FACTS IN COMPLEX ANALYSIS AND COMPEXITY

Dr. Rehouma Abdelhamid

Mathematics Faculty of exact sciences
University of Hama Lakhdar of Eloued
Algeria
e-mail : rehoumaths@gmail.com

جامعة الشهيــد حمــة لخضر الوادي

كليـــة العلـــــوم الدقيقـــة

السنة الثانية ماستر رياضيات

الامتحـان السداســـــــي في مـــــــــادة التحليــل المركب

17 جــانفي 2018

بقلم د.عبد الحميد رحومه

التمريـن الأول (7 نقط)

1 . نعتبر الدالة المركبـــــة : $f(z)=(1-z^3)\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ باستخدام نشــــور لـوران كيف تحسب λ :

$$\lambda=\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$$

2. نعتبــــــــــر Ω الدائرة التي مركزها المبدأ 0 و نصف قطرها 4 أحسب التكـــــــامل المركب :

$$\int_{\Omega}\frac{z+1}{(z^2+4z+3)^2}\exp(iz^2)dz .$$

التمريـن الثاني (07 نقط)

1. أثبت أن : $\left|\exp(z^3+i)+\exp(-iz^2)\right|\le\exp(x^3-3xy^2)+\exp(2xy)$ مـــــــن أجـل كل $z=x+iy$.

2. لتكن $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ هولومورفية من أجـل $z=x+iy$ عدد مركب تحقق : $v(x,y)\ge x$ لكل (x,y)
أثبت أن الدالــــــة $g(z)=\exp(z+if(z))$ هولومورفية وتحقق $|g(z)|\le 1$ مـــــــن أجـل كل z عدد مركب.

3. نفرض أن $f(0)=1$ استنتـــــج من السؤالين السابقيـن أن $f(z)=iz+1$ مـــــــن أجـل كل z عدد مركب.

التمريـن الثالث (06 نقط)

1. طبق نظرية **ميتـــــــاق لوفـلر** لا ثبات أن:

$$\frac{\pi}{\tan(\pi z)}=\frac{1}{z}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

2. أثبت أن :

$$-\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2=-\frac{1}{z^2}-\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$$

3. باستخدام السؤال الثــــــاني أستنتـــج من جديد الدستـور :الســــــابق (الأول)
أي أن.

$$\frac{\pi}{\tan(\pi z)}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

4. أثبت التقارب المطلق للجداء اللامنته :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

ثم تأكد انه يساوي : $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$

استنتج حسابا للجداء اللامنتــــــــه :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$$

بالتوفيق و السداد أستــــــــاذ المسؤول للمقياس

جامعة الشهيـد حمـة لخضر الوادي

كـليــة العلـــــوم الدقيقـــة

السنة الثانية ماستر رياضيات

الامتحـان الاستدراكـــي في مـــادة التحليـل المركب

بقلم د.عبد الحميد رحومه

19 مـارس 2018

التمريـن الأول (08 نقط).

1. نعتبــــــــر Ω الدائرة التي مركزها المبدأ 0 و نصف قطرها 4 . أحسب التكـــــــامل المركب ، w عدد مركب:

$$H(w)=\int_{\Omega}\frac{z\exp(zw)}{\left(z^{2}+\pi^{2}\right)^{2}}dz$$

2. هل أن H هولومورفيـــة , لمـــاذا ؟ أحسب $H'(w)$ ؟ استنتـــج حسابـــا لـ : $\int_{\Omega}\frac{z^{2}\exp(zw)}{\left(z^{2}+\pi^{2}\right)^{2}}dz$ ؟

3. كيف تحسب $\Gamma(f,\Omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$, و هذا لمـا Ω هي نفس الدائرة التي مركزها المبدأ 0 و نصف قطرها 4 .

بمــــاذا يسمى هذا القانــون. أحسب بالتالي $\Gamma(f,\Omega)$, في حالة :

$$f(z)=\frac{\left(z^{2}+1\right)^{2}}{\left(z^{2}+2z+2\right)^{3}}$$

التمريـن الثاني (6 نقط)

1 . نعتبر الدالة المركبـــــة الهولومورفية f على المفتوح U من مجموعة الأعداد المركبة C ليكن $z_0\in U$ و $r>0$ باستخدام دستـور كـوشي بين ما يلي :

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{f\left(z_0+re^{it}\right)}{r^{n}e^{int}}dt$$

2. استنتـج المتباينـــة $\forall n\in N$:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|=\frac{n!}{r^{n}}\sup_{0\le t\le 2\pi}\left|f\left(z_0+re^{it}\right)\right|$$

3. طبق ما سبق للبرهان أن كل دالة f هولومورفيــة (entière) محدودة بـ $M>0$ فهي ثـــــابته.(نظرية **ليـوفيل**).

التمريـن الثالث (06 نقط)

1. طبق نظرية **ميتــــاق لوفـلر** لا ثبات الدستــــــــــورالنشـــوري الآتـي:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^{2}+4n^{2}\pi^{2}}=\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{z}+\frac{1}{e^{z}-1}\right)$$

2. أوجـد $\rho>0$ بحيث الجداء اللامنتـه $P(z)=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+z^{2^{n}}\right)$ متقارب مطلقا على القرص المفتوح $\{z,|z|<\rho\}$.

كيف تحسب $P(z)$ بدلالة z .(استخدم احدى خواص متتالية الجداءات النونيـة $P_n(z)=\prod_{n=0}^{n}\left(1+z^{2^{k}}\right)$).

أحسب قيمة الجداء اللامنتـه : $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+3^{\left(-2^{n}\right)}\right)$.

3. أثبت التقارب للجداء اللامنتـــه : $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$ ثم أحