



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Faculté de la technologie  
2<sup>ème</sup> Année Master – Electromécanique



Modélisation et simulation des systèmes électromécaniques

## Cours:

Propriétés dynamiques de la machine à courant continu

Préparé Par:

*Dr. Labiod Chouaib*

**Année universitaire : 2021/2022**

## 1 - Introduction

Une machine à courant continu est une machine électrique : convertisseur électromécanique permettant la conversion bidirectionnelle d'énergie entre une installation électrique parcourue par un courant continu et un dispositif mécanique.

En fonctionnement moteur l'énergie électrique est transformée en énergie mécanique.

En fonctionnement générateur l'énergie mécanique est transformée en énergie électrique.

Dans ce cours nous allons voir la construction, le principe de fonctionnement, la modélisation et la simulation. Ensuite, le modèle MCC dans le repère dq sera présenté. Aussi le Modèle d'état et enfin le modèle MCC inverse par relation causale.

## 2- Construction de MCC

La machine à courant continu comporte les parties principales suivantes :

- Une partie fixe appelée STATOR qui aura le rôle d'inducteur.
- Une partie mobile appelée ROTOR qui aura le rôle d'induit.
- Une liaison rotor - éléments extérieurs à la machine appelée COLLECTEUR.

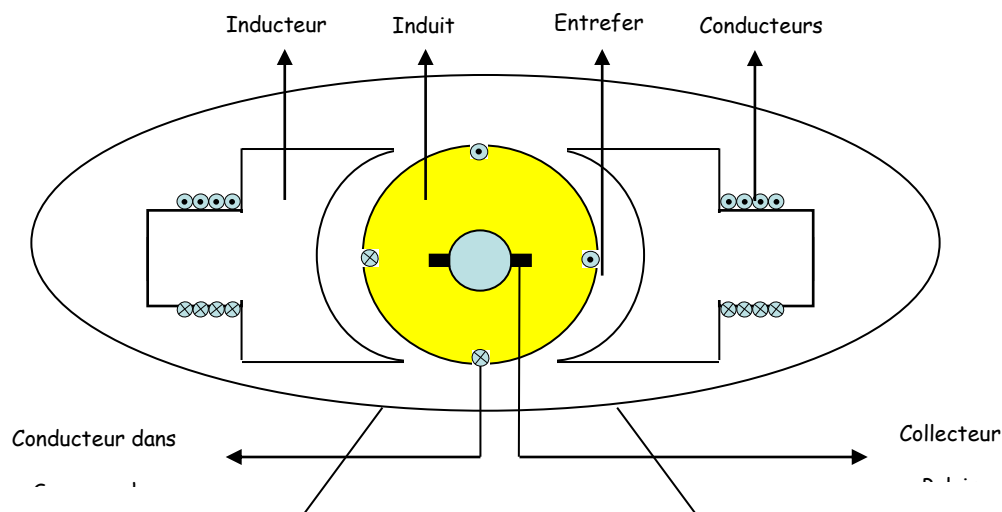


Figure 1 :Construction du Moteur à courant continu

### ➤ L'inducteur :

Il est formé soit d'aimants permanents en ferrite soit de bobines placées autour des noyaux polaires. Lorsque les bobines sont parcourues par un courant continu, elles créent un champ magnétique dans le circuit magnétique de la machine notamment dans l'entrefer, espace séparant la partie fixe et la partie mobile, où se situent les conducteurs.

- L'induit : Le noyau d'induit est en fer pour canaliser les lignes de champ, les conducteurs sont logés dans des encoches sur le rotor, deux conducteurs forment une spire.

➤ Collecteur et balais :

Le collecteur est un ensemble de lames de cuivre isolées, disposées sur l'extrémité du rotor, les balais portés par le stator frottent sur le collecteur.

### 3- Principe de fonctionnement

Une machine à courant continu possède un nombre  $N$  de conducteurs actifs, le flux utile sous un pôle créé par l'inducteur est  $\Phi$ , exprimé en webers, et  $n$  représente la fréquence de rotation de l'arbre du rotor, en tours par seconde.

