وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمة لخضر - الوادي
كلية العلوم الدقيقة
قسم الرياضيات

مدخل الى نظرية المؤثرات

دروس وتمارين

السعيد بلول

$2022 - 2021$

الفهـــــــــــــــرس

المقدمة

في هذا العمل ، نقدم بعض عناصر نظرية المؤثرات من تعاريف ومفاهيم ونظريات. هذا العمل مخصص بشكل أساسي لطلاب السنة الثالثة ليسانس، وكذلك أي شخص مهتم بالتحليل الدالي.
ينقسم هذا العمل إلى أربعة فصول مع تمارين في نهاية كل فصل:
الفصل الأول: المؤثرات الخطية والمحدودة.
الفصل الثاني: نظرية هان باناخ وتطبيقاتها.
الفصل الثالث: المؤثرات الخطية المحدودة بفضاء هيلبرت.
الفصل الرابع: المؤثرات الخطية المتراصة.
في الفصل الأول، سنقدم بعض التعاريف التي تخص المؤثر الخطي ونظيم مؤثر ومعكوس مؤثر مع ذكر بعض النظريات الأساسية في هذا النطاق كنظرية بناخ ستينهاوس ونظرية البيان المغلق ونظرية التطبيق المفتوح.
الفصل الثاني محجوزا لنظرية هان بناخ بشكليها التحليلي والهندسي مع ذكر بعض من نتائجها. أما الفصل الثالث سنذكر فيه بعض خواص الفضاءات الهلبرتية من تعاريف ونظريات وبعض الأمثلة وسنعرف عليه فيما بعد المؤثرات الخطية والمستمرة ونظرة بسيطة على نظرية الطيف بالنسبة للمؤثرات.
في الفصل الأخير سنعرج على المؤثرات المتراصة بذكر خواصها وأمثلة عليها.

الفصل ١

المؤثرات الخطية والمحدودة

١.١ الفضاءات الشعاعية النظيمية

تعريف ١.١.١ ليكن E فضاء شعاعي على حقل $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$). نسمي نظيم على E كل تطبيق $N : X$ نحو $\mathbb{R}_+$يحقق الخواص التالية:

(١). $\forall\ x \in E$، $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$؛

(٢). $\forall\ x \in E$ و $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$، $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$؛

(٣). $\forall\ x, y \in E$، $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

نسمي الثنائي (E, N) فضاء شعاعي نظيمي.

مثال ١.١.١ النظيمات الأساسية في $\mathbb{R}^n$

أ) $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$،

ب) $N_2(x) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$،

ج) $N_3(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

مثال ٢.١.١ النظيم المعرف على $\ell^p(\mathbb{C})$(فضاء المتتاليات).
لتكن

$$ell^p(\mathbb{C}) = \{(x_n) \subset \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\},$$

حيث $p \in [0, \infty[$.
التطبيق:
$$x \mapsto \|x\|_{\ell^p} = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$
يعرف نظيم على $\ell^p(\mathbb{C})$.
$ell^\infty(\mathbb{C}) = \{(x_n) \subset \mathbb{C}, \sup_{n\geq 0} |x_n| < \infty\}$.
التطبيق:
$$x \mapsto \|x\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\geq 0} |x_n|$$
يعرف نظيم على $\ell^\infty(\mathbb{C})$.

مثال ٣.١.١ النظيمات المعرفة على فضاءات الدوال.

١.١.١ التقارب والاستمرارية في فضاء شعاعي نظيمي

تعريف ٢.١.١ ليكن E فضاء شعاعي نظيمي و (x_n) متتالية في E. نقول عن (x_n) أنها

(١). متتالية كوشية إذا وفقط إذا كان $\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$، بمعنى،
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

(٢). متقاربة نحو x إذا وفقط إذا كان $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$، بمعنى،
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

مثال ٤.١.١ $x_n = \frac{1}{n}$

تعريف ٣.١.١ نقول عن الدالة f المعرفة على E أنها مستمرة عند النقطة x_0 إذا وفقط إذا كان:
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \|x - x_0\| < \alpha \to \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

٢.١.١ فضاءات بناخ

تعريف ٤.١.١ ليكن E فضاء متري.
نقول عن E أنه فضاء تام إذا وفقط إذا كان كل متتالية كوشية على E متقاربة.

تعريف ٥.١.١ نقول عن فضاء نظيمي E أنه بناخي إذا كانت كل متتالية كوشية منه متقاربة، أي أنه تام كفضاء متري مزود بالمسافة المرفقة بالنظيم.

مثال ٥.١.١ (١). ١ $\mathbb{R}^n$ أو $\mathbb{C}^n$ مزود بأحد النظيمات التالية:

$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ و $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ هي فضاءات بناخية، من أجل كل $p \in \mathbb{N}^*$.

(٢). لتكن

$$\ell^p(\mathbb{C}) = \{(x_n) \subset \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

فضاء المتتاليات في $\mathbb{C}$ المزود بالنظيم التالي $\|x\|_p = (\sum_{n=0}^{n} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ يعرف فضاء بناخي.

$$\ell^\infty(\mathbb{C}) = \{(x_n) \subset \mathbb{C}, |x| \leq M\}$$

فضاء المتتاليات المحدودة على $\mathbb{C}$ المزود بالنظيم التالي

$\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |x_n|$ هو فضاء بناخي.

قضية ١.١.١ لتكن $(E_1, \|\|_1), (E_2, \|\|_2)$ فضاءان بناخيان على حقل $\mathbb{K}$، إذن فضاء الجداء E_1E_2 المزود بالنظيم الآتي $\|x\|_{E_1E_2} = \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$ و $\|x\|_{E_1E_2} = \|x\|_1 + \|x\|_2$ فضاء بناخي.

البرهان. لتكن (x_n, y_n) متتالية كوشية في E_1E_2، إذن من أجل $n, m \in \mathbb{N}$ بحيث $n, m > n_0$لدينا

$$\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_{E_1E_2} = \max\{\|x_n - x_m\|_{E_1}, \|y_n - y_m\|_{E_2}\}$$

والذي يستلزم أن (x_n) و (y_n) متتاليتي كوشي في E_1 و E_2 (على التوالي)، إذن هما متقاربتين نحو x, y (على التوالي)، ومنه

$$\|x_n, y_n) - (x, y)\|_{E_1E_2} = \max\{\|x_n - x\|_{E_1}, \|y_n - y\|_{E_2}\} < \max\{\varepsilon, \varepsilon\}$$

ومنه نستنتج أن، (x_n, y_n) متقاربة نحو (x, y). ■

٢.١ فضاء المؤثرات الخطية والمحدودة

تعريف ١.٢.١ ليكن E و F فضائين شعاعين نظميين على حقل $\mathbb{K}$. نقول عن مؤثر من E نحو F أنه خطي إذا وفقط إذا كان

(١). من أجل $x, y \in E$، $T(x + y) = T(x) + T(y)$.

(٢). من أجل $\alpha \in \mathbb{C}$، $x \in E$، $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

- نقول عن T أنه جمعي إذا كان من أجل $x, y \in E$ يحقق $T(x+y) = T(x) + T(y)$.
- نقول عن T أنه متجانس إذا حقق من أجل $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in E$: $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.
- ويكون T نفس متجانس إذا حقق من أجل كل $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in E$: $T(\alpha x) \leq \alpha T(x)$.

مثال ١.٢.١ ليكن التطبيق $T : C([a,b]) \to \mathbb{R}$، المعرف ب: $Tx(t) = \int_0^b x(t)dt$.
واضح أن T خطي.

نرمز ب $L(E,F)$ لفضاء التطبيقات الخطية والمحدودة من E نحو F.

تعريف ٢.٢.١ ليكن T مؤثر خطي على E، نقول أن T محدود (أو مستمر) إذا وفقط إذا وجد ثابت $c > 0$ بحيث

$$\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E, \text{ من أجل } x \in E$$

.

نظرية ١.٢.١ T مستمر إذا وفقط إذا كان T محدود.

البرهان. نفرض أن T مستمر لكن غير محدود. إذن من أجل كل $M > 0$ يوجد x_M بحيث

$$\|Tx_M\| > M\|x_M\|$$

بالخصوص، من أجل $n \in \mathbb{N}$ توجد متتالية (x_n) في E بحيث

$$\|Tx_n\| > n\|x_n\|.$$

نضع $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$، واضح أن $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ لأن T مستمر، نحصل على $\|Tx_n\| \to \infty$، ومنه

$$\|Ty_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|x_n\| \to 0.$$

لكن

$$\|Ty_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|x_n\| \geq \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1,$$

وهذا تناقض.
بالمقال ، إذا كان T محدود، ولتكن (x_n) متتالية في E متقاربة نحو x. إذن،

$$\|T(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \to \infty$$

والذي يبين أن $Tx_n \to Tx$. ومنه، T مستمر. ■ نرمز ب $\mathcal{L}(E,F)$ لفضاء المؤثرات الخطية والمحدودة (المستمرة) من E نحو F.

نظرية ٢.٢.١ من أجل كل مؤثر الخطي $T \in L(E,F)$، المميزات الثلاث التالية متكافئة:

(١). T محدود.

(٢). T مستمر على E.

(٣). T مستمر عند النقطة 0 من E.

البرهان. $(1) \Rightarrow (2)$

ليكن x_0 شعاع كيفي من H و (x_n) متتالية في H. بما أن

$$\|Tx_n - Tx_0\| = \|T(x_n - x_0)\| \leq \|T\|\|x_n - x_0\|,$$

إذن $Tx_n \to Tx_0$ عندما $x_n \to x_0$، ومنه استمرارية S.

الاستلزام التالي $(2) \Rightarrow (3)$ واضح .

$(3) \Rightarrow (1)$

ليكن T مؤثر خطي على E، مستمر عند النقطة $x_0 \in E$، نفرض العكس، (التطبيق غير محدود). إذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، يوجد شعاع غير محدود $x_n \in H$ يحقق $\|Tx_n\| \geq n\|x_n\|$. إذا فرضنا أن $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$، نجد أن $\|y_n\| = \frac{1}{n}$.

و $y_n \to 0$، إذن $y_n + x_0 \to x_0$، لكن

$$\|T(y_n + x_0) - Tx_0\| = \|Ty_n\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1,$$

ومنه T غير مستمر x_0 ومن هنا التناقض، وبالتالي T محدود. ■

نظرية ٣.٢.١ إذا كان T مؤثر جمعي ومستمر على فضاء شعاعي نظيمي فأنه متجانس.

البرهان.

(١). من أجل $n \in \mathbb{N}$، لدينا

$$T(nx) = T(\sum_{1}^{n} x) = nTx.$$

(٢). من أجل $n = 0$لدينا

$$T(x + 0) = Tx = Tx + T0 \to T0 = 0.$$

(٣). من أجل $n \in \mathbb{Q}$، لدينا

$$T(\frac{m}{n}x) = mT(\frac{x}{n}$$

نضع $y = \frac{x}{n}$، إذن

$$Tx = T(ny) = nTy \to T(\frac{x}{n} = \frac{1}{n}Tx$$
$$\to T(\frac{m}{n}x) = \frac{m}{n}Tx.$$

(٤). ليكن λ غير ناطق، إذن توجد متتالية $(\lambda_n \subset \mathbb{Q})$ تحقق $\lambda_n \to \lambda$، لأن Q كثيف في $\mathbb{R}$. ومنه

$$T(x\lambda_n) \to T(x\lambda),$$

من ناحية أخرى لدينا

$$T(x\lambda_n) = \lambda_n Tx \to \lambda Tx$$

وبالتالي $T(\lambda x) = \lambda Tx$.

