كلية التكنولوجيا – جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي

اسم مقياس	**طرق عددية - méthodes numériques**
المستوى	السداسي الثالث - ثانية علوم وتقنيات
الساعات المعتمدة	01 سا و 30 د بالأسبوع
اعداد	اللبي ياسين ، بركة نورالدين

تكملة لمحاضرة مقياس الطرق العددية.

(الفصل الاول : أنواع الخطأ وطرق تقديره وحسابه)

<u>الفصل الثاني :</u> طرق عددية حل المعادلات الجبرية غير الخطية

الطرق البيانية - طريقة التنصيف المتكرر – النقطة الثابتة – ونيوتن (نيوتن-رافسون) – القواطع (الأوتار) – دراسة وتحليل الأخطاء المتعلقة بهذه الطرائق ومناقشة معدلات تقاربها وخوارزميتها.

المقدمة

في هذا الفصل ، سوف نناقش خوارزميات وطرق إيجاد جذور المعادلات الجبرية غير الخطية. حيث يمكن التعبير عن المشكلة التي نتعامل معها هنا رياضيًا على النحو التالي :

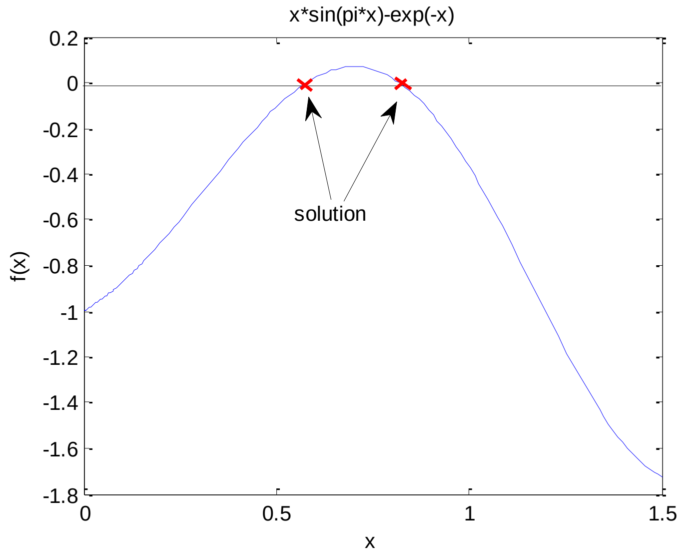
أوجد قيم x بحيث تكون المعادلة غير الخطية ، $f(x) = 0$ محققة.

عندما نقول أن $f(x)$ هي **دالة غير خطية** لـ x ، فهذا يعني أنه لا يمكن كتابة $f(x)$ بالشكل : $f(x) = a.x + b$ ، حيث a و b ثوابت.

وعندما نقول أن $f(x)$ هي **معادلة جبرية** ، فهذا يعني أن $f(x)$ لا تتضمن أي التفاضل من الشكل d^ny/dx^n، مثال بسيط معادلة من الدرجة الثانية المألوفة حيث $f(x)=ax^2+bx+c=0$، وبالمثل $x-\sin(x)=0$، $x4+5x^3+7x^2+x-3=0$ .. إلخ من أمثلة المعادلات غير الخطية. من الواضح أنه لا يمكن ايجاد جذور المعادلات غير الخطية من خلال الوسائل التحليلية باستثناء بعض الحالات البسيطة، لذلك هدفنا هو معرفة الطرق العددية التي تعثر على القيم التقريبية للجذور.

هناك العديد من الطرق لتحديد وحصر المجال $a<x<b$ حيث يتقاطع المنحنى المحدد بـ $f(x)=y$ مع محور التراتيب ox (فاصلة الإحداثيات x لنقطة التقاطع هي جذر المعادلة $f(x)=0$). تتمثل إحدى الطرق ببساطة في رسم الدالة في مجال (فترة) معين. طريقة أخرى هي العثور على نقطتين a و b على المحور ox ، حيث تحقق الشرط $f(a)*f(b)<0$ (اختلاف اشارة صورتيهما) ، حيث تغير الدالة اشارتها أثناء تحركنا على طول المحور ox من النقطة $x=a$ إلى $x=b$ (لنفترض أن $a<b$)، وهذا يعني ، بالنسبة للدوال المستمرة ، أن الرسم البياني (منحنى) الدالة $y=f(x)$ يتقاطع مع المحور ox مرة واحدة على الأقل بين النقطتين $x = a$ و $x = b$ ($\alpha \in [a, b]$، حيث α هو الحذر التقريبي للمعادلة).

مثال 1: على سبيل المثال ، لنقترح المعادلة f(x) = x*sin(pi*x)-exp(-x). بما أن f (0) <0 و f (2/3)> 0 وبما أن f (x) مستمر على هذا المجال الفاصل بين النقطتين، يجب أن يكون هناك جذر بين 0 و 3/2. بدلاً من ذلك ، يمكننا ببساطة رسم الدالة باستخدام بعض البرامج الرياضية الموضحة في الشكل التالي.



1- طريقة التنصيف المتكرر (Bisection Methods) :

يمكننا متابعة الفكرة أعلاه قليلاً عن طريق تضييق المجال الذي يحوي جذر المعادلة f(x)=0 حتى يصبح المجال الذي يقع فيه الجذر صغيرًا بما فيه الكفاية. بالنسبة للدالة في المثال 1 ، يمكننا تقسيم المجال او الفترة [0, 2/3] إلى مجالين فرعيين (نصفين)، [1/3, 2/3] و [0, 1/3]. الآن ، يمكن التحقق بسهولة من أن الدالة f(x) لا تغير اشارتها على المجال الفرعي [0, 1/3] و تغيرها على حدو المجال الفرعي [1/3, 2/3]. ومن ثم نختار المجال الفرعي [1/3, 2/3] ونقسّمه أكثر حيث سيؤدي هذا إلى اختيار المجال الفرعي الجديد [1/2, 2/3]. نقوم بتقريب الجذر في هذه المرحلة كمتوسط حسابي لإحداثيات حدود هذا المجال (مركز المجال) وهذا يعطي الجذر xc = 0.58333 ... الآن وf(0.5833)=5.4e-3؛ حيث إذا كان الجذر المطلوب فقط بهذه الدقة (E ≥) ويمكننا التوقف هنا، أما إذا كانت هناك حاجة لمزيد من الدقة فيمكننا المضي قدمًا بطريقة التنصيف المتكرر. ويمكن تعميم خطوات خوارزمية طريقة التنصيف على النحو التالي:

-1 بالنظر إلى الدالة f (x) ، اختر مجال ابتدائي [a, b] بحيث يكون a<b و f (a)*f (b)<0. اختر ε ، مستوى التسامح (الدقة). اختر N ، العدد الأقصى لعدد التكرارات (عمليات التصنيفات). حدد عدادًا ، على سبيل المثال k، لتتبع عدد عمليات التنصيف التي يتم إجراؤها.

-2 من أجل k ≤ N :

احسب xc=(a+b)/2.

إذا كان $|f(xc)| \le ε$ ، اذا اطبع النتائج الجذر التقريبي هو xc واخرج من البرنامج.

إذا كان f(a)*f(xc)<0 ، اذا قم بتعيين b = xc.

غير ذلك {f(xc)*f(b)<0 ، اذا قم بتعيين a = xc.

-3 إذا لم يتم الحصول على التقارب بعد N تنصيف (تكرار، خطوة)، اطبع القيم الحالية لـ a و b و f (xc) وأبلغ المستخدم بأن معيار التسامح (شرط الدقة) لم يكن تتحقق عند التنصيف رقم k=N واخرج من البرنامج.

لاحظ أن هذه الخوارزمية تحدد جذر واحد فقط من المعادلة في كل مرة. وينطبق هذا بشكل عام على الطرق العددية لحل المعادلات غير الخطية. عندما تكون للمعادلة جذور متعددة ، فإن اختيار المجال الابتدائي الذي يوفره المستخدم هو الذي يحدد أي الجذر يمكن التقارب اليه. اختيار مجال [a, b] بحيث f(a)*f(b)<0 يضمن فقط وجود جذر حقيقي واحد على الأقل بين a و b ، وبالتالي يمكن أن

تتقارب الطريقة إلى جذر. الشرط المعاكس ، $f(a)*f(b)>0$ لا يعني أنه لا توجد جذور حقيقية في المجال [a, b]. خذ بعين الاعتبار المثال أعلاه ، مع مجال يبدأ من [0, 1]. يمكن القول أنه لا يوجد ضمان لوجود جذر في المجال [a, b] عندما $f(a)*f(b)>0$ ، وستفشل خوارزمية التنصيف في هذه الحالة. وبالتالي فإن الاختيار الموفق للمجال الابتدائي مهم لنجاح طريقة التنصيف المتكرر.

مثـــــال 2 :

أوجد بطريقة التصنيف المتكرر جذر المعادلة (أن المعادلة غير خطية) وذلك في الفترة [2, 3] بدقة $E=10^{-2}$

$$F(x)= x^3- 4x+2$$

الحل : لدينا

$F(0)= 2$ ، $f(1)=-1$ $\Leftarrow$ $F(0).f(1) < 0$ $\Leftarrow$ هذا يعني أن الجذر موجود ضمن الفترة [0,1]

$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5$ $\Leftarrow$ $F(x_0) = f(0.5) = 0.125 > 0$

وبما أن $f(0.5).f(1)<0$ فإن الجذر موجود في الفترة [0.5,1]

$x_1 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$ $\Leftarrow$ $F(x_1) = f(0.75) = -0.578125 < 0$

$f(0.5).f(0.75) < 0$ أي أن الجذر موجود ضمن الفترة [0.5 , 0.75]

$x_2 = \frac{0.5+0.75}{2} = 0.625$ $\Leftarrow$ $F(x_2)=f(0.625)=-0.255859375 <0$

$F(0.5).f(0.625)<0$ $\Leftarrow$ إذا الجذر موجود ضمن الفترة [0.5, 0.625]

$x_3= \frac{0.5+0.625}{2}=0.5625$ $\Leftarrow$ $f(x_3)= f(0.5625)= -0.072021484375<0$

ومنه : $F(0.5).f(0.5625)<0$ $\Leftarrow$ إذا الجذر موجود ضمن الفترة [0.5, 0.5625]

$x_4= \frac{0.5+0.5625}{2} = 0.53125$ $\Leftarrow$ $F(x_4)= f(0.53125) =0.024932861328125>0$

ومنه $F(0.53125).f(0.5625)<0$ $\Leftarrow$ إذا الجذر موجود ضمن الفترة [0.53125, 0.5625]

$$x_5= \frac{0.53125+0.5625}{2} = 0.546875$$

$F(x_5)=f(0.546875)= -0.023944854736328<0$ $\Leftarrow$ ومنه $f(0.53125).f(0.546875)<0$

إذا فإن الجذر موجود ضمن [0.53125, 0.546875]

$x_6= \frac{0.53125+0.546875}{2} = 0.5390625$ $\Leftarrow$ $F(x_6)=f(0.5390625) = 3.952980041503906e-4 >0$

$F(0.5390625). f(2.7109) < 0$ $\Leftarrow$ إذا الجذر موجود ضمن الفترة [0.5390625, 0.546875]

في هذه الخطوة شرط الدقة محقق حيث : $0.5390625-0.546875 = 0.0078125 \leq E(10^{-2})$

وبذلك نكون قد حصلنا على الجذر بسبع تقريبات وهو $\alpha=\frac{0.5390625+0.546875}{2} = 0.54296875$

التقارب :

لنفترض أن طول المجال الابتدائي، $[a_0, b_0]$ ، يعبر عنه بواسطة I_0. ثم بعد التنصيف الأول ، يكون طول المجال الجديد الناتج $I_1 = I_0/2$ ، بعد التنصيف الثاني ، $I_2 = I_1/2 = I_0/4$ وبعد عدة خطوات بنفس الطريقة، بعد تكرار التنصيف n^{th} مرة يكون طول المجال،

$$I_{n+1} = I_n/2 = I_0 / (2^{n+1}) \Leftrightarrow (b_n- a_n) = (b_0- a_0) / (2^{n+1}).$$

لذلك إذا كان مستوى التسامح هو Tol (من الشكل 10^{-k})، فسيتم إعطاء عدد التنصيفات (عدد التكرارات اللازمة) المطلوبة لتقليل عرض المجال إلى Tol تعطى :

$$I_{n+1} \le Tol \Leftrightarrow (b_0 - a_0) / (2^{n+1}) \le 10^{-k} \Leftrightarrow n > \frac{\log 10(b-a)+k}{\log 10(2)} - 1$$

اذا اردنا معرفة عدد التكرارات اللازمة في المثال 2 لإيجاد الحل الذي ينتمي في الفترة [2, 3] بدقة $E=10^{-2}$ نطبق القانون السابق ونجد :

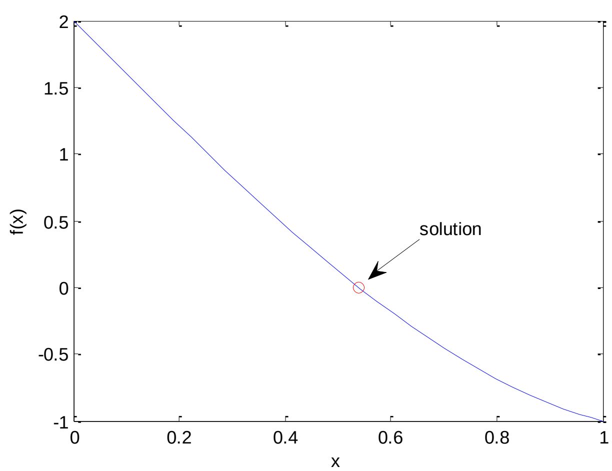
$$n > \frac{\log 10(b-a)+k}{\log 10(2)} - 1 \quad \Leftrightarrow n > \frac{\log 10(3-2)+2}{\log 10(2)} - 1 \quad \Leftrightarrow n > 5.64385 \quad \Rightarrow \quad n = 6$$

ومنه عدد التكرارات اللازمة هي 6 حيث نقرب دائما للعدد الطبيعي التالي.

و يمكن بنفس الفكرة كتابة برنامج لإيجاد حل معادلة المثال 1 السابق بطريقة التنصيف المتكرر على برنامج الماتلاب MATLAB كالتالي :

```
clear;clc;
f = inline('x^3-4*x+2')
a=0;b=1;
E=1e-2; k=1;
dx=1;
while dx>E
    xc=(a+b)/2;
    if f(a)*f(xc)<0
        b=xc;
    else
        a=xc;
    end
    dx=abs(b-a);
    k=k+1;
end
disp(['solution : ',num2str(xc),', iterations : ',num2str(k-1)])
fplot(f,[0,1]);hold on; plot(xc, f(xc),'or')
```

>> solution : 0.53906, iterations : 7



2- طريقة النقطة الثابتة (Fixed Point Iteration Method -) :

نقطة ثابتة: تسمى النقطة ، على سبيل المثال ، x نقطة ثابتة إذا استوفت المعادلة x = g (x).
النقطة ثابتة تكرارية: يمكن تحويل المعادلة المستمرة f(x) = 0 جبريًا إلى الشكل (x = g (x) (نسمي الدالة g بالصيغة التكرارية) ثم استخدام المخطط التكراري مع العلاقة التكرارية.

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

مع التخمين الأولي x_0 يسمى بدأ مخطط تكراري النقطة الثابتة.

الخوارزمية –خطوات طريقة النقطة الثابتة التكرارية :

- بإعطاء معادلة $f(x) = 0$
- حوّل $f(x) = 0$ إلى الشكل $(x = g(x))$
- دع التخمين الأولي يكون x0
- قم ب: $x_{n+1}= g(x_n)$
- كرر ما دام شرط التوقف لم يتحقق (لم يتم استيفاء أي من معايير التقارب C1 أو C2)

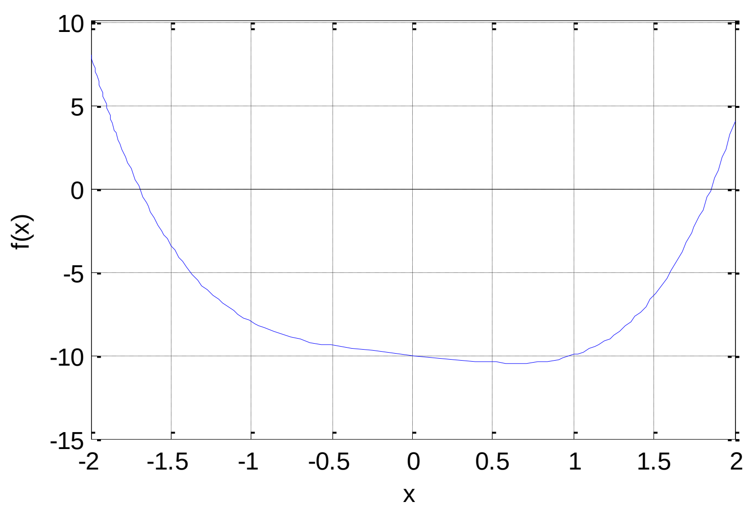
حيث:

C1. تحديد مسبق للعدد الإجمالي للتكرار N.

C2. عن طريق اختبار الشرط : هل $| x_{n+1} - x_n |$ (حيث n هو رقم التكرار) أقل من حد التسامح ، على سبيل المثال ε، ثابت محدد مسبقا. اي التوقف عندما يصبح الفرق المطلق بين قيمتين متتاليتين اقل من الخطأ المحدد.

مثال عددي 3:

أوجد جذر المعادلة $x^4-x-10 = 0$



ضع في الاعتبار الصيغة التكرارية $g_1(x) =10/(x^3-1)$ والمخطط التكراري للنقطة الثابتة $x_{n+1} =10/(x_n^3 -1)$، $n=1, 2, \ldots$ ،

ضع القيمية الابتدائية (التخمين الأولي) x_0 يكون 2.0، نجد السلسلة التالية من القيم :

8	7	6	5	4	3	2	1	0	**n**
-10	-9.99e-3	-10	-9.978e-3	-10.004	0.071	5.214	1.429	2	**x_n**
-9.99e-3	-10	-9.99e-3	-10	-9.978e-3	-10.004	0.071	5.214	1.429	**$g_1(x_n)$**

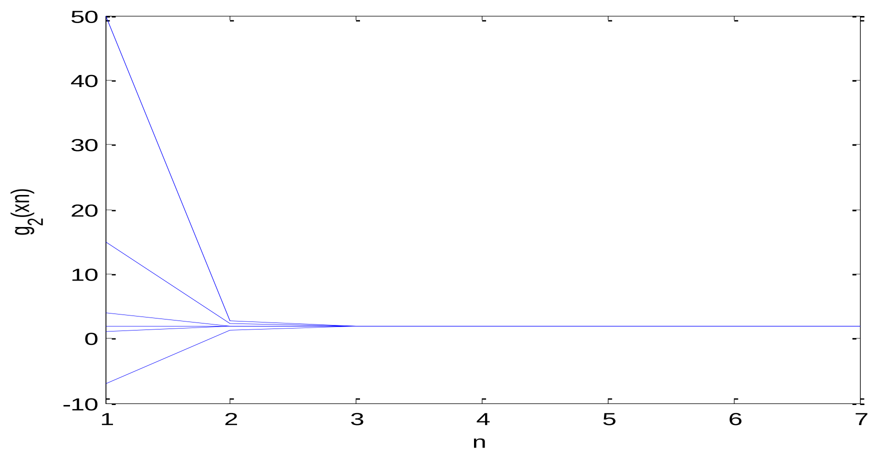
نجد بان العملية التكرارية مع الصيغة g1 تدخل في حلقة لا نهائية دون التقارب.

لذا نأخذ في الاعتبار دالة أخرى بالشكل $g_2(x)=(x+10)^{1/4}$ ، فيكون الصيغة التكرارية للنقطة الثابتة:

$$x_{n+1}= (x_n + 10)^{1/4}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

نضع التخمين الأولي للقيمة الابتدائية x0 يكون 1.0 ثم 2 و 4 و 15 و 50 و -7 (لهدف دراسة اثر تخمين القيم الابتدائية على التقارب)، فنجد السلسلة التالية من القيم :

6	5	4	3	2	1	0	**n**
	1.85558	1.85558	1.85553	1.85424	1.82116	1.0	**x_n**
	1.85558	1.85558	1.85559	1.8558	1.861	2.0	**x_n**
1.85558	1.85558	1.85559	1.8557	1.85866	1.93434	4.0	**x_n**
1.85558	1.85558	1.85560	1.85615	1.87029	2.23606	15	**x_n**
1.85558	1.85558	1.85563	1.85696	1.89086	2.78315	50	**x_n**
1.85558	1.85558	1.85555	1.85474	1.83410	1.31607	-7	**x_n**



نجد أن سلسلة القيم التكرارية بالنسبة إلى الصيغة g_2 ، تتقارب إلى 1.85558 سريعا مع أي تخمين أولي.

