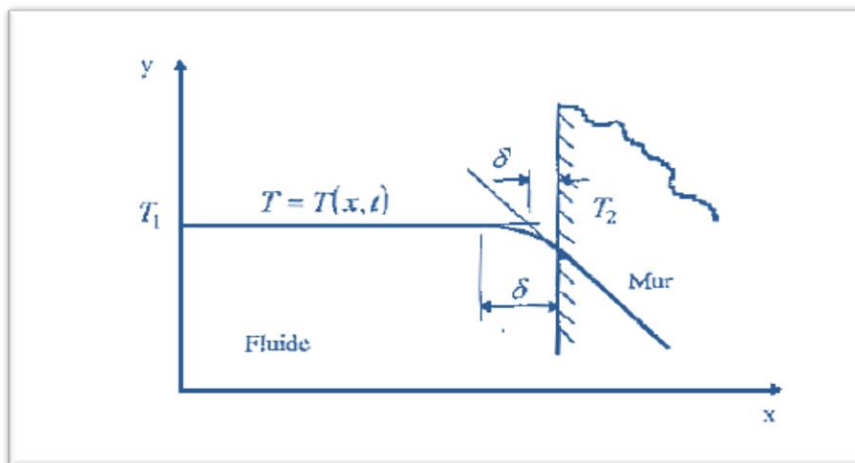


Figure II.7: Distribution de la température à travers un film mince de fluide adhérent à une paroi solide

Bien que le problème de la conduction ait pour objectifs principaux la détermination de la distribution de la température dans les corps ainsi que celle du flux de chaleur, les conditions de surface sont importantes.

Dans le cas où un fluide s'écoule sur une surface solide, la distribution de la température est celle illustrée par la figure II.7. Au sein du milieu fluide, le gradient de température est confiné à une couche mince située près du mur alors que plus loin de cette paroi, la température peut être considérée constante.

Dans le but de simplifier la distribution de la température, son profil est remplacé par une droite illustrée en pointille sur la figure II.7. Physiquement, ceci suppose qu'un film mince d'épaisseur δ' adhère au mur et c'est à travers ce dernier que la révolution de la température prend place. Le profil de cette dernière étant assumé représenté par une droite, on peut supposer que le transfert de chaleur se réalise sous forme de conduction comme dans le cas d'un mur solide. Ceci simplifie énormément les mécanismes réels qui prennent place et permet d'écrire :

$$Q = \frac{K_{fluide}}{\delta'} S. (T_{fluide} - T_{surface}) \quad (II.22)$$

La quantité de chaleur Q peut donc être déterminée si δ' est connue. Ce dernier paramètre dépend de plusieurs facteurs dont la vitesse du fluide, la forme de la surface ainsi que sa structure. En pratique, on préfère travailler avec le rapport $(\frac{K_{fluide}}{\delta'})$ plutôt que δ' . Si on note :

$$h = \frac{K_{fluide}}{\delta'} \quad (II.23)$$

h : représentant le coefficient de transfert de la chaleur par convection.

On aboutit à une relation exprimant le flux de chaleur échangé par convection entre un fluide et une paroi solide :

$$Q = h. S. (T_{fluide} - T_{mur}) \quad (II.24)$$

Qui est la loi de Newton.

➤ **Exemple de mur en contact avec deux fluides : analogie électrique**

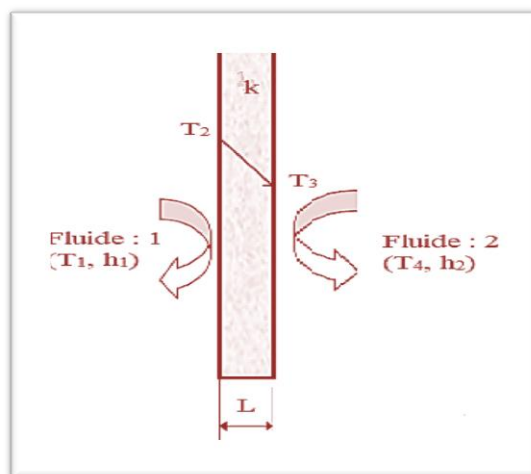


Figure II.8: Mur simple en contact avec deux fluides

Soit le mur d'épaisseur L et de conductibilité thermique k tel qu'illustre par la figure II.8.