■

١.٢.١ نظيم المؤثر

تعريف ٣.٢.١ ليكن E, F فضائين شعاعين نظيمين $T \in \mathcal{L}(E,F)$. نسمي نظيم T أصغر عدد موجب ممكن c الذي يحقق: $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$.بمعنى

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = \inf\{M > 0, \|Tx\|_F \leq \|x\|_E\}.$$

قضية ١.٢.١ ليكن $T \in \mathcal{L}(E,F)$. إذن لدينا

(١). $\forall x \in E, \|Tx\|_F \leq \|T\|_{\mathcal{L}}\|x\|_E$

(٢). $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E, \|Tx_\varepsilon\|_F \geq (\|T\|_{\mathcal{L}} - \varepsilon)\|x\|_E$

(٣). $\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|_F$ ،$\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|}$

البرهان.

(١). إذا كان $\|T\| = M_0$، فإنه لدينا $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M_0$، ومنه

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$$

(٢). ليكن $M_0 = \sup \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$، ذن حسب تعريف الحد الأعلى لدينا، من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $x_\varepsilon \in E$، بحيث

$$\frac{\|Tx_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} \geq M_0 - \varepsilon$$

$$\to \|Tx_\varepsilon\| \geq (M_0 - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|.$$

(٣). إذا كان $\|x\| \leq 1$،ونستعمل الخاصية (١) نتحصل على

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \leq \|T\|$$

$$\Longrightarrow \sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\| \leq \|T\|. \qquad (٢.١.١)$$

نضع $y_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}$، إذن لدينا

$$\|Ty_\varepsilon\| = \frac{1}{\|x_\varepsilon\|}\|Tx_\varepsilon\| \geq \frac{1}{\|x_\varepsilon\|}(\|T\|-\varepsilon)\|x_\varepsilon\|$$

$$\to \|Ty_\varepsilon\| \geq \|T\|-\varepsilon$$

$$\to \|T\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\| \qquad (٢.١.٢)$$

وبالتالي، من (١.٢.١) و (٢.٢.١)، نصل الى النتيجة المطلوبة.

■

مثال ٢.٢.١ لدينا $T : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ معرفة ب $Tx(t) = \int_a^b x(t)dt$.

$$\|Tx\| \leq (b-a)\|x\|$$

$$\Longrightarrow \|T\| \leq (b-a).$$

لتكن x_0 دالة من $C([a,b])$ معرفة من أجل كل $t\in(a,b]$ ب $x_0(t)=2$، إذن لدينا

$$\|Tx_0\| = 2(b-a) \Longrightarrow \frac{\|Tx_0\|}{x_0} = (b-a) \leq \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|$$

ومنه $\|T\| = b-a$.

٣.١ تمديد مؤثر بالاستمرارية

ليكن E فضاء شعاعي نظيمي و $T : D\subset E \to E$، بحيث D فضاء شعاعي جزئي من E. نقول أن T محدود على D إذا وجد $M>0$، بحيث من أجل كل $x\in D$، لدينا. $\|Tx\|M\|x\|$

أصغر عدد ممكن $M>0$ الذي يحقق المتباينة السابقة يدعى نظيم

T، ونرمز له ب $\|T\|_D$.

نظرية ١.٣.١ ليكن Eفضاء بناخي ، D فضاء جزئي من E بحيث $\overline{D}=E$ و $T : D\subset E\to E$. إذن T يملك تمديد في E من أجل كل عناصره.

البرهان. نعرف المؤثر التالي $\tilde{T}$ على E ب:

$$Tx = \begin{cases} \tilde{T}x = Tx, & \forall x\in D, \\ \|\tilde{T}\|_E = \|T\|_D \end{cases}$$

ليكن $x \in E$**، بما أن** D **كثيف في** E**، فإنه يوجد متتالية** $(x_n) \subset D$**، بحيث** $x_n \to x$**. إذن هي متتالية كوشية ، بمعنى،** $\|x_n - x_m\| \to 0$**، عندما** $n, m \to 0$**، بمعنى،**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0, \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

وبالتالي من أجل $n, m > n_0$**، لدينا**

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\|_D \|x_n - x_m\| \to 0$$

والذي يستلزم أن (Tx_n) **متتالية كوشية في** E **الذي هو فضاء تام، ومنه** (Tx_n) **متقاربة في** E.
وبالتالي ، $Tx_n \to \tilde{T}x$**. لذا، إذا كان** $x \in E/D$**، فإن صورة** x **بالمؤثر** T **هي نهاية متتالية من** D.
ندرس الآن وحدانية $\tilde{T}$
إذا كانت (y_n) **متتالية في** D **متقاربة نحو** x**. فإنه لدينا**

$$\|x_n - y_n\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - x\|$$

$$\to \|Tx_n - Ty_n\| = \|T(x_n - y_n)\| \leq M\|x_n - y_n\| \to 0.$$

ومنه $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \tilde{T}x$.
$\tilde{T}$ **خطية**
من أجل $x_1, x_2 \in E$ **و** $\alpha \in \mathbb{K}$**، لدينا**

$$\tilde{T}(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} T(x_n^{(1)} + x_n^{(2)}) = \tilde{T}x_1 + \tilde{T}x_2$$

$$\tilde{T}(\alpha x_1) = \lim_{n\to\infty} T(\alpha x_n^{(1)}) = \alpha \tilde{T}x.$$

$\tilde{T}$ **محدود**

$$\|\tilde{T}x\| = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\| \leq \|T\|_D \|x\|$$

$$\to \|\tilde{T}x\| \leq \|T\|_D \|x\|$$

$$\to \|\tilde{T}\| \leq \|T\|_D$$

من جهة أخرى،

$$\|\tilde{T}\| = \sup_{x\in E} \frac{\|\tilde{T}x\|}{\|x\|} \geq \sup_{x\in D} \frac{\|\tilde{T}x\|}{\|x\|} = \|T\|_D$$

إذن $\|\tilde{T}\|_E = \|T\|_D$. ■

٤.١ التقارب في فضاء المؤثرات الخطية والمحدودة

قضية ١.٤.١ ليكن E، F و $T \in \mathcal{L}(E,F)$. الفضاء $\mathcal{L}(E,F)$ فضاء شعاعي نظيمي.

البرهان. واضح أن $\mathcal{L}(E,F)$ فضاء شعاعي.

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = 0 \leftrightarrow \sup_{x\in E} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = 0$$

$$\Leftrightarrow T = 0$$

$$\|\alpha T\|_{\mathcal{L}} = \alpha \sup_{x\in E} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \alpha \|T\|_{\mathcal{L}}.$$

$$\|S+T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{x\in E} \frac{\|(S+T)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\in E} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} + \sup_{x\in E} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

إذن $\|.\|_{\mathcal{L}}$ نظيم على $\mathcal{L}(E,F)$. ■

١.٤.١ التقارب البسيط

ليكن E، F و $T_n, T \in \mathcal{L}(E,F)$. نقول عن المتتالية (T_n) أنها متقاربة ببساطة نحو T إذا وفقط إذا كان

من أجل كل $x \in E, T_n x \to Tx$ ونرمز لها ب $T_n \overset{s}{\longrightarrow} T$.

ونكتب $T_n \to T \Leftrightarrow \forall x \in E, T_n x \to Tx$.

من ناحية أخرى

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \|Tx_n - Tx\|_F < \varepsilon.$$

مثال ١.٤.١

$$T_n : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C}), T_n x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0...\}$$

أثبت أن $T_n \to I_{\ell^2}$?.

بداية، نبين أن $T_n \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{C}))$.

بالفعل من أجل كل $x \in \ell^2$، لدينا

$$\|T_n x\| = (\sum_{k=1=1}^{n} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (\sum_{k=1=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{\ell^2}$$

$$\to \|T_n x\|_{\mathcal{L}} \leq 1$$

من أجل $z=(1,0,0,...)$ لدينا $T_nz=z$، إذن $\|T_nz\|=1\leq \sup x\in\ell^2\|T_nx\|=\|T_n\|$.
من أجل كل $x\in\ell^2$، لدينا

$$\lim_{n\to\infty}\|T_nx-I_{\ell^2}x\|=\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=n+1=1}^{\infty}|x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}(R_n)^{\frac{1}{2}}=0$$

ومنه $\lim_{n\to\infty}T_n=I_{\ell^2}$.

٢.٤.١ التقارب بإنتظام

ليكن E، F و $T_n,T\in\mathcal{L}(E,F)$. نقول أن المتتاية
(T_n) متقاربة بإنتظام نحو T إذا وفقط إذا كان
من أجل $x\in E,\lim_{n\to\infty}\sup_{\|x\|\leq 1}\|T_nx-Tx\|_F=0$.
ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|_{\mathcal{L}}=0$. ونرمز له ب $T_n\xrightarrow{\|\cdot\|}T.$

٣.٤.١ التقارب الضعيف

تعريف ١.٤.١ ليكن E فضاء شعاعي نظيمي على حقل $\mathbb{K}$. نسمي ثنوي E ونرمز له بـE^* فضاء الأشكال الخطية والمستمرة من E نحو $\mathbb{K}$.

الثنوي الجبري محتوى تماما في الثنوي الطبولوجي.
نقول عن متتالية (x_n) من E أنها متقاربة بضعف نحو x إذا وفقط إذا كان $f\in E^*$ fx_n تتقارب نحو fx.
متتالية من المؤثرات (T_n) متقاربة تقارب بضعف نحو T إذا وفقط إذا كان

$$f(T_nx)\to f(Tx),\quad \forall x\in E,\forall f\in E^*.$$

ونرمز ب $T_n\xrightarrow{w}T$.

نظرية ١.٤.١ إذا كانت (T_n) متتالية من المؤثرات من E في F. إذن لدينا

$$T_n\xrightarrow{\|\cdot\|}T\Rightarrow T_n\xrightarrow{s}T$$

$$\xrightarrow{s}T\Rightarrow T_n\xrightarrow{w}T.$$

البرهان. من أجل $x \in E$، لدينا

$$\|T_n x - T_x\|_F = \|(T_n - T)\| \leq \|T_n - T\|\|x\|_E \to 0$$

من أجل $x \in E$ و $f \in F^*$، لدينا

$$|f(T_n x) - f(Tx)| = |f(T_n x - Tx)| \leq |f|\|T_n x - Tx\| \to 0.$$

■

٥.١ نظرية بناخ ستينهاوس *Banach Steinhaus*

تعريف ١.٥.١ نقول عن المتتالية $T_n \in \mathcal{L}(E,F)$ أنها محدودة بانتظام اذا كانت محدودة من أجل النظيم $\|.\|_{\mathcal{L}}$. بمعنى

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \|T_n\|_{\mathcal{L}} \leq M.$$

وهو مكافئ لي

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\|x\|=1} \|T_n x\|_{\mathcal{L}} \leq M.$$

تكون (T_n) محدودة (محدودة نقطيا)إذا وفقط إذا كان
من أجل كل $x \in E$، بالنظيم متقاربة $\|.\|_F$. بمعنى

$$\forall x \in E, \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \|T_n x\|_F \leq M.$$

مثال ١.٥.١ **(١)**. $T_n : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C}), T_n x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0...\}$.
رأينا مسبقا أن $\|T_n\|_{\mathcal{L}} \leq 1$. إذن (T_n) سث محدود بانتظام.