لنضع الصيغة من الشكل $g_3(x)=(x+10)^{1/2}/x$ الصيغة التكرارية للنقطة الثابتة

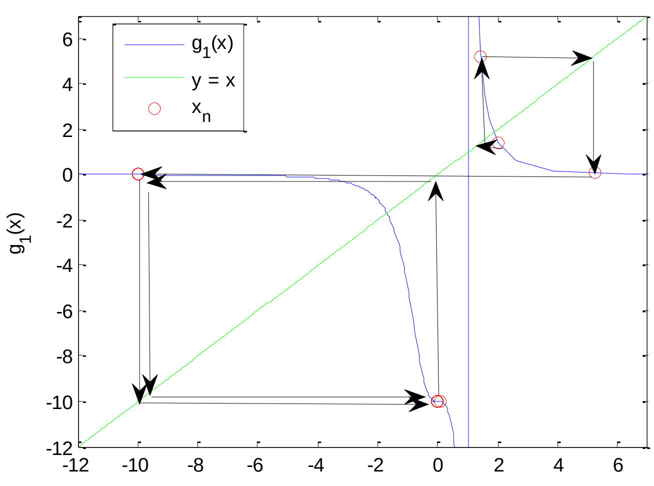
$x_{n+1}=(x_n+10)^{1/2}/x_n$، حيث $n = 0, 1, 2, . . .$

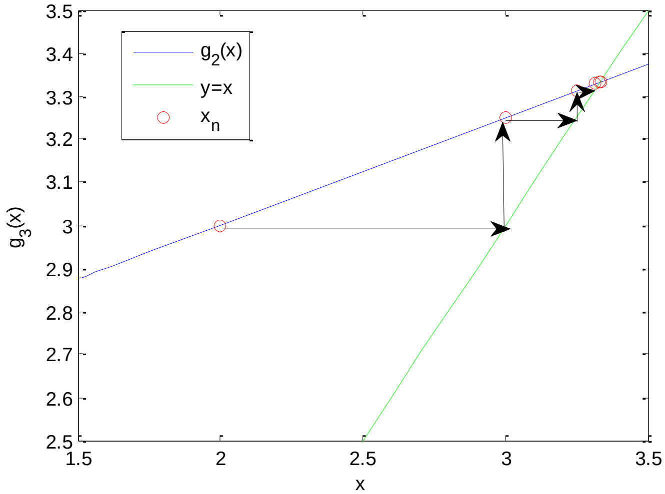
ونفرض أن القيمة الابتدائية x_0 يكون 1.8 (تخمين جيد مقارنة مع قيمة الجذر) ، نجد

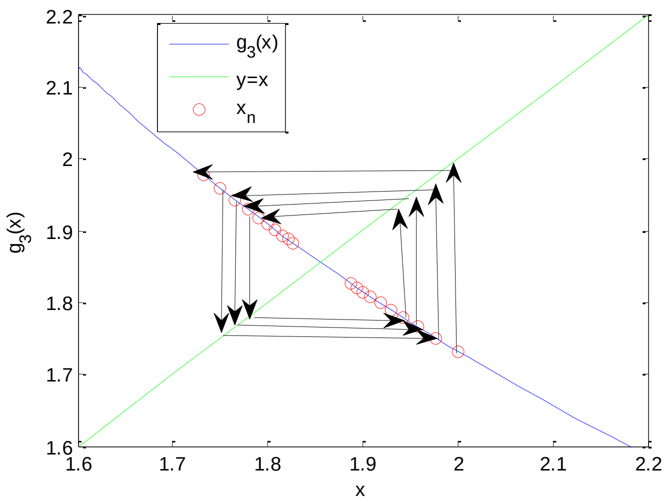
98	. . .	6	5	4	3	2	1	0	**n**
1.8555	. . .	1.82129	1,89355	1.81529	1.90035	1.80825	1.9084	1.8	**x_n**

نجد انه مع أي تخمين أولي فان العملية التكرارية بالنسبة لـ g3 تتقارب ولكن ببطء شديد.

التفسير الهندسي للتقارب مع g1 و g2 و g3.







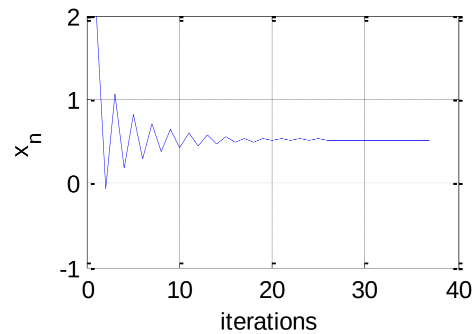
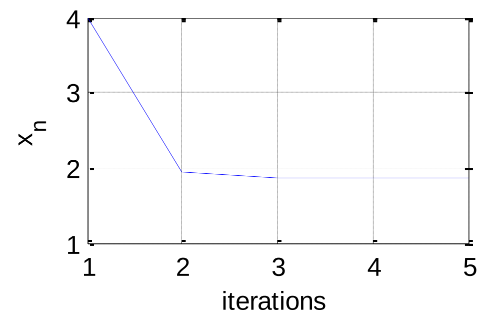
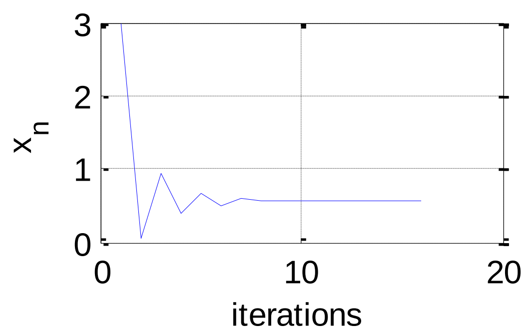
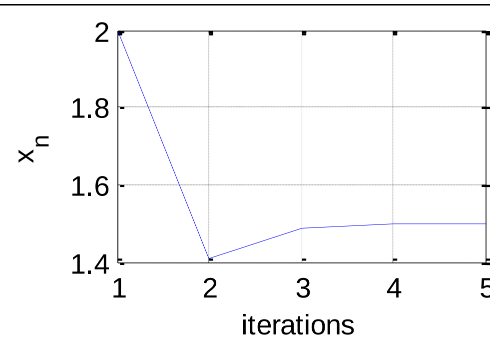
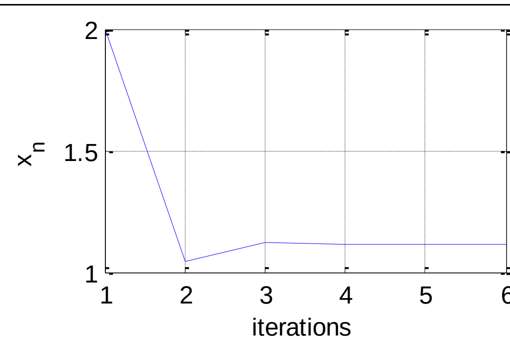
توضح الرسوم البيانية g_1 و g_2 و g_3 مخطط تقارب النقطة الثابتة التكرارية مع g_1 و g_2 و g_3 على التوالي لقيم التقريبات الأولية x0=2. من الواضح أن :

- الشكل g_1 ، لا تتقارب العملية التكرارية لأي قيمة تقريبة ابتدائية.
- الشكل g_2 ، تتقارب العملية التكرارية بسرعة كبيرة إلى الجذر وهي نقطة التقاطع المستقيم $y = x$ والمنحنى $y = g_2(x)$ كما هو موضح في الشكل.
- الشكل g_3 ، تتقارب العملية التكرارية ولكن ببطء شديد.

شرط التقارب:

إذا كان $g(x)$ و $g'(x)$ دوال مستمرة على المجال $[a, b]$ الذي يحتوى الجذر المعادلة $x=g(x)$ $(f(a)*f(b)<0)$ α، وإذا كان $|g'(x)| < k < 1$ مهما كانت قيمة x من المجال $[a, b]$، و كانت $g(x) \in [a,b], \forall x \in [a,b]$ فان الصيغة التكرارية لطريقة النقطة الثابتة $x_{n+1}=g(x_n)$، $\forall n=0,1,2,\ldots$، سوف تتقارب إلى الجذر النقطة الثابتة α مهما كنت القيمة الابتدائية المتخذة x_0 المنتمية إلى الفاصل المجال $[a, b]$ لأي دقة مطلوبة.

استخدام طريقة التنصيف لايجاد جذور المعادلات التالية بالدقة 10^{-2} :

f(x)=0	g(x)	n	α الجذر	تقارب سلسلة القيم
cos(x) - x*exp(x) = 0 $x_0=2$	cos(x)/exp(x)	37	0.5181	
x^4-x-10 = 0 $x_0=4$	$(x + 10)^{(1/4)}$	5	1.8555	
x^4-x-10 = 0 $x_0=3$	exp(-x)	16	0.5669	
x-sin(x)-(1/2)= 0 $x_0=2$	sin(x)+(1/2)	5	1.4972	
exp(-x) = 3log(x) $x_0=2$	exp((exp(-x)/3))	6	1.1154	

حيث يمكننا كتابة برنامج بالماتلاب لإيجاد جدر الاخيرة للمثال السابق كالتالي :

```
clear;clc;
g = inline('exp((exp(-x)/3))')
E=1e-3;x0=2;
n=0; dx=1;
while dx>E & n<100
    x1=g(x0);
    dx=abs(x1-x0);
    x0=x1;
    n=n+1;
end
disp(['solution : ',num2str(x1),', iterations : ',num2str(n)])
```

```
>> solution : 1.1154, iterations : 5
```

3- طريقة نيوتن رافسون (Newton Raphson Method) :

تعد طريقة نيوتن-رافسون واحدة من أكثر الأساليب المستخدمة على نطاق واسع للعثور على الجذر .يمكن تعميمها بسهولة على مشكلة إيجاد حلول لنظام معادلات غير خطية ، والتي يشار إليها باسم تقنية نيوتن .علاوة على ذلك ، يمكن إثبات أن التقنية متقاربة بشكل تربيعي مع اقترابنا من الجذر.

على عكس طريقة التنصيف المتكرر والنقطة الثابتة ، تتطلب طريقة نيوتن-رافسون (N-R) فقط قيمة ابتدائية x_0 ، والتي تعتبر التخمين الأولي للجذر. لمعرفة كيفية عمل طريقة N-R ، يمكننا إعادة كتابة الدالة f (x) باستخدام متسلسلة تايلور (Taylor) في $(x-x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + 1/2\, f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots\ 1/n!\, f^{n}(x_0)(x-x_0)^n = 0$$

حيث يشير f'(x) إلى المشتق الأول لـ f(x) فيما يتعلق بـ x ، و f''(x) هو المشتق الثاني ، وهكذا. لنفترض أن التخمين الأولي x_0 قريب جدًا من الجذر الحقيقي، وعليه فان $(x-x_0)$ صغير ، حيث فقط الحدود الأولى في السلسلة للحصول على تقدير دقيق للجذر الحقيقي. من خلال اقتطاع السلسلة عند الحد الثاني (الخطي في x) ، نحصل على صيغة تكرار N-R للحصول على تقدير أفضل للجذر الحقيقي:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

وبالتالي فإن طريقة N-R تجد المماس للدالة f (x) عند النقطة $x = x_0$ وتستنبط نقطة تقاطعه مع المحور ox للحصول على x_1. تؤخذ احداثية نقطة التقاطع هذه كتقريب جديد للجذر ويتكرر الإجراء حتى يتم الحصول على التقارب كلما أمكن ذلك. رياضيا ، بالنظر إلى قيمة $x = x_n$ في نهاية التكرار n^{th} ، نحصل على x_{n+1} كـ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

و هذه الصيغة تسمى بصيغة نيوتن – رافسون - The Newton–Raphson method أو اختصاراً تسمى طريقة نيوتن Newton

وَ يمكن اعتبار النقطة x_{n+1} جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = 0$ إذا تحقق الشرط :

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon$$

حيث ε عدد صغير جداً .

* تفسير الهندسي : إذا استطعنا عزل جذر واحد للمعادلة $f(x) = 0$ في الفترة [a, b] وَ بفرض أن الدالة y =f (x) دالة متصلة ضمن هذه الفترة, ثم إذا رسمنا المنحنى البياني للدالة y=f(x) عندئذ إذا أخذنا نقطة ما x_0 في الفترة [a, b] و أوجدنا $f(x_0)$ ورسمنا المماس للدالة y = f(x) في النقطة $(x_0, f(x_0))$

حيث أن معادلة المستقيم المماس المار من النقطة $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ و ميله $m = f'\left(x_0\right)$ تعطى بالعلاقة التالية :

$$y - y_0 = f\left(x\right) - f\left(x_0\right) = m\left(x - x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$$

وَ بفرض أن هذا المماس يقطع محور السينات في نقطة و لتكن x_1

بما أن $\left(x_1, 0\right)$ نقطة تقاطع هذا المماس مع محور السينات فإذا بدّلنا كل X بـ x_1 وكل y بـ 0 نجد :

$$0 - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x_1 - x_0\right)$$

و منه

$$x_1 - x_0 = \frac{-f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}$$

ثم نوجد $f\left(x_1\right)$ ونرسم المماس للدالة $y = f(x)$ في النقطة $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ و ميله $m = f'\left(x_1\right)$

فيقطع المماس الجديد محور السينات في نقطة ولتكن x_2 بكتابة معادلة هذا المماس المار من النقطة $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ و ميله $m = f'\left(x_1\right)$

نجد :

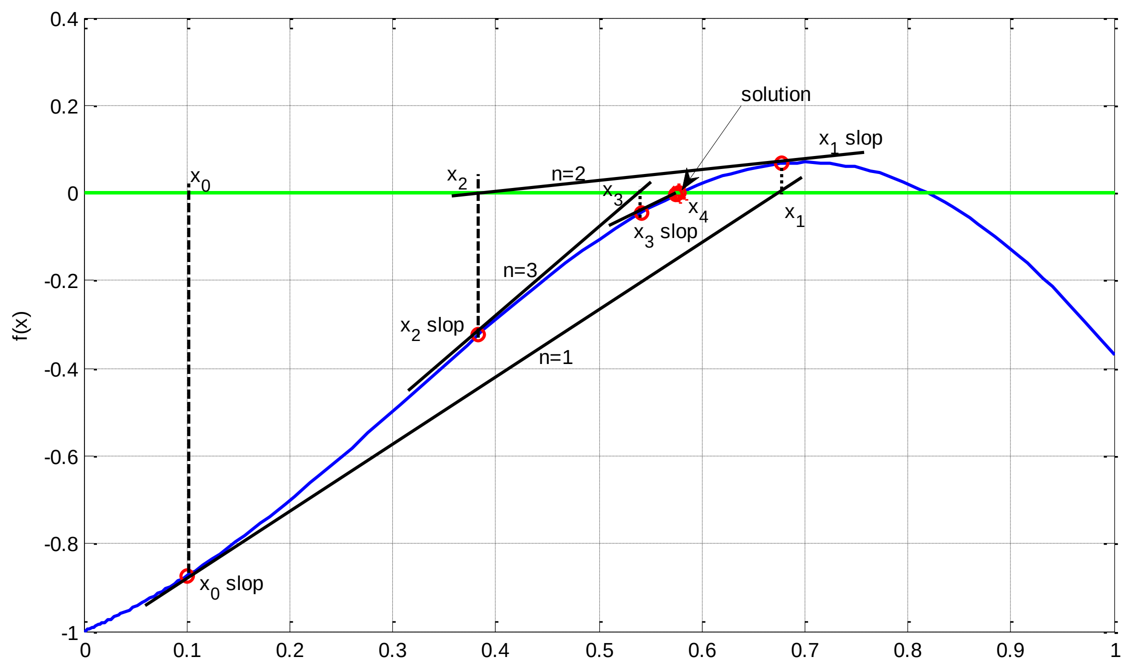
$$f\left(x\right) - f\left(x_1\right) = f'\left(x_1\right)\left(x - x_1\right)$$

بما أن $\left(x_2, 0\right)$ نقطة تقاطع هذا المماس مع محور السينات فإذا بدّلنا كل x بـ x_2 و $y = f(x)$ بـ 0 نجد :

$$0 - f\left(x_1\right) = f'\left(x_1\right)\left(x_2 - x_1\right)$$

و منه .

$$x_2 = x_1 - \frac{f\left(x_1\right)}{f'\left(x_1\right)}$$



وبتكرار هذه العملية عدداً من المرّات نحصل على الصيغة العامة التالية :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1,2,....$$

نفترض أن المشتق لا يساوي الصفر لأي من x_n لمعادلة المثال 1 : f(x) = x*sin(pi*x)-exp(-x)=0. و عند افتراض $x_0 = 0.1$ النتيجة التي تم الحصول عليها بهذه طريقة موضحة في الشكل السابق.

مثال :

أوجد جذر الدالة $f(x) = x^2 - 7$ بالدقة 0.001، حيث مشتق الدالة هو 2*x

$x_0 = 4$

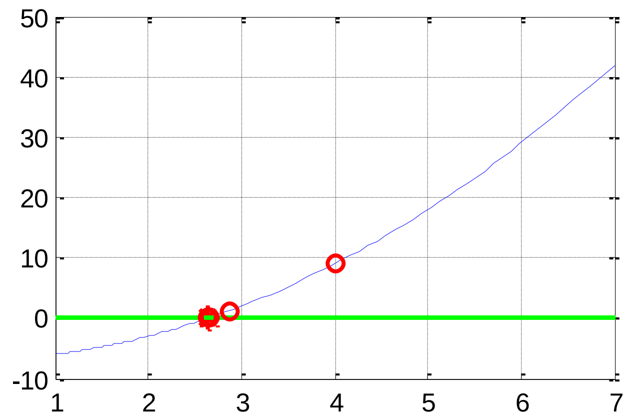
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \frac{9}{8} = 2.875$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.875 - \frac{1.2656}{5.75} = 2.6548$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.6548 - \frac{0.048}{5.3097} = 2.6457$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2.6457 + \frac{8.3e-5}{5.2915} = 2.6457$$

$|x_4 - x_3| \le 0.001 \rightarrow$ هو جذر المعادلة التقريبي x_4

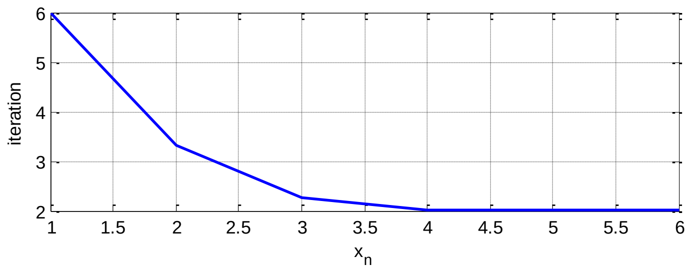


كلما زادت التكرارات التي يتم قيام بها ، كلما اقترب dx من الصفر (0). لنرى كيف يعمل هذا ، سنقوم بأداء طريقة نيوتن-رافسون ايضا على الدالة $f(x) = x^2-4$. فيما يلي القيم التي نحتاج إلى معرفتها لإكمال العملية. نضع :

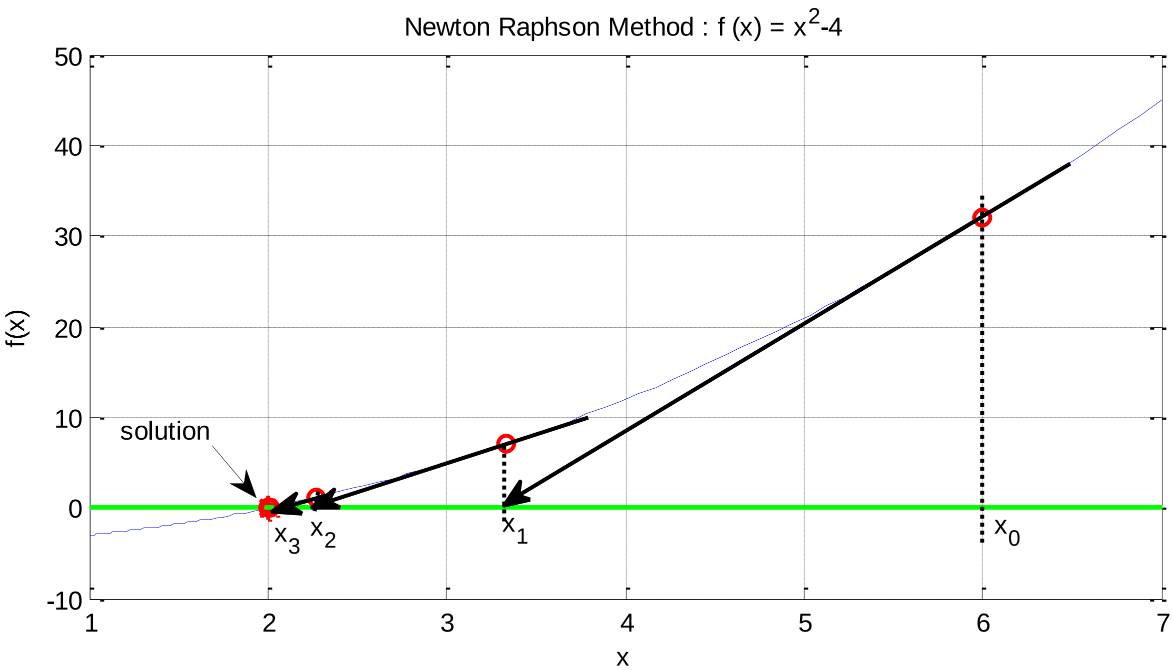
$$f(x) = x^2-4$$
$$f'(x) = 2*x$$
$$x_0=6$$

نظريًا ، يمكننا تنفيذ عدد لا نهائي من التكرارات للعثور على تمثيل مثالي لجذر المعادلة. ومع ذلك ، فهذه طريقة رقمية نستخدمها لتخفيف عبء العثور على الجذر ، لذلك لا نريد القيام بذلك. وسنفترض أن العملية قد نجحت بدقة عندما تصبح dx أقل من 0.1. وقد تكون القيمة الدقيقة أكثر أو أقل بكثير مناسبة اكثر عند استخدام طريقة نيوتن-رافسون. يوضح الجدول أدناه تنفيذ العملية.

4	3	2	1	0	**n**
2.00	2.01	2.26	3.33	6.00	**x_n**
2.4e-4	0.062	1.137	7.11	32	**$f(x_n)$**
4.00	4.031	4.533	6.66	12	**$f'(x_n)$**
2.00	2.00	2.01	2.26	3.33	**x_{n+1}**
6.1e-6	0.015	0.25	1.06	2.66	**dx**



وبالتالي ، وباستخدام قيمة x_0 ابتدائية بعد 4 خطوات نجد جذرًا واحدًا للمعادلة $f(x) = x^2-4$ هو $x = 2$. إذا كان علينا اختيار قيمة ابتدائية مختلفة ، فقد نجد نفس الجذر ، أو قد نجد الآخر ، $x = -2$.