La conservation du flux thermique impose :

$$Q = h_1 \cdot S \cdot (T_1 - T_2) = K \frac{S}{L} (T_2 - T_3) = h_2 \cdot S \cdot (T_3 - T_4) \quad (\text{II.25})$$

Qui peut s'écrire :

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{h_1 S}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{L}{k S}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{1}{h_2 S}}$$

D'où :

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R_{cv1}} = \frac{T_2 - T_3}{R_{cd}} = \frac{T_3 - T_4}{R_{cv2}} = \frac{T_1 - T_4}{R_{cv1} + R_{cd} + R_{cv2}} \quad (\text{II.26})$$

Où par analogie avec l'électricité, R_{cv1} , R_{cd} et R_{cv2} sont appelés les résistances thermiques.

La loi de Fourier ainsi que celle de Newton exprimant les quantités de chaleur transmises par conduction et par convection respectivement peuvent donc être comparées à celle d'Ohm qui exprime la différence de potentiel entre deux points d'un réseau électrique en fonction de sa résistance et de l'intensité du courant qui le traverse :

$$\begin{aligned} \frac{L}{kS} Q &= T_1 - T_2 : \text{Loi de Fourier} \\ \frac{1}{hS} Q &= T_1 - T_2 : \text{Loi de Newton} \\ R I &= U_1 - U_2 : \text{Loi d'Ohm} \end{aligned}$$

➤ Exemple de mur composé

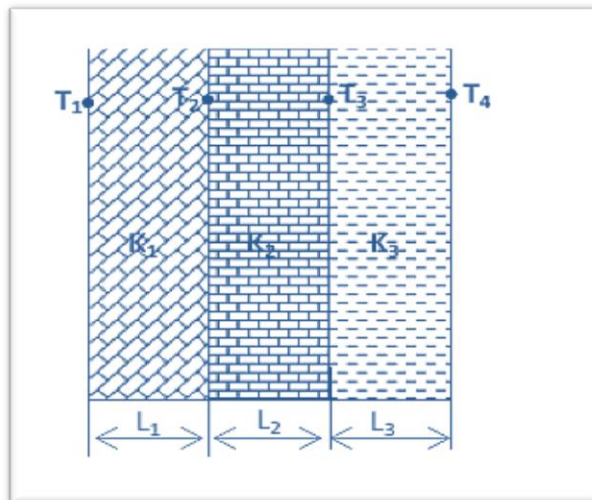


Figure II.9: Mur composé

La conservation du flux de chaleur implique :

$$Q = K_1 \frac{S}{L_1} (T_1 - T_2) = K_2 \frac{S}{L_2} (T_2 - T_3) = K_3 \frac{S}{L_3} (T_3 - T_4) \quad (\text{II.27})$$

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L_1}{K_1 S}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{L_2}{k_2 S}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{L_3}{K_3 S}} = \frac{T_1 - T_2}{R_1} = \frac{T_2 - T_3}{R_2} = \frac{T_3 - T_4}{R_3}$$

$$Q = \frac{T_1 - T_2 + T_2 - T_3 + T_3 - T_4}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{T_1 - T_4}{R} \quad (\text{II.28})$$

Avec :

$$R = \sum R_i$$

Le mur composé se comporte donc comme un mur simple de résistance thermique :

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

➤ **Cylindre creux long (tube)**

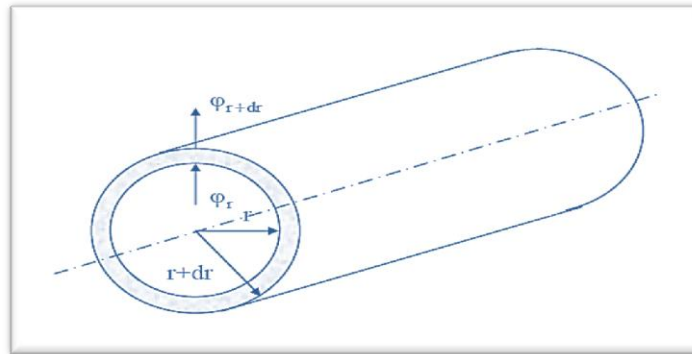


Figure II.10 : cylindre creux

On considère un cylindre creux de conductivité thermique K , de rayon intérieur r_1 , de rayon extérieur r_2 , de longueur L , les températures des faces internes et externes étant respectivement T_1 et T_2 . On suppose que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial.

Effectuons le bilan thermique du système constitué par la partie de cylindre comprise entre les rayons r et $r + dr$:

$$Q_r = Q_{r+dr}$$

$$\text{Avec : } Q_r = -2\pi k r L \left(\frac{dT}{dr}\right)_r$$

$$\text{Et } Q_{r+dr} = -2\pi k (r + dr) L \left(\frac{dT}{dr}\right)_{r+dr}$$

$$\text{Soit } -2\pi k r L \left(\frac{dT}{dr}\right)_r = -2\pi k (r + dr) L \left(\frac{dT}{dr}\right)_{r+dr}$$

$$\text{D'où : } r \frac{dT}{dr} = C$$

Avec les conditions aux limites : $T(r_1) = T_1$ et $T(r_2) = T_2$

$$T(r) = \frac{T_2 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + T_1 \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (\text{II.29})$$

Et par application de la relation :

$$Q = -2\pi krL \frac{dT}{dr}$$

On obtient :

$$Q = \frac{2\pi kL(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (\text{II.30})$$

Cette relation peut aussi être mise sous la forme :

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{R_{12}}$$

Avec

$$R_{12} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi kL}$$

Qui peut être représentée par le schéma électrique équivalent suivant :

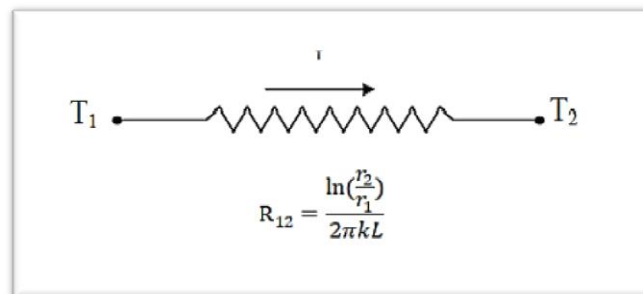


Schéma électrique équivalent

➤ **Cylindre creux multicouches**

C'est le cas pratique d'un tube recouvert d'une ou plusieurs couches de matériaux différents et où on ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les faces interne et externe du cylindre ; h_1 et h_2 sont les coefficients de transfert de chaleur par convection entre les fluides et les faces internes et externes :

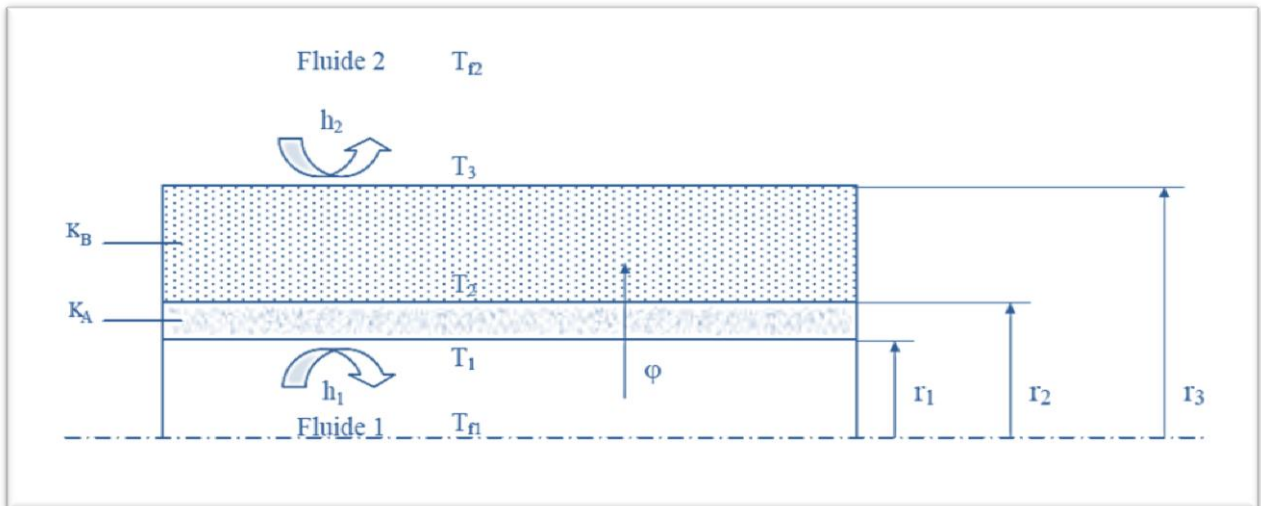


Figure II.11 : Cylindre creux multicouche

En régime permanent, le flux de chaleur Q se conserve lors de la traversée des différentes couches et s'écrit :

$$Q = h_1 2\pi r_1 L (T_{f1} - T_1) = \frac{2\pi k_A L (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi k_B L (T_2 - T_3)}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} = h_2 2\pi r_3 L (T_3 - T_{f2})$$

