سلسلة تمارين رقم 01 (دستور تايلور و النشر المحدود)

التمرين1:

1. انشر الدالة $f: x \mapsto \sqrt{x+1}$ حسب دستور ماك لوران بباقي لاغرانج من الرتبة الثالثة.

2. استنتج قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{0.999}$.

التمرين2:

باستعمال النشر المحدود للدوال الأولية، أوجد النشر المحدود للدالة f من الرتبة الرابعة في جوار الصفر في الحالات التالية:

1) $f(x)=\ln(2+x)$ 2) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ 3) $f(x)=e^{\cos x}$

*4) $f(x)=(1+x)^{x}$ *5) $f(x)=e^{\sin x}$ *6) $f(x)=\sqrt[3]{2-x}$.

التمرين3:

أوجد نشرًا محدودًا للدالة f بجوار $+\infty$ من الرتبة n في الحالات التالية:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x}$ ، $n=3$ 2) $f(x)=\dfrac{1-3x+x^2}{1+2x+2x^2}$ ، $n=3$

*3) $f(x)=(2x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$ ، $n=2$ *4) $f(x)=\dfrac{1+x-x^2+2x^3}{2+3x+2x^2+x^3}$ ، $n=3$.

التمرين4:

باستعمال النشر المحدود ، احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x}+\sqrt[3]{1+3x}-e^{-x^2+\ln 2}}{x^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x}-xe}{[\ln x]^2}$ 3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(ch\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

*4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ch\,2x}-2chx+1}{x^4}$ *5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sqrt{1+x}-x\left(e^{x}-1\right)}{[\ln(1+x)]^4}$ *6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(\ln x)-1}{\left(e^{x}-e\right)^2}$.

التمرين5:

لنعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

بيّن ،باستعمال النشر المحدود للدالة f بجوار كل من $+\infty$ و $-\infty$ من الرتبة الثالثة، أنّ المنحنى (c_f) الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يُطلب تعيين معادلتيهما.

***التمرين6:**

لنعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}e^{\sin\frac{1}{x}}-2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

برهن أنّ المنحنى (c_f)، الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم، يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=x-2$ بجوار $+\infty$.

ملحق: النشر المحدود لبعض الدوال الأولية بجوار الصفر

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^{2}}{2!} + \cdots + \frac{x^{n}}{n!} + o(x^{n})$$

$$chx = 1 + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$shx = x + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n} + o\left(x^{n}\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^{2} + \cdots + x^{n} + o\left(x^{n}\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n} + o\left(x^{n}\right)$$

ملاحظة: التمارين والحالات المسبوقة بالإشارة (*) إضافية ، يُترك حلّها للطالب لإعداده لأشكال التقويم المختلفة.