خوارزمي طريقة نيوتن :

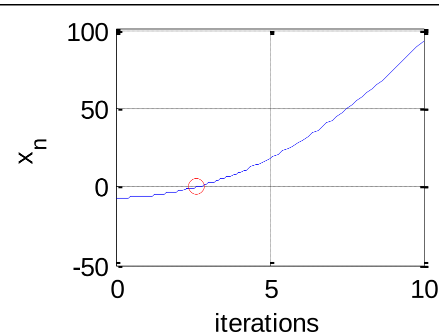
رسميا ، خوارزمية نيوتن هي كما يلي:

- لتكون f دالة قابلة للاشتقاق. نسعى إلى حل $f(x) = 0$ ، بدءًا من تقدير أولي $x = x_0$.
- في الخطوة n^{th} ، بالنظر إلى x_n ، احسب تقريب التالي x_{n+1} بالعلاقة التكرارية :
- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ثم كرر.
- توقف عندما يتحقق شرط التقارب $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$ ، حيث ε هو مقدار السماحية (الدقة المطلوبة)

يمكن كتابة برنامج بالـMatlab لايجاد جذر المعادلة السابقة كالتالي :

```
close
clear;clc;
f = inline(' x^2-7');
df = inline('2*x ');
E=1e-3;x0=2;
n=0; dx=1;
while dx>E & n<100

    x1=x0-f(x0)/df(x0);
    dx=abs(x1-x0);
    x0=x1;
    n=n+1;
end
disp(['solution : ',num2str(x1),', iterations : ',num2str(n)])
fplot(f,[0,10]);hold on;plot(x1, 0,'or')
xlabel('iterations');ylabel('f(x)');grid
```




```
>> solution : 2.6458, iterations : 4
```

ملاحظة :

هذه الطريقة أفضل و أسرع و أكثر دقة مقارنة بطريقة التصنيف المتكرر .

لذلك فإننا نثبت النظرية التالية :

نظرية التقارب

إذا كان $f(a).(b)<0$ و كان $f''(x), f'(x)$ لا يساويان الصفر و يحافظان على إشارتيهما ضمن الفترة $[a,b]$ فمن التقريب الأول $x_0 \in [a,b]$ الذي يحقق المتباينة $f(x_0).f''(x_0)>0$ يمكن بطريقة نيوتن حساب الجذر الوحيد ξ للمعادلة $f(x)=0$ و لأي دقة مطلوبة .

مثال : عين الجذر الموجب للمعادلة $f(x)=x^3-2x^2+x-3=0$ بطريقة نيوتن - رافسون .

الحل :

$$f(2)=-1<0$$
$$f(3)=9>0$$

أي أن $f(2).f(3)<0$ هذا يعني يوجد جذر ضمن الفترة $[2,3]$ و يمكن تصغير هذه الفترة

$$f(2.1)=-0.459<0$$
$$f(2.2)=0.168>0$$

أي أن $f(2.1).f(2.2)<0$ هذا يعني أننا حصلنا على الفترة $[2.1,2.2]$ و أن الجذر موجود ضمن هذه الفترة

$$\forall x \in [2.1,2.2] \Rightarrow f'(x)=3x^2-4x+1>0$$
$$\forall x \in [2.1,2.2] \Rightarrow f''(x)=6x-4>0$$

و نختار $x_0=2.2$ لأن $f(2.2).f''(2.2)>0$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=2.2-\frac{0.168}{6.72}=2.175$$

$$f(x_1)=f(2.175)=0.00286>0$$

و منه $f(2.1).f(x_1)<0$

أي أن الجذر موجود ضمن الفترة $[2.1,2.175]$

$$f''(2.175)=9.05>0$$

و منه $f(2.175).f''(2.175)>0$

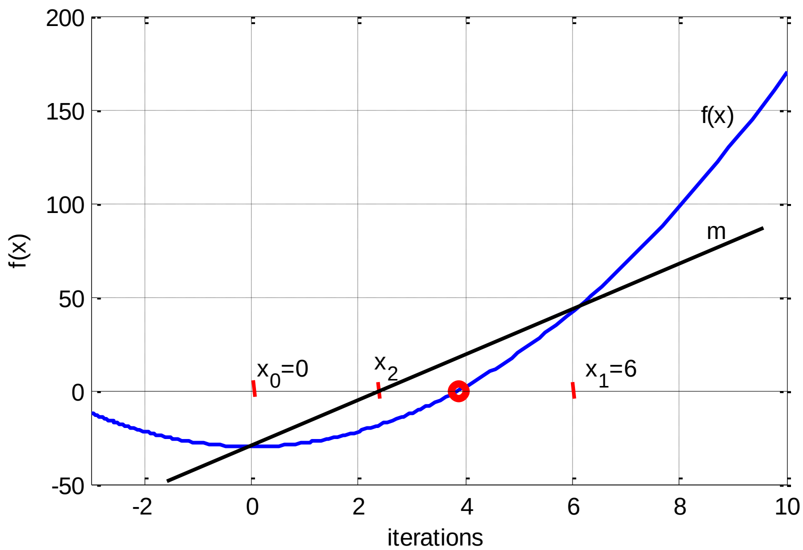
$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=2.175-\frac{0.00286}{6.4919}=2.17456$$
$$|x_2-x_1|=|2.17456-2.175|=0.0004$$

و منه فإن الجذر التقريبي للمعادلة هو $\xi=x_2=2.17456$

4- طريقة القواطع (Secant Method) :

طريقة القاطع او القواطع (secant method) هي تقنية لإيجاد جذر دالة f(x) لمتغير واحد x بدون معلومات حول عبارة مشتقها. وهي تشبه في نواح كثيرة لطريقة نيوتن، للحفاظ على خاصية التقارب الأسرع.

تتطلب خوارزمية نيوتن-رافسون استخدام دالتين (الدالة ومشتقها) في كل خطوة من التكرار. إذا كانت الدوال معقدة ، فسيستغرق الأمر قدرًا كبيرًا من الجهد لإجراء العمليات الحسابية اليدوية أو كمية كبيرة من وقت على وحدة المعالجة المركزية للأجهزة الحاسبة. وبالتالي ، من المستحسن أن تكون هناك طريقة تتقارب (يرجى الاطلاع على ترتيب القسم الخاص بالطرق العددية للتفاصيل النظرية) بنفس سرعة طريقة نيوتن ولكنها لا تتطلب سوى استخدام الدالة الاصلية دون مشتقها.



لنفترض أن لدينا القيمتين x0 و x1 وهما تقريبيان أوليان لجذر α للمعادلة f(x) = 0 و وصورتيهما هما f (x1) & f (x0) على التوالي. إذا كانت x2 هي نقطة تقاطع المحور ox والمستقيم بالمار بالنقطتين ((x0 ، f (x0)) و((x1, f (x1)) فإن x2 أقرب إلى 'α' من x0 و x1. يتم العثور على المعادلة المتعلقة بـ x0 و x1 و x2 باعتبار الميل 'm'

$$m = \frac{f(x1) - f(x0)}{\mathrm{x1} - \mathrm{x0}} = \frac{\mathrm{f(x2)} - \mathrm{f(x1)}}{\mathrm{x2} - \mathrm{x1}} = \frac{0 - \mathrm{f(x1)}}{\mathrm{x2} - \mathrm{x1}}$$

$$\mathrm{x2} - \mathrm{x1} = \frac{-f(x1) * (\mathrm{x1} - \mathrm{x0})}{f(x1) - f(x0)}$$

$$\mathrm{x2} = \mathrm{x1} - \frac{f(x1) * (\mathrm{x1} - \mathrm{x0})}{f(x1) - f(x0)}$$

أو بشكل عام يمكن كتابة الصيغة التكرارية كـ

$$\mathbf{x_{n+1}} = \mathbf{x_n} - \frac{f(\mathbf{x_n}) * (\mathbf{x_n} - \mathbf{x_{n-1}})}{f(\mathbf{x_n}) - f(\mathbf{x_{n-1}})} \qquad \mathbf{n = 1,2,3...}$$

ملاحظة: يفضل دئما ان يكون اختيار القيم الابتدائية التي تحوي الجذر بينهما اي تحقق $f(x1) * f(x0) < 0$

خوارزمية - طريقة القواطع

عرف او اعطي معادلة f (x) = 0

ضع القيم الابتدائية x0 و x1

قم بـ :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)*(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad n = 1,2,3...$$

كرر العملية ما دام شرط التوقف غير محقق (لم يتم استيفاء أي من معيار التقارب C1 أو C2).

مثال عددي :

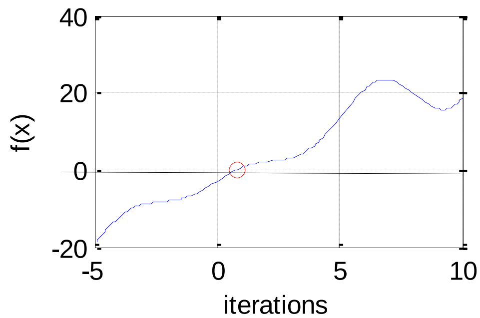
أوجد جذر المعادلة $f(x) = 0$ بدقة 0.001

$$f(x) = 3*x + x*\cos(x)-3$$

دع التخمين الأولي للقيم الابتدائية يكون 0.0 و 1.0

لذا تتقارب العملية التكرارية إلى القيمة 0.36 في خمسة تكرارات.

x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0	x_n
0.81371	0.81371	0.81374	0.81141	0.84739	1	0	



ويمكن استخدام Matlab لكتابة البرنامج كالتالي :

```
close
clear;clc;
f = inline(' 3*x + x*cos(x)-3');
E=1e-3;x0=0; x1=1;
n=0; dx=1;
while dx>E & n<100
    x2=x1-(f(x1)*(x1-x0))/(f(x1)-f(x0));
    dx=abs(x1-x0);
    x0=x1;
    x1=x2;
    n=n+1;
    disp(['solution : ',num2str(x2),', iterations : ',num2str(n)])
end
fplot(f,[-5,10]);hold on;plot(x1, 0,'or')
xlabel('iterations');ylabel('f(x)');grid
```

```
>>
solution : 0.84739, iterations : 1
solution : 0.81141, iterations : 2
solution : 0.81374, iterations : 3
solution : 0.81371, iterations : 4
solution : 0.81371, iterations : 5
```

أهداف الفصل :

اكتساب القدرة على حل المعادلات غير الخطية بطرق عددية مختلفة

استيعاب طرق حل المعادلات غير خطية و دراسة وتحليل الأخطاء المتعلقة بهذه الطرائق ومناقشة معدلات تقاربها

المراجع :

-1
R. Sureshkumar, G. C. Rutledge, Solution of Non-Linear Algebraic Equations, University of Leeds, UK
http://www.mit.edu/course/10/10.001/Web/Course_Notes/NLAE/index.html,

-2
Dr. Sanyasiraju VSS Yedida, Computer Aided Instructional Module For Numerical Analysis, Indian Institute of Technology Madras, India
https://mat.iitm.ac.in/home/sryedida/public_html/

-3
Douglas Wilhelm Harder, Richard Khoury, Numerical Analysis For Engineering, University Of Waterloo
https://ece.uwaterloo.ca/~dwharder/NumericalAnalysis/#content

-4
https://en.wikibooks.org/wiki/Calculus/Newton%27s_Method

-5
محمد منصور صبح، صالح بن منيح، التحليل العددي وطرق حسابه، 2006

-6
الطرق العددية في الهندسة، ترجمة، عبدالاله يونس، معروف محمد حديد، رشد صالحي. جامعة بغداد،

الفصل الثالث: حل نظم المعادلات الخطية باستخدام:

الطرائق المباشرة (مقلوب – كرامر – الحذف لجاوس – والطرائق غير المباشرة (جاكوبي و جاوس-سيدال) – تقدير الأخطاء المتعلقة بهذه الطرائق – استنتاج المصفوفات التكرارية ومناقشة تقارب الطرائق التكرارية

نظام المعادلات الخطية

وليكن النظام ذي n معادلة خطية ذات n مجاهيل ($x_1,x_2,x_3,\ldots\ldots\ldots.x_n$) أن يكتب على النحو التالي :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}\ \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A.X = B \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots..(*)$$

حيث :

A : تسمى مصفوفة المعاملات

X : تسمى مصفوفة المجاهيل (متجه عمود)

B : تسمى مصفوفة الثوابت (متجه عمود)

n: عدد أعمدة المصفوفة

m : عدد اسطر المصفوفة

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} E_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ E_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ E_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E_i = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{m \\ n}} a_{ij}x_j = b_i$$

$$i = 1,2,3,\ldots\ldots m$$
$$j = 1,2,3,\ldots\ldots n$$

نحدد المحدد det (A) :

- إذا كان det (A) ≠ 0 : يسمى نظام عادي له حل وحيد (A مصفوفة مربعة ومحددها لايساوي الصفر تسمى مصفوفة نظامية).
- إذا كان det (A) = 0 ← { 1) عدد لا نهائي من الحلول ، 2) لا يوجد حل }

يوجد نوعين من الطرق لحل نظم المعادلات الخطية

1- الطرق المباشرة :

وتؤدي الى الحل العادي المظبوط للنظام بعدد منته من الخطوات مثل:

1-1 طريقة مقلوب مصفوفة(matrix inverses)

2-1 طريقة كرامر(Cramer Method)

3-1 طريقة غاوس(Gauss Method)

4-1 طريقة غاوس- جوردان(Gauss-Jordan Method)

2- الطرق التكرارية:
وتؤدي إلى متتالية من الحلول التقريبية ولا نحصل على الحل المضبوط للنظام إلا بعد عدد لا نهائي من الخطوات مثل:
1-2 طريقة جاكوبي (Jacobi Method)
2-2 طريقة غاوس – سيدل (Gauss-Seidel Method)
← لحل النظام السابق بالاعتماد على المصفوفات نحتاج لبعض خواص المصفوفات

⇦ خصائص المصفوفات
تعريف :
المصفوفة هي من الاعداد الحقيقية والمركبة مرتبة وفق سطور واعمدة كل عنصر من المصفوفة
A يمكن كتابته على الشكل a_{ij}

$$i = 1,2,3, \dots \dots m$$
$$j = 1,2,3, \dots \dots n$$

i : رقم السطر
j : رقم العمود
n: عدد أعمدة المصفوفة
m : عدد اسطر المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

- المصفوفة :A(m*n)

ذات m اسطر و ذات n أعمدة

- المصفوفة المربعة (square matrix):A(n *n)

اي عدد اسطر m المصفوفة = عدد أعمدة n المصفوفة

- المتجه العمود :(vector colon): A(n *1)

$$A = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- المتجه السطر(vector row) :A(1 *n)

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

- منقول مصفوفة (matrix transpose):
A^t منقول المصفوفة A
$a_{ij}^t = a_{ji}$ (ناتج عن تبديل السطور بالاعمدة)

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- المصفوفة القطرية (diagonal matrix):
مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \quad , \forall\, i \neq j$$

➢ مصفوفة الوحدة (Identity matrix) :

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 1 \quad , \forall\, i = j$ (العناصر القطرية)

$a_{ij} = 0 \quad , \forall\, i \neq j$ (العناصرخارج القطر)

➢ المصفوفة المعدومة(matrix zeros) :

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \quad , \forall\, i \neq j \quad , \forall\, i = j$$

➢ مصفوفة مثلثية عليا (Upper matrix) :

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 0 \quad , \forall\, i > j$ (العناصر تحت القطر)

$a_{ij} \neq 0 \quad , \forall\, j \geq i$ (العناصرالقطرية وفوق القطر)

➢ مصفوفة مثلثية سفلى(Lower matrix) :

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 0 \quad , \forall\, j > i$ (العناصر فوق القطر)

$a_{ij} \neq 0 \quad , \forall\, i \geq j$ (العناصرالقطرية وتحت القطر)

⇦ <u>عمليات حول المصفوفات</u>

➢ جمع أو طرح مصفوفتين :

C=A+B

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

d=A-B

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$d = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

➢ ضرب مصفوفتين بعدد α :

A و B مصفوفتين ليكن : α عدد حقيقي (كيفي)

$$B = \alpha A \rightarrow \ b_{ij} = \alpha \, a_{ij}$$

➢ ضرب مصفوفتين :

جداء مصفوفتين A و B يساوي مصفوفة أخرى C

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} . b_{kj}$$

العنصر c_{ij} الموجود في السطر i و العمود j بالمصفوفة C هو العنصر الناتج عند الجداء السلمي للسطر i للمصفوفة A في العمودj للمصفوفة B

مثال1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = A . B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{pmatrix}$$

مثال2:

A(n*n)*B(n*1) = C(n*1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A . B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

☜من شروط ضرب مصفوفتين A و B أن يكون عدد أعمدة A يساوي عدد اسطر المصفوفة B

☜عملية ضرب مصفوفتين غير تبدلية $\quad A . B \neq B . A$

☜توزيعية : $\quad A . (B . C) = (A . B) . C$

☜توزيعية بالنسبة للجمع : $\quad A . (B + C) = A . B + A . C$

$$(A+B).C = A.C + B.C$$

⇦ المحددات (the determinants) :

المحدد :

هو جدول لـ n مربع عنصر مرتبة على شكل مربع وتكتب كالتالي :

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>كيفيه حسابها</u>

➢ محدد من الرتبة الثانية

لتكن المصفوفة التالية $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a * d - b * c$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 * 4 - 2 * 3 = -2$$

➢ محدد من الرتبة الثالثة :

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} +a_{11} & -a_{12} & +a_{13} \\ -a_{21} & +a_{22} & -a_{23} \\ +a_{31} & -a_{32} & +a_{33} \end{vmatrix}$$

نختار النشر وفق السطر الأول (يمكنك النشر وفق أي سطر أو عمود تختاره من الأفضل أن يكون اغلب عناصره أصفار)

$$\Delta = \det(A) = +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \det(A) = +a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13}$$

نسمي D_{ij} المحددات الناتجة عن حذف السطر i والعمود j

$$\Delta = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n=3} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}$$

➢ *محدد من الرتبة* n :

يحدد كالآتي

$$\Delta = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}$$

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} +a_{11} & -a_{12} & +a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & +a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ +a_{31} & -a_{32} & +a_{33} & -a_{34} \\ +a_{41} & -a_{42} & +a_{43} & -a_{44} \end{vmatrix}$$

نختار النشر وفق السطر الأول

$$\Delta = \det(A) = +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} -a_{21} & +a_{22} & -a_{23} \\ +a_{31} & -a_{32} & +a_{33} \\ +a_{41} & -a_{42} & +a_{43} \end{vmatrix}$$

والزمن المسغرق لحساب المحدد

$t_{D4}=4\ t_{D4}=4.(3.t_{D3})=12\ t_{D2}$

$t_{D2}\approx 1/30\text{min}\approx 1\text{sec}$

$t_{D10}=10*9*8*7*6*5*4*3*\ t_{D2}$

عمليا لا تستخدم لاستعمل هذه الطريقة(العملية)
لحسابات المحددات إلا إذا كانت رتبة المحدد صغيرة لا تتجاوز 6 أو 7

خصائص المحددات

☜ عند تبديل سطرين أو عمودين تتغير إشارة المحدد

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

☜ اذا كانت :

A : مصفوفة مثلثية عليا
A : مصفوفة مثلثية سفلى
A : مصفوفة قطرية

فان :

$$\Delta = \det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

أي المحدد هو حاصل ضرب العناصر القطرية

مثال :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حيث I *مصفوفة الوحدة*

$$\Delta = \det(M) = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 * 2 * 3 = 30$$

$$\Delta = \det(I) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 * 1 * 1 = 1$$

☜ $\det(A.B) = \det(A) + \det(B)$

☜ $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

☜ $\det(A^t) = \det(A)$ حيث A^t منقول المصفوفة A

☜ ليكن : α عدد حقيقي (كيفي)

إذا أضفنا إلى عناصر احد السطور(أو الأعمدة) عناصر سطر(أو عمود) أخر مضروب بعدد α فان المحدد لا يتغير

$$\Delta = \det(A) = \begin{matrix} \text{السطر1} l_1 \\ \text{السطر1} l_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c + \alpha.a & d + \alpha.d \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ l_1' = l_2 + \alpha.l_1 \end{matrix}$$

⇦ مقلوب (معكوس) مصفوفة(matrix inverses)

لتكن A مصفوفة مربعة

إذا كان det (A) ≠ 0 فانه توجد مصفوفة A^{-1} حيث :

☜ $\exists!\ A^{-1}$ بحيث $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

☜ A متنتظرة ⇐ A^{-1} متنتظرة

☜ A مصفوفة مثلثية عليا (او سفلى) ⇐ A^{-1}مصفوفة مثلثية عليا (او سفلى)

☜ A و B مصفوفتين ⇐ $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

حساب مقلوب (معكوس) مصفوفة من الرتبة الثانية

لتكن A المصفوفة من الرتبة الثانية بحيث $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a * d - b * c \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)^t = \frac{1}{\det(A)} A^{\sim t} \quad , \quad \det(A) \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a * d - b * c} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^t = \frac{1}{a * d - b * c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad , \quad \det(A) \neq 0$$

مثال :

لتكن M مصفوفة مربعة

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 * 4 - 2 * 3 = -2 \neq 0$$

$$M^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/_{-2} & -2/_{-2} \\ -3/_{-2} & 1/_{-2} \end{pmatrix} \quad , \quad \det(M) \neq 0$$

حساب مقلوب (معكوس) مصفوفة من الرتبة الثالثة

لتكن A مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)^{t} = \frac{1}{\det(A)} A^{\sim t} \qquad , \quad \det(A) \neq 0$$

$adj(A) = A^{\sim}$ إيجاد المصفوفة المساعدة(القرينة)

$$adj(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} +D_{11} & -D_{12} & +D_{13} \\ -D_{21} & +D_{22} & -D_{23} \\ +D_{31} & -D_{32} & +D_{33} \end{pmatrix}$$

$adj(A)^{t} = A^{\sim t}$ إيجاد منقول المصفوفة المساعدة(القرينة)

$$adj(A)^{t} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$adj(A)^{t} = \begin{pmatrix} +D_{11} & -D_{21} & +D_{31} \\ -D_{12} & +D_{22} & -D_{32} \\ +D_{13} & -D_{23} & +D_{33} \end{pmatrix}$$

حساب المحدد

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} +a_{11} & -a_{12} & +a_{13} \\ -a_{21} & +a_{22} & -a_{23} \\ +a_{31} & -a_{32} & +a_{33} \end{vmatrix}$$

نختار النشر وفق السطر الأول (يمكنك النشر وفق أي سطر أو عمود تختاره من الأفضل أن يكون اغلب عناصره أصفار)

$$\Delta = \det(A) = +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \det(A) = +a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(+a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13})} \cdot \begin{pmatrix} +D_{11} & -D_{21} & +D_{31} \\ -D_{12} & +D_{22} & -D_{32} \\ +D_{13} & -D_{23} & +D_{33} \end{pmatrix} \qquad , \quad \det(A) \neq 0$$