D'où :

$$Q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k_A L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi k_B L} + \frac{1}{h_2 2\pi r_3 L}} \quad (II.31)$$

Ce qui peut être représenté par le schéma électrique équivalent suivant :

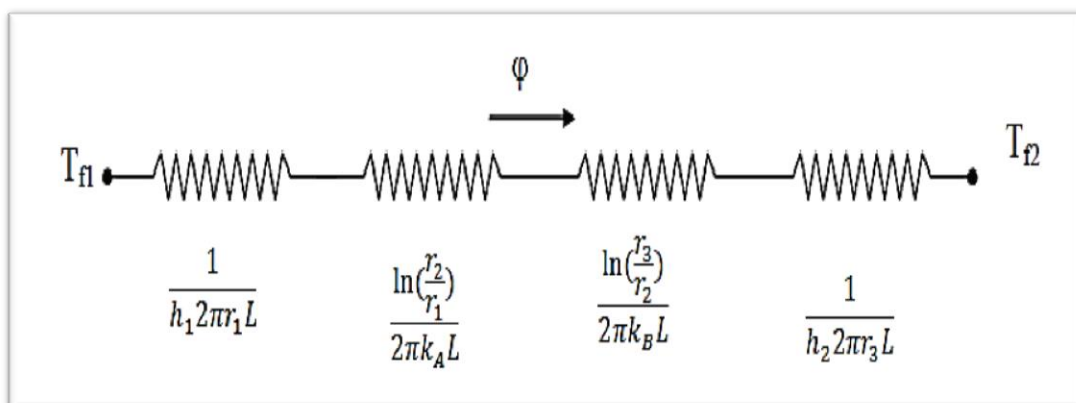


Figure II.12 : Schéma électrique équivalent de cylindre creux multicouche

6. Rayonnement de la chaleur des surfaces

Le flux de chaleur rayonne par un milieu de surface S et de température T s'exprime grâce à la loi de Stefan-Boltzman :

$$Q = \sigma \cdot S \cdot T^{-4} \quad (\text{II.32})$$

Où

σ : Constante de Stefan – Boltzman; $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \left[\frac{W}{m^2} \cdot K^4 \right]$

Série de travaux dirigés**Exercice 1 :**

Calculez le flux thermique ainsi que la densité du flux thermique à travers une plaque plane et homogène dont l'épaisseur est de 50mm si elle est (a) en acier inoxydable ($k = 16\text{W/mK}$) de dimensions $3\text{m} \times 2\text{m}$ ou en (b) en béton ($k = 0,92\text{W/mK}$) de dimensions $30\text{m} \times 20\text{m}$. Dans les deux cas, les températures aux surfaces de la plaque sont maintenues constantes et égales à, $T_1 = 100^\circ\text{C}$ et $T_2 = 90^\circ\text{C}$.

Solution :

(a) Plaque en acier :

$$Q_{\text{acier}} = 19200 \text{ watts}$$

$$\rho = 3200 \text{ w/m}^2$$

(b) Plaque en béton :

$$Q_{\text{béton}} = 110400 \text{ watts}$$

$$\rho = 184 \text{ w/m}^2$$

Exercice 2 :

La densité du flux thermique à travers un mur plan d'épaisseur 50mm est 70W/m^2 . Calculez la différence de température aux surfaces du mur et les valeurs numériques du gradient de température dans celui-ci si ce mur est en (a) en laiton ($k = 100 \text{ W/mK}$), (b) granit ($k = 2,5\text{W/mK}$) et (c) en bois ($k = 0,23\text{W/mK}$).

Solution :

(a) mur en laiton :

$$\Delta T = 0.035 \text{ K}$$

$$\text{Grad } T = 0.7 \text{ k/m}$$

(b) mur en granit :

$$\Delta T = 1.4 \text{ K}$$

$$\text{Grad } T = 28 \text{ k/m}$$

(c) mur en bois :

$$\Delta T = 15.2 \text{ K}$$

$$\text{Grad } T = 303.3 \text{ k/m}$$

Exercice 3 :

Les deux faces d'une plaque de cuivre de 3 cm d'épaisseur sont maintenues aux températures de 400°C et 100°C. Calculez la quantité de chaleur transmise par unité de surface à travers la plaque. ($K_{\text{cuivre}} = 370 \text{ W/m}\cdot\text{C}$).