Deux cas peuvent se présenter :

- Soit un conducteur est à la fois traversé par un courant électrique et plongé à l'intérieur d'un champ magnétique, il est alors soumis à une force électromagnétique.
- Soit un conducteur est à la fois en mouvement de rotation et plongé à l'intérieur d'un champ magnétique, il est alors le siège d'une force électromotrice

Ces deux cas peuvent être décrits par le schéma suivant :

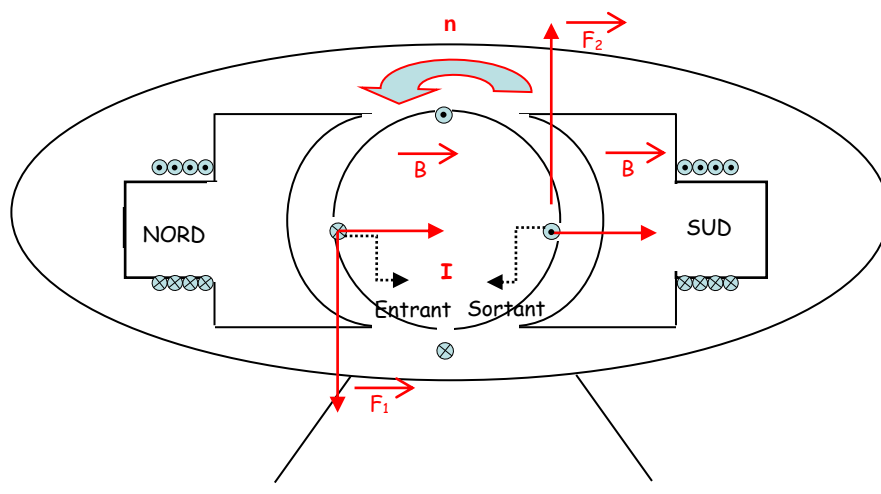


Figure 2: Principe de fonctionnement du Moteur à courant continu

Courant + Champ magnétique	➔	Force Electromagnétique
Force + Champ magnétique	➔	Force Electromotrice

Les conducteurs actifs, de nombre  $N$ , coupent les lignes du champ magnétique, ils sont donc le siège de forces électromotrices induites, la force électromotrice f.e.m résultante de l'ensemble de ces  $N$  spires :

$E = N.n.\Phi$		E	La f.e.m en volts [V]
		n	La fréquence de rotation en tours par seconde [tr.s <sup>-1</sup> ]
		$\Phi$	Le flux en webers [Wb]
		N	Le nombre de conducteurs actifs

➔ Cette relation est essentielle pour la machine, car elle est le lien entre le flux  $\Phi$  une grandeur magnétique, la tension E une grandeur électrique, et la fréquence de rotation n, une grandeur mécanique.

➔ Sachant que  $\Omega = 2\pi.n$ , une autre relation, reliant les trois types de grandeurs, est fréquemment utilisée, elle prend en compte la vitesse angulaire  $\Omega$  exprimée en radians par seconde :

$E = K.\Phi.\Omega$		E	La f.e.m en volts [V]
		$\Omega$	La vitesse angulaire en radians par seconde [rad.s <sup>-1</sup> ]
		$\Phi$	Le flux en webers [Wb]
		K	Constante

#### 4- Modèle dynamique du moteur à courant continu

Pour étudier et exprimer l'équation dynamique, nous avons les hypothèses simplificatrices suivantes:

il faut adopter les simplificatrices suivant :

- Entrefer constant.
- Effet des encoches négligé.
- Circuit magnétique non saturé et a perméabilité constante.
- Pertes ferromagnétiques négligeables.
- L'influence de l'effet de peau et de l'échauffement sur les caractéristiques n'est pas prise en compte.
- Réaction magnétique d'induit négligeable

Le modèle dynamique exprime le régime transitoire et permamante. Pendant le régime transitoire, la vitesse, le couple et le courant sont variables et étroitement liés aux paramètres du moteur (résistance, inductance, inertie, frottement, flux et tension d'alimentation).

La figure 3 montre les enroulements d'induit, les pôles auxiliaires et l'excitation indépendant (sépare).

$U_a$ : La tension de l'enroulement d'induit;

$U_f$ : La tension de l'enroulement d'excitation sépare;

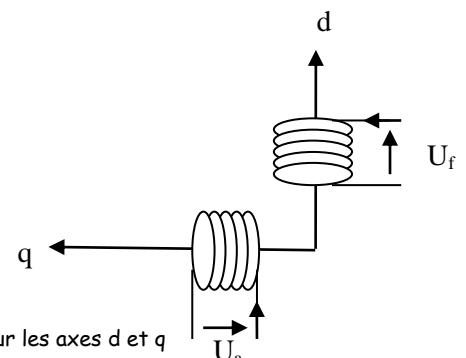


Figure 3 : Modèle simplifié de la MCC sur les axes d et q

Dans le cadre de ces hypothèses et pour une machine équilibrée, les équations de la machine s'écrivent sous la forme suivant :

$$\begin{cases} U_f = R_f \cdot I_f + \frac{d\phi_f}{dt} \\ U_a = R_a \cdot I_a + \frac{d\phi_a}{dt} + E \end{cases} \dots(1)$$

$$\begin{cases} U_f = R_f \cdot I_f + \frac{d\phi_f}{dt} \\ U_a = R_a \cdot I_a + \frac{d\phi_a}{dt} + \omega \cdot K \cdot \phi_f \end{cases} \dots(2)$$

**Equations des flux**

$$\begin{cases} \phi_f = L_f \cdot I_f \\ \phi_a = L_a \cdot I_a \end{cases} \dots(3)$$

L'équation mécanique s'écrit:

$$C_e = \frac{dW_{méc}}{d\theta} = K \cdot \phi_f \cdot I_a \dots(4)$$

et  $J \frac{d}{dt} (\Omega) = C_e - C_r - F\Omega \dots(5)$

Les équations sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} U_f \\ U_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_f & 0 \\ 0 & R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_f \\ I_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_f & 0 \\ 0 & L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_f \\ \dot{I}_a \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K \cdot L_f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_f \\ I_a \end{bmatrix} \dots(6)$$

$$U = \begin{bmatrix} U_f \\ U_a \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_f & 0 \\ 0 & R_a \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} I_f \\ I_a \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_f & 0 \\ 0 & L_a \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K \cdot L_f & 0 \end{bmatrix} \dots(7)$$

$U_f$  : tension continue appliquée à l'inducteur.;  $U_a$  : tension continue appliquée à l'induit. ;  $R_a$  : résistance d'induit. ;  $I_a$  : courant d'induit. ;  $\omega$  : Vitesse de rotation (rd/s). ;  $\phi$  : Flux utile par pole (webers).;  $C_e$  : Couple électromagnétique. ;  $k$  : Constante caractéristique de construction;  $E$  : f.c.e.m du moteur,  $C_r$  : couple résistant, ;  $J$  : le moment d'inertie ;  $f$  : le coefficient frottement

Le schéma-bloc pour ce modèle sous SIMULINK

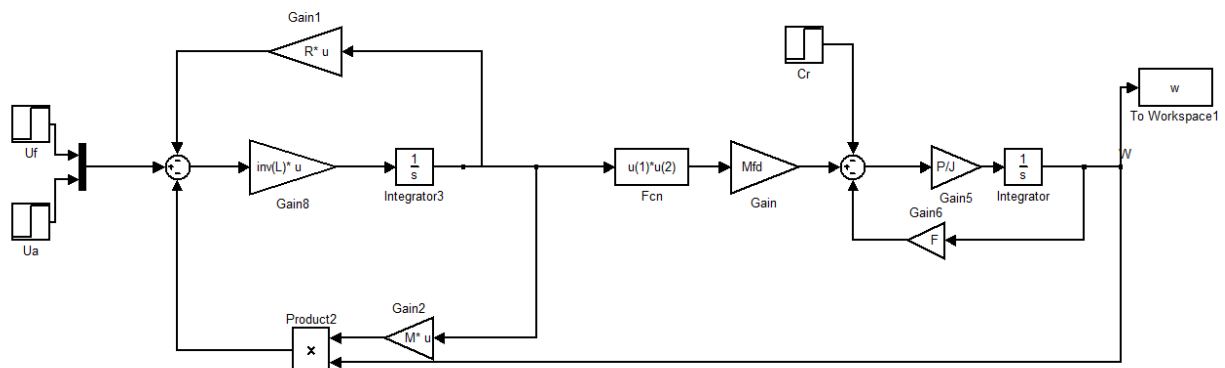


Figure 4: Simulation du moteur MCC

## 5- Variables d'état d'un système dynamique

On définit l'état d'un système à l'instant  $t_0$  comme l'information sur le passé nécessaire et suffisant pour déterminer l'évolution ultérieure du système quand on connaît, pour  $t > t_0$ , les signaux d'entrée et les équations du système. Plus généralement, les variables d'état dans les systèmes physiques sont les éléments aptes à emmagasiner de l'énergie sous la forme cinétique ou potentiel : inductances, capacités, masses, ressorts

### 7.1- Vecteur d'état

Un vecteur d'état est un ensemble minimal de variables d'état, c'est-à-dire de grandeurs temporelles nécessaires et suffisantes pour déterminer l'évolution future d'un système quand on connaît les équations qui décrivent le fonctionnement du système et les entrées de ce système.

Dans ce qui suit, l'état d'un système et en générale représenté par un vecteur d'état qui sera noté :

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \quad \dots(8)$$

Le nombre  $n$  de composantes correspond au degré de complexité du système. Il définit l'ordre du système

### 7.2- Equations d'état

Lorsqu'un système est modélisé sous la forme d'une représentation d'état, on montre qu'il est faisable d'exprimer l'état du système à un instant donné en fonction du signal d'entrée à ce même instant et en fonction de son « passé », autrement dit, de son état précédente. Comme nous avons affaire à des variables continues dans le temps, la notion d'état précédent n'existe pas vraiment. En revanche, ce concept est à rapprocher de l'évolution du système.

La forme généralisée des équations de système sous forme d'état est :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) + B U(t) \\ Y(t) = C X(t) + D U(t) \end{cases} \quad \dots(9)$$

- $X(t)$  : vecteur d'état du système de dimension  $n$ .
- $U(t)$  : vecteur d'entrée ou vecteur de commande du système de dimension  $l$ .
- $Y(t)$  : vecteur de sortie du système de dimension  $m$ .
- $A$  : matrice d'état du système de dimension  $n \times n$ .
- $B$  : matrice d'entrée ou de commande du système de dimension  $n \times l$ .
- $C$  : matrice de sortie du système de dimension  $m \times n$ .
- $D$  : matrice de transmission directe du système de dimension  $m \times l$ .

La representation de schéma fonctionnelle de simulation;

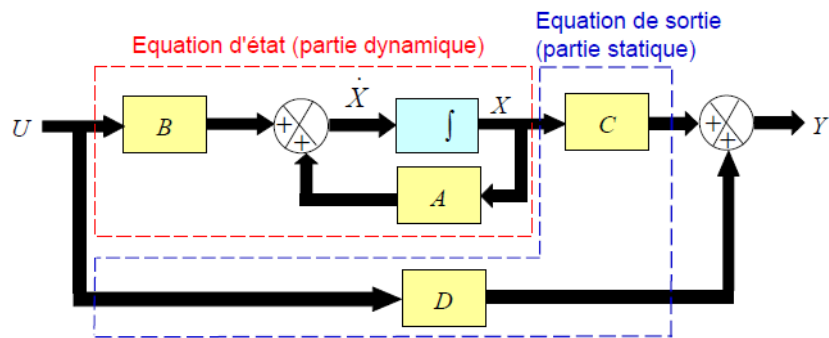


Figure 5 : Simulation de modèle d'état

D'une manière générale l'équation (I.3) est donnée comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}}_{\dot{X}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{X(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}}_{U(t)} \quad \dots(10)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}}_{Y(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}}_{U(t)} \quad \dots(11)$$