مثال :

A مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 5 & -1\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

حساب مقلوب (معكوس) مصفوفة A^{-1}

- حساب المحدد

$$\Delta=\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 5 & -1\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}$$

نختار النشر وفق السطر الأول او الثالث (يمكنك النشر وفق أي سطر أو عمود تختاره من الأفضل أن يكون اغلب عناصره أصفار)

$$\Delta=\det(A)=+a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\det(A)=+1\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 0 & 4\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\det(A)=+1(5*1-(-1)*4)-0+3(-2*4-0*5)$$

$$\Delta=\det(A)=+9-24=-15\neq 0$$

- ايجاد المصفوفة المساعدة

$$adj(A)=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 0 & 4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 3\\ 5 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 5\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$adj(A)=\begin{pmatrix}9 & 2 & -8\\ 12 & 1 & -4\\ -15 & -5 & 5\end{pmatrix}$$

$$adj(A)^{t}=\begin{pmatrix}9 & 12 & -15\\ 2 & 1 & -5\\ -8 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adj(A)^{t}=\frac{1}{-15}\begin{pmatrix}9 & 12 & -15\\ 2 & 1 & -5\\ -8 & -4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/5 & -4/5 & 1\\ -2/15 & -1/15 & 1/3\\ 8/15 & 4/15 & -1/3\end{pmatrix}$$

1- الطرق المباشرة :

1-1 طريقة مقلوب (معكوس) مصفوفة(matrix inverses)

ليكن النظام التالي

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{21}\dots & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

$$A.X=B \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(*)$$

A مصفوفة مربعة من الرتبة n

فان حل النظام التالي يكون باستخدام طريقة مقلوب(معكوس) مصفوفة كالتالي نضرب المعادلة (*) في A^{-1} :

$$A.A^{-1}.X = A^{-1}.B$$

$$I.X = A^{-1}.B \Rightarrow \quad X = A^{-1}.B$$ حيث I مصفوفة الوحدة,

2-1 طريقة كرامر (Cramer Method)

يعطى حل النظام السابق

$$A.X = B$$

باستخدام طريقة طريقة كرامر بالعلاقة التالية :

$$X_i = \frac{\Delta_i}{\det(A)} = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} \dots & \dots & b_1 \dots. & \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots & \dots & b_2 \dots \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \dots. & \dots & b_n \dots & \dots a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

مثال:

باستخدام طريقة طريقة كرامر حل النظام التالي :

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- حساب المحدد

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \det(A) = +3 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 24 - 28$$

$= 2 \neq 0$ (يوجد حل وحيد)

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 11 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$X_2 = \frac{\Delta_2}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 5 & 11 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$X_3 = \frac{\Delta_1}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 5 & -3 & 11 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

حل النظام هو $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

➢ قبل التطرق الى طريقة الحذف لغاوس ندرس نظام ذو مصفوفة مثلثية عليا

مثال :

$$\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{array} \quad \uparrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

الحل بطريقة الصعود $i = 1 \rightarrow 3$

وبصفة عامة وليكن النظام التالي حيث A مصفوفة مثلثية عليا

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{21} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$a_{nn}.x_n = b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$a_{ii}\mathrm{x_i} + \cdots + a_{\mathrm{in}}\mathrm{x_n} = b_{\mathrm{i}}$$

$$\mathrm{x_i} = \frac{1}{a_{\mathrm{ii}}}\left[b_{\mathrm{i}} - \sum_{\mathrm{j=i+1}}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{ij}}\mathrm{x_j}\right] \qquad , \mathrm{i} = 1,2,3 \ldots \ldots, \mathrm{n}$$

➢ خوارزمية طريقة الصعود

1 ادخال عناصر A مصفوفة مثلثية عليا وعناصر B
2 الحل بطريقة الصعود i=n→1
3 $\mathrm{x_i} = \frac{1}{a_{\mathrm{ii}}}\left[b_{\mathrm{i}} - \sum_{\mathrm{j=i+1}}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{ij}}\mathrm{x_j}\right]$
4 اذا عنصر من العناصر القطرية معدوم يعني النظام غير عادي يخرج من البرنامج
5 اذا كان i=n فان $\sum_{\mathrm{j=i+1}}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{ij}}\mathrm{x_j} = 0 \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$
6 طباعة X

3-1 طريقة غاوس او الحذف لغاوس(Gauss Method)

تعتمد طريقة غاوس على الملاحظة التالية :

لا يتغير حل النظام اذا عوضنا معادلة l_i بمعادلة← $l_i + \alpha.l_j$

حيث α عدد حقيقي (كيفي)

مثال :

وليكن لدينا النظام التالي :

$$A.X = B$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

حل النظام بطريقة غاوس ؟

تتلخص طريقة غاوس في مرحلتين :

1- تحويل النظام A.X=B الى النظام U.X=B′ (حيث U مصفوفة مثلثية عليا).

2- حل النظام U.X=B′ بطريقة الصعود

المرحلة الاولى :

← المصفوفة الموسعة : (A| B)

$$(A|\,B) \rightarrow \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}$$

1- التحويل الى النظام المثلثي :

الخطوة الاولى : خلق أصفار بالعمود الأول أسفل القطر

نأخذ $a_{11}=2 \neq 0$ ← كعامل ارتكاز(pivot)

تحويل كل من l_2 و l_3

$$(A|\,B)^{(1)} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} l_1^{(1)} = l_1 \\ l_2^{(1)} = l_2 - \frac{4}{2} l_1 = l_2 - 2l_1 \\ l_3^{(1)} = l_3 - \frac{-2}{2} l_1 = l_3 + l_1 \end{array}$$

الخطوة الثانية : خلق أصفار بالعمود الثاني أسفل القطر

نأخذ $a_{22}^{(1)} = -2 \neq 0$ ← كعامل ارتكاز(pivot)

$$(A|\,B)^{(2)} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} l_1^{(1)} = l_1 \\ l_2^{(1)} \\ l_3^{(2)} = l_3^{(1)} - \frac{-6}{2} l_2^{(1)} = l_3^{(1)} + 3l_2^{(1)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

$$(U|B')$$

المرحلة الثانية :

2- حل النظام U.X=B′ بطريقة الصعود

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_2 - 3x_3 = 2 \\ -5x_3 = 5 \end{cases} \uparrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{4} \\ x_2 = \frac{-1}{2} \\ x_3 = -1 \end{array}$$ الحل بطريقة الصعود $i = 1 \to 3$

ملاحظة استنتج محدد كل من: U, A

$$\det(A) = \det(U)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2(-2)(-5) = 20$$

ملاحظة : في حالة عامل الارتكاز يساوي الصفر فلابد من تبديل السطور(تبديل السطور معناه تبديل ترتيب المعادلات ولا يؤثر على الحل)

- حساب المحددات بطريقة غاوس

$$\det(A) = \det(U).(-1)^P$$
$$\det(A) = \mathrm{a}_{11}.\mathrm{a}_{22}.\mathrm{a}_{33} \ldots \ldots \ldots \ldots .. \mathrm{a}_{\mathrm{nn}}(-1)^P$$

مثال :

احسب باستخدام طريقة غاوس قيمة المحدد التالي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{vmatrix}$$

الحل :

بالاعتماد على طريقة غاوس نحذف عناصر العمود الاول ما عدا العنصر الاول منه فنحصل على التالي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_3 \end{matrix}$$

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 2 & -10 & -14 \\ 0 & 3 & 3 & -12 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1^{(1)} = l_1 \\ l_2^{(1)} = l_2 - 3l_1 \\ l_3^{(1)} = l_3 - 4l_1 \\ l_4^{(1)} = l_4 - 3l_1 \end{matrix}$$

ثم نحذف العمود الثاني من هذا المحدد ما عدا العنصر الاول والثاني فنحصل على

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & -\frac{27}{2} & -\frac{39}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{4} & -\frac{81}{4} \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1^{(2)} = l_1^{(1)} \\ l_2^{(2)} = l_2^{(1)} \\ l_3^{(2)} = l_3^{(1)} + \frac{1}{2}l_2^{(1)} \\ l_4^{(2)} = l_4^{(1)} + \frac{3}{4}l_2^{(1)} \end{matrix}$$

وأخيرا نحذف العنصر الأخير من العمود الثالث من المحدد فنحصل على محدد مثلثي بالشكل التالي :

$$\Delta^{(3)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & -\frac{27}{2} & -\frac{39}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -17 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} l_1^{(2)} &= l_1^{(1)} \\ l_2^{(2)} &= l_2^{(1)} \\ l_3^{(2)} &= l_3^{(1)} + \tfrac{1}{2} l_2^{(1)} \\ l_4^{(3)} &= l_4^{(2)} - \tfrac{1}{6} l_3^{(2)} \end{aligned}$$

ومنه قيمة هذا المحدد تساوي جداء العناصر القطرية أي

$$\Delta = 1(-4).\left(-\frac{27}{2}\right).(-17) = -918$$

4-1 طريقة غاوس- جوردان(Gauss-Jordan Method)

هي شبيه بطريقة غاوس ولكن في هذه الطريقة نحول مصفوفة الأمثال (المعاملات) A الى مصفوفة قطرية (أي مصفوفة مثلثية عليا وسفلى في ان واحد)

مثال :

اوجد نظام المعادلات الخطية التالية بطريقة غاوس- جوردان ؟

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

لحل هذا النظام ناخذ المصفوفة الموسعة ونجري عليها بعض التعديلات

← المصفوفة الموسعة : $(A|B)$

$$(A|B) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}$$

الخطوة الاولى : خلق أصفار بالعمود الأول أسفل القطر

نأخذ $a_{11} = 1 \neq 0$ ← كعامل ارتكاز(pivot)

تحويل كل من l_2 و l_3

$$(A|B)^{(1)} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & -15 \end{array}\right) \quad \begin{aligned} l_1^{(1)} &= l_1 \\ l_2^{(1)} &= l_2 - l_1 \\ l_3^{(1)} &= l_3 - 2l_1 \end{aligned}$$

الخطوة الثانية: خلق أصفار بالعمود الثاني أسفل القطر

نأخذ $a_{22}^{(1)} = 1 \neq 0$ ← كعامل ارتكاز(pivot)

$$(A|B)^{(2)} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -30 & -30 \end{array}\right) \quad \begin{aligned} l_1^{(1)} &= l_1 = l_1^{(2)} \\ l_2^{(1)} &= l_2^{(2)} \\ l_3^{(2)} &= l_3^{(1)} + 5l_2^{(1)} \end{aligned}$$

الخطوة الثالثة : خلق أصفار بالعمود الثالث فوق القطر

نأخذ $a_{33}^{(3)} = -30 \neq 0$ ← كعامل ارتكاز(pivot)

$$(A|\,B)^{(3)} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -30 & -30 \end{array}\right) \begin{array}{l} l_1^{(3)} = l_1^{(2)} + \frac{1}{10} l_3^{(2)} \\ l_2^{(3)} = l_2^{(2)} - \frac{1}{6} l_3^{(2)} \\ l_3^{(2)} \end{array}$$

الخطوة الرابعة : خلق أصفار بالعمود الثاني فوق القطر

نأخذ $a_{22}^{(4)} = 1 \neq 0$ ← كعامل ارتكاز(pivot)

$$(A|\,B)^{(4)} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -30 & -30 \end{array}\right) \begin{array}{l} l_1^{(4)} = l_1^{(3)} - 2 l_2^{(3)} \\ l_2^{(3)} \\ l_3^{(2)} = l_3^{(3)} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 الطـرق التكـراريـــة :

مبدأ الطرق التكرارية :

ليكن النظام $AX = B$

وَ X^* الحل المضبوط (الحل الدقيق) بحيث :

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

☜تعتمد الطرق التكرارية (غير المباشرة) على اختيار مسبق للتقريب الابتدائي للحل

كمتجه تقريبي ابتدائي ←

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

ومن ثم إيجاد متتالية من المتجهات التقريبية

$$x^{(0)} \rightarrow x^{(1)} \rightarrow x^{(2)} \cdots x^{(k-1)} \rightarrow x^{(k)}$$

وتكون الطريقة متقاربة إذا كان

$$\lim_{k\to\infty} x^{(\mathrm{k})} = X^*$$

شرط التوقف : نختار من بين إحدى الشروط التالية:

1) عند قيمة قصوى لتكرار معين k_{max} $\leftarrow$ $x^{(k_{max})}$

2) $\sum_{i=1}^{n}(x_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{k})} - x_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{k}-1)}) < \varepsilon$

3) $Max\left|x_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{k})} - x_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{k}-1)}\right| < \varepsilon$

ومن الطرق التكرارية لحل جملة المعادلات الخطية ندرس :

1- طريقة جاكوبي (Jacobi Method)

2- طريقة غاوس – سيدل (Gauss-Seidel Method)

1- طريقة جاكوبي (Jacobi Method)

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $AX = B$ والتي يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$\begin{aligned}
a_{11}\mathrm{x}_1 + a_{12}\mathrm{x}_2 + a_{13}\mathrm{x}_3 + \cdots + a_{1\mathrm{n}}\mathrm{x}_\mathrm{n} &= b_1\\
a_{21}\mathrm{x}_1 + a_{22}\mathrm{x}_2 + a_{23}\mathrm{x}_3 + \cdots + a_{2\mathrm{n}}\mathrm{x}_\mathrm{n} &= b_2\\
a_{31}\mathrm{x}_1 + a_{32}\mathrm{x}_2 + a_{33}\mathrm{x}_3 + \cdots + a_{3\mathrm{n}}\mathrm{x}_\mathrm{n} &= b_3\\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots\\
a_{\mathrm{n}1}\mathrm{x}_1 + a_{\mathrm{n}2}\mathrm{x}_2 + a_{\mathrm{n}3}\mathrm{x}_3 + \cdots + a_{\mathrm{nn}}\mathrm{x}_\mathrm{n} &= b_\mathrm{n}
\end{aligned}$$

هذه الجملة يمكن كتابتها من جديد بالشكل التالي :

$$\begin{aligned}
\mathrm{x}_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\mathrm{x}_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}\mathrm{x}_3 - \cdots - \frac{a_{1\mathrm{n}}}{a_{11}}\mathrm{x}_\mathrm{n}\\
\mathrm{x}_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}\mathrm{x}_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}\mathrm{x}_3 - \cdots - \frac{a_{2\mathrm{n}}}{a_{22}}\mathrm{x}_\mathrm{n}\\
\mathrm{x}_3 &= \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}}\mathrm{x}_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}}\mathrm{x}_2 - \cdots - \frac{a_{3\mathrm{n}}}{a_{33}}\mathrm{x}_\mathrm{n}\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
\mathrm{x}_\mathrm{n} &= \frac{b_\mathrm{n}}{a_{\mathrm{nn}}} - \frac{a_{\mathrm{n}1}}{a_{\mathrm{nn}}}\mathrm{x}_1 - \frac{a_{\mathrm{n}2}}{a_{\mathrm{nn}}}\mathrm{x}_2 - \frac{a_{\mathrm{n}3}}{a_{\mathrm{nn}}}\mathrm{x}_3 - \cdots - \frac{a_{\mathrm{n\,n}-1}}{a_{\mathrm{nn}}}\mathrm{x}_{\mathrm{n}-1}
\end{aligned}$$

وإذا رمزنا

$$\alpha_{ij} = -\frac{a_{\mathrm{ij}}}{a_{\mathrm{ii}}} \qquad , \qquad \beta_i = \frac{b_\mathrm{i}}{a_{\mathrm{ii}}}$$

$$i = 1,2,3,\ldots\ldots n \qquad ; \qquad j = 1,2,3,\ldots\ldots n \qquad ; \qquad i \neq j$$

عندئذ يمكن كتابة جملة المعادلات السابقة كما يلي :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \cdots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1 \\
x_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{32}x_3 + \cdots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2 \\
x_3 &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \cdots + \alpha_{3n}x_n + \beta_3 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
x_n &= \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \alpha_{n3}x_3 + \cdots + \alpha_{n\,n-1}x_{n-1} + \beta_n
\end{aligned}$$

حيث $\alpha_{ii} = 0 \quad ; \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots n$

و هذه الجملة تكتب بالشكل المصفوفة كالتالي :

$$X = \alpha X + \beta$$

حيث

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots\cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{32} & & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & & \alpha_{3n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

الصيغة التكرارية $\quad X_i^{(k+1)} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \alpha_{ij} X_j^{k} + \beta_i$

حيث $\alpha_{ii} = 0 \quad ; \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots n \quad ; \quad k = 1,2,3,\ldots\ldots n$

أو بالشكل :

$$X_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} X_j$$

<u>شروط وجود الحل :</u>

1- أن يكون $\alpha_{ii} \neq 0 \quad , \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots n$

2- أن يتحقق $\| a_{ii} \| > \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \quad , \quad i \neq j \quad ; \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots n$

أو أن يكون نظيم مصفوفة التكرار α اصغر من الواحد.

هذا يعني ان تكون مصفوفة الأمثال في جملة المعادلات الخطية مصفوفة مهيمنة (ذات قطر سائد) , أي ان تكون عناصر القطر الرئيسي هي الأكبر في صفها وذلك بعد إعادة ترتيب المعادلات المعطاة.

مثال:

أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة جاكوبي؟

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ 8x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases} \qquad \varepsilon = 0.09 \quad , \quad x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

نعيد كتابة المعادلات بحيث تصبح مصفوفة الأمثال مهيمنة أي نجعل عناصر القطر الرئيسي اكبر ما يمكن (ذات قطر سائد)

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{26}{8} - \dfrac{1}{8}x_2 - \dfrac{1}{8}x_3 \\ x_2 = \dfrac{7}{5} - \dfrac{1}{5}x_1 + \dfrac{1}{5}x_3 \\ x_3 = \dfrac{7}{5} - \dfrac{1}{5}x_1 + \dfrac{1}{5}x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{8} & -\dfrac{1}{8} \\ -\dfrac{1}{5} & 0 & \dfrac{1}{5} \\ -\dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \qquad , \beta = \begin{bmatrix} 26/8 \\ 7/5 \\ 7/5 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان نظيم مصفوفة التكرار α أصغر من الواحد أي ان

$$\max_{1 \le i \le 3} \sum_{j=1}^{3} |\alpha_{ij}| = \max\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5} < 1$$

اذن باستخدام الصيغة التكرارية

$$X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta$$

من اجل K=1

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}x_2^{(0)} - \frac{1}{8}x_3^{(0)} \\ x_2^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(0)} + \frac{1}{5}x_3^{(0)} \\ x_3^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(0)} + \frac{1}{5}x_2^{(0)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}(1) - \frac{1}{8}(1) = 3 \\ x_2^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(1) + \frac{1}{5}(1) = 1.4 \Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.4 \\ 1.4 \end{bmatrix} \\ x_3^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(1) + \frac{1}{5}(1) = 1.4 \end{cases}$$

من اجل K=2

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}x_2^{(1)} - \frac{1}{8}x_3^{(1)} = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}(1.4) - \frac{1}{8}(1.4) = 2.9 \\ x_2^{(2)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(1)} + \frac{1}{5}x_3^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(3) + \frac{1}{5}(1.4) = 1.08 \Rightarrow x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 1.08 \\ 1.08 \end{bmatrix} \\ x_3^{(2)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(1)} + \frac{1}{5}x_2^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(3) + \frac{1}{5}(1.4) = 1.08 \end{cases}$$

من اجل K=3

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}x_2^{(2)} - \frac{1}{8}x_3^{(2)} = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}(1.0.8) - \frac{1}{8}(1.0.8) = 2.98 \\ x_2^{(3)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(2)} + \frac{1}{5}x_3^{(2)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(2.9) + \frac{1}{5}(1.0.8) = 1.036 \\ x_3^{(3)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(2)} + \frac{1}{5}x_2^{(2)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(2.9) + \frac{1}{5}(1.08) = 1.036 \end{cases} \Rightarrow x^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 1.08 \\ 1.08 \end{bmatrix}$$

شرط التوقف

$$|dx| = \begin{cases} \left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |2.98 - 2.9| = 0.08 < 0.09 \\ \left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |1.08 - 1.036| = 0.04 < 0.09 \\ \left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = |1.08 - 1.036| = 0.04 < 0.09 \end{cases}$$

اذن $x=x^{(3)}$ هو حل التقريبي لجملة المعادلات بخطأ لا يتجاوز $\varepsilon = 0.09$

2- طريقة غاوس –سيدل (Gauss-Seidel Method)

طريقة غاوس-سيدل شبيهة بطريقة جاكوبي(في الخطوات الاولى) ولكنها تعتمد على القيم الجديدة (المحسوبة) واستخدامها في ايجاد اليم الاخرى.

أي نوجد مصفوفة التكرار

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots\cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{32} & & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & & \alpha_{3n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

← من اجل k=1

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(0)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(0)} - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(0)}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(1)} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(0)} - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(0)}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}}x_1^{(1)} - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2^{(1)} - \cdots - \frac{a_{3n}}{a_{33}}x_n^{(0)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_n^{(1)} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(1)} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(1)} - \frac{a_{n3}}{a_{nn}}x_3^{(1)} - \cdots - \frac{a_{n\,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(1)}$$

وهكذا نكرر العملية ← من اجل k=2

$$x_1^{(2)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(1)} - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(1)} - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(1)}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(2)} - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(1)} - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(1)}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(2)} - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(2)} - \cdots - \frac{a_{3n}}{a_{33}} x_n^{(1)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_n^{(2)} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(1)} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(1)} - \frac{a_{n3}}{a_{nn}} x_3^{(1)} - \cdots - \frac{a_{n\,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(2)}$$

وبشكل عام بفرض أننا وصلنا إلى التقريب ذي الرتبة k أي وصلنا الى

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

فان إيجاد التقريب ذي الرتبة (k+1) حسب غاوس-سيدل يكون كالتالي :

$$X_1^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} X_j^{(k)} + \beta_1$$

$$X_2^{(k+1)} = \alpha_{21} X_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} X_j^{(k)} + \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$X_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} X_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} X_j^{(k)} + \beta_i$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$X_n^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} X_j^{(k+1)} + \beta_n$$

حيث : $k = 1,2,3, \dots \dots n$

☜حل النظام السابق بطريقة غاوس-سيدل

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ 8x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases} \qquad \varepsilon = 0.09 \ , \qquad x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الحل

من اجل K=1

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}x_2^{(0)} - \frac{1}{8}x_3^{(0)} \\ x_2^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(1)} + \frac{1}{5}x_3^{(0)} \\ x_3^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(1)} + \frac{1}{5}x_2^{(1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}(0) - \frac{1}{8}(0) = 3.250 \\ x_2^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(3.250) + \frac{1}{5}(0) = 0.75 \\ x_3^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(3.250) + \frac{1}{5}(0.75) = 0.90 \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3.250 \\ 0.75 \\ 0.90 \end{bmatrix}$$

$$|dx| = \begin{cases} \left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = |3.250 - 0| = 3.250 > 0.09 \\ \left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = |0.75 - 0| = 0.75 > 0.09 \\ \left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = |0.90 - 0| = 0.90 > 0.09 \end{cases}$$

إذن نواصل العملية التكرارية لعدم تحقق شرط التوقف

من اجل K=2

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}x_2^{(1)} - \frac{1}{8}x_3^{(1)} = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}(0.75) - \frac{1}{8}(0.90) = 3.04375 \\ x_2^{(2)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(2)} + \frac{1}{5}x_3^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(3.04375) + \frac{1}{5}(0.90) = 0.97125 \\ x_3^{(2)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(2)} + \frac{1}{5}x_2^{(2)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(3.04375) + \frac{1}{5}(0.97125) = 0.9855 \end{cases} \Rightarrow x^{(2)} = \begin{bmatrix} 3.04375 \\ 0.97125 \\ 0.9855 \end{bmatrix}$$

$$|dx| = \begin{cases} \left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = |3.04375 - 3.250| = 0.20625 > 0.09 \\ \left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = |0.97125 - 0.75| = 0.22125 > 0.09 \\ \left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = |0.9855 - 0.90| = 0.0855 < 0.09 \quad \text{نتوقف} \end{cases}$$

اذن $x=x^{(2)}$ هو حل التقريبي لجملة المعادلات بخطأ لا يتجاوز $\varepsilon = 0.09$

أهداف الفصل :

استيعاب طرق حل نظم المعادلات الخطية باستخدام الطرائق المباشرة و تقدير الأخطاء المتعلقة بهذه الطرائق استنتاج المصفوفات التكرارية .

استيعاب طرق حل المعادلات غير خطية و دراسة وتحليل الأخطاء المتعلقة بهذه الطرائق ومناقشة معدلات تقاربها

المراجع :

-1

الحربي، عبير حميدي. حل المعادلات غير الخطية على MATLAB. دار جامعة الملك سعود للنشر

-2

محاضرة التحليل العددي جامعة ورقلة. 2001

-3

الطرق العددية في الهندسة، ترجمة، عبدالاله يونس، معروف محمد حديد، رشد صالحي. جامعة بغداد،

-4

محمد منصور صبح، صالح بن منيح، التحليل العددي وطرق حسابه، 2006

الفصل الرابع: حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى عدديا.

المقصود بحل اي معادلة تفاضلية هو ايجاد دالة (y(x)) بإمكانها تحقيق المعادلة التفاضلية والشروط الابتدائية. بالتأكيد ، بالنسبة لمعظم المعادلات التفاضلية ، ليس من الممكن إيجاد الحلول تحليلية ببساطة، لأنها قد لا تنطبق عليها تقنيات الحلول المعروفة. نهجنا النهائي لإيجاد حلول تقريبية للمعادلات التفاضلية انطلاقا من قيم الشروط الابتدائية والحدودية. في هذا الفصل سوف نهتم بالمعادلات التفاضلية العادية من الدرجة الأولى التي من الشكل :

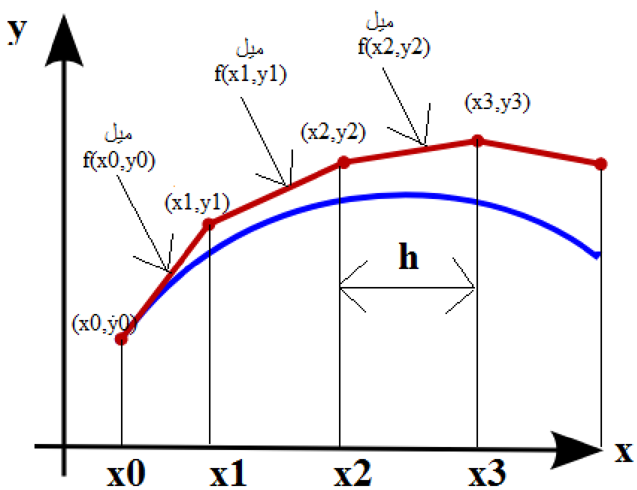
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

حيث تولد الطرق العددية سلسلة من القيم التقريبية y_1، y_2، ... لقيمة الحل عند نقاط محددة x_1، x_2، ...،. حيث $x_{n+1} = x_n + h$، $n = 0, 1, \ldots$، إذا استخدمنا عددًا كافيًا من النقاط ، فعندئذ من خلال رسم النقاط (x_i, y_i) وربطها بمقاطع مستقيمة ، يمكننا الحصول على تقريب عام لمنحنى الحل انطلاقا من قيمة الشروط ابتدائية محددة.

1- طريقة أويلر (Euler's Method)

افترض أننا نرغب في تقريب الحل لمعادلة تفاضلية عادية من الدرجة الأولى انطلاقا من الشروط ابتدائية عند $x = x_1 = x_0 + h$ ، حيث h صغيرة. الفكرة وراء طريقة أويلر هي استخدام قيم الشروط الابتدائية عند النقطة الأولى والتقدم خطوة خطوة باتجاه مجال المعادلة المطلوب تحديد القيم عند نقاطه.

حيث يتم تقسيم مجال الحل الي عدة نقاط (خطوات) متباعدة بمسافة h على مستقيم ox. كما هو مبين في الشكل التالي والذي يظهر منحنى الحل العددي التقريبي بطريقة ايلر ومنحنى الحقيقي الفعلي لحلول المعادلة حيث نجد يوجد اختلاف مهما كانت h صغيرة.



وتم استخراج الصيغة المستخدمة لحساب قيم الدالة y عند قيم x من خلال متسلسلة تايلور (Taylor series) التي تمكن من كتابة الدالة y في بجوار النقطة x=x0 والتي تبعد بالمسافة h على شكل المتسلسلة :

$$y(x+h) = y(x) + h * y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y'^{n\prime}(x)$$

وبمأن قميه h (الخطوة او المسافة بين قيمتين متتاليتين) دائما صغيرة تصبح قيم المعاملات $h^2/2!, h^3/3!, \ldots h^n/n!$ صغيرة جدا، وبذلك يمكن اهمال المعاملات من الدرجة الثانية واكثر وبذلك تختزل متسلسلة تايلور الى حدين فقط وكما يلي :

$$y(x+h) = y(x) + h * y'(x)$$

وهذه المعادلة التي اعتمدها تايلور في انشاء طريقته العددية ليتمكن من ايجاد قيم الدالة y للقيم x التي بالمجال المحدد كما يلي :

$$m = f(x_0, y_0) = y'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

حيث نتحصل على قيمة y_1 من قيمة y_0 والمشتق y' عند النقطة (x_0, y_0) كتالي :

الخطوة الاولى عند النقطة $x = x_1$ $\Leftarrow$ $y_1 = y_0 + h * f(x_0, y_0)$

الخطوة الثانية عند النقطة $x = x_2$ $\Leftarrow$ $y_2 = y_1 + h * f(x_1, y_1)$

الخطوة الثانية عند النقطة $x = x_2$ $\Leftarrow$ $y_3 = y_2 + h * f(x_2, y_2).$

.

.

.

الخطوة الثانية عند النقطة $x = x_n$ $\Leftarrow$ $y_n = y_{n-1} + h * f(x_{n-1}, y_{n-1})$

$y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n)$ (الشكل العام)

حيث $x_1= x_0 +h$ و $x_2= x_1 +h= x_0 +2.h$ و $x_3= x_2 +h= x_0 +3.h$ و $x_n = x_0 +n.h$.

مثال : استخدم طريقة اويلر للحصول على التقريب العددي y(1) (عند x=1) حل المعادلة التفاضلية عادية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = y' = y - x, \qquad y(0) = 0.5.$$ (شرط ابتدائي)

حيث تأخذ قيم مختلفة للخطوة h ، (1) h=0.1 و (2) h=0.05. بالنظر إلى أن عبارة الحل الدقيق للمعادلة التفاضلية هو $y(x) = x + 1 - \frac{1}{2}e^x$. قارن الأخطاء في التقريبين لـ y(1) .

الحل : في هذه المشكلة لدينا :

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x,y) = y - x, \qquad x0 = x(0) = 0, \quad y0 = y(x0) = y\big(x(0)\big) = y(0) = 0.5$$

<u>a) - عند تحديد h = 0.1 :</u>

$$y_{n+1} = y_n + 0.1 * f(x_n, y_n),$$
$$y_{n+1} = y_n + 0.1 * (y_n - x_n), \quad n = 0,1,2,\dots,9$$

بالتالي،

$y_1=y(x_1)=y_0+0.1(y_0-x_0)=0.5+0.1(0.5-0)=0.55,$

$y_2=y(x_2)=y_1+0.1(y_1-x_1)=0.55+0.1(0.55-0.1)=0.595,$

$y_3=y(x_3)=y_2+0.1(y_2-x_2)=0.595+0.1(0.595-0.2)= 0.6345,$

$y_4=y(x_4)=y_3+0.1(y_3-x_3)= 0.6345+0.1(0.6345-0.3)= 0.66795,$

$y_5=y(x_5)=y_4+0.1(y_4-x_4)= 0.66795+0.1(0.66795-0.4)= 0.694745,$

$y_6=y(x_6)=y_5+0.1(y_5-x_5)= 0.694745+0.1(0.694745-0.5)= 0.7142195,$

$y_7=y(x_7)=y_6+0.1(y_6-x_6)= 0.7142195+0.1(0.7142195-0.6)= 0.72564145,$

$y_8=y(x_8)=y_7+0.1(y_7-x_7)= 0.72564145+0.1(0.72564145-0.7)= 0.728205595,$

$y_9=y(x_9)=y_8+0.1(y_8-x_8)= 0.728205595+0.1(0.728205595-0.8)= 0.7210261545,$

$y_{10}=y(x_{10})=y_9+0.1(y_9-x_9)= 0.7210261545+0.1(0.7210261545-0.9)= 0.70312876995.$

حيث قمنا بتقريب الاعداد إلى ستة منازل عشرية .نجد قيم الحل التقريبي والدقيق والقيم المطلقة للخطأ مدرجة في الجدول التالي

الخطأ المطلق	الحل الدقيق	y_n	x_n	n
0.002585	0.547414	0.55	0.1	1
0.005701	0.589299	0.595	0.2	2
0.009430	0.625070	0.6345	0.3	3
0.013862	0.654088	0.66795	0.4	4
0.019106	0.675639	0.694745	0.5	5
0.025278	0.688941	0.714219	0.6	6
0.032518	0.693124	0.725641	0.7	7
0.040976	0.687229	0.728205	0.8	8
0.050828	0.670198	0.721026	0.9	9
0.062270	0.640859	0.703129	1.0	10

في هذه الحالة ، يكون تقريب y (1) هو $y_{10} = 0.703129$ ، مع وجود خطأ مطلق

$$|y(1)-y_{10}|=0.062270.$$

b) - عند تحديد h = 0.5 :

$$y_{n+1} = y_n + 0.05 * f(x_n, y_n),$$
$$y_{n+1} = y_n + 0.05 * (y_n - x_n), \quad n = 0,1,2,\dots,19$$

$y_1=y(x_1)=y_0+0.05(y_0-x_0)=0.5+0.05(0.5-0)= 0.525,$

$y_2=y(x_2)=y_1+0.05(y_1-x_1)= 0.525+0.05(0.525-0.05)= 0.54875,$

..

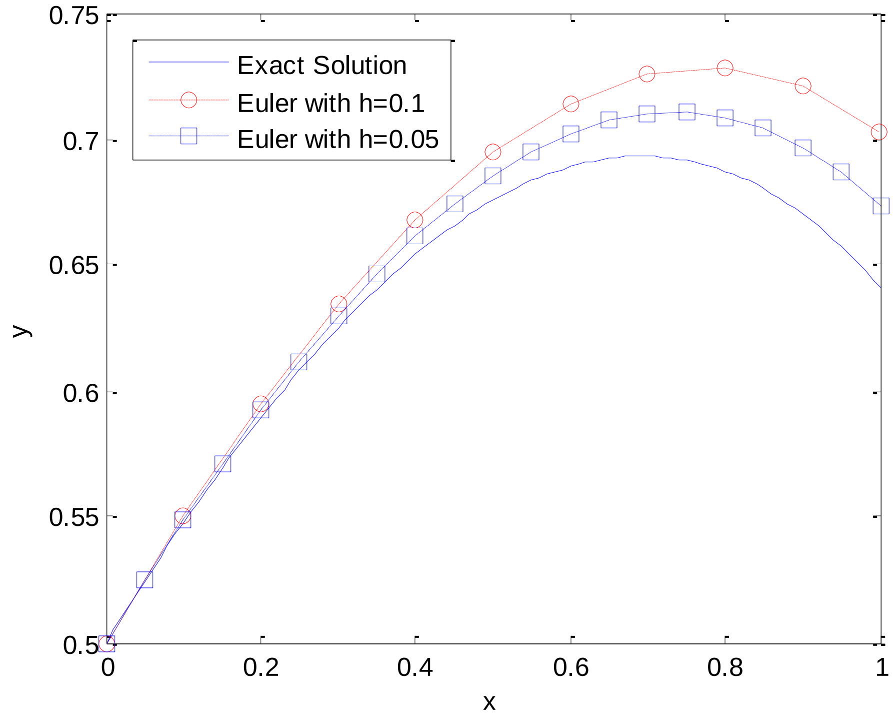
$y_{20}=y(x_{20})=y_{19}+0.05(y_{19}-x_{19})= 0.673351$

وعليه فان قيمة الخطأ المطلق في هذا التقريب هو

$$|y(1)-y_{20}|=0.032492.$$

الخطأ المطلق	الحل الدقيق	y_n	x_n	n
0.001335	0.547414	0.54875	0.1	2
0.002948	0.589299	0.592247	0.2	4
0.004881	0.625070	0.629952	0.3	6
0.007185	0.654088	0.661272	0.4	8
0.009913	0.675639	0.685553	0.5	10
0.013131	0.688941	0.702072	0.6	12
0.016910	0.693124	0.710034	0.7	14
0.021333	0.687229	0.708563	0.8	16
0.026492	0.670198	0.696690	0.9	18
0.032492	0.640859	0.686525	1.0	20

بمقارنة الحلول التقريبية للحالتين، نرى أن استخدام حجم الخطوة الأصغر أدى إلى تقريب أفضل، حيث تم تقليص الخطأ إلى النصف تقريبًا عند y (1). في الشكل التالي قمنا برسم الحل الدقيق وتقديرات أويلر التي تم الحصول عليها.



يمكننا الحصول على الشكل السابق بتطبيق برنامج Matlab التالي

```
% Exact Solution
clear;clc;
x = 0:0.01:1;
y = x + 1-0.5*exp(x);
plot(x,y)
% cas (a) euler with h=0.1
clear;clc;
h=0.1;
x0=0;xf=1;
n = (xf-x0)/h;
x(1) = 0; y(1) = 0.5;
for k=2:n+1
    F=y(k-1)-x(k-1);
    y(k)=y(k-1)+h*F;
    x(k)=x(k-1)+h;
end
hold on
plot(x,y,'-.or')
% cas (a) euler with h=0.05
clear;clc;
h=0.05;
x0=0;xf=1;
n = (xf-x0)/h;
x(1) = 0; y(1) = 0.5;
for k=2: n+1
    F=y(k-1)-x(k-1);
    y(k)=y(k-1)+h*F;
    x(k)=x(k-1)+h;
end
hold on
```

```
plot(x,y,'--s')
```

في المثال السابق ، رأينا أن تخفيض حجم الخطوة إلى النصف كان له تأثير تخفيض الخطأ إلى النصف. رغم ذلك لم تكن الدقة جيدة كما هو مرغوب على الأرجح. بالطبع يمكننا فقط الاستمرار في تقليل حجم الخطوة (بشرط ألا تتخذ h صغرًا لدرجة أن أخطاء التقريب تكون مؤثرة) لزيادة الدقة ، ولكن بعد ذلك عدد الخطوات التي يتعين علينا اتخاذها ستجعل الحسابات مرهقة للغاية. أفضل طريقة هي استنباط الأساليب التي لديها ترتيب أعلى من حيث الدقة.

2- طريقة أويلر المعدلة (طريقة هيون) (Modified Euler Method -Heun's Method)

الطريقة التي نعتبرها هنا هي مثال على ما يسمى طرق التنبؤ والتصحيح (apredictor-corrector). الفكرة هي استخدام الصيغة من طريقة أويلر للحصول على تقريب أول للحل $y(x_{n+1})$. نشير إلى هذا التقريب بالرمز y^*_{n+1} ، بحيث

$$y^*_{n+1} = y_n + h^*f(x_n, y_n).$$

نقوم الآن بتحسين (أو "تصحيح") هذا التقريب من خلال تطبيق طريقة أويلر مرة أخرى. لكن هذه المرة ، نستخدم متوسط الميل لمنحنيات الحلول من خلال (x_n, y_n) و (x_{n+1}, y^*_{n+1}). هذا يعطي

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}*h*[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})].$$

باختصار ، طريقة أويلر المعدلة لتقريب الحل للمعادلة التفاضلية من الشكل:

$$y'=f(x, y), \quad y(x_0)=y_0$$

عند النقطة $x_{n+1} = x_0 + n.h$ حيث $(n=0,1,...)$ تعتمد على الصيغة التالية

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}*h*[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})].$$

حيث

$$y^*_{n+1} = y_n + h^*f(x_n, y_n).$$

مثال : قم بتطبيق طريقة أويلر المعدلة باستخدام $h = 0.1$ لتحديد تقريب لحل مشكلة :

$$\frac{dy}{dx} = y' = y - x, \qquad y(0) = 0.5. \qquad \text{عند نقطة} \quad x = 1$$

الحل: بأخذ $h = 0.1$ و $f(x, y)=y-x$ وصيغة طريقة أويلر المعدلة كالتالي

$$y^*_{n+1}=y_n+0.1(y_n-x_n),$$
$$y_{n+1}=y_n+0.05(y_n-x_n+y^*_{n+1}-x_{n+1}).$$

بالتالي،

$$y_{n+1}=y_n+0.05\{y_n-x_n+[y_n+0.1(y_n-x_n)]-x_{n+1}\}.$$

هذا هو،

$$y_{n+1}=y_n+0.05(2.1y_n-1.1x_n-x_{n+1}), \; n=0,1,...,9.$$
$$y_{n+1}= 1.105y_n- 0.055x_n-0.05x_{n+1}, \; n=0,1,...,9.$$

عند $n = 0$ ،

$$y_1=1.105y_0- 0.055x_0-0.05x_1=1.105*0.5-0.055*0-0.05*0.1=0.5475,$$

وعندما تكون $n = 1$ ،

$$y_2=1.105y_1- 0.055x_1-0.05x_2=1.105*0.5475-0.055*0.1-0.05*0.2=0.5894875.$$

الخطأ المطلق	الحل الدقيق	y_n	x_n	n
0.000085	0.547414	0.5475	0.1	1
0.000189	0.589299	0.589487	0.2	2
0.000313	0.625070	0.625384	0.3	3
0.000461	0.654088	0.654549	0.4	4
0.000637	0.675639	0.676277	0.5	5
0.000845	0.688941	0.689786	0.6	6
0.001089	0.693124	0.694213	0.7	7
0.001376	0.687229	0.688605	0.8	8
0.001711	0.670198	0.671909	0.9	9
0.002100	0.640859	0.642959	1.0	10

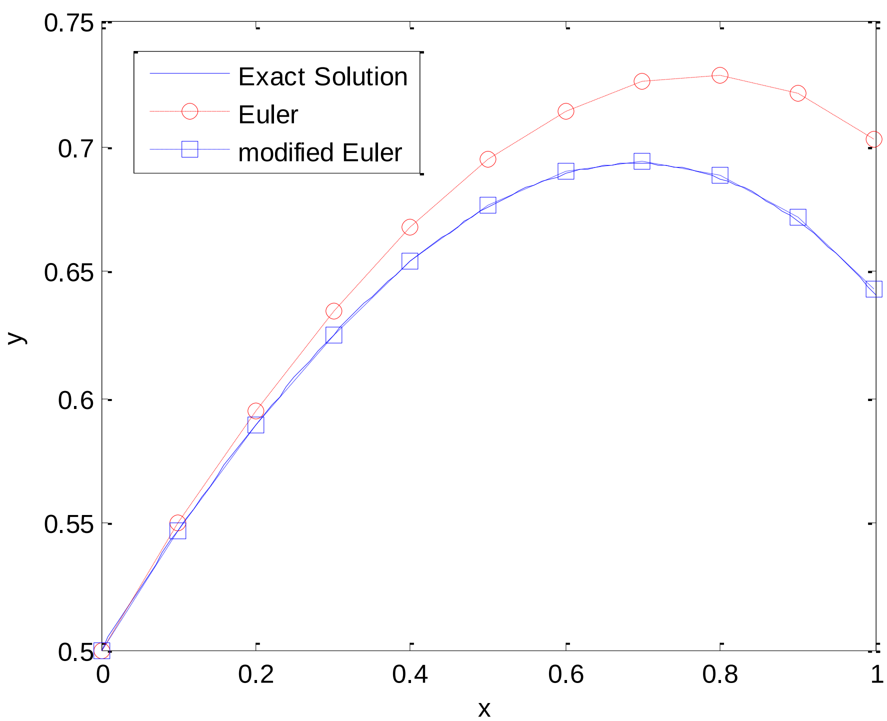
نستمر بهذه الطريقة ، نقوم بتوليد سلسلة النتائج المدرجة في الجدول السابق. من هذا الجدول ، نرى أن تقريب $y(1)$ وفقًا لطريقة أويلر المعدلة هو $y_{10}=0.642960$.

كما رأينا في المثال السابق ، فإن قيمة الحل الدقيق عند $x = 1$ هي $y(1)=0.640859$

وبالتالي ، فإن قيمة الخطأ المطلق في تقريب الحل عند $x = 1$ باستخدام طريقة أويلر المعدلة مع اتخاذ الخطوة بحجم $h = 0.1$ هو

$$|y(1)-y_{10}|=0.002100.$$

بمقارنة هذا مع نتائج المثال السابق ، نرى أن طريقة أويلر المعدلة قد اكتسبت درجة عشرية تقريبًا من الدقة عند استخدام فقط الخطوة بحجم $h = 0.1$. ، في الشكل التالي قمنا برسم الحل الدقيق للمعادلة التفاضلية وتقريب أويلر المعدل مع $h = 0.1$



يمكننا كتابة برنامج بالـ Matlab للمقارنة بين الطريقة اويلر وطريقة اويلر المعدلة كالتالي

```
% Exact Solution
clear;clc;
x = 0:0.01:1;
y = x + 1-0.5*exp(x);
plot(x,y)
%  euler with h=0.1
clear;clc;
h=0.1;
x0=0;xf=1;
n = (xf-x0)/h;
x(1) = 0; y(1) = 0.5;
for k=2:n+1
    F=y(k-1)-x(k-1);
    y(k)=y(k-1)+h*F;
    x(k)=x(k-1)+h;
end
hold on
plot(x,y,'-.or')
% modified Euler with h=0.1
clear;clc;
h=0.1;
x0=0;xf=1;
n = (xf-x0)/h;
x(1) = 0; y(1) = 0.5;
for k=2:n+1
    F=y(k-1)-x(k-1);
    ym=y(k-1)+h*F;
    x(k)=x(k-1)+h;
    Fm=ym-x(k);
    y(k)=y(k-1)+(1/2)*h*(F+Fm);
end
hold on
plot(x,y,'--s')
```

وبالتالي ، فإن قيمة الخطأ المطلق في تقريب الحل عند $x = 1$ باستخدام طريقة أويلر المعدلة مع اتخاذ الخطوة بحجم $h = 0.05$ هو

$$|y(1) - 0.641404| = 0.000545.$$

حيث $y_{10} = 0.641404$.

3- طريقة رونج-كوتا من الرتبة الرابعة (Runge-Kutta Method of Order Four)

الطريقة الأخيرة التي نعتبرها مملة إلى حد ما عند استخدامها في الحسابات اليدوية ، ولكن من السهل جدًا برمجتها في آلة حاسبة أو كمبيوتر. إنها طريقة من الدرجة الرابعة ، والتي ، في حالة المعادلة التفاضلية للصيغة $(y' = f(x))$ ، تختزل إلى قاعدة سيمبسون (فصل طرق التكامل العددي) لتقييم تكاملات محددة عدديًا. بدون تبرير ، نذكر الخوارزمية طريقة Runge-Kutta من الرتبة الرابعة لتقريب حل معادلة تفاضلية.

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

عند النقطة $x_{n+1} = x_0 + n.h$ حيث $(n=0,1,...)$ تعتمد على الصيغة التالية

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}.(k_1+2.k_2+2.k_3+k_4),$$

حيث

$$k_1=h.f(x_n,y_n),$$
$$k_2=h.f(x_n+2.h,\ y_n+2.k_1),$$
$$k_3=h.f(x_n+2.h,\ y_n+2.k_2),$$
$$k_4=h.f(x_n+1,y_n+k_3),$$
$$n=0,1,2.\ ...,$$

مثال : طبّق طريقة Runge-Kutta من الرتبة الرابعة مع اخذ حجم الخطوة $h = 0.1$ لتحديد تقريب لحل مشكلة المعادلة التفاضلية أدناه عند النقطة $x = 1$:

$$\frac{dy}{dx} = y' = y - x, \qquad y(0) = 0.5.$$

الحل: نأخذ $h = 0.1$ و $f(x, y)=y-x$ في طريقة Runge-Kutta من الرتبة الرابعة ، ونحتاج إلى تحديد y_{10}. أولاً نحدد k1، k2، k3، k4.

$k_1=0.1.f(x_n, y_n)=0.1.(y_n-x_n),$

$k_2=0.1.f(x_n+0.05,\ y_n+0.5k_1)=0.1.(y_n+0.5.k_1-x_n-0.05),$

$k_3=0.1.f(x_n+0.05,\ y_n+0.5k_2)=0.1.(y_n+0.5.k_2-x_n-0.05),$

$k_4=0.1.f(x_n+1,\ y_n+k_3)=0.1.(y_n+k_3-x_n+1).$

$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}.(k_1+2.k_2+2.k_3+k_4),$

عندما $n=0$ ،

$k_1=0.1(0.5)=0.05,$
$k_2=0.1[0.5+(0.5)(0.05)-0.05]=0.0475,$
$k_3=0.1[0.5+(0.5)(0.0475)-0.05]=0.047375,$
$k_4=0.1(0.5+0.047375-0.1)=0.0447375,$

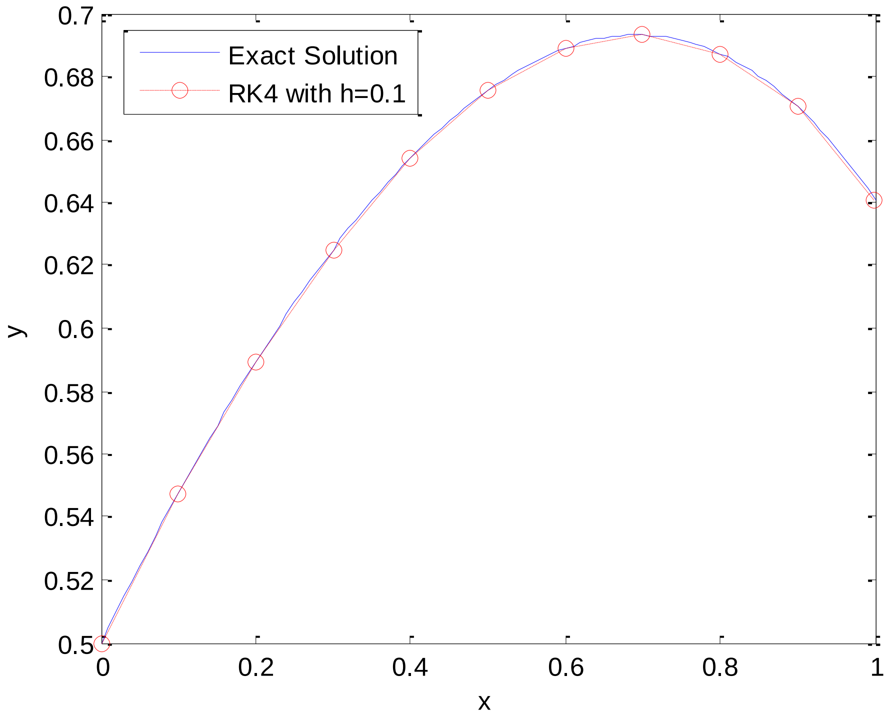
و هكذا

$$y_1=y_0+\frac{1}{6}\,(k_1+2.k_2+2.k_3+k_4)=0.5+\frac{1}{6}\,(0.2844875)=0.5474145833$$

مقربة إلى خمسة عشر منزلة عشرية. وبالاستمرار بهذه الطريقة ، نحصل على النتائج المعروضة في الجدول التالي

الخطأ المطلق	الحل الدقيق	y_n	x_n	n
0.000000042	0.547414540962176	0.547414583333333	0.1	1
0.000000094	0.589298620919915	0.589298714574653	0.2	2
0.000000155	0.625070596211998	0.625070751468731	0.3	3
0.000000229	0.654087651179365	0.654087879959657	0.4	4
0.000000316	0.675639364649936	0.675639680701581	0.5	5
0.000000419	0.688940599804746	0.688941018954033	0.6	6
0.000000540	0.693123646264762	0.693124186701612	0.7	7
0.000000683	0.687229535753766	0.687230218353842	0.8	8
0.000000849	0.670198444421525	0.670199293109965	0.9	9
0.000001042	0.640859085770477	0.640860127932417	1.0	10

على وجه الخصوص ، نرى أن تقريب طريقة Runge-Kutta لـ y (1) هو y10=0.64086013،
وهكذا |y(1)−y10|=0.00000104




```
% Exact Solution
clear;clc;
x = 0:0.01:1;
y = x + 1-0.5*exp(x);
plot(x,y)
% metode Rung kutta ordre 4 with h=0.1
clear;clc;
h=0.1;
x0=0;xf=1;
n = (xf-x0)/h;
x(1) = 0; y(1) = 0.5;
for k=2:n+1
    x(k)=x(k-1)+h;
    k1=h*(y(k-1)-x(k-1));
    k2=h*(y(k-1)+0.5*k1-x(k-1)-0.5*h);
    k3=h*(y(k-1)+0.5*k2-x(k-1)-0.5*h);
    k4=h*(y(k-1)+k3-x(k));
    y(k)=y(k-1)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end
hold on
plot(x,y,'-.or')
```

أهداف الفصل :

القدرة على استعمال الطرائق العددية لحساب التفاضل

بحث حلول المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى عدديا

دراسة الطرائق العددية لحساب التفاضل مع مناقشة تقدير الدقة وتقدير الأخطاء

المراجع :

-1

Engineering and numerical Analysis, Lectures, University of Technology - Iraq
https://uotechnology.edu.iq/dep-MechanicsandEquipment/mechanics%20lecture.htm
https://www.uotechnology.edu.iq/dep-MechanicsandEquipment/Lectures and Syllabus/Lectures/Same/Third Grade/numerical stud6.pdf

-2

Linear Algebra And Differential Equations courses, Department of Mathematics, Purdue University, USA
https://www.math.purdue.edu/academic/courses/
https://www.math.purdue.edu/files/academic/courses/2010spring/MA26200/1_10.pdf

أهداف المقياس :

- ✓ معرفة أنواع الخطأ وطرق حسابه.
- ✓ اكتساب القدرة على حل المعادلات غير الخطية بطرق عددية مختلفة و دراسة وتحليل الأخطاء المتعلقة بهذه الطرائق ومناقشة معدلات تقاربها.
- ✓ استيعاب طرق حل نظم المعادلات الخطية باستخدام الطرائق المباشرة و تقدير الأخطاء المتعلقة بهذه الطرائق استنتاج المصفوفات التكرارية.
- ✓ دراسة الطرائق العددية لحساب التفاضل مع مناقشة تقدير الدقة وتقدير الأخطاء.

السلسلة رقم : 01

-حساب الأخطاء-

1- عين الخطأ المطلق والخطأ النسبي بفرض x_0 قيمة تقريبية لـ x حيث $x_0=15.319$ ، $x=15.31877$.

2- عين الخطأ المطلق لمجموع وحاصل طرح العددين التقريبيين ثم عين الخطأ النسبي الموافق $y_0=8.214$ ، $x_0=21.17$.

3- أحسب الخطأ المرتكب في حساب المقدار $14.1/(12.16).(24.3)$.

4- إذا كان $z=20\ \pm0.01$ ، $y=10\pm0.01$ ، $x=2\pm0.005$ أحسب المقدار $u=(x^3.y^5)/z^2$ وأحسب الخطأ المرتكب.

5- إذا كان $x=1.12$ عدد مدور (مقرب) أحسب المقدار $y=x^2+3.12.x+2.71$ ثم عين الخطأ عين الخطأ المطلق والنسبي للمركبتين.

6- إذا كانت $z=x^x$ وكانت $x=2.0\pm0.1$ أوجد قيمة z وقيمة الخطأ المطلق والنسبي فيها.

7- إذا كانت $z=x^y$ وكانت $x=2.0\pm0.1$ و$y=3.0\pm0.1$ ، أوجد مقدار الخطأ المطلق والنسبي في z.

01

حل السلسلة رقم 01:
(حساب الأخطاء)

ت 01: إذا كانت x_0 قيمة تقريبية لـ x حيث:

$x_0 = 15,319$, $x = 15,31877$

- تعيين الخطأ المطلق:

قانون $\boxed{|\Delta x| = |x - x_0|}$

$|\Delta x| = |15,31877 - 15,319| = \boxed{0,00023}$

- تعيين الخطأ النسبي R_x:

قانون $\boxed{R_x = \frac{|\Delta x|}{|x|}} = \frac{|0,00023|}{|15,31877|} = \boxed{0,0000150142}$

ت 02: تعيين الخطأ المطلق، الخطأ النسبي لحاصل مجموع وطرح عددين تقريبيين

$x_0 = 21,17$, $y_0 = 8,214$

- حاصل جمع العددين التقريبيين: $z_0 = x_0 + y_0$

بما أن x_0 و y_0 عددين تقريبيين (أي أنهما نتيجة عملية تدوير عدد ما) نتيجة إكتفاء بعدد محدد بعد الفاصلة

فإن الخطأ المطلق لهما هو

أي: $5.10^{-n} = 0,5.10^{-(n-1)}$:n هو ترتيب الرقم المحذوف الذي أقتطع

$\Delta x = 5.10^{-3} \Leftarrow x_0 = 21,17$

$\Delta x = 0,005$

إذا n=3 فهناك 3 قيمين بعد الفاصلة

$\Leftarrow y_0 = 8,214$

$\Delta x = 0,0005 = 5.10^{-4}$

قانون

$\boxed{\text{* الخطأ المطلق لحاصل جمع (أو طرح) عددين تقريبيين لا يتجاوز مجموع الأخطاء المطلقة لهذين العددين التقريبيين أي } |\Delta_{x\pm y}| \leqslant |\Delta_x| + |\Delta_y|}$

$\Rightarrow |\Delta_{x+y}| \leqslant |\Delta_x| + |\Delta_y|$

$\Leftrightarrow |\Delta_{x+y}| \leqslant |5.10^{-3}| + |5.10^{-4}| = |0,5.10^{-2} + 0,5.10^{-3}| = 5,5.10^{-3}$

$\Rightarrow \boxed{|\Delta_{x+y}| \leqslant 5,5.10^{-3}}$ (الخطأ المطلق)

وحساب الخطأ النسبي R_{x+y} كالتالي:

$R_{x+y} = \frac{|\Delta_{x+y}|}{|x+y|} = \frac{|\Delta_{x+y}|}{|x_0 + y_0|} = \frac{5,5.10^{-3}}{|21,17 + 8,214|} = \frac{5,5.10^{-3}}{29,384}$

$\Rightarrow R_{x+y} = 0,1871.10^{-3}$

- حاصل طرح العددين: $|\Delta_{x-y}| \leqslant |\Delta x| + |\Delta y|$

$\Rightarrow |\Delta_{x-y}| \leqslant 5,5.10^{-3}$

$\Rightarrow R_{x-y} \leq \frac{|\Delta_{x-y}|}{|x_0 - y_0|} = \frac{5,5.10^{-3}}{|21,17 - 8,214|} = \frac{5,5.10^{-3}}{12,956} = 0,4245.10^{-3}$

②

س 03 : الخطأ المرتكب في المقدار :

$(24,3)\cdot(12,16)/(14,1)$

$\Leftrightarrow (x_0)\cdot(y_0)/(z_0) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 24,3 \to \Delta x = 0,05 \\ y_0 = 12,16 \to \Delta y = 0,005 \\ z_0 = 14,1 \to \Delta z = 0,05 \end{cases}$ (أعداد مقربة)

العمليات الموجودة في العملية هي القسمة و الجداء و عليه نستطيع تحليل المقدار لعمليتين متتالية كالتالي :

$\frac{x\cdot y}{z} \Rightarrow \begin{cases} x * y \to /z \\ x/z \to * y \\ y/z \to * x \end{cases}$

أو

قانون

ولدينا : الخطأ النسبي لحاصل جداء (أو قسمة) عددين مقربين لا يتجاوز مجموع الأخطاء النسبية لهذين العددين

$\boxed{R_{x\cdot y} \leq R_x + R_y \quad x/y}$

$R_{\frac{x\cdot y}{z}} \leq R_x + R_y + R_z$

$R_{x\cdot y} \leq R_x + R_y = \frac{|\Delta x|}{|x|} + \frac{|\Delta y|}{|y|} = \frac{0,05}{|24,3|} + \frac{0,005}{|12,16|} = 0,002468797y$

$R_{x\cdot y/z} \leq R_{x\cdot y} + R_z = 0,00246 + \frac{0,05}{|14,1|} = \boxed{0,0060148967}$ الخطأ النسبي للمقدار

لدينا :

$\Rightarrow$ ~~$R_{x\cdot y}$~~ $x_0\cdot y_0/z_0 = 20,95659$

$\Rightarrow R_{x\cdot y/z} = \frac{|\Delta x\cdot y/z|}{|x_0\cdot y_0/z_0|} \Rightarrow |\Delta_{x\cdot y/z}| = R_{x\cdot y/z}\cdot|x_0\cdot y_0/z_0|$

$= 0,00601\cdot|20,95659|$

$\Rightarrow |\Delta x\cdot y/z| = 0,1260 \Rightarrow x_0\cdot y_0/z_0 = \boxed{20,95659 \pm 0,12605}$

س 04 : الخطأ النسبي والمطلق المرتكب في المقدار

$U = (x^3\cdot y^5)/z^2$

لدينا :

قانون

$\boxed{U = x^a\cdot y^b/z^c \Rightarrow R_U \leq |a|\cdot R_x + |b|\cdot R_y + |c|\cdot R_z}$

مهما كانت a، b، c طبيعية أو كسرية (حقيقية)

أي

$R_U \leq 3\cdot R_x + 5\cdot R_y + 2\cdot R_z = 3\cdot\frac{|\Delta x|}{|x|} + 5\cdot\frac{|\Delta y|}{|y|} + 2\cdot\frac{|\Delta z|}{|z|}$

$\Rightarrow R_U \leq \frac{3\cdot|0,0005|}{2} + 5\cdot\frac{0,001}{10} + 2\cdot\frac{0,01}{20} = \boxed{0,0135}$

$U = (2)^3\cdot(10)^5/(20)^2 = 2000$

$R_U \leq \frac{|\Delta U|}{|U|} \Rightarrow |\Delta U| = |R_U|\cdot|U| = 0,0135\cdot 2000 = \boxed{27}$

$\Rightarrow U = 2000 \pm 27$

③

ت 05 : لدينا $x = 1{,}12$ عدد مقرب والمقدار $y = x^2 + 3{,}12 \cdot x + 2{,}71$

المطلوب تعيين الخطأ المطلق والنسبي لـ y ؟

$x = 1{,}12$ عدد مقرب $\longrightarrow \Delta = 0{,}005 = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$

قانون

$$\boxed{\text{الخطأ المطلق لدالة أو كثير حدود } f(x) \text{ هو } \Delta_{f(x)} = \Delta_x \cdot |f'(x)|}$$

أي

$\Delta_y = \Delta x \cdot |y'(x)|$, $y'(x) = 2x + 3{,}21$

$\Rightarrow \Delta_y = |0{,}005| \cdot |2 \cdot 1{,}12 + 3{,}12 \cdot 1{,}12| = |0{,}005| \cdot |3{,}6012| = \cancel{0{,}03}$ $\cancel{0{,}0326}$ $= \boxed{0{,}0268}$

$\Rightarrow y = (1{,}12)^2 + 3{,}12 \cdot 1{,}12 + 2{,}71 = 7{,}4588 \pm 0{,}0268$

$R_y = \frac{|\Delta y|}{|y|} = (0{,}0268)/7{,}4588 = \boxed{0{,}00359}$

ت 06 :

لدينا $z = x^x$ و $x = 2.0 \pm 0.1$ ، $z(x)$

الخطأ المطلق لـ z : $z'(x) = ?$, $\Delta z = \Delta x \cdot |z'(x)|$

لدينا : $\ln(z) = x\ln(x)$ $\xrightarrow{\text{بإشتقاق المعادلة}}$ $\frac{1}{z} \cdot z' = x \cdot \frac{1}{x} + \ln(x)$

$\Leftrightarrow \frac{z'}{z} = 1 + \ln(x) \Leftrightarrow z' = z \cdot [\ln(x) + 1]$

$\cancel{z' = z[}$

$\Rightarrow z' = x^x \cdot [\ln(x) + 1]$

$\Rightarrow \Delta z = \Delta x \cdot x^x \cdot [\ln(x) + 1] = 0{,}1 \cdot 2^2 \cdot [\ln(2) + 1] = \boxed{0{,}6772}$

$R_z = \frac{|\Delta z|}{|z|} = \frac{0{,}6772}{2^2} = \boxed{0{,}08465}$

ت 7 : لدينا $z = x^y$ و $\begin{cases} x = 2.0 \pm 0.1 \\ y = 3.0 \pm 0.1 \end{cases}$ أي أن $z(x, y)$

Δz ? $\Leftarrow$ (حيث $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ و $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$)

قانون

$$\boxed{\Delta_{f(x,y,z,\dots)} = \Delta x \cdot |f'_x| + \Delta y \cdot |f'_y| + \Delta z \cdot |f'_z| + \dots}$$

$\Delta_z = \Delta x \cdot |z'_x(x, y)| + \Delta y \cdot |z'_y(x, y)|$

$\Rightarrow z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$

$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = ? \Rightarrow z = x^y \Leftrightarrow \ln(z) = y\ln(x) \xrightarrow[\text{لـ } y]{\text{إشتقاق}} \frac{z_y}{z} = \ln(x)$

$\Rightarrow z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = z \cdot \ln(x) = x^y \cdot \ln(x)$

$\Rightarrow \Delta z = \Delta x \cdot |y \cdot x^{y-1}| + \Delta y \, |x^y \cdot \ln(x)|$

$\Rightarrow \Delta z = 0{,}1 \cdot |3 \cdot 2^{3-1}| + 0{,}1 \cdot |2^3 \cdot \ln(x)| = \boxed{1{,}75451}$ / $R_z = \frac{|\Delta z|}{|z|}$

$\Rightarrow R_z = |1{,}75451| / |8| = \boxed{0{,}2193}$

$\Rightarrow z = 8 \pm 1{,}7545$

السلسة رقم : 02

طريقة التنصيف المتكرر + طريقة النقطة الثابتة (التقريبات المتتالية)

La méthode de Bissection (dichotomie) + La méthode du point fixe

1– استنتج بيانيا القيم التقريبية لجذور المعادله التالية:

$$\sin(x) - x + 0.5 = 0$$

2– مستخدما الجدول الذي يبين العلاقة بين قيم المتغير x وقيم الدالة $f(x)$ في المجال $[-1, 1]$، أوجد المجال الجزئي بطول 0.2 الوحدة الذي يحوي جذور المعادلات التالية:

$$x(x-1) - e^x = 0 \quad ، \quad x + e^x = 0$$

3– وضح أن للدالة $f(x) = x^3 - x - 1$ حل داخل المجال $[1, 2]$، ثم أوجد الحل التقريبي لجذر الدالة ضمن خطأ $E = 0.05$ باستخدام طريقة التنصيف المتكرر (*la méthode de Bissection*)؟

4– استخدم طريقة التنصيف المتكرر لإيجاد الحل للمعادلة الآتية بخطأ لا يتجاوز 10^{-2}:

$x = \tan x$ في الفترة $[4, 4.5]$.

5– أحسب عدد الخطوات اللازمة، بطريقة التنصيف المتكرر، لإيجاد جذر المعادلة $2 - e^x + x^2 - 3x = 0$ والذي يقع في المجال $[0, 0.5]$، مقرباً للمنزلة العشرية الثالثة.

6– كم تكرارا تقريبا يلزم لحل المعادلة $f(x) = x^3 + x - 4 = 0$ بطريقة التنصيف المتكرر بحيث نصل إلى حل تبلغ دقته $E = 10^{-3}$ وذلك داخل المجال $[1, 4]$.

7– أوجد الجذور التقريبية للمعادلات التالية بطريقة النقطة الثابتة (*la méthode du point fixe*) :

$$f(x) = e^x - 3x^2 = 0 \quad | \quad f(x) = x - 2\sin(x) = 0 \quad | \quad f(x) = x^2 - x - 2 = 0$$

8– لإيجاد جذر المعادلة $f(x) = x^3 - 4x^2 - 10 = 0$ و المحصور في المجال $[1, 2]$، بطريقة النقطة الثابتة، فإن بعض صيغ التكرار المقترحة هي:

1) $x_{n+1} = x_n - x_n^3 - 4x_n^2 + 10$ | 2) $x_{n+1} = \sqrt{\frac{10}{x_n} - 4x_n}$ | 3) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_n^3}$

4) $x_{n+1} = \sqrt{\frac{10}{x_n + 4}}$ | 5) $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 4x_n^2 - 10}{3x_n^2 + 8x_n}$

– بين كيف تم الحصول على كل من هذه الصيغ، أي من هذه الصيغ يؤدي إستخدامها الي الوصول الي جذر المعدلة أعلاه، ثم أوجد الجذر التقريبي لهذه المعادلة بإستخدام إحدى هذه الصيغ بخطأ لا يتجاوز 10^{-2}.

9– لإيجاد جذر المعادلة $x^2 - 3 = 0$ و الواقع في الفترة $[1, 2]$، بطريقة النقطة الثابتة، فإن احدى صيغ التكرار المقترحة هي: $x_{n+1} = \frac{3}{x_n}$

– بين لماذا لا يمكن بهذه الصيغة الوصول الي جذر المعادلة المطلوب.

– اقترح صيغة تكرار مناسبة لايجاد قيمة الجذر المطلوب، ثم أوجد قيمة هذا الجذر بدقة حتى المنزلة العشرية الثانية.

حل السلسلة رقم : 02

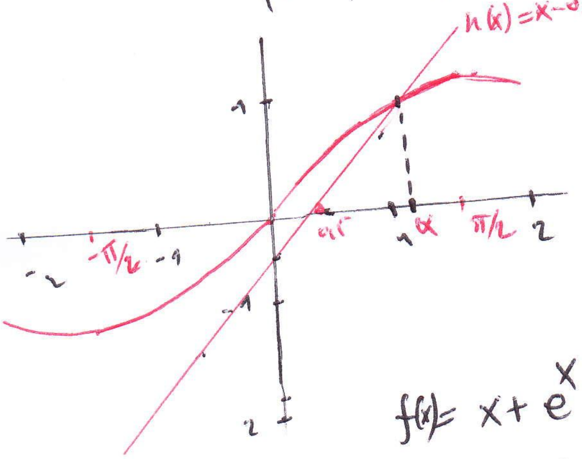
طريقة التنصيف المتكرر (bissection + dichotomie)

طريقة النقطة الثابتة (methode du point fixe)

1) الإستنتاج بيانيا للقيم التقريبية لجذور المعادلة $f(x)=\sin(x)-x+0,5=0$

$\Leftrightarrow \sin(x)=x-0,5 \Leftrightarrow g(x)=h(x)$

⇐ نحاول رسم منحنى الدالتين $g(x)$ و $h(x)$ ثم نحدد نقاط التقاطع بين منحنى الدالتين والتي تمثل جذور المعادلة $f(x)=0$ (تقاطع $f(x)$ مع المحور OX)



بيانيا نقطة تقاطع المنحنيين ∋ $[1 , \pi/2]$

⇐ إذن يوجد جذر تقريبي للمعادلة $f(x)=0$ ∋ $[1 , \pi/2]$ (عملية عزل أو حصر الجذور بمجال)

2) إيجاد المجال الجزئي بطول 0,2 وحدة الذي يحوي جذر المعادلة $f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=x+e^{x}=0$

⇐ نرسم الجدول التالي:

$[-0,6 , -0,4]$

x	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
f(x)	-0,63	-0,35	-0,05	0,27	0,61						
sign	–	–	–	+	+		+				

⇐ يوجد جذر تقريبي لـ $f(x)$ ∋ $[-0,6 ; -0,4]$

3) - لدينا الدالة $f(x)=x^3-x-1=0$ ، وإذا كانت: $f(1)=-1$ et $f(2)=5$

أي أن $f(1)\cdot f(2)<0$ و f مستمرة على المجال $[1 , 2]$ ⇐ يوجد جذر ∋ $[1 , 2]$

- إيجاد الحل التقريبي لجذر الدالة ضمن خطأ $E=0,05$ بطريقة التنصيف المتكرر:

لدينا: $[a_0 , b_0]=[1 , 2]$

$x_0=\frac{a_0+b_0}{2}=\frac{1+2}{3}=1,5=0,875>0$

$\Rightarrow f(1)\cdot f(1,5)<0 \Rightarrow [a , x_0]=[\overset{a_1}{1} , \overset{b_1}{1,5}]$ ∋ يوجد جذر تقريبي

(حيث نختار دائما النصف الذي تكون صور الدالة على طرفيه مختلفة الإشارة، ونتحقق كل خطوة من تحقق شرط التوقف (التقارب): $|b_n-a_n|\leq E$)

$x_1=\frac{1,5+1}{2}=1,25=-0,296$, et $f(1,25)\cdot f(1,5)<0$ ⇐ يوجد جذر تقريبي ∋ $[1,25 , 1,5]$

$\Rightarrow [a_1 , b_2]=[x_1 , x_0]=[1,25 , 1,5]$

$x_2=\frac{1,25+1,5}{2}=1,375$, $f(1,375)=0,22>0$, $f(1,25)\cdot f(1,375)<0$ ⇐ يوجد جذر تقريبي ∋ $[1,25 , 1,375]$

$[a_3 , b_3]=[x_1 , x_2]=[1,25 , 1,375]$, $f(1,3125)=-0,051<0$, $f(1,3125)\cdot f(1,375)<0$ ⇐ يوجد جذر ∋ $[1,3125 , 1,375]$

$x_3=\frac{a_3+b_3}{2}=\frac{1,25+1,375}{2}=1,3125$, $[a_4 , b_4]=[1,3125 , 1,375]$, $f(1,3125)\cdot f(1,34375)<0$ ⇐ يوجد جذر تقريبي

$x_4=\frac{1,375+1,3125}{2}=1,34375$, $f(1,34375)=0,082>0$, $[a_5 , b_5]=[1,3125 , 1,34375]$ ∋ $\boxed{1,343\simeq x_4}$

$|b_5-a_5|=|1,34375-1,3125|=0,03<0,05(E)$

(2)

4) بنفس طريقة حل التمرين السابق وحاول إيجاد حل للمعادلة: $x = \tan x$ ، بالمجال $[4 , 4{,}5]$ وخطأ لا يتجاوز $0{,}01$ ، حيث نجد عند استخدام طريقة dichotomie أنه f بعد الخطوة السادسة:

⇐ x_6 الحل تقريبي بخطأ لا يتجاوز E ؛ $x'_6 = 4{,}492188 \in [4{,}492188 \,,\, 4{,}5]$

et $|4{,}5 - 4{,}492188| = 0{,}007 < 0{,}01$

5) عدد الخطوات اللازمة لإيجاد جذر المعادلة: $2 - e^x + x^2 - 3x = 0$ بطريقة dichotomie والذي $\in [0 , 0{,}5]$ بالمقرب للمنزلة العشرية الثالثة $(E = 0{,}001) = 10^{-3}$.

(في حقيقة لا يهم شكل المعادلة لإيجاد عدد الخطوات) لدينا العلاقة التالية:

$[a , b] = [0 , 0{,}5]$

قانون

$$\boxed{n \geq \frac{\log(b-a)+K}{\log(2)} - 1}$$

$10^{-K} = 10^{-3}$ ،

$$\Rightarrow n \geq \frac{\log(0{,}5-0)+3}{\log(2)} - 1 \simeq 7{,}96 \Rightarrow n = 8$$

(نأخذ العدد الأكبر التالي دائما حتى ولو كان أقرب)

6) بنفس طريقة التمرين السابق

7) يؤخر هذا التمرين لما بعد التمرين 8 و 9 ، (يصبح آخر تمرين بالسلسلة)

8) لإيجاد جذر المعادلة $f(x) = x^3 \overset{\text{تصحيح }(+)}{+} 4\cdot x^2 - 10 = 0$ والمحصور بالمجال $[1 , 2]$ بطريقة النقطة الثابتة (point fixe) ، يمكن الحصول على الصيغ التكرارية التالية:

1-

$$x_{n+1} = x_n - x_n^3 - 4x_n^2 + 10$$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

$\Leftrightarrow -x^3 - 4x^2 + 10 + x = x$

$\Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - x_n^3 - 4x_n^2 + 10 = g_1(x)$

2-

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{10}{x_n} - 4x_n}$$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -4x^2 + 10$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{10}{x} - 4x \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x} = g_2(x)$

3-

$x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 10 - x^3$

$\Leftrightarrow 2x = \sqrt{10 - x^3} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3} = g_3(x)$

4-

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{10}{x_n + 4}}$$

$x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+4) - 10 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{10}{x+4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{10}{x+4}} = g_4(x)$

5-

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 4x_n^2 - 10}{3x_n^2 + 8x_n}$$

$x^3 - 4x^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x} = 0 \quad (x \neq 0)$

$\Leftrightarrow x - \frac{x^3 - 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x} = x$

- أي من هذه الصيغ يؤدي إستخدامها إلى الوصول جذر المعادلة أعلاه ؟؟

هي الصيغة التي تحقق:

$$\begin{cases} |g'(x)| \leq M < 1 \,,\, M = \operatorname{Max}|g'(x)| \,,\, x \in [a,b] \\ \forall x \in (a,b) \quad g(x) \in (a,b) \end{cases}$$

$g_1'(x) = 1 - 3x^2 - 8x \,,\, |g'(x)| > 1$ ✗

$g_2'(x) = \frac{-\frac{10}{x^2} - 4}{2\sqrt{\frac{10}{x} - 4x}} \,,\, |g_2'(1)| = 2{,}8 > 1$ ✗

$g_3'(x) = \frac{-3x^2}{4\sqrt{10 - x^3}} \Rightarrow |g_3'(x)| \leq M \leq \forall x \in [1 , 1{,}5]$ et $\forall x \in [1,2]$; $f(1)\cdot f(1{,}5) < 0$

$g_3(x) \in [1 , 1{,}5]$

⇐ $g_3(x)$ تؤدي إلى التقارب

(3)

$$g_4'(x) = \frac{\frac{-10}{(x+4)^2}}{2\sqrt{\frac{10}{x+4}}} \Rightarrow \begin{cases} |g_4'(x)| \leq M < 1, \forall x \in [1, 2] \\ g_4(x) \in [1, 2], \forall x \in [1, 2] \end{cases} \Rightarrow$$

$g_4(x)$ صيغة تؤدي الى التقارب الى الجذر التقريبي بأي دقة $\forall x_0 \in [1, 2]$

⋮

- نستخدم الصيغة التكرارية $g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}$ لإيجاد الجذر التقريبي لخطأ $E = 10^{-2}$ بطريقة النقطة الثابتة:

$x_0 = 1{,}5 \in [1, 2]$

$\Rightarrow x_1 = g_4(x_0) = 1{,}3484$, $|x_1 - x_0| > E$

$\Rightarrow x_2 = g_4(x_1) = 1{,}36737$, $|x_2 - x_1| > E$

$x_3 = g_4(x_2) = 1{,}364957$, $|x_3 - x_2| = 0{,}002 \leq 10^{-2}$

$\Leftarrow x_3 \cong 1{,}364$ هو الجذر التقريبي بخطأ لا يتجاوز 10^{-2} للمعادلة $f(x) = 0$

(9) لدينا المعادلة $f(x) = x^2 - 3 = 0$ جذر بالفترة $[1, 2]$ $\left(\begin{matrix} f(1) \cdot f(2) < 0 \\ f \text{ مستمرة} \end{matrix} \right)$

+ لإيجاد جذر المعادلة بطريقة النقطة الثابتة لدينا الصيغة $g(x) = \frac{3}{x}$

$g'(x) = \frac{-3}{x^2} \Rightarrow |g'(x)| > 1$ $\forall$ $|g'(1)| = 3 > 1$, $|g'(2)| = 1{,}5 > 1$

$\Leftarrow$ الصيغة $x_{n+1} = \frac{3}{x_n}$ لا تؤدي الى الوصول إلى الجذر (متباعدة)

+ إقتراح صيغة تكرارية مناسبة:

$f(x) = x^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3 + x = x \Leftrightarrow x(x+1) = x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{x+3}{x+1} = g(x)$

$g'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \Rightarrow |g'(x)| \leq M < 1, \forall x \in [1, 2]$

$g(x) \in (1, 2)$, $\forall x \in [1, 2]$

إيجاد الجذر بدقة المنزلة العشرية الثانية $\Leftarrow E = 0{,}01$

$x_0 = 1{,}5$, $\in [1, 2]$

$x_1 = g(x_0) = g(1{,}5) = 1{,}8$, $|x_1 - x_0| = 0{,}3 > 10^{-2}$

$x_2 = g(x_1) = 1{,}714$, $|x_2 - x_1| = 0{,}085 > 10^{-2}$

$x_3 = g(x_2) = 1{,}736$, $|x_3 - x_1| = 0{,}022 > 10^{-2}$

$x_4 = g(x_3) = 1{,}730$, $|x_4 - x_3| = 0{,}006 \leq 10^{-2} \Rightarrow$ $x_4 = 1{,}730$ جذر تقريبي لـ $f(x) = 0$

(7) بالنسبة لهذا التمرين هو مجرد إضافة لإيجاد حلوله بنفس طريقة التمرين السابق مع إقتراح دقة محددة و عزل (حصر) الجذر بمجال أولاً.

السلسة رقم : 03

طريقة نيوتن–رافسون (Newton–Raphson) + طريقة القواطع (sécante) + المصفوفات

-1 أوجد جذر المعادلة $f(x) = x^3-5x-4 = 0$ بطريقة نيوتن-رافسون بخطأ لا يتجاوز 0.01، حيث القيمة الابتدائية $x_0=2.5$.

-2 استخدم طريقة نيوتن-رافسون لإيجاد جذر المعادلة $x = e^{-x}$ مقرباً لمنزلتين عشريتين حيث القيمة الابتدائية $x_0=0$.

- بين أن متتالية التقريبات التي تحصل عليها متقاربة نحو الجذر لأي دقة مطلوبة مهما كان التقريب الأول (القيمة الإبتدائية) $x_0 \geq 0$.
- قارن النتيجة وعدد التكرارات عند استخدام طريقة التنصيف المتكرر لحل هذه المعادلة.

-3 لدينا المعادلة : $f(x) = (4x-7)/(x-2)$ ، لها جذر $x=1.75$، استخدم طريقة نيوتن-رافسون مع القيم الابتدائية الاختيارية الآتية:

$$x_0=1.625;\ x_0=1.875;\ x_0=1.5;\ x_0=9;\ x_0=1.95;\ x_0=7.$$

-4 إستخدام طريقة نيوتن–رافسون لإيجاد القيمة التقريبية للجذور: $\sqrt{11}$ و $\sqrt[3]{5}$ بدقة 0.01.

-5 أوجد جذر المعادلة $f(x) = x^3-5x-4 = 0$ بطريقة القواطع (méthode de la sécante) بخطأ لا يتجاوز 0.01.

-6 أوجد الجذر التقريبي للمعادلة $x = \cos(x)$ باستخدام طريقة القواطع بخطأ لا يتجاوز 0.01.

-7 إذا كان : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$، $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$، فاحســـــب : $3*A-2*B+5*I$، $A*B$، $B*A$، $B*C$ ، $A*C$، A'، C'، $\det(A)$، A^{-1}.

-8 أوجد مقلوب المصفوفات التالية : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ،

<u>الأعمال الشخصية:</u>

أنجر بحث حول طريقة الفروق المنتهية (la méthode des différences finies)، يتكون من :

- شرح الطريقة + تطبيقها على مثال عددي (يحبذ ان يكون قريب من التخصص) + تحويل المثال إلى برنامج بلغة الماتلاب -Matlab-.

حل السلسلة / رقم 3

ت01: لدينا $f(x) = x^3 - 5x - 4 = 0$

$E = 0{,}01$, $x_0 = 2{,}5$

* المطلوب: إيجاد الجذر التقريبي بطريقة نيوتن - رافسون ؟

الصيغة العامة لنيوتن - رافسون

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

لدينا:

$$f'(x) = 3x^2 - 5$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^3 - 5x_0 - 4}{3x_0^2 - 5}$$

$$= 2{,}563 \quad , \quad |x_1 - x_0| > E$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_0)} = 2{,}561$$

$$|x_2 - x_1| = |2{,}563 - 2{,}561| = 0{,}002 \leq E$$

$\Rightarrow$ x_2 هو الجذر التقريبي

ت02: لدينا المعادلة $x = e^{-x}$ (توجد صفرية دوماً)

$$\Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 = f(x)$$

منزلتين عشريتين ⇐ $x_0 = 0$, $E = 10^{-2}$

- تبيين تقارب متتالية التقارب (طريقة نيوتن) مهما كانت $x_0 \geq 0 \Leftrightarrow x_0 \in [0, +\infty[$

← لدينا شرط التقارب لطريقة نيوتن:

$$\Leftrightarrow |g'_{newton}(x)| \leq M < 1$$

$$\Leftrightarrow |x - f(x)/f'(x)| \leq M < 1$$

شرط تقارب نيوتن ←

$$\boxed{\left|\frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}\right| \leq M < 1} \quad — (*)$$

$x_0 \in [0, +\infty[$

$$x = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(x) = x - e^{-x} \\ f'(x) = 1 + e^{-x} \\ f''(x) = -e^{-x} \end{array} \right.$$

$$(*) \Leftrightarrow \left| \frac{e^{-x}(x - e^{-x})}{(1 + e^{-x})^2} \right| \simeq h(x)$$

$h(0) = \left|\frac{1}{4}\right| < 1$, $h(+\infty) = 0 < 1$ $\Rightarrow \forall x \in [0, +\infty]$ $h(x) < 1$ $\Rightarrow$ متقاربة

* مقارنة: 1) طريقة التنصيف:

$f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 0{,}63 > 0$ $\Rightarrow f(0)\cdot f(1) < 0 \Rightarrow \alpha \in [0, 1]$

$10^{-2} \leftarrow 2$

$$n \geq \frac{\log(b-a) + k}{\log(2)} - 1 = 5{,}64 \simeq 7$$

7 تكرارات يلزم لطريقة التنصيف المتكرر حتى نجد الجذر بدقة 10^{-2}

2) طريقة نيوتن: نضع $x_0 = 0$ ⇐

$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 0{,}500$

$x_2 = 0{,}566$

$x_3 = 0{,}567$; $|x_3 - x_2| = 0{,}001 \leq 10^{-2}$

⇐ x_3 هو الجذر التقريبي بعد 3 تكرارات

⇐ نيوتن أسرع ضعف طريقة التنصيف في هذا المثال، عموماً السريعة

ت03: المعادلة $f(x) = \frac{(4x - 7)}{(x - 2)}$ ونأخذ: $E = 0{,}01$

هي معادلة غير مستمرة (إنقطاع بالنقطة $x = 2$) وعليه هناك بعض القيم الإبتدائية تؤدي إلى التقارب وأخرى إلى التباعد

$x_0 = 1{,}625 \xrightarrow{\text{تتقارب بعد 6}} 1{,}721$

$x_0 = 1{,}875 \xrightarrow{\text{تتقارب بعد 21}}$

$x_0 = 1{,}5 \xrightarrow{\text{تتقارب بعد}}$

$x_0 = 9 \xrightarrow{\text{تتباعد}}$

$x_0 = 1{,}95 \xrightarrow{\text{تتقارب بعد 28}}$

$x_0 = 7 \xrightarrow{\text{تتباعد}}$

* أي نقطة x_0 أصغر من 2 تتقارب، $x \geq 2$ تتباعد

هذا التمرين يكفي حله ب

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 1{,}625 \\ x_0 = 9 \end{array} \right.$$

ت04: إيجاد $\sqrt{11}$ بطريقة نيوتن-رافسون بدقة 0,01

لدينا: $x^2-11=0=f(x) \Leftarrow x=\sqrt{11}$

$f'(x)=2x$

نضع $x_0=3$

$$\Rightarrow x_1 = x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0-\frac{x_0^2-11}{2\cdot x_0} = 3-\frac{3^2-11}{2\cdot 3} = 3,333$$

$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = 3,151$

$x_3 = 3,320$ $\quad |x_4-x_3| = 0,004 \le E$

$x_4 = 3,316$

$\Leftarrow$ $\boxed{3,316 = x_4}$ هو الجذر التقريبي لـ $f=0$

ت05: إيجاد جذر المعادلة:

$f(x) = x^3-5x-4=0$

بطريقة القواطع:

~~الصيغة العامة~~

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}}$$

بهذه الطريقة نحتاج قيمتين ابتدائيتين x_0 و x_1 يفضل أن يكون الجذر يقع بينهما:

$f(0)=-4$ ، $f(1)=-8<0$

$f(2)=-6$ ، $f(3)=8>0$

$\Rightarrow f(2)\cdot f(3)<0 \Rightarrow [2,3]\ni\alpha$

نضع $x_0=2$ ، $x_1=3$ $\Leftarrow$

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\cdot\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)} = 2,428$$

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\cdot\frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)} = 2,534$$

$$x_4 = x_3 - f(x_3)\cdot\frac{x_3-x_2}{f(x_3)-f(x_2)} = 2,563$$

$$x_5 = x_4 - f(x_4)\frac{x_4-x_3}{f(x_4)-f(x_3)} = 2,561$$

$|x_5-x_4| < 10^{-2} \Rightarrow$ x_5 الجذر التقريبي

ت06: بطريقة القواطع

$x-\cos(x)=0=f(x) \Leftarrow x=\cos(x)$

$f(0)=-1$, $f(1)=0,45$

$f(0)\cdot f(1)<0 \Rightarrow [0,1]\ni\alpha \Rightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ x_1=1 \end{cases}$

الحل بالجدول التالي

$\Rightarrow$

x_i	
x_2	0,685
x_3	0,736
x_4	0,739

$|x_4-x_3|\le E$ $\Rightarrow$ x_4 الجذر

ت07:

$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 6 & -4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$

حساب: (حيث $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$)

$3*A-2*B+5*I =$

$$\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 9 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & 6\\ 12 & -8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -3\\ -3 & 19\end{pmatrix}$$

$A*B=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 27 & 1\end{pmatrix}$; $B*A=\begin{pmatrix}4 & 11\\ -18 & -2\end{pmatrix}$

$B*C=\begin{pmatrix}7\\ 16\end{pmatrix}$, $A*C=\begin{pmatrix}-3\\ 4\end{pmatrix}$

$A'=A^t=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $C'=C^t=\begin{pmatrix}2 & -1\end{pmatrix}$

$\det(A) = -1\cdot 2 - 1\cdot 3 = -5$

$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\,adj(A)$

$adj(A)=(cof(A))^t$

$cof(A)=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $adj(A)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$

ت08: نستخدم القانون حيث:

$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\,adj(A)$

$adj(A)=(cof(A))^t$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ -6 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 10\\ 6 & -11 & 4\\ 2 & 19 & -10\end{pmatrix}$$

السلسة رقم : 04 : نظم المعادلات الخطية

1- استخدم طريقة معكوس المصفوفة لإيجاد حل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 19 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 6x_1 + 7x_2 - x_3 &= 17 \end{aligned}$$

2- حل بطريقة كرامر جمل المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

3- استخدم طريقة غاوس لحل جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -x_1 - 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

4- باستخدام طريقة غاوس أحسب قيمة المحدد التالي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

5- باستخدام طريقة غاوس–جوردان أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

6- أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة جاكوبي، حيث $\varepsilon=0.09$:

$$\begin{aligned} x_1 + 10x_2 + x_3 &= 12 \\ 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 &= 12 \end{aligned}$$

7- أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة جاكوبي ثم بطريقة غاوس–سيدل، حيث $\varepsilon=0.09$:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &= 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

1

حل السلسلة رقم (04)

(نظم المعادلات الخطية)

1) استخدم طريقة معكوس مصفوفة لايجاد حل جملة المعادلات الخطية ؟

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$6x_1 + 7x_2 - x_3 = 17$$

الحل: يمكن كتابة النظام جملة المعادلات كما يلي:

$$AX = B$$

حيث A: مصفوفة المعاملات

X: الشعاع العمودي (المتغيرات)

B: " " " (الثوابت)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

ومنه $\underbrace{A^{-1} A}_{I} X = A^{-1} \cdot B$

ومنه $IX = A^{-1} \cdot B$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ نحل (1) لايجاد قيم $X = A^{-1} \cdot B$ — (1)

3

$$cof(A)^t = \begin{pmatrix} -4 & 16 & 6 \\ 8 & -27 & 5 \\ 20 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\to A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot cof(A)^t = \frac{1}{78} \begin{pmatrix} -4 & 30 & 6 \\ 8 & -27 & 5 \\ 20 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \quad \times \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{78} \begin{pmatrix} -4 & 30 & 6 \\ 8 & -27 & 5 \\ 20 & -9 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 116 \\ 156 \\ 234 \end{pmatrix} * \frac{1}{78} = \begin{pmatrix} 1,487 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\to X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

or 0

حل بطريقة كرامر . حل الجملة 4×4 الخطية التالية ؟

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 38 \end{cases}$$

2

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot cof(A)^t$$

$det(A) = ?$ نفشر وفق العمود الأول

$$det(A) = +3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-6) - 2(-8) + 4(20) = -18 + 16 + 80$$

$\to det(A) = 78 \neq 0 \leftarrow$ إذن يوجد حل وحيد !

$$cof(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\to cof(A) = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 20 \\ 30 & -27 & -9 \\ 6 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

$AX = B$ نكتب النظام بالشكل التالي

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 12 \\ 38 \end{pmatrix}$$

$$\to det(A) = \sum_{i,j}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot D_{ij}$$

إذن نفشر وفق السطر الأول نجد

$$det(A) = +1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ -3 & +4 & 9 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$-(1) \left[1 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right] +$$

$$+1 \left[1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \right]$$

$$-1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = 1 \left[\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ +4 & 9 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & +4 \end{vmatrix} \right]$$

5

$$-1\left[1\begin{vmatrix}4 & -3\\ -3 & 4\end{vmatrix} -1\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 4\end{vmatrix} + \cancel{1}(-1)\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -3\end{vmatrix}\right]$$

(4)

$$\Rightarrow \det(A) = [\underbrace{-31 + 33 - 7}_{1}] - [\underbrace{-31 + 15 - 17}_{2}] +$$

$$[\underbrace{39 - 15 + 18}_{3}] - 1[\underbrace{7 - 17 + 18}_{4}]$$

$$\det(A) = 3 + 33 + 42 - 8 = 68 \neq 0$$

إذن يوجد حل وحيد

$$X_i = \frac{\Delta i}{\det(A)} = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} = ?$$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix}10 & 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -1 & -1\\ 12 & 4 & -3 & 1\\ 38 & -3 & 4 & 9\end{vmatrix}}{68} = \frac{68}{68} = 1$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix}1 & 10 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & -1\\ 2 & 12 & -3 & 1\\ 3 & 38 & 4 & 9\end{vmatrix}}{68} = \frac{204}{68} = 3$$

6

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 10 & 1\\ 1 & 1 & -2 & -1\\ 2 & 4 & 12 & 1\\ 3 & -3 & 38 & 9\end{vmatrix}}{68} = \frac{136}{68} = 2$$

$$X_4 = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & 4 & -3 & 1\\ 3 & -3 & 4 & 9\end{vmatrix}}{68} = \frac{272}{68} = 4$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\\ X_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$$

3) استخدم طريقة غاوس لحل جملة المعادلات الخطية التالية؟

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 = 0\\ 2X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 3\\ -X_1 - 3X_2 = 2\end{cases}$$

إذاً تكتب النظام بالشكل $AX = B$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$$

نلاحظ أنّ العناصر القطرية غير معدومة ماعدا العنصر الأخير

7

فهو لا يؤثر لنداء اختيار عامل الإرتكاز

إذاً لا داعي لتبديل السطور (لأن تبديلها لا يؤثر على الحل)

طريقة غاوس: مرحلتين

① تحويل $AX = B \leftarrow UX = B'$ ، U: مصفوفة مثلثية عليا

② حل النظام $UX = B'$ بطريقة الصعود $X_i = \frac{1}{u_{ii}}(b_i - \sum \dots)$ ← طريقة القفز

الحل المصفوفة الموسعة $(A|B)$

* خلق أصفار أسفل العمود الأول

$$\begin{array}{c} l_1\\ l_2\\ l_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 3\\ -1 & -3 & 0 & 2\end{array}\right) \Leftarrow (A|B)$$

$a_{11} = 1 \neq 0 = pivot$ نختار عامل الارتكاز

$$l_2^{(1)} \leftarrow l_2 - \frac{2}{1}l_1 \rightarrow l_2^{(1)} = l_2 - 2l_1$$

$$l_3^{(1)} \leftarrow l_3 - \frac{-1}{1}l_1 \rightarrow l_3^{(1)} = l_3 + l_1$$

$$\begin{array}{c} l_1\\ l_2^{(1)}\\ l_3^{(1)}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{array}\right) \Leftarrow (A|B)^{(1)}$$

* خلق أصفار أسفل القطر للعمود الثاني

نختار عامل الارتكاز $a_{22} = -2 \neq 0$

8

$$l_3^{(2)} = l_3^{(1)} - \frac{-1}{-2}l_2^{(1)} = l_3^{(1)} - \frac{1}{2}l_2^{(1)}$$

$$\begin{array}{c} l_1\\ l_2^{(1)}\\ l_3^{(2)}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

U ، B'

نحل بطريقة الصعود

$$UX = B'$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & +\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 3\\ +\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 = 0 & (1)\\ -2X_2 + X_3 = 3 & (2)\\ \frac{1}{2}X_3 = +\frac{1}{2} & (3)\end{cases}$$

$X_1 = 1$

$X_2 = -1$

$\Rightarrow X_3 = +1$

ملاحظة

$$\det(A) = \det(U) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & +\frac{1}{2}\end{vmatrix} = 1(-2)(\tfrac{1}{2}) = -1 \neq 0$$

يوجد حل وحيد

(9)

4) باستخدام طريقة غاوس أحسب قيمة المحدد التالي

- عندما يكون عدد معادلات النظام كبير فإن عملية نشر المحددات تكون عملية ليست سهلة لذلك لا يمكن بالاعتماد على طريقة غاوس أن نحول المصفوفة المربعة إلى مصفوفة مثلثية عليا أو مصفوفة مثلثية سفلى عندئذ فإن قيمة المحدد تساوي جداء عناصر القطر الرئيسي ويجب الإنتباه إلى أنه عندما نستبدل صفا بصف آخر أو عمودا بعمود آخر نضرب المحدد بـ (-1) وعندما نضرب عناصر صف لعدد ثابت يجب ضرب المحدد بالعدد نفسه.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

الحل: بالاعتماد على طريقة غاوس نحذف عناصر العمود الأول ما عدا العنصر الأول منه فنحصل على المحدد المكافئ التالي

(10)

المرحلة (1) $\text{Pivot}: a_{11} = 1 \neq 0$

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & -12 & +5 & -7 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} l_1 \\ l_2^{(1)} = l_2 - \frac{2}{1} l_1 = l_2 - 2l_1 \\ l_3^{(1)} = l_3 - \frac{3}{1} l_1 = l_3 - 3l_1 \\ l_4^{(1)} = l_4 - \frac{1}{1} l_1 = l_4 - l_1 \end{matrix}$$

المرحلة (2) نحذف العمود الثاني من المحدد $\Delta^{(1)}$ ما عدا العنصر الأول من الصف الثاني نحصل على $\Delta^{(2)}$

$\text{pivot} = a_{22} = -6 \neq 0$

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{16}{3} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} l_1 \\ l_2^{(1)} \\ l_3^{(2)} = l_3^{(1)} - \frac{-12}{-6} l_2^{(1)} = l_3^{(1)} - 2 l_2^{(1)} \\ l_4^{(2)} = l_4^{(1)} - \frac{-2}{-6} l_2^{(1)} = l_4^{(1)} - \frac{1}{3} l_2^{(1)} \end{matrix}$$

المرحلة (3) وأخيراً نحذف العنصر الأخير من العمود الثالث فنحصل على محدد مثلثي الشكل كما يلي

$\text{pivot} = a_{33} = -3 \neq 0$

$$\Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{24}{3} \end{vmatrix} \quad l_4^{(3)} = l_4^{(2)} - \frac{8/3}{-3} l_3^{(2)} = l_4^{(2)} + \frac{8}{9} l_3^{(2)}$$

لأن المحدد يساوي جداء عناصر القطر الرئيسي

$$\det = \Delta = 1 \times (-6) \times (-3) \times \left(-\frac{24}{3}\right) = -144$$

(13)

6) أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة جاكوبي، حيث $\varepsilon = 0{,}09$

$$\begin{cases} X_1 + 10X_2 + X_3 = 12 \\ 10X_1 + X_2 + X_3 = 12 \\ X_1 + X_2 + 10X_3 = 12 \end{cases}$$

الحل:

التقارب يعتمد على ترتيب المعادلات داخل النظام (نحاول دائماً تحقيق مصفوفة ذات قطر سائد) أي أن العنصر القطري في كل سطر يزيد عن حاصل جمع القيم المطلقة لجميع العناصر الأخرى بذلك السطر

ومنه يصبح النظام:

$$\begin{cases} 10X_1 + X_2 + X_3 = 12 \\ X_1 + 10X_2 + X_3 = 12 \\ X_1 + X_2 + 10X_3 = 12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

أي أنه

بالنسبة للعناصر القطرية $\begin{cases} 10 > 1+1 \\ 10 > 1+1 \\ 10 > 1+1 \end{cases}$

وهي عوامل الارتكاز $\neq 0$

نختار شعاع تقريبي ابتدائي $X^{(0)}$ ← $X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

14

إذن يصبح النظام كما يلي

$$\begin{cases} X_1^{(k)} = \frac{1}{10}\left[12 - X_2^{(k-1)} - X_3^{(k-1)}\right] \\ X_2^{(k)} = \frac{1}{10}\left[12 - X_1^{(k)} - X_3^{(k-1)}\right] \\ X_3^{(k)} = \frac{1}{10}\left(12 - X_1^{(k)} - X_2^{(k-1)}\right) \end{cases}$$

	$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{*}_{(k\to\infty)}$	
X_1	0	1,200	0,960	1,0080	1	
X_2	0	1,200	0,9600	1,0080	1	
X_3	0	1,200	0,9600	1,0080		

التكرار الأول $k=1$

$$\begin{cases} X_1^{(1)} = \frac{1}{10}\left(12 - X_2^{(0)} - X_3^{(0)}\right) = \frac{1}{10}(12-0-0) = 1,200 \\ X_2^{(1)} = \frac{1}{10}\left(12 - X_1^{(0)} - X_3^{(0)}\right) = \frac{1}{10}(12-0-0) = 1,200 \\ X_3^{(1)} = \frac{1}{10}\left(12 - X_2^{(0)} - X_3^{(0)}\right) = \frac{1}{10}(12-0-0) = 1,200 \end{cases}$$

15

التكرار الثاني $k=2$

$$\begin{cases} X_1^{(2)} = \frac{1}{10}\left(12 - X_2^{(1)} - X_3^{(1)}\right) = \frac{1}{10}(12-1,2-1,2) = 0,9600 \\ X_2^{(2)} = \frac{1}{10}\left(12 - X_1^{(1)} - X_3^{(1)}\right) = \frac{1}{10}(12-1,2-1,2) = 0,9600 \\ X_3^{(2)} = \frac{1}{10}\left(12 - X_1^{(1)} - X_2^{(1)}\right) = \frac{1}{10}(12-1,2-1,2) = 0,9600 \end{cases}$$

التكرار الثالث $k=3$

$$\begin{cases} X_1^{(3)} = \frac{1}{10}\left(12 - X_2^{(2)} - X_3^{(2)}\right) = \frac{1}{10}(12-0,96-0,96) = 1,0080 \\ X_2^{(3)} = \frac{1}{10}\left(12 - X_1^{(2)} - X_3^{(2)}\right) = \frac{1}{10}(12-0,96-0,96) = 1,0080 \\ X_3^{(3)} = \frac{1}{10}\left(12 - X_1^{(2)} - X_2^{(2)}\right) = \frac{1}{10}(12-0,96-0,96) = 1,0080 \end{cases}$$

إذن من الملاحظ أنها تتقارب نحو الحل المضبوط X^* حيث

$$X^* = \begin{pmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ X_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E = \left|X^* - X^{(3)}\right| = \begin{pmatrix} 1-1,008 \\ 1-1,008 \\ 1-1,008 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E = \left|\begin{pmatrix} -0,0080 \\ -0,0080 \\ -0,0080 \end{pmatrix}\right| = \begin{pmatrix} 0,0080 \\ 0,0080 \\ 0,0080 \end{pmatrix} < 0,09$$

16

7) أوجد حل جملة المعادلات الخطية بطريقة جاكوبي ثم بطريقة غاوس سايدل، حيث $\varepsilon = 0,09$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

الحل: نلاحظ أن المصفوفة ← ذات قطر سائد

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$5 > 2+0$
$4 > 1+1$
$2 > 0+1$

إذن طريقة جاكوبي متقاربة

$$\begin{cases} X_1^{(k)} = \frac{1}{5}\left(-2x_2^{(k-1)} + 7\right) \\ X_2^{(k)} = \frac{1}{-4}\left(-2 - X_1^{(k-1)} - X_3^{(k-1)}\right) \\ X_3^{(k)} = \frac{1}{2}\left(3 - x_2^{(k-1)}\right) \end{cases}$$

نفرض أن

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$k=1$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{5}\left(7 - 2x_2^{(0)}\right) = \frac{1}{5}(7-2(0)) = 1,400 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{4}\left(2 + x_1^{(k-1)} + x_3^{(k-1)}\right) = \frac{1}{4}(2+0+0) = 0,500 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}\left(3 - x_2^{(0)}\right) = \frac{1}{2}(3-0) = 1,500 \end{cases}$$

17

$k=1$

$x_1^{(1)} = 1,400$

$x_2^{(1)} = 0,500$

$x_3^{(1)} = 1,500$

$k=2$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{5}\left(7 - 2x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{5}(7-2(1,4)) = 1,200 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{4}\left(2 + x_1^{(1)} + x_3^{(1)}\right) = 1,2250 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{2}\left(3 - x_2^{(1)}\right) = 1,250 \end{cases}$$

$k=3$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{5}\left(7 - 2x_2^{(2)}\right) = \frac{1}{5}(7-2(1,2250)) = 0,910 \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{4}\left(2 + x_1^{(2)} + x_3^{(2)}\right) = \frac{1}{4}(2+1,2+1,250) = 1,1125 \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{2}\left(3 - x_2^{(2)}\right) = \frac{1}{2}(3-1,2250) = 0,8875 \end{cases}$$

$k=4$

(19)

$$\max_{1\le i\le 3} \sum_{j=1}^{3} |\alpha_{ij}| = \max\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{4}, \frac{1}{2}\right) = 0{,}5 < 1$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix}$$

$k=1$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} x_2^{(0)} = 1{,}400 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} x_1^{(1)} + \frac{1}{4} x_3^{(0)} = 0{,}85 \\ x_3^{(1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} x_2^{(1)} = 1{,}0750 \end{cases}$$

$k=2$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} x_2^{(1)} = \frac{7}{5} - \frac{2}{5}(0{,}85) = 1{,}0600 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} x_1^{(2)} + \frac{1}{4} x_3^{(1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(1{,}0600) + \frac{1}{4}(1{,}0750) = 1{,}0337 \\ x_3^{(2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} x_2^{(2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1{,}0337) = 0{,}9831 \end{cases}$$

$k=3$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} x_2^{(2)} = \frac{7}{5} - \frac{2}{5}(1{,}0337) = 0{,}9865 \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(x_1^{(3)} + x_3^{(2)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(0{,}9865 + 0{,}9831) = 0{,}9924 \\ x_3^{(3)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} x_2^{(3)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(0{,}9924) = 1{,}0038 \end{cases}$$

(18)

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \frac{1}{5}\left(7 - 2x_2^{(3)}\right) = \frac{1}{5}\left(7 - 2(1{,}1125)\right) = 0{,}9550 \\ x_2^{(4)} = \frac{1}{4}\left(2 + x_1^{(3)} + x_3^{(3)}\right) = \frac{1}{4}\left(2 + 0{,}910 + 0{,}8875\right) = 0{,}9494 \\ x_3^{(4)} = \frac{1}{2}\left(3 - x_2^{(3)}\right) = \frac{1}{2}\left(3 - 1{,}1125\right) = 0{,}9437 \end{cases}$$

شرط التوقف

الحل: بطريقة غاوس - سايدل

$$x_n^{k+1} = \sum_{j=1}^{n-i} \alpha_{nj} x_j^{k+1} + B_n$$

$$X^{n+1} = \alpha X^n + B$$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} x_2^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = \frac{-2}{-4} - \frac{1}{-4} x_1^{(k-1)} - \frac{1}{-4} x_3^{(k-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} x_1^{(k-1)} + \frac{1}{4} x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} x_2^{(k-1)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

إذن نتوقف عند $k=3$ لأن

$$E = \max \left| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right| < \varepsilon = 0{,}09$$

$$E = \left| \begin{pmatrix} x_1^{(3)} - x_1^{(2)} \\ x_2^{(3)} - x_2^{(2)} \\ x_3^{(3)} - x_3^{(2)} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{matrix} 0{,}9865 - 1{,}0600 \\ 0{,}9924 - 1{,}0337 \\ 1{,}0024 - 0{,}9831 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} -0{,}0735 \\ -0{,}0413 \\ 0{,}0207 \end{matrix} \right|$$

$$\to E = \begin{pmatrix} 0{,}0735 \\ 0{,}0413 \\ 0{,}0207 \end{pmatrix} < 0{,}09 \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9865 \\ 0{,}9924 \\ 1{,}0024 \end{pmatrix}$$

إذن نأخذ الحل التقريبي بخطأ لا يتجاوز $\varepsilon = 0{,}09$