(٢). $T_n : \ell^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, T_n x = n x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$.

$$\begin{aligned}\|T_n x\| \leq n|x_1| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \leq n|x_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq (n+1) \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \\ = (n+1)\|x\| \\ \to \|T_n\| \leq (n+1).\end{aligned}$$

لبكن $z = (1,0,0,...)$، واضح أن $z \in \ell^1$ ث $\|z\| = 1$ ($\|T_n z\| = (n+1)$). ومنه $\|T_n\| = (n+1) \to \infty$،
وبالتالي الحد لبس بانتظام.

نظرية ١.٥.١ ليكن E فضاء بناخي و F فضاء شعاعي نظيمي و $T_n \in \mathcal{L}(E,F)$. إذا كانت المتتالية (Tn) محدودة نقطيا إذن فهي محدود بانتظام. بمعنى

$$\forall x \in E, \sup_{n\geq 0} \|T_n x\|_F < \infty \to \sup_{n\geq 0} \|T_n\|_{\mathcal{L}} < \infty.$$

٦.١ نظرية البيان المغلق

تعريف ١.٦.١ ليكن E و F فضائين بناخيين وليكن $T : D \subset E \to F$. نسمي بيان ل T كل فضاء جزئي من EF معرف ب

$$G(T) = \{(x,Tx), x \in D\}.$$

قضية ١.٦.١ ليكن E,F فضائين بناخيين و $T \in \mathcal{L}(E,F)$. إذن G مغلق.

البرهان. ليكن $(x_n, y_n) \to (x,y)$، إذن $x_n \to x$، باستعمال الاستمرارية نجد T $Tx_n \to Tx$، لكن $y_n = Tx_n \to y$، ومنه $y = Tx$ و G مغلق. ■

نظرية ١.٦.١ ليكن E,F فضائين بناخيين و $T \in L(E,F)$. إذا كان G مغلق فإن T مستمر.

البرهان. لأن G مغلق إذن هو تام وبالتالي فضاء بناخي.
ليكن $P_E : G \to E, P_E(x,Tx) = x$ الإسقاط على E. P_E تطبيق خطي ومستمر ، لأن

$$\|P_E(x,Tx)\| = \|x\| \leq \max\{\|x\|_E, \|Tx\|_F\} = \|(x,Tx)\|_G.$$

بنفس الطريقة نعرف الإسقاط على F.

$$P_F : G \to E, P_F(x,Tx) = Tx,$$

الإسقاط على F. P_F خطي ومستمر لأن

$$\|P_F(x,Tx)\| = \|Tx\| \leq \max\{\|x\|_E, \|Tx\|_F\} = \|(x,Tx)\|_G.$$

إذن $T = P_E \circ P_F \in \mathcal{L}(E,F)$. ■

نظرية ٢.٦.١ (التشاكل لبناخ)
ليكن E,F فضائين بناخيين و $T \in \mathcal{L}(E,F)$. إذا كان T تقابلي فإنه يوجد مؤثر خطي ومستمر T^{-1} من F نحو E.

نظرية ٣.٦.١ (نظرية التطبيق المفتوح) ليكن E,F فضائين بناخيين و $T \in \mathcal{L}(E,F)$. إذا كان T تقابلي فإن T مفتوح.

٧.١ معكوس مؤثر

قضية ١.٧.١ إذا كان $T \in \mathcal{L}(E,F)$ و $S \in \mathcal{L}(F,H)$، فإن $T \in \mathcal{L}(E,H)$ ث $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

البرهان. من أجل كل $x, y \in E$ و $\alpha \in \mathbb{K}$، لدينا

$$ST(\alpha x + y) = S(T(\alpha x + y)) = S(\alpha Tx + Ty)$$

$$= \alpha STx + STy.$$

إذن ST خطي. ومن أجل كل $x \in E$، لدينا

$$\|STx\| \leq \|S\|\|Tx\|$$

$$\leq \|S\|\|T\|\|x\|$$

ومنه $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$ ■

تعريف ١.٧.١ ليكن $T \in \mathcal{L}(E,F)$، حيث E و F فضائين شعاعيين نظيميين. نقول أن T يقبل تطبيق عكسي إذا وفقط إذا وجد $S \in \mathcal{L}(F,E)$، بحيث $\forall x \in E, STx = x$ ث $\forall y \in F, TSy = y$. ونرمز لمعكوس T ب T^{-1}.

نظرية ١.٧.١ ليكن E فضاء بناخي و$T \in \mathcal{L}(E)$. إذا كان $\|T\| \leq 1$، فإن $(I-T)$ يقبل تطبيق عكسي و $(I-T)^{-1}$ محدود ولدينا أيضا

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n = I + T + T^2 + ...$$

البرهان. لدينا $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=0}^{k} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{k} \|T\|^n$.

$$\|T\| \leq 1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|} < \infty$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{L}(E).$$

$$\|(I-T)\sum_{n=0}^{k} T^n - I\| = \|\sum_{n=0}^{k} \|T^n - \sum_{n=1}^{k} T^n - I\|$$
$$= \|I - T^{k+1} - I\| = \|T^{k+1}\| \leq \|T\|^{k+1}$$

نمر للنهاية فنتحصل على

$$\lim_{k\to\infty} \|(I-T)\sum_{n=0}^{k} T^n - I\| \leq \lim_{k\to\infty} \|T\|^{k+1} = 0$$

$$\rightarrow (I-T)\sum_{n=0}^{\infty} T^n = I \rightarrow (I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

■

نظرية ٢.٧.١ ليكن $T \in \mathcal{L}(E, F)$، إذا كان T يقبل تطبيق عكسي فإن T^{-1} وحيد. أيضا، إذا كان $S \in \mathcal{L}(, F, H)$ يقبل تطبيق عكسي، فإن ST يقبل تطبيق عكسي ولدينا $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

البرهان. إذا كان U ت V معكوسي ل T، إذن لدينا

$$\begin{aligned} U &= UI = U(TV) = (UT)V \\ &= IV = V. \end{aligned}$$

إذا كان T و S يقبلان تطبيقان عكسيان، إذن لدينا

$$(T^{-1}S^{-1})(ST) = T^{-1}(S^{-1}S)T = T^{-1} = I$$
$$(ST)(T^{-1}S^{-1}) = S(TT^{-1})S^{-1} = SS^{-1} = I.$$

■

تعريف ٢.٧.١ نقول عن مؤثر أنه يقبل معكوس يميني (يساري) إذا وجد S_1 (S_2) بحيث $TS_1 = I$ $(S_2T = I)$.

نظرية ٣.٧.١ ليكن E, F فضائين باناخيين و T مؤثر خطي ومحدود. الدعاوي الثلاث التالية متكافئة:

(١). T يقبل تطبيق عكسي يميني.

(٢). F متباين و$Im(T) = R(T)$ مغلق.

(٣). يوجد $c > 0$، بحيث من أجل كل $x \in E,$ لدينا

$$\|Tx\| \geq c\|x\|.$$

البرهان.

(١). نفرض أن $T \in \mathcal{L}(E)$ يقبل معكوس من اليسار، إذن من أجل كل $x_1, x_2 \in E$، لدينا

$$\begin{aligned} Tx_1 = Tx_2 &\to T^{-1}Tx_1 = T^{-1}Tx_1 \\ &\to x_1 = x_2. \end{aligned}$$

ليكن (x_n) متتالية في E، بحيث $x_n \to x$، إذن $(Tx_n) \in R(T)$ بما أن $T \in \mathcal{L}(E)$، تصبح $Tx_n \to Tx$ وهذا يستلزم أن $Tx \in R(T)$.

(٢). بما أن E و F فضائين باناخيين، إذن المؤثر $\tilde{T} : E \to T(E)$ تقابلي، ومنه باستعمال نظرية التشاكل لبناخ يوجد T^{-1} مستمر من $T(E)$ نحو E، بمعنى

$$\exists c > 0, \|x\| \geq c\|Tx\|.$$

(٣). T متباين لأنه إذا كان $Tx = 0 \to x = 0$ فإن $KerT = \{0\}$. أيضا، $R(T)$ مغلق، مما يبين أن T تقابلي. وبالتالي تقبل معكوس T^{-1}.

■

٨.١ تمارين

التمرين الأول: لتكن $(a_i),(x_i)$ متتاليتين من $\ell^2(\mathbb{C})$، ونعرف المؤثر T_n من $\ell^2(\mathbb{C})$ نحو $\mathbb{C}$، بحيث

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

1) لدينا $n \in \mathbb{N}^*$ أثبت أنه من أجل كل $T_n \in (\ell^2)^*$

2) بين أن $\|T_n\|_{(\ell^2)^*} = (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.

3) لتكن $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$، بحيث $Tx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$

- برهن أن $T \in (\ell^2)^*$ وأن $\|T\|_{(\ell^2)^*} = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.
- برهن أن (T_n) تتقارب ببساطة نحو T في $(\ell^2)^*$.

التمرين الثاني: لتكن (a_i) متتالية عناصر عقدية، $(x_i) \in \ell^2$، بحيث تكون السلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ متقاربة في $\mathbb{C}$ و $T_n : \ell^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ بحيث $T_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

1) أثبت أن (T_n) محدودة.

2) باستعمال نظرية بناخ- ستينهاوس *Banach Steinhaus*، أثبت أن $a_i \in \ell^2(\mathbb{C})$.

التمرين الثالث: ليكن E و F فضائين نظيميين و $A_n, A \in \mathcal{L}(E,F)$. أثبت التكافؤ بين:

1) $A_n \to A$ في $\mathcal{L}(E,F)$

2) من أجل كل جزء محدود $M \subset E$، المتتالية $A_n x$ متقاربة بانتظام نحو Ax حيث $x \in M$.

التمرين الرابع: ليكن $T_n : \ell^1(\mathbb{C} \to \ell^1(\mathbb{C}$، بحيث $T_n x = (x_n, x_{n+1}, 0, 0, ..., 0, ...)$.

1) أحسب $\lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_{\ell^1}$.

2) أثبت أن T_n متقاربة ببساطة نحو T يطلب تعينه.

3) هل المتتالية متقاربة بانتظام؟

التمرين الخامس: ليكن E و F فضائين شعاعين نظيمين و $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) أثبت أنه اذا كان T قابل للقلب و $T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ فإنه من أجل كل $x \in E$ لدينا $\|Tx\|_F \geq \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}}^{-1} \|x\|_E$.

2) **برهن أنه اذا كان** E **فضاء بناخي بحيث** $\|x\| \geq \|T\|$**، فإن** $R(T) = Im(T)$ **مغلق.**

التمرين السادس: ليكن $E = C([0,1])$ **فضاء التوابع العقدية المستمرة. نعتبر الفضائين النظيمين التاليين** $X = (E, \|.\|_\infty)$ **و** $Y = (E, \|.\|_1)$ **حيث** $\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt$**. نرمز ب** I **للتطبيق المطابق ل** X **في** Y.

1) **أثبت أن** I **تقابل ومستمر ثم أحسب نظيمه.**

2) **أثبت أن** I^{-1} **ليس مستمر (مساعدة: استعمل المتتالية** $(x_n) = t^n$**).**

3) **استنتج أن** Y **ليس فضاء تام.**

الفصل ٢

المؤثرات الخطية المحدودة في فضاء هيلبارت

١.٢ فضاءات هيلبارت

تعريف ١.١.٢ ليكن E فضاء شعاعي معرف علي الحقل $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ أو $\mathbb{R}$)، . جداء سلمي علي E هو تطبيق $\langle , \rangle : EE \to \mathbb{K}$ يحقق الخصائص الاتية :

١. $\langle x, x\rangle = 0 \leftrightarrow x = 0, \quad \langle x, x\rangle \geq 0$

٢. $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

٣. $\forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = \overleftarrow{\langle y, x\rangle}$

٤. $\forall x, y, z \in E, \langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle.$

الثنائي$(E, \langle , \rangle)$ يدعي فضاءشبه هيلبارتي

مثال ١.١.٢ (١). ليكن $\ell^2(\mathbb{C})$ فضاء المتتاليات ذات القيم المركبة ، حيث $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$ التطبيق $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x\bar{y}$ يعرف جداء سلمي $\ell^2(\mathbb{C})$

(٢). $E = \mathbb{R}^n,$ التطبيق $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} xy$ يعرف جداء سلمي في الفضاء $\mathbb{R}^n$

(٣). $E = \mathbb{R}^n,$ التطبيق $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x\bar{y}$ يعرف جداء سلمي في الفضاء $\mathbb{C}^n$.

(٤). $E = L^2\left([a, b], \mathbb{C}^n\right)$ مزود بالجداء السلمي التالي : $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$ هو فضاء شبه هلبارتي اذاكان E فضاء شعاعي مزود بجداء سلمي ، اذن العلاقة E تعرف نظيم علي E $\|x\| = \langle x, \rangle^{\frac{1}{2}}$ ونقول :نظيم مرفق بجداء سلمي

.

متراجحة كوشي شوارتز

توطئة ١.١.٢ اذا كان E فضاء شبه هيلبارتي، اذن من اجل كل $x, y \in E,$ لدينا

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

البرهان. من اجل كل $x, y \in E$ و $\alpha \in \mathbb{K},$ لدينا :

$$\langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, \alpha y\rangle + \langle \alpha y, x\rangle + \langle \alpha x, \alpha y\rangle \geq 0$$

اذن من اجل $y \neq 0,$ لدينا :

$$\langle x, x\rangle + \left(\alpha + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\right)\left(\bar{\alpha} + \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle}\right)\langle y, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle} \geq 0$$

من اجل $\alpha = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle},$ نحصل علي :

$$\begin{gathered}\langle x, y\rangle - \tfrac{\langle x,y\rangle\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \geq 0\\ \Rightarrow \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \geq \langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} = |\langle x, y\rangle|^2\\ \Rightarrow |\langle x, y\rangle|^2 \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}\end{gathered}$$

$y = 0$ من اجل المتراجحة محققة لان

$$\langle y, y\rangle = 0 \text{ و } \langle x, 0\rangle = 0.$$

■

نتيجة ١.١.٢ ليكن H فضاء شبه هيلبارتي ، الشكل الخطي $f_y : y \mapsto \langle x, y\rangle$ من اجل كل $x \in H$ مستمر و $\|f_y\| = \|y\|.$

البرهان. باستخدام متراجحة كوشي شوارتز من اجل كل $x \in H,$ لدينا :

$$\begin{gathered}\|f_y(x)\|^2 \leq \|x\|\|y\|\\ \rightarrow f_y \in H^*\end{gathered}$$

ولدينا ايضا : $\|f_y\| \leq \|x\|$ من اجل $x = y,$ نحصل علي $f_y(y) = \|y\|^2$ ومنه: $\|f_y\| = \|y\|.$ ■

تعريف ٢.١.٢ نقول عن عنصرين x, y في فضاء شبه هلبارتي H انهما متعامدان اذا وفقط اذا كان $\langle x, y\rangle = 0.$
اذا كانت $A \subset H,$ ، نعرف $A^{\perp}$ كما يلي :

$$A^{\perp} = \{x \in H, \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in A\}$$

تعريف ٣.١.٢ ليكن H فضاء شبه هيلبارتي ، نقول ان H فضاء هيلبارت اذا كان تام بالنسبة للنظيم المرفق بجداء سلمي

مثال ٢.١.٢ **(١)**. $\mathbb{C}$ مزود بالجداء السلمي $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n} x\bar{y}$ هو فضاء هيلبارت.

(٢). $\ell^2()$ مزود بالجداء السلمي $\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty} x\bar{y}$ هو فضاء هيلبارت.

(٣). $L^2([a,b])$ مزود بالجداء السلمي $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$ هو فضاء هيلبارت.

نظرية ١.١.٢ **(ةَو رَ م د ضِز نظرية ريز)** ليكن H فضاء هيلبارت ، التطبيق $\langle .,y\rangle$ $f_y : y\mapsto$ غامرا . يوجد عنصر وحيد $y\in H$ يحقق $f_y(x)=\langle x,y\rangle$ من اجل كل $x\in H$

البرهان. ليكن $F=\operatorname{Ker} f_y=\{x\in H, f_y(x)=0\}=f_y^{-1}(\{0\})$. واضح ان F مغلق ، اذن نستطيع كتابة $H=F\oplus F^{\perp}$. ليكن $x_0\in F^{\perp}$, حيث $x_0\neq 0$ اذن $x_0\in H/F$ اي $f_y(x_0)\neq 0$. اذن العنصر $z=x_0 f_y(x)-x f_y(x_0)$ ينتمي الي F

$$f_y(z)=f_y\left(x_0 f_y(x)-x f_y\left(x_0\right)=f_y\left(x_0\right) f_y(x)-f_y(x) f_y\left(x_0\right)=0\right.$$

هذا يستلزم :

$$\begin{gathered}\left\langle x_0, x_0 f_y(x)-x f_y\left(x_0\right)\right\rangle=\left\langle x_0, x_0 f_y(x)\right\rangle-\left\langle x_0, x f_y\left(x_0\right)\right\rangle=0 \\ \rightarrow f_y(x)\left\langle x_0, x_0\right\rangle=\left\langle x, \overline{f_y\left(x_0\right) x_0}\right\rangle \\ \rightarrow f_y(x)=\left\langle x, \frac{\overline{f_y(x_0) x_0}}{\langle x_0, x_0\rangle}\right\rangle .\end{gathered}$$

اذن نستنتج ، انه يوجد $y=\frac{\overline{f_y(x_0)x_0}}{\langle x_0,x_0\rangle}$ يحقق $f_y(x)=\langle x,y\rangle$. الوحدانية : نفرض انه يوجد y' يحقق

$$\begin{gathered}\forall x\in H, f_y(x)=\langle x,y\rangle=\langle x,y'\rangle \\ \rightarrow \forall x\in H,\langle x,y-y'\rangle=0 \\ \rightarrow y=y'\end{gathered}$$

■

١.١.٢ المؤثرات القرينة

تعريف ٤.١.٢ ليكن H_1 و H_2 فضائي هيلبارت و $T\in L(H_1,H_2)$. نسمي مؤثر قرين ل T المؤثر $T^*: H_2\to H_1$ يحقق :

$$\forall(x,y)\in H_1 H_2,\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^* y\rangle$$

قضية ١.١.٢ ليكن H فضاء هيلبارت و $T\in\mathcal{H}$. اذن T يقبل قرين وحيد T^* يحقق $\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle$ و $\|T^*\|=\|T\|$.

البرهان. ليكن $y \in H,$ فان $f : x \mapsto \{T_3, y\rangle$ هو عنصر من H^* اذن حسب نظرية ريز، يوجد $T^*y \in H$ وحيد يحقق:

$$\forall x \in H, (Tx, y) = f(x) = \langle x, T^*y\rangle$$

ولدينا ايضا :

$$\|T^*y\| = \|f\| \leq \|T^*\| \|y\| \to \|T^*\| \leq \|T\|$$

ومن جهة اخري

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= (Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*(Tx)) \\ &\to \|Tx\|^2 \leq \|x\|\|^*\|Tx\| \\ &\to \|Tx\| \leq \|x] \|T^*\| \\ &\to \|I \leq \|T^*\| \end{aligned}$$ ■

مثال ٣.١.٢ ليكن $S_r : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C}),$ حيث $Sx = (0, x_1 x_2, \ldots x_n, \ldots)\,,$ حيث $x = (x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots).$ من اجل $x, y \in F^2(\mathbf{C}),$ لدينا:

$$\begin{aligned} \langle Sx, y\rangle &= x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + \ldots + x_n\overline{y_{n+1}} + \ldots \\ &= \overline{x_1 y_2} + \overline{x_2 y_2} + \ldots \\ &= \langle x, y^*\rangle \end{aligned}$$

حيث $y^* = T^*y = (0, y_2, y_1, \ldots, y_n, \ldots)$.

(١). $T : L^2([a, b], \mathrm{C}) \to L^2([a, b], \mathbb{C})$ معرف ب $Tf(t) = \alpha(t)f(t),$ حيث $\alpha \in C(|\ a, b], \mathbb{C})$ من اجل كل $f, g \in L^2([a, b], \mathrm{C}),$ لدينا

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \alpha(t)f(t)\overline{g(t)}dt$$

$$= \int_a^b f(t)\overline{\overline{\alpha(t)}g(t)}dt$$

$$= \langle f(t), \overline{\alpha(t)}g(t)\rangle$$

$$= \int_a^b f(t)\overline{\overline{\alpha(t)}g(t)}dt$$

$$= \langle f(t), \overline{\alpha(t)}g(t)\rangle$$

اذن $T^*f(t) = \overline{\alpha(t)}f(t)$

(٢). ليكن $T : L^2([a, b], \mathbb{C}) \to L^2([a, b], \mathbb{C})$ مؤثر محدود معرف كالتالي $Tf(t) = \int_a^b k(t, s)x(s)ds,$ حيث $k \in L^2\left([a, b]^2\right.$ من اجل $f, g \in L^2([a, b], \mathbb{C}),$ لدينا:

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b k(t,s)f(s)ds\right)\overline{g(t)}dt \\
&= \int_a^b f(s)\overline{\left(\int_a^b \overline{k(t,s)}g(t)dt\right)}ds \\
&= \langle f, g^*\rangle \\
&= \langle f, T^*g\rangle . \\
T^*f &= \int_a^b \overline{k(t,s)}f(s)ds
\end{aligned}$$

خصائص ليكن S و T مؤثران معرفان في فضاء هيلبرت

(١). $(T+S)^* = T^* + S^*$

(٢). $(\alpha T)* = \bar{\alpha}T^*, \alpha \in \mathbb{C}$

(٣).

$$\langle T^*x, y\rangle = \langle T^*x, (T^*)^*y\rangle$$

من جهة اخرى لدينا

$$\langle T^*x, y\rangle = \langle y, \bar{T}^*x\rangle$$

$$= \langle T\bar{y}, x\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

$$\Rightarrow (T^*)^* = T$$

(٤). $(ST)^* = T^*S^*$

البرهان.

(١).
$$\begin{aligned}
\langle (S+T)x, y\rangle &= \langle Sx, y\rangle + \langle Tx, y\rangle \\
&= \langle x, T^*y\rangle + \langle x, S^*y\rangle.
\end{aligned}$$

(٢).
$$\begin{aligned}
&\langle (\alpha T)x, y\rangle = \langle T(\alpha x, y\rangle \\
&= \langle \alpha x, T^*y\rangle = \langle x, \bar{\alpha}T^*y\rangle .
\end{aligned}$$

(٣). $\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle$

$$= \langle \alpha x, T^*S^*y\rangle$$

$$\to (ST)^* = T^*S^*$$

■

توطئة ٢.١.٢ ليكن H فضاء هيلبرت و $T \in L(H)$, اذن :

(١). $\ker T = \left(\mathrm{Im}\,(T^*)^{\perp}\right.$.

(٢). $\overline{Im(T)} = (\ker T^*)^{\perp}$

البرهان.

(١). $\ker T$ ينتمي x اذا وفقط اذا كان $Tx = 0$, اذن

$$\begin{aligned} x \in \ker T &\Leftrightarrow \forall y \in \mathrm{Im}(T), \langle Tx, y\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x, T^*y\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in (Im\,(T^*))^{\perp} \end{aligned}$$

(٢). باستخدام (١) ، اذا اخذنا T^* في مكان T ، نحصل علي :

$$\begin{aligned} &\ker T^* = (\mathrm{Im}(T))^{\perp} \\ \Leftrightarrow\ &(\ker T^*)^{\perp} = \left.(\mathrm{Im}(T))^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{Im(T)} \end{aligned}$$

■

٢.١.٢ المؤثرات القرينة لنفسها

تعريف ٥.١.٢ نقول ان المؤثر T المعرف علي فضاء هيلبارت قرين لنفسه اذاوفقط اذا كان مساوي لقرينه اي :
$T^* = T$

نظرية ٢.١.٢ اذا كان T قرين لنفسه اذن $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$.

البرهان. نضع $\alpha_T = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$, بواسطة متراجحة كوشي شوارتز لدينا:

$$\begin{aligned} &|\langle Tx, x\rangle| \leq \|T\|\|x\| \leq \|T\| \\ &\to \alpha_T \leq \|T\| \end{aligned}$$

من اجل كل x حيث $\|x\| \leq 1$ لدينا

$$|\langle Tx, x\rangle| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} |\ \langle Tx, x\rangle = \alpha_T$$

إذا كان $x \neq 0$, ن َ

$$\left|\left\langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \leq \alpha_T$$
$$\rightarrow |\langle Tx, x\rangle| \leq \alpha_T \|x\|^2$$

علاوة على ذلك ، من اجل كل $x, y \in H$, لدينا :

$$\langle T(x+y), x+y\rangle = \langle Tx, x\rangle + 2\operatorname{Re}\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle$$
$$\langle T(x-y), x-y\rangle = \langle Tx, x\rangle - 2Re\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle$$

اذن

$$4Re\langle Tx, y\rangle \leq \alpha_T \left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$
$$\rightarrow 4\operatorname{Re}\langle Tx, y\rangle \leq \frac{\alpha_T}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

ناخذ x بحيث $Tx \neq 0$ ونضع اذن $y = \frac{\|x\|}{\|Tx\|}Tx,$ $\|y\| = \|x\|$.بالاضافة الي ذلك نحصل علي :

$$|\operatorname{Re}\langle Tx, y\rangle| \leq \alpha_T \left(\|x\|^2\right.$$
$$\rightarrow \left|\operatorname{Re}\left\langle Tx, \frac{\|x\|}{\|Tx\|}Tx\right\rangle\right| = \frac{\|x\|}{\|Tx\|}|\operatorname{Re}\langle Tx, Tx\rangle| \leq \alpha_T \left(\|x\|^2\right.$$
$$\rightarrow \|Tx\| \leq \alpha_T \|x\|$$
$$\rightarrow \|T\| \leq \alpha_T$$

ومنه حسب (3.1), و(3.2), نصل الى $\|T\| = \alpha_T$. ■

نظرية ٣.١.٢ اذا كان T قرين لنفسه، فان $\langle Tx, x\rangle$ حقيقي

البرهان. اذا كان $T = T^*$, فان :

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle$$
$$\rightarrow \langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$$
$$\rightarrow \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$$

■ **خصائص المؤثرات القرينة لنفسها** ليكن T وS مؤثرات قرينة لنفسها، اذن ST قرين لنفسه ولدينا $\Rightarrow (ST)^* = T^*S^*. = \langle x, T^*S^*y\rangle\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle$

قضية ٢.١.٢ ليكن H فضاء هيلبارت و $T \in L(H)$, اذن T قابلة للقلب اذا وفقط اذا وجد $c > 0$, حيث من اجل كل ، $x \in H, \|Tx\| \geq c\,\|_I\|$. واضح ان ،اذا كانت T قابلة للقلب ، اذن المتراجحة واضحة . من جهة اخري ، نفرض ان المتراجحة محققة ، اذن T متباين ، لانه اذا كان $x \in \ker T$ اذن

$$0 = \|Tx\| \geq c\|x\| \Leftrightarrow x = 0$$

بقي برهان ان T غامر ،

$$\operatorname{Im} T$$

كثيفة في H لان :

$$\overline{Im(T)} = \left(\ker T^{ast}\right)^{perp} = (\{0\})^{perp} = H$$

يكفي برهان ان ملاصقة صورة T لتكن $(y_n = Tx_n)$ من $\mathrm{Im}(T)$ متقاربة نحو y فان : (y_n) اي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, c\,\|x_n - x_m\| \leq \|Tx_n - Tx_m\| < \varepsilon$$

اذن (x_n) هي متتالية كوشية في الفضاء H ، وهي متقاربة نحو $x \in H$ ،ومن استمرارية T نجد $y = Tx \in \mathrm{Im}(T)$

٢.٢ بعض فئات المؤثرات

(١). نقول عن T انه ناظمي اذا وفقط اذا كان متبادل مع قرينه اي $T^*T = TT^*$

(٢). نقول عن T انه موجب اذا وفقط اذا كان من اجل كل$x \in H, \langle Tx, x\rangle \geq 0$

(٣). T تكون رتبة منتهية اذا وفقط اذا كان $\dim R(T) < \infty$.

(٤). نقول عن T انه اسقاط اذا وفقط اذا كان $T^2 = T$.

(٥). نقول عن T انه اسقاط عمودي اذا كان $T^*T = I_H$.$T^*T = I_H$.

(٦). نقول عن T انه تقايس مباشر اذا وفقط اذا كان $T^*T = I_H$.

(٧). نقول عن T انه وحداوي اذا كان... $T^*T = TT^* = I_H$

٣.٢ الدراسة الطيفية للمؤثرات الخطية المحدودة

١.٣.٢ طيف مؤثر

ليكن H فضاء هيلبارت ، و $T \in L(H)$.اليك المعادلة :

$$(T - \lambda)x = 0$$

ولتكن المعادة المتجانسة :

$$(T - \lambda)x = y$$

حيث x هو المجهول ، y معطى و λ عبارة علي وسيط . اذا وجد λ_0 حيث T_{λ_0} قابل للقلب و $\overline{D\left(T_{\lambda_0}\right)} = H,$
نقول ان λ_0 نقطة حالة ، حيث λ_0 تنتمي الي $\rho(T)$ اذن

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T_\lambda \quad est \quad inversible \quad \}$$

طيف المؤثر T نسميه $\sigma(T)$ وهو متممة $\rho(T)$ اي:

$$\sigma(T) = \lambda \in \mathbb{C}, T_\lambda \quad n'est \quad pas \quad inversible$$

نسمي الطيف النقطي مجموعة القيم الذاتية

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T_\lambda \quad n'est \quad pas \quad injectif \quad \}$$

نسمي الطيف المستمر مجموعة القيم $\lambda \in \mathbb{C}$ حيث T_λ^{-1} موجود و $\overline{D(T_\lambda = H)},$ لكن T_λ^{-1} ليس مستمر .
نسمي الطيف المتبقي مجموعة القيم $\lambda \in \mathbb{C}$ حيث T_λ^{-1} موجود لكن $\overline{D(T_\lambda \neq H)}$

$$\sigma_r(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}, \overline{D(T_\lambda \neq H)}\right\}$$

اذن نستطيع كتابة :

$$\sigma(T) = \sigma_c(T)\sigma_c(T)\sigma_r(T)$$

النصف القطر الطيفي ليكن $T \in l(H)$ نسمي نصف قطر طيفي العدد المعرف ب :

$$T(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{m}}$$

نظرية ١.٣.٢ ليكن $T \in \mathcal{L}(H).$ اذا كان $\|T\| \leq |\lambda|$ فان $\lambda \in \rho(T)$

البرهان. لدينا :

$$T_\lambda = (T - \lambda I) = -\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda}T\right)$$
$$R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k}$$

السلسلة متقاربة اذا وفقط اذا كان $\|T\| \leq |\lambda|$ ، في هذه الحالة ، T_λ موجود و$\lambda \in \rho(T)$ ■

نظرية ٢.٣.٢ ليكن H فضاء هيلبرت و $T \in \mathcal{L}(H),$ طيف المؤثر T هو مجموعة مغلقة .

البرهان. يكفي برهان ان مجموعة الحالة هي مجموعة مفتوحة ،اي ان جميع النقاط $\lambda \in \rho(T)$ هي نقاط داخلية. لتكن $\lambda_0 \in \rho(T)$ فان R_{λ_0} ، موجودة ومستمرة بالاضافة الى ان $E_{\lambda_0} = H$ لتكن (y_n) متتالية في E_{lambda} متقاربة نحو y اذن يوجد $(x_n) \subset D(T)$ حيث $y_n = Tx_n.$ لان (y_n) متقاربة ، اذن فهي متتالية كوشية ■

نظرية ٣.٣.٢ ليكن H فضاء هيلبارت و $T\mathcal{L}(H).$ فان $\lambda \in \rho(T)$ اذا وفقط اذا وجد $k > 0$ حيث :

$$\forall x \in H, \|T_\lambda x\| \geq k\|x\|$$

البرهان. اذا كانت $\lambda \in \rho(T)$ اذن T_λ قابلة للقلب ، اذن :

$$\|R_\lambda y\| \leq \|R_\lambda\| \, \|y\|$$

اذا اخذنا $y=T_\lambda x$ ، نجد

$$\|T_\lambda x\| \geq \frac{1}{\|R_\lambda\|}\|x\|$$

عكسيا ، اذا وجد $k>0$ حيث من اجل كل $x \in H, \|T_\lambda x\| \geq k\|x\|$ اذن R_λ يوجد λ ليست قيمة ذاتية ، وهذا يستلزم $\overline{E_\lambda}=H$ يكفي اثبات ان E_λ مغلقة. لتكن (y_n) متتالية من E_λ متقاربة نحو y اذن توجد $(x_n) \subset D(T)$ حيث $y_n=Tx_n$ ، لان (y_n) متقاربة ، اذن فهي متتالية كوشية ، اي

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m>n_0, \|y_n-y_m\|<\varepsilon \\ \rightarrow k\left\|x_n-x_m\right\| \leq \left\|T\left(x_n-x_m\right)\right\|=\left\|y_n-y_m\right\|<\varepsilon\end{gathered}$$

اذن (x_n) متتالية كوشية ، اذن فهي متقاربة نحو x استمرار T_λ يستلزم

$$T_\lambda x_n \rightarrow T_\lambda x=y$$

اذن $y \in E_\lambda=(T-\lambda I)E$. ∎

۲.۳.۲ طيف المؤثرات القرينة لنفسها

ليكن H فضاء هيلبارت و $T \in L(H)$ نقول ان :

$$\sigma\left(T^*\right)=\{\bar{\lambda}, \lambda \in \sigma(T)\}$$

اذن اذا كانت T قرينة لنفسها فان الطيف حقيقي ومتناظر بالنسبة للمحور الحقيقي

نظرية ٤.۳.۲ ليكن H فضاء هيلبارت $T: H \rightarrow H$ مؤثر خطي قرين لنفسه ،اذن فان طيفه محتوى في $\mathbb{R}$. اي اذا وضعنا $m=\inf_{x\in E}\langle Tx,x\rangle$, و $M=\sup_{x\in E}\langle Tx,x\rangle$ فان $\sigma(T) \subseteq [m,M]$

البرهان. واضح ان اذا كان T قرين لنفسه ،فان القيم الذاتية هي قيم حقيقية . لتكن $\lambda \in \mathbb{R}/[m,M]$ سنثبت ان $\lambda \in \rho(T)$: لتكن $\lambda<m$ و $\|x\|=1,$ اذن فان :

$$\begin{gathered}\langle(T-\lambda I)x,x\rangle=\langle Tx,x\rangle-\lambda\|x\|^2 \geq m-\lambda \\ \Rightarrow m-\lambda \geq \langle T_\lambda x,x\rangle \leq \|T_\lambda x\|\end{gathered}$$

اذن عن طريق خاصية التجانس نجد :

$$\begin{gathered}m-\lambda \leq \left\|T_\lambda \frac{x}{\|x\|}\right\| \Rightarrow \|T_\lambda x\| \geq (m-\lambda)\|x\| \\ \Rightarrow \lambda \in \rho(T)\end{gathered}$$

نفس الشيء اذا اخذنا $\lambda \geq M$. ∎

نتيجة ١.۳.۲ اذا كان T قرين لنفسه ،فان نصف قطر الطيف مساوي لنظيمه ، اي : $r(T)=\|T\|$.

٤.٢ تمارين

التمرين الأول حدد T^* في الحالات التالية :

(١). $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), Tx(t) = x\left(\frac{t+1}{2}\right)$.

(٢). $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C}), Tx = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n, \dots), (\alpha_n) \subset \ell^\infty$

(٣). $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), Tx(t) = a(t)x(t+h), h \in \mathbb{R}$ و a عبارة علي دالة مستمرة R

التمرين الثاني ليكن $T : C([-\pi,\pi]) \to \mathbb{R}$.استخرج القيم والاشعة الذاتية في الحالات التالية :

(١). $Tx(t) = x(-t)$

(٢). ٢. $Tx(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t+s)x(s)ds$

التمرين الثالث ليكن $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة و $Tx(t) = \int_0^1 \varphi(t)x(t)dt$

(١). اثبت ان $T \in \mathcal{L}\left(L^2\right)$.

(٢). اثبت ان T قرين لنفسه

(٣). اثبت انه يوجد λ حيث $T^2 = \lambda T$

(٤). احسب نصف القطر الطيفي بدلالة λ.

التمرين الرابع

(١). لتكن $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$, حيث $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$
اثبت من اجل كل $\lambda \in \mathbb{C}$, حيث $|\lambda| \leq 1$ هي قيمة ذاتية ل T
حدد طيف المؤثر T

(٢). ليكن $S : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$, حيث $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$
اثبت ان S لاتقبل اي قيمة ذاتية
اثبت ان طيف S دائرة الوحدة المغلقة $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}$

التمرين الخامس لتكن (α_n) متتالية محدودة في $\mathbb{C}$ و $T : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$ نعرف من اجل $x = (x_n)$ ب $Tx = (\alpha_n x_n)$

(١). اثبت من اجل كل $(c_n), n \geq 1$ هي قيمة ذاتية

(٢). اثبت انه اذا كان $\lambda\overline{\{c_n, n \geq\}}$, فان $\lambda\sigma(T)$

(٣). استنتج $\sigma(T)$

التمرين السادس ليكن $E = L^2([0,1], \mathbb{C},$ من اجل $f \in E$ اليك المؤثر $Tf(t) = tf(t)$

(١). تاكد من $Tf \in E$

(٢). اثبت ان T لا يقبل اي قيمة ذاتية .حدد طيف T

الفصل ٣

المؤثرات الخطية والمتراصة

١.٣ المؤثر المتراص

تعريف ١.١.٣ ليكن E، F فضاءان باناخيان، و $T \in L(E,F)$. نقول عن T إذا كان يحقق أحد المميزات التالية:

(١). $T(\overline{B}(0,1))$ صورة كرة الوحدة المغلقة بواسطة T تكون شبه متراصة

(٢). صورة كل مجموعة محدودة بالمؤثر T تكون شبه متراصة.

(٣). من أجل كل متتالية محدودة من E، يمكن استخراج متتالية من (Tx_n) والتي تتقارب في F.

و نرمز بـ $K(E,F)$ إلى فضاء المؤثرات

مثال ١.١.٣ كل مؤثر محدود ذو رتبة منتهية متراص، $\dim TE < \infty$، لأن صورة كل مجموعة محدودة هي مجموعة محدودة في فضاء ذو بعد منته.

ملاحظة ١.١.٣ المؤثر الحيادي في فضاء باناخي ذو بعد غير منته هو مؤثر مستمر، ولكنه ليس متراص لانه يحول كرة الوحدة المغلقة الى نفسها، و حسب مبرهنة مبرهنة ريبس ض تكون كرة الوحدة المغلقة متراصة اذا وفقط اذا كان الفضاء ذو بعد منته.

نظرية ١.١.٣ ليكن E فضاء باناخ و $T \in K(E)$، إذا كانت (T_n) متتالية المؤثرات المتراصة متقاربة نحو T. إذن T متراص.

البرهان. يكفي إثبات أنه بالنسبة لأي متتالية محدودة $(x_n) \subset E$، يمكن الاستخراج من المتتالية (Tx_n) متتالية جزئية من E.
لأن T_1 متراص، إذن يمكننا إستخراج متتالية جزئية $(T_1x_n^{(1)})$ متقاربة في E.
بالنسبة لـ $(T_2x_n^{(1)})$، توجد متتالية جزئية $(T_2x_n^{(2)})$ متقاربة في E. و بنفس الطريقة توجد متتالية جزئية

$(T_3x_n^{(3)})$ لـ $(T_3x_n^{(2)})$ و هي متقاربة.
أخيرا، نحصل على المتتالية $(x_n^{(n)})$ بحيث $(T_nx_n^{(n)})$ متقاربة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.
سوف نثبت أن $(Tx_n^{(n)})$، يكفي أن نثبت أن $(Tx_n^{(n)})$ متتالية كوشية، لأن E متراص. في الواقع، لدينا

$$\|Tx_n^{(n)} - Tx_m^{(m)}\| \leq \|Tx_n^{(n)} - T_kx_n^{(n)}\| + \|Tx_k^{(n)}{}_n - T_kx_m^{(m)}\| + \|T_kx_m^{(m)} - Tx_m^{(m)}\|.$$

ليكن $\|x_n\| \leq c$، نختار k بهذه الطريقة $\|T - T_k\| < \frac{\varepsilon}{3c}$، إذن

$$\|Tx_n^{(n)} - Tx_m^{(m)}\| < c\|T - T_k\| + \frac{\varepsilon}{3} + c\|T - T_k\| = \varepsilon.$$

لذلك، $(Tx_n^{(n)})$ متتالية كوشية. ■

قضية ١.١.٣ الفضاء $K(E, F)$ هو فضاء جزئي مغلق في $\mathcal{L}(E, F)$.

البرهان. لتكن (T_n) متتالية من المؤثرات المتراصة من E إلى F، حيث $\|T_n - T\| \to 0$.سوف نثبت أن $T \in K(E, F)$. في الواقع، من خلال تعريف النهاية، لدينا

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

من أجل $x \in \overline{B}(0, 1)$، لدينا $\|T_nx - Tx\| < \frac{\varepsilon}{3}$، لأن $T_n(\overline{B})$ شبه متراص، إذن $T_n(\overline{B}) \subseteq \cup_{j=1}^k B(T_nx_j, \frac{\varepsilon}{3})$.
لذلك من أجل كل $j \leq k$، لدينا

$$\|Tx - Tx_j\| \leq \|Tx - T_nx\| + \|T_nx_j - T_nx\| + \|T_nx_j - Tx_j\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\to T(\overline{B}) \subset \cup_{j=1}^k B(Tx_j, \varepsilon).$$

لذلك ، يمكننا تغطية $T(\overline{B})$ بعدد محدود من الكرات المفتوحة. ■

نظرية ٢.١.٣ اذا كان E, F فضاءان بناخيان و $T : E \to F$ مترا متراصا. $R(T) = T(E)$ مغلقة اذا وفقط اذا كان T ذو رتبة منتهية.

البرهان. لنفرض ان $R(T)$ مغلقة في F اذن بتطبيق مبرهنة التطبيق المفتوح على $T : E \to R(T)$ يوجد مفتوح $U \subset R(T)$ حيث $U \subseteq TB_E$.
لتكن B كرة مغلقة في U ، لدينا

$$B \subset U \subseteq TB_E \subseteq \overline{B_E}$$

بمان T متراص فان $\overline{B_E}$ متراصة، و B مغلق في متراص وبالتالي فهي متراصة. اذن $\dim R(T) < \infty$.
اذا كانت $\dim R(T) < \infty$ وكانت (Tx_n) متتالية من $R(T)$ متقاربة، وبمان T متراص فانه يمكن استخراج متتالية (Tx_nk) من $R(T)$ متقاربة نحو $y \in R(T)$. اذن $Tx_n \to y \in R(T)$. ومنه $R(T)$ مغلقة. ■

نظرية ٣.١.٣ ليكن $T \in \mathcal{L}(E, F)$ و $S \in \mathcal{L}(F, G)$. إذا كان T أو S متراص، إذن $ST \in K(E, G)$.

البرهان. إذا كانت M مجموعة محدودة، إذن SM محدودة أيضا. إذن فإن تراص T يعني أن $T(SM)$ شبه متراص .

إذا كان S متراص، فإن SM شبه متراص، لأن T مستمر، إذن $T(SM)$ شبه متراص. ∎

٢.٣ المؤثر القرين لمؤثر متراص

نظرية ١.٢.٣ (شودير-$Schauder$)
قرين المؤثر الخطي المتراص هو مؤثر متراص

من أجل البرهان نستخدم نظرية أرزيلا أسكولي$(Arzela - Ascoli)$.

نظرية ٢.٢.٣ ليكن E فضاء متري متراص و $\mathcal{H}$ عائلة من الدوال $C(E)$. إذن $\mathcal{H}$ م شبه متراص إذا وفقط إذا كان $\mathcal{H}$ محدودة بإنتظام ومتساوية الإستمرار.

نذكر أن $\mathcal{H}$ متساوية الإستمرار عند x_0 إذا وفقط إذا كان

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{H}.$$

البرهان. نظرية شودير
نفرض أن T متراص، فنحن نريد إثبات أن $T^*(B_{F^*})$ شبه متراص. لأجل ذلك نعتبر (Φ) عائلة الدوال f_n من $\overline{TB_E}$ في $\mathbb{C}$ نعرف بـ $f_n(\varphi) = \langle \varphi, \psi_n \rangle$، حيث $\psi_n \in \overline{B}$.
(f_n) محدودة بإنتظام:

$$|f_n(\varphi)\|_\infty = \sup_{\varphi \in \overline{TB_e}} |\langle \varphi, \psi_n \rangle| = \sup_{x \in \overline{B_E} | \langle Tx, \psi_n \rangle | \leq \|T\|} .$$

من أجل كل φ_1 و φ_2، لدينا

$$\|f_n(\varphi_1) - f_n(\varphi_2)\| \leq \|\varphi\| \|\varphi_1 - \varphi_2\| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

إذا Φ متساوية الإستمرار، ومنه بإستخدام نظرية أرزيلا أسكولي$(Arzela - Ascoli)$ Φ متراص نسبيا، إذن يمكننا إستخراج متتالية جزئية (f_{nk}) متقاربة نحو f.
من أجل كل $x \in \overline{B_E}$، لدينا

$$\langle T^* \psi_{n_k}, x \rangle = \langle \psi_{n_k}, Tx \rangle = f_{n_k}(Tx) \to_{k \to \infty} f(Tx).$$

من أجل $x \in E$، $\phi(x) = \lim_{k \to \infty} \langle T^* \psi_{n_k}, x \rangle$ موجود، خطي و $\phi / B_E = f \circ T$. كما

$$\phi(x) = \lim_{k \to \infty} \|T^* \psi_{n_k}(x)\| \leq \|T^*\| \|\psi_{n_k}\| \|x\| \leq \|T\| \|x\|$$

ϕ مستمر، إذن $\phi \in E^*$. بالإضافة إلى

$$\|T^*\psi_{n_k} - \phi\|_E = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T^*\psi_{n_k} - \phi, x\rangle| = \|f_{n_k} - f\| \to 0.$$

مما يعني أنه من أجل كل متتالية ψ_n، يمكننا إستخراج متتالية جزئية متقاربة.
على العكس من ذلك ، إذا كان T^*، إذا وفقا لما يسبق $T = (T^*)^*$ هو متراص. ■

٣.٣ الدراسة الطيفية للمؤثرات المتراصة

نظرية ١.٣.٣ ليكن E فضاء بناخ و $T \in K(E)$، إذن فإن:

(١). $\dim \ker(I - T) < \infty$

(٢). $R(I - T)$ مغلق.