**Exemple d'application :** Considérant le circuit RLC comme présenté dans la figure 6 comme suite,

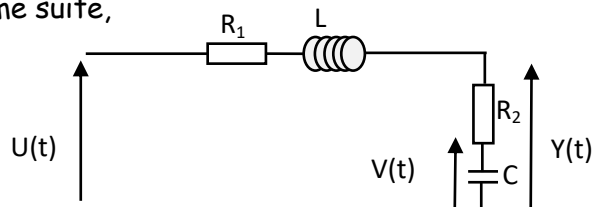


Figure 6 : Exemple d'un système électrique

Le modèle mathématique des équations différentielles est :

$$\dots(12)$$

$$\begin{cases} u(t) = (R_1 + R_2)i(t) + L \frac{di}{dt} + v(t) \\ i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \\ y(t) = R_2 i(t) + v(t) \end{cases}$$

Pour présenter le modèle d'état du circuit RLC, on suppose que :

Entrée :  $u(t)$ , Sortie :  $y(t)$

Vecteur d'état :  $x_1(t)=V(t)$ ,  $x_2(t)=i(t)$ ,  $x(t)=[x_1(t) x_2(t)]^T$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(R_1 + R_2)}{L} & 1 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) & \dots(13) \\ y(t) = [R_2 \quad 1] \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

### 7.3- Passage d'une représentation d'état vers une fonction de transfère

On se restreint au cas d'un système à une entrée et une sortie. Exprimons la fonction de transfert  $G(p)$  du système en fonction des matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{u(p)} \quad \dots(14)$$

En prenant les T.L. (Transformée de Laplace) des équations d'états et de sortie, on obtient :

En supposant des conditions initiales nulles.

$$\begin{cases} p X(p) = A X(p) + B U(p) & \dots(15) \\ Y(p) = C X(p) + D U(p) \end{cases}$$

En supposant des conditions initiales nulles.

$$\begin{cases} X(p) = (pI_n - A)^{-1} B U(p) & \dots(16) \\ Y(p) = [C(pI_n - A)^{-1} B] + D] U(p) \end{cases}$$

Finalement :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{u(p)} = C[(pI_n - A)^{-1} B] + D \quad \dots(17)$$

Avec  $I_n$  la matrice identité de dimension  $n$ .

L'inverse d'une matrice est obtenue par :

$$\dots(19)$$



$$(pI_n - A)^{-1} = \frac{adj(pI_n - A)}{det(pI_n - A)}$$

On substituant à l'inverse sa définition, il devient :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{u(p)} = C \left[ \frac{adj(pI_n - A)}{det(pI_n - A)} B \right] + D \quad \dots(20)$$

## 6- Modèle d'état d'un moteur à courant continu MCC

Dans cette partie on considère que la machine à courant continu avec excitation constante  $\phi_f = Cte$  d'une part, et d'autre part la charge nulle  $Cr=0$  ;

Donc le modèle sera plus simple et comme suite :

$$\phi_f = Cte \Rightarrow K \cdot \phi_f = Cte = K_m \cdot \omega \Rightarrow E = K_m \cdot \omega \quad \dots(21)$$

Les équations électriques (I.1, I.2) s'écrivent :

$$U_a = R_a \cdot I_a + L_a \frac{dI_a}{dt} + \omega \cdot K_m \quad \dots(22)$$

Suite de ladite proposition et par les équations A.4 et I.5 l'équation mécanique devient :

$$J \frac{d\omega}{dt} = C_e - F\omega \quad \dots(23)$$

$$C_e = K_m \cdot I_a \quad \dots(24)$$

Pour présenter le modèle d'état du circuit RLC, on suppose que :

Entrée :  $U_a$ , Sortie :  $y(t) = \omega$

Vecteur d'état :  $x_1(t) = I_a$ ,  $x_2(t) = \omega$ ,  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$

On utilise les équations I.21, I.22, I.23 et I.24 pour déterminer le modèle d'état de MCC, donc :

$$I.22 \rightarrow \frac{dI_a}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} \cdot I_a - \frac{K_m}{L_a} \cdot \omega + \frac{1}{L_a} U_a \quad \dots(25)$$

$$I.23 \rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{K_m}{J} \cdot I_a - \frac{F}{J} \omega$$