Solution :

$$Q/S = 3.7 \text{ MW/m}^2$$

Exercice 4:

Calculer la perte calorifique au travers à mur en briques de 8 cm d'épaisseur, 4 m de hauteur et de 2 m de largeur. Les températures des deux faces du mur sont respectivement de 35°C et de 3°C. ($k = 0,69 \text{ W/m}\cdot\text{C}$).

Solution :

$$Q = 2208 \text{ W}$$

Exercice 5 :

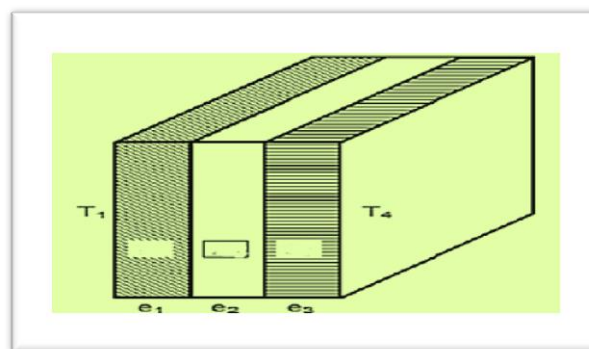
Le mur d'un four comporte trois couches de matériaux différents accolées les unes aux autres :

- Une couche de briques réfractaires ($K_1 = 1,21 \text{ W/m}\cdot\text{C}$)
- Une couche de revêtement calorifuge ($K_2 = 0,08 \text{ W/m}\cdot\text{C}$)
- Une couche de briques ($K_3 = 0,69 \text{ W/m}\cdot\text{C}$)

Chaque couche a une épaisseur de 10 cm.

La température est de 872°C à l'intérieur du four et de 32°C à l'extérieur.

1. Si la surface du mur est de 42 m², calculer la perte calorifique par conduction pendant 24 heures.
2. Quelle est la température T_m au milieu du revêtement ?



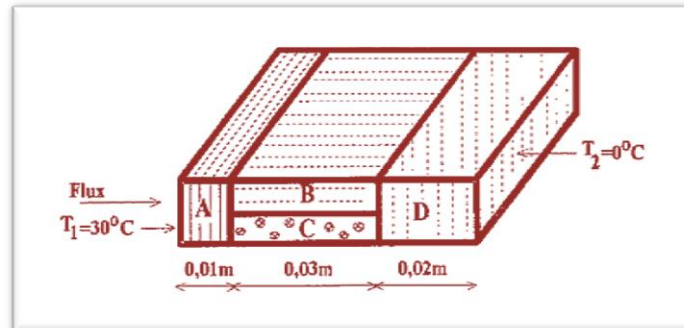
Solution :

$$Q = 573 \text{ kwh.}$$

$$T_m = \frac{T_2 + T_3}{2} = 469.7^\circ\text{C.}$$

Exercice 6 :

Utilisant l'analogie existant les grandeurs thermiques et électriques et assumant une conduction unidimensionnelle, calculez le flux de chaleur par unité de surface à travers le mur composé illustre comme suit. $k_A=175\text{ W/mk}$; $K_B=35\text{ W/mk}$; $K_C=80\text{ W/mk}$; $K_D=55\text{ W/mk}$.



Solution :

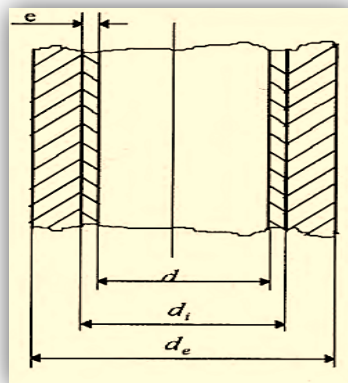
$$Q/S = 44\text{ kw/m}^2$$

Exercice 7 :

Une cheminée en béton armé ($k_1=1,1\text{ W/m}^\circ\text{C}$), possède un diamètre intérieur $d_i = 600\text{ mm}$ et un diamètre extérieur $d_e = 1000\text{ mm}$ doit être revêtue de l'intérieur par un matériau réfractaire ($k_2 = 0,5\text{ W/m}^\circ\text{C}$). Déterminez :

- (a) l'épaisseur du garnissage.
- (b) la température de la surface extérieure de la cheminée pour que les pertes thermiques ne dépassent pas 2000 W/m et que la température de la surface intérieure de la paroi en béton armé ne dépasse pas 200°C .

La température de la surface interne du garnissage est prise égale à 425°C .



Solution :

$$e = 89\text{ mm}$$

$$T_2 = 53^\circ\text{C}$$