(٣). إذا $(I - T)$ متباين، فإن $(T - I)$ قابل للقلب.

البرهان.

(١). إذا $x \in N = \ker(I - T)$، فإن $Tx = x$، إذا فإن B_Nالكرة الحيادية لـ N لدينا $TB_N = B_N$، كما B_N مغلق في N، إذن مغلق في E و لدينا $B_N = TB_N \subset \overline{TB_E}$ متراص، لأن T متراص، إذن N ذات بعد منتهي (بإستخدام نظرية ريس للتراص).

(٢). ليكن (y_n) متتالية في $(I - T)$ تتقارب نحو y. إذن، يوجد $(x_n) \subset E$، حيث $y_n = x_n - Tx_n$. إذا (x_n) محدودة، إذن يوجد متتالية جزئية (x_{n_k}) وكما T متراص، يمكننا إستخراج متتالية جزئية (Tx_{n_k}) متقاربة نحو Tx (عن طريق إستمرار T). إذن $(I - T)x_{n_k} \to x - Tx$، مما يوحي $y = x - Tx \in R(I - T)$.
إذا (x_n) ليست محدودة، ليكن $d_n = d(x_n, N)$، نظرا لأن N ذو بعد منتهي؛ يوجد $(z_n) \subset N$، حيث

$$d_n = \|x_n - z_n\|.$$

سوف نبرهن أن (d_n) محدودة، في الواقع يوجد متتالية جزئية (x_{n_k}) حيث $\|x_{n_k} - z_{n_k}\| \to \infty$. ليكن $v_n = \frac{x_n - z_n}{2\|x_n - z_n\|}$، لدينا $\|v_n\| \leq 1$. إذن حسب تراص T، يوجد متتالية جزئية (Tv_{n_k}) متقاربة نحو $v \in E$.
بما أن $x_n - Tx_n \to y$، لدينا

$$v_n = (I - T)z_n + Tz_n = \frac{1}{2d_n}(I - T)x_n + Tz_n \to 0$$

حسب إستمرارية T، لدينا $Tv = v$، يعني أن $v \in N = \ker(I - T)$.
كما أن $\|\frac{x_n - z_n}{2d_n} - v_n\| = \|v_n - v\| \to 0$، و ذلك لـ n كبير كفاية، لدينا $\|v_n - v\| < \frac{1}{2}$ نحصل على $\|x_n - z_n - 2d_n v\| < d_n$. و هذا متناقض مع تعريف d_n. إذن، (d_n) محدودة، $(x_n - z_n)$ و يعطي أيضا $z_n \in N$ ولدينا $(I - T)(x_n - z_n) \to y$. لقد عدنا إلى الحالة الأولى.

(٣). لتطبيق نظرية التشاكل البناخي ($Théorème \quad de \quad l'isomorphisme \quad de \quad Banach$)، يكفي إثبات أن $(I-T)$ غامر .
نفترض

$$E_1 = T(I-T) \neq E,$$

من أجل كل $n \geq 1$، نضع

$$E_n = [(I-T)^n] = (I-T)^n E.$$

كما $E_{n+1} = (I-T)E_n$، إذن (E_n) متتالية من مجموعة جزئية مغلقة ومتناقصة.
من جهة أخرى، $(I-T)$ متباين و $E_1 \neq E$، عن طريق الاستقراء لدينا $E_n \neq E_{n+1}$. بإستخدام توطئة ريس يوجد $(x_n) \subset E$، حيث $\|x_n\| = 1$ و $d(x_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. إذن، من أجل $n > m$، لدينا

$$Tx_n - Tx_m = x_n - (I-T)x_n + (I-T)x_m - x_m$$

و $x_n - (I-T)x_n + (I-T)x_m \in E_{m+1}$. لذلك،

$$\|Tx_n - Tx_m\| \geq d(x_m, E_{m+1}) \geq \frac{1}{2},$$

لا يمكن الإستخراج من (Tx_n) متتالية جزئية متقاربة، إذن هذا تناقض مع T متراص.

■

نظرية ٢.٣.٣ (هيلبرت شميت-$Hilbert - Schmidt$)
إذا كان T مؤثر متراص وقرين لنفسه في الفضاء الهيلبرتي H، إذن يوجد نظام متعامد $\{\varphi_n\}$ الأشعة الذاتية المرتبطة بالقيم الذاتية غير المعدومة $\{\lambda_n\}$، حيث من أجل كل $x \in H$ يمكن كتابتها في شكل وحيد:

$$x = \sum_k c_k \varphi_k + x',$$

أو $x' \in KerT$ و $Tx = \sum_k \lambda_k c_k \varphi_k$.

إذا كان $\{\varphi_n\}$ غير منتهي، إذن فإن $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

نظرية ٣.٣.٣ ليكن E فضاء بناخ و $T \in K(E)$. لدينا

(١). $0 \in \sigma(T)$.

(٢). كل عنصر $\lambda \neq 0$ من $\sigma(E)$ هو قيمة ذاتية. بالإضافة إلى، $\dim\ker(T - \lambda I) < \infty$.

البرهان.

(١). نفترض أن $0 \in \sigma(T)$. إذن T تقابلي كما أن T ست متراص إذن نستنتج أن $I_E = T \circ T^{-1}$ متراص كمؤثر على E. على وجه الخصوص $\overline{B_E}$ متراص مما يعني أن E ذو بعد منتهي. إنه تناقض إذن $0 \in \sigma(T)$.

(٢). لتكن $\lambda \in \sigma(T)$ تختلف عن الصفر، إذن $(T-\lambda I)$ ليست قابلة للقلب ، $(T-\lambda^{-1})$ أيضا ، و بالتالي ليست تقابلية مما يعني أن λ قيمة ذاتية و $\dim\ker(T-\lambda^{-1}I) < \infty$، إذن $\dim\ker(T-\lambda I) < \infty$.

■

نظرية ٤.٣.٣ ليكن H فضاء هلبرتي و ليكن $T \in K(H)$ و قرين لنفسه، إذن H يقبل بأساس هلبرتي مشكل من الأشعة الذاتية لـ T.

٤.٣ تمارين

التمرين الأول: ليكن $E = C([0,1])$،فضاء بناخ للتطبيقات ذات قيم مركبة، مستمرة على $[0,1]$، مزود بنظيم الحد الأعلى (Sup). ليكن $k : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ تطبيق مستمر، و $T : E \to E$ معرفة بـ

$$Tx(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)ds.$$

(١). أثبت أن $T \in K(E)$.

(٢). أثبت أن $\|T\| = \sup_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 k(t,s)ds$.

(٣). حدد $\|T\|$ ثـ $\sigma(T)$ مع أن $k(t,s) = e^{t+s}$.

التمرين الثاني: ليكن E . نفس الفضاء المعرف في التمرين الأول، و $T : E \to E$ معرف بـ

$$Tx(t) = \int_0^{1-t} x(s)ds.$$

(١). أثبت أن $|Tx(t) - Tx(s)| \leq |t-s|\|x\|_\infty$

(٢). إستنتج أن T متراص.

(٣). أثبت أن 0 قيمة طيفية لـ T، لكن ليست قيمة ذاتية.

التمرين الثالث: ليكن H فضاء هلبرتي مركب و $T \in \mathcal{L}(H)$.

نقول عن مؤثر انه ناظمي اذا وفقط اذا كان متبادلا مع قرينه.اي

$$TT^* = T^*T.$$

(١). أثبت أن إذا كان T ناظمي، فإنه من أجل كل $x \in H$، لدينا

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|.$$

(٢). أثبت أنه إذا كان T ناظمي و T^2 متراص إذن فإن T متراص.

التمرين الرابع: ليكن H فضاء هلبرتي مركب و $T \in \mathcal{L}(H)$.

(١). أثبت أنه إذا كان T ناظمي و متراص، حيث $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$، إذن T قرين لنفسه.

(٢). أثبت أنه إذا كان T ناظمي و متراص، حيث $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}_+$، إذن فإن T موجب.

الفصل ٤

نظرية هان بناخ وتطبيقاتها

١.٤ الشكل التحليلي لنظرية هان بناخ

تعريف ١.١.٤ نسمي نصف نظيم على مجموعة E كل تطبيق $p : E \to \mathbb{R}_+$ الذي يحقق الخواص التالية:

(١). $p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall \lambda \geq 0$؛

(٢). من أجل كل $x, y \in E, p(x+y) \leq p(x) + p(y)$؛

كل نظيم على E هو نصف نظيم.

توطئة ١.١.٤ كل مجموعة غير خالية ومرتبة ترتيبا جزئيا تحتوي عنصر أعظميا.

١.١.٤ نظرية هان بناخ الحقيقة

نظرية ١.١.٤ (نظرية هان بناخ الحقيقة)
ليكن E فضاء شعاعي حقيقي و ، G فضاء جزئي من E، p نصف نظيم على E و $f \in G^*$، بحيث

$$\forall x \in G, f(x) \leq p(x).$$

إذن يوجد $\tilde{f} \in E^*$ حيث

$$\forall x \in G, \tilde{f}(x) = f(x);$$

$$\forall x \in E, \tilde{f}(x) \leq p(x).$$

البرهان. نفرض أن $E \neq G$، إذن يوجد $x \in E/G$، من أجل $x_0 \in G$ نعرف G_1الفضاء الجزئي من E كالآتي:

$$G1 = \{tx + x_0, x0 \in G, t \in \mathbb{R}\}.$$

سنثبت الآن وجود تمديد f_1 ل f على G_1.
من أجل $t \in G_1$، نضع

$$f_1(y) = f_1(tx + x_0) = tf_1(x) + f_1(x_0) = tc + f(x_0),$$

بحيث $f_1(x) = c$ ثابت يتم اختياره كالتالي

$$f_1(tx + x_0) = p(tx + x_0), \tag{١.٤.١}$$

$\forall y \in G_1, f_1(y) \leq P(y)$. بالتعريف، f_1 خطي ويحقق

$$\forall x \in G, f_1(x) = f(x),$$

نبين المتباينة (١.١.٤)، في حالة $t > 0$.
لدينا المتباينة (١.١.٤) مكافئة ل

$$f_1(x + \frac{x_0}{t}) \leq p(x + \frac{x_0}{t}),$$

لأن f_1 خطي و $\frac{x_0}{t} \in G$، ومنه المتباينة السابقة مكافئة للمتباينة التالية

$$c + f(\frac{x_0}{t}) \leq p(x + \frac{x_0}{t}),$$

بمعنى،

$$p(x + \frac{x_0}{t}) - f(\frac{x_0}{t}) \geq c. \tag{١.٤.٢}$$

ضِ $t < 0$، المتباينة)١.١.٤(مكافئة ل

$$f_1(x + \frac{x_0}{t}) \leq p(x + \frac{x_0}{t}),$$

وهذا يبرهن المتباينة التالية:

$$-p(-x - \frac{x_0}{t}) - f(\frac{x_0}{t}) \leq c. \tag{١.٤.٣}$$

ومنه، للوصول إلى النتيجة المرجوة، يكفي إظهار وجود c الذي يتحقق (٢.١.٤)و (٣.١.٤). من أجل $x', x'' \in G$، لدينا

$$f(x'') - f(x') \leq p(x'' - x') = p\big((x'' + x') - (x' + x)\big) \leq p(x'' + x) + p(-x' - x),$$

بمعنى

$$-f(x'') + p(x'' + x) \geq -f(x') + p(x' + x).$$

نضع

$$c' = \sup_{x'\in G}(-f(x') - p(x'-x)), \quad c'' = \sup_{x''\in G}(-f(x'') - p(x''+x)),$$

c' و c'' موجودين و $(c' \leq c'')$، أيضا f_1 معرفة ب $f_1(tx+x_0) = tc + f(x_0)$ هي شكل خطي على G_1' وفي نفس الوقت تمديد ل f على G_1' يحقق

$$f_1(tx+x_0) \leq p(tx+x_0),$$

إذن $\forall y \in G_1, f_1(y) \leq p(y)$.