Les équations sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_m}{L_a} \\ \frac{K_m}{J} & -\frac{F}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ 0 \end{bmatrix} \\ y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \end{bmatrix} \end{cases} \quad \dots(26)$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_m}{L_a} \\ \frac{K_m}{J} & -\frac{F}{J} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1]$$

Le schéma-bloc pour ce modèle sous SIMULINK

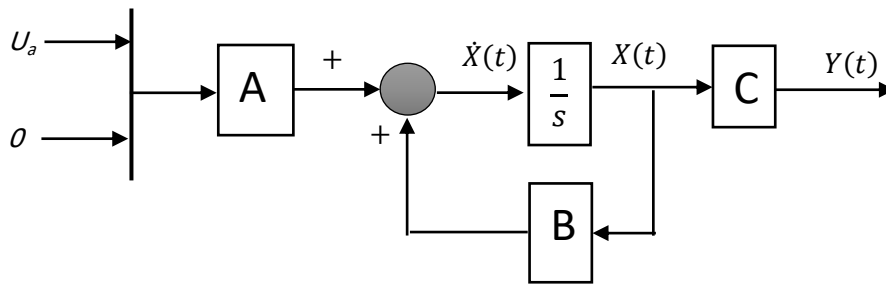


Figure 7 : Simulation du moteur MCC

### 7- Modèle MCC inverse

L'inversion de la relation associée à un processeur détermine une relation de commande elle-même associée à un autre processeur.

Pour la conception de la commande d'un processus on applique le principe d'inversion causale : "Commander un processus c'est lui imposer la trajectoire désirée. Cette trajectoire est l'effet d'une cause de sorte qu'il suffit alors de créer la bonne cause pour avoir le bon effet".

**Relation rigide:** une relation rigide bijective détermine une loi de commande par inversion directe. Ce premier principe qui conduit à déterminer la grandeur de réglage  $U_{reg}$  à partir de la trajectoire de référence  $Y_{ref}$  souhaitée pour  $y$ . Il vient :

$$R \rightarrow y = f(u); R_c \rightarrow U_{reg} = c(y_{ref})$$

$$si \ c = f^{-1} \text{ et } U = U_{reg} \text{ alors } y \rightarrow y_{ref}$$

**Relation causale:** Dans une relation causale, le temps intervient implicitement de sorte que l'effet d'accumulation induit systématiquement une valeur initiale. Dans ces conditions, la grandeur de réglage  $U_{reg}$  est élaborée en prenant en compte, à tout instant, la situation de  $y$  par rapport à sa référence  $Y_{ref}$

Ce second principe illustré à la figure 8 est celui de l'asservissement qui, visant à minimiser l'écart  $e = Y_{ref} - Y$ , détermine une loi de commande par inversion indirecte. Il vient:

$$R \rightarrow y = f(u); R_c \rightarrow U_{reg} = c(y_{ref} - Y)$$

$$si \ c \rightarrow \infty \text{ et } U = U_{reg} \text{ alors } y \rightarrow y_{ref}$$

Pour illustrer cette démarche on suppose qu'on doit élaborer la commande du processus présenté à la Figure 8. Ce type de processus est très souvent rencontré dans le domaine de la commande des machines électriques (exemple: la partie électrique d'une machine à courant continu ou une charge mécanique avec réducteur).

