سلسلة تمارين رقم 02 (الدوال الأصليــة و التكاملات)

التمرين1: باستعمال المكاملة بالتجزئة ، احسب التكاملات التالية:

1) $\int x^2 e^x dx$ 2) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ 3) $\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ 4) $\int_0^{\pi}\left(x^2+x+1\right)\sin x\, dx$

*5) $\int \ln\left(1+x^2\right)dx$ *6) $\int (\ln x)^2 dx$ *7) $\int arctgx dx$ *8) $\int chx \sin x dx$

التمرين2: باستعمال تبديل مناسب للمتغير، احسب التكاملات التالية:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$ 2) $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$ 3) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$ 4) $\int \frac{dx}{chx\, shx}$

*5) $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+1}}$ *6) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ *7) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^4}dx$

التمرين3: باستخدام تفكيك الدوال الناطقة إلى كسور ناطقة بسيطة ، احسب التكاملات التالية:

1) $\int \frac{3x^3-2x^2+2x+2}{x^2-x+1}dx$ 2) $\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2-4x}dx$ 3) $\int \frac{dx}{x^3+2x^2+x}$ 4) $\int \frac{dx}{x^3+1}$

*5) $\int \frac{x^2-5x+2}{x^2-5x+6}dx$ *6) $\int \frac{dx}{x^2(x+3)}$ *7) $\int \frac{dx}{x^4-16}$

التمرين4: احسب التكاملات التالية:

1) $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx$ 2) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

*3) $\int \frac{dx}{e^x+2e^{-x}}$ *4) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$ *5) $\int \frac{2\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt{x^3}-8x}dx$

التمرين5: ليكن $I_n=\int_1^e x\,(\ln x)^n dx$ من أجل كل عدد طبيعي n.

1.احسب كل من I_0 و I_1 .

2. باستعمال المكاملة بالتجزئة أوجد علاقة بين I_{n+1} و I_n ، ثم استنتج كل من I_2 و I_3 .

ملحق: جدول الدوال الأصلية لدوال مألوفة ، حيث c عدد حقيقي ثابت

الدالة: $x \mapsto f(x)=$	الدالة الأصلية: $x \mapsto \int f(x)dx =$		الدالة: $x \mapsto f(x)=$	الدالة الأصلية: $x \mapsto \int f(x)dx =$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$		$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}+c; \quad u(x)>0$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c,\ \left(x \in \mathbb{R}^*\right)$		$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}+c$
e^x	e^x+c		$\frac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{arc}tgx+c,\ x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x+c$		$\frac{1}{x^2+a^2}, \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$\frac{1}{a}\operatorname{arc}tg\,\frac{x}{a}+c$
$\cos x$	$\sin x+c$		$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c,\ x \in]-1;1[$
$\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x$	$tgx+c,\ \left(x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi; k \in \mathbb{Z}\right)$		$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}=1-\operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x+c,\ x \in \mathbb{R}$
$u'(x)u^n(x)\ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{u^{n+1}(x)}{n+1}+c$		$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arg\,sh} x+c=$ $\ln(x+\sqrt{x^2+1})+c$
$\frac{u'(x)}{u^n(x)}\ (n \in \mathbb{N}\setminus\{1\})$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}(x)}+c; u(x)\neq 0$		$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arg\,ch} x+c=$ $\ln(x+\sqrt{x^2-1})+c,\ x>1$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert+c; \quad u(x)\neq 0$		$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arg\,th} x+c=$ $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+c,\ x \in]-1;1[$

ملاحظة: التمارين والحالات المسبوقة بالإشارة $(^*)$ إضافية ، يُترك حلّها للطالب لإعداده لأشكال التقويم المختلفة.