الآن لإثبات النظرية لدينا الحالتان التاليتان:

(١). هناك مجموعة عدودة تولد مساحة E، بمعنى $E = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$،

إذن يوجد تمديد f_1 ل f على G_1 و f_2 ل f_1 على G_2...الخ. بالتراجع نصل الى أن f_n تمديد ل f على G_n وتحقق

$$\forall y \in G_n, f_n(y) \leq p(y),$$

لأن $E = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$، إذن يوجد تمديد f^* ل f على E يحقق

$$\forall x \in E, f^*(x) \leq p(x).$$

(٢). في الحالة العامة، نشير بى A_{G_n} لمجموعة كل التمديدات الممكنة تُنس g ل f والتي تحقق:

$$\forall x \in E, g(x) \leq p(x).$$

نعرف على A_{G_n} العلاقة $\prec$، من أجل كل $f_1, f_2 \in A_{G_n}$,

$$f_1 \prec f_2 \Leftrightarrow \begin{cases} G_1 \subset G_2, \\ \forall x \in G, f_1(x) = f_2(x) \end{cases}$$

العلاقة $\prec$ علاقة ترتيب جزئي.

ليكن $(f_i)_{i\in I}$ مجموعة مرتبة من A_{G_n}، واضح أن f' معرفة على $G' = \cup_{i\in I} G_i$ و G_i مجموعة تعريف f_i والتي تحقق

$$\forall x \in G_i, f'(x) = f_i(x), i \in I$$

تنتمي الى A_{G_n} وهي عنصر أعظمي ل (f_i). بإستعمال توطئة $Zorn$ المجموعة $(f_i)'$ تملك عنصر أعظمي f^* في A_{G_n}.

سنبين أن f'هو الامتداد المرغوب في النظرية، لذلك يكفي إظهار أن f^* مُعرَّف على E إجمالي عدد صحيح.

بالتناقض، نفرض أن f^* غير معرّف على E بالكامل، إذّن يوجد امتداد لـ f^* وهذا يناقض أن f^* هو العنصر الأعظمي.

وبالتالي، يوجد شكل خطي f^* معرف على E ويحقق:

$$\begin{cases} \forall x \in G, f^*(x) = f(x), \\ \forall x \in E, f^*(x) \leq p(x) \end{cases}$$

■

نظرية ٢.١.٤ ليكن E فضاء شعاعي حقيقي و G فضاء شعاعي جزئي من E و f شكل خطي على G. إذن، f يملك تمديد $\tilde{f}$ على E مع $\|\tilde{f}\|_{E^*} = \|f\|_{G^*}$.

البرهان. فقط نأخذ $p(x) = \|f\|_G\|x\|$ ونطبق نظرية هان بناخ نصل الى النتيجة المطلوبة. ■

نتيجة ١.١.٤ ليكن E فضاء شعاعي نظيمي ، من أجل كل $x \neq 0$ من E يوجد $f \in E^*$، بحيث $f(x) = \|x\|$ ت $\|f\| = 1$.

البرهان. نأخذ $G = \mathbb{K}x$ و $f(\lambda x) = \lambda\|x\|$.

إذن ليكن $G = \{tx_0, t \in \mathbb{R}\}$. نعرف الشكل الخطي $f(x) = f(tx_0) = t\|x_0\|$. واضح أن $f(x_0) = \|x_0\|$ و

$$\|f(x)\| = |t|\|x_0\| = \|tx_0\| = \|x\|$$

$$\to \|f\|_G = 1.$$

■

نتيجة ٢.١.٤ ليكن E فضاء شعاعي نظيمي ومن أجل كل $x \in E$ و $f \in E^*$، لدينا

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |fx| = \max_{\|f\| \leq 1} |fx|.$$

البرهان. لدينا

$$\sup_{\|f\| \leq 1} |fx| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\|.$$

علاوة على ذلك ، فإنه يوجد f_0 يحقق $f_0(x) = \|x\|$ ت $\|f_0\| = 1$. نضع $f = \frac{1}{\|x\|}f_0(x)$، فنتحصل على

$$\sup_{\|f\| \leq 1} |fx| \leq \sup_{\|f\| \leq 1} \frac{f_0(x)}{\|x\|} \leq 1$$

$$\to \|f\|.$$

■

نتيجة ٣.١.٤ من أجل $f \in E^*$ تكون $f(x) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = 0$.

البرهان. إذا كان $x = 0$، واضح أن $f(x) = 0$.

إذا كان $f(x) = 0$ فإنه من أجل $f \in \overline{B}(0,1) \subset E^*$، لدينا

$$\|f(x)\| = 0 \to \sup \|f(x)\| = \|x\| = 0.$$

■

٢.١.٤ نظرية هان بناخ المركبة

نظرية ٣.١.٤ ليكن E فضاء شعاعي على حقل

$\mathbb{C}$ و G فضاء جزئي من E و p دالة معرفة على E تحقق الشروط التالية:

(١). $\forall x \in E, p(x) \geq 0$؛

(٢). $\forall x, y \in E, p(x+y) \leq p(x) + p(y)$؛

(٣). $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

إذا كان f شكل خطي على G، بحيث من أجل كل $x \in G$ و $f(x) \leq p(x)$، يوجد شكل خطي مركب $\tilde{f}$ يحقق $\forall x \in G, \tilde{f}(x) = f(x)$ و $\forall x \in E, |\tilde{f}(x)| \leq p(x)$.

البرهان. وفقاً للفرضية لدينا:

$$f(x) = g(x) + ih(x),$$

حيث g و h شكلان خطيان حقيقيان. من ناحية أخرى من أجل كل $x \in G$، لدينا

$$f(x) = g(ix) + ih(x) = ig(x) - h(x)$$

$$= if(x)$$

ومنه، من أجل $x \in G$، لدينا $h(x) = -g(ix)$.

حسب نظرية هان بناخ الحقيقية يوجد تمديد

$\tilde{g}$ لـ g على E يحقق

$$\forall x \in G, \tilde{g}(x) \leq p(x)$$

$$\Rightarrow -\tilde{g}(x) = \tilde{g}(-x) \leq p(-x) = p(x)$$

$$\Rightarrow |\tilde{g}(x)| \leq p(x)$$

نعرف $\tilde{f}$ كالتالي

$$\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) - i\tilde{g}$$

لكن

$$\tilde{f}(ix) = \tilde{g}(ix) - i\tilde{g}(-x)$$

$$= \tilde{g}(ix) + i\tilde{g}(x) = i\tilde{f}(x).$$

إذن، $\tilde{f}$ شكل خطي عقدي. من أجل كل $x \in G$، لدينا

$$\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) - i\tilde{g}(ix) = g(x) - ig(ix)$$

$$= g(x) + ih(x) = f(x).$$

ومنه $\tilde{f}$ هو امتداد لـ f. الآن، نثبت أن

$$\forall x \in E, |\tilde{f}(x)| \leq p(x).$$

بالفعل، نستعمل الشكل الأسي لعدد مركب، فنجد

$$\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) - i\tilde{g}(ix) = re^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow |\tilde{f}(x)| = r = e^{i\theta}\tilde{f}(x) = \tilde{f}(xe^{i\theta}).$$

القيمة الأخيرة إيجابية حقيقية ، ولدينا أيضاً

$$\tilde{f}(xe^{i\theta}) = \tilde{g}(xe^{i\theta}) - i\tilde{f}(xe^{i\theta})$$

$$\Rightarrow |\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(xe^{i\theta}) = |\tilde{g}(xe^{i\theta})|$$

$$\Rightarrow |\tilde{f}(x)| = |\tilde{g}(xe^{i\theta})| \leq p(xe^{i\theta} = e^{i\theta}p(x).$$

وبالتالي، $\forall x \in E, |\tilde{f}(x)| \leq p(x)$. ■

٢.٤ الشكل الهندسي لنظرية هان بناخ

نظرية ١.٢.٤ ليكن E فضاء شعاعي نظيمي. وليكن C و G جزئين منفصلين وغير خاليين من E بحيث C تكون محدبة ومغلقة و

G محدبة ومتراصة. إذن، يوجد شكل خطي ومستمر $\varphi \in E^*$ بحيث:

$$\sup_{x\in C} Re\varphi(x) < \inf_{y\in G} Re\varphi(y).$$

٣.٤ تمارين

التمرين الأول: ليكن E و F فضائين شعاعيين و $T : E \to F$ خطي.

أثبت أن T مستمر إذا وفقط إذا كان من أجل كل $f \in F^*$, لدينا $f \circ T \in E^*$.

التمرين الثاني: ليكن E فضاء شعاعي نظيمي، Fفضاء جزئي مغلق من E و $x_0 \in E/F$.

أثبت أنه يوجد $\varphi \in E^*$، بحيث $\|\varphi\| = 1$ ومن أجل كل $x \in F, \varphi(x) = 0$.

التمرين الثالث: ليكن E فضاء شعاعي نظيمي و F ُن فضاء شعاعي جزئي من E.

(١). أثبت أن $\overline{F} = \cap\{\ker f, f \in E^*, F \subset \ker f\}$.

(٢). استنتج أن F كثيف في E إذا وفقط إذا كان من أجل كل شكل خطي ومستمر من E الذي ينعدم على F ينعدم على Eو $\overline{F} = E \Leftrightarrow F^{\perp}$.

التمرين الرابع:

ليكن E،F فضائين باناخيين و $T \in \mathcal{L}(E, F)$. نذكر أنه يوجد $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$، يسمى مرافق T، بحيث $T^*\psi(x) = \psi(Tx)$، من أجل كل $\psi \in F^*$ و $x \in E$.

(١). أثبت أن TE كثيف في F إذا وفقط إذا كان T^* متباين.

(٢). أثبت أنه إذا كان T غامر، فإنه يوجد $c > 0$، بحيث $\|T^*\psi\| \geq \|\psi\|, \forall \psi \in F^*$.

التمرين الخامس: أثبت أنه يوجد $\varphi \in (\ell^\infty)^*$ بحيث يوجد $(x_n) \subset \ell^\infty$، يحقق

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n \leq \varphi(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup x_n.$$