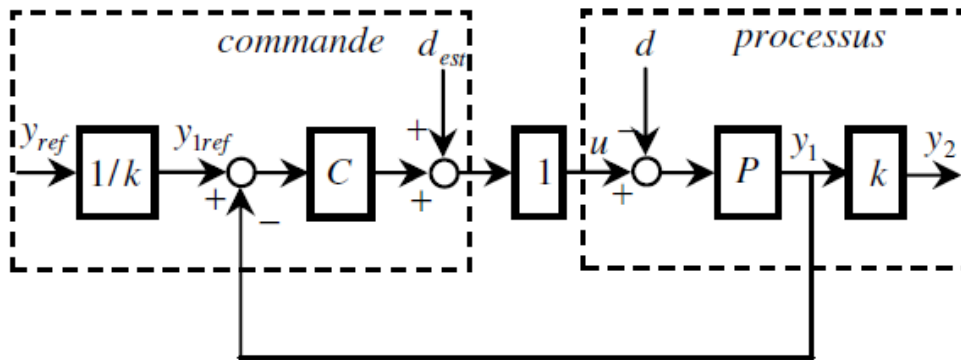


Figure 8 : Illustration du principe d'inversion

Le tableau donné ci-dessous donne les relations de la commande déduites de celle du processus.

Dans la partie commande, les compensations nécessaires (de la f.é.m. et du couple de charge) peuvent se faire par des grandeurs mesurées (au moyen de capteurs) ou estimées (reconstituées sur la base d'un modèle temps réel).

La figure 9 donne deux exemples d'observation appliqué à la machine à courant continu.

Tableau 1. Illustration des règles d'inversion

Processus	Commande
$1.24 \rightarrow C_e = K_m \cdot I_a$	$I_{a\_ref} = C_{e\_ref} \left( \frac{1}{K_m} \right)$ (Inversion directe)
$1.23 \rightarrow J \frac{d\omega}{dt} + F\omega = C_e - C_r$	$C_{e\_ref} = c_1(\omega_{ref} - \hat{\omega}) + C_r$ (inversion indirecte)
$1.22 \rightarrow U_a = R_a \cdot I_a + L_a \frac{dI_a}{dt} + E$	$U_{reg} = c_2(I_{a\_ref} - \hat{I}_a) + \tilde{E}$ (inversion indirecte)
$1.21 \rightarrow E = K_m \cdot \omega$	$\omega_{ref} = \left( \frac{1}{K_m} \right) \tilde{E}$ (inversion directe)

Le schéma-bloc pour ce modèle sous SIMULINK

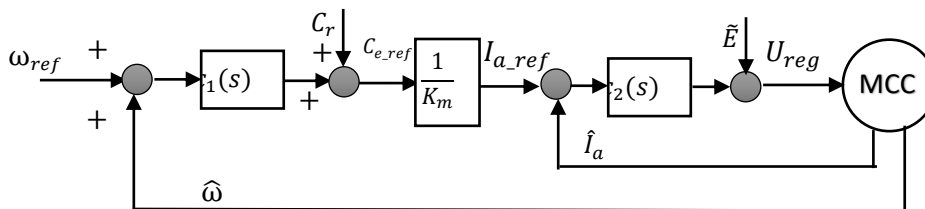


Figure 9 : Simulation du moteur MCC

## 8- Conclusion

Les propriétés dynamiques de la machine à courant continu ont été présentées dans ce cours. Tout d'abord, la construction et le principe de fonctionnement du MCC ont été présentés. Par la suite, nous avons démontré le modèle dynamique du moteur à courant

continu dans les axes  $d$   $q$  avec son schéma bloc sous SIMULINK ainsi que la présentation des variables d'état d'un système dynamique et son adaptation avec le modèle MCC.

Enfin, pour avoir le modèle MCC inverse, nous avons démontré le principe de relation rigide et causale pour l'adaptation au modèle MCC.

### **Références:**

- J. Hautier, : Le graphe informationnel causal en Electrotech-nique. Journée 3EI, (1999)
- Rachid Abdessamed, "Modélisation et simulation des machines électriques",Electrotechnique ,Ellipses,2011.
- J.P. Caron, :Systèmes électrotechniques. Edition Technip Sciences et technologies
- K. Hartani, Y. Miloud, A. Miloudi "Méthodologie Causal de modélisation et de commande : application aux machines électriques" Université Tahar Moulay de Saida, ALGERIE.
- Jean-Paul Louis, "Modélisation des machines électriques en vue de leur commande ", concepts généraux, Génie Electrique.
- livier. Bachelier «Représentation d'état des Systèmes monovariabiles» Ecole nationale
- supérieure d'ingénieurs de Poitiers, 2012.
- [www.techno-science.net](http://www.techno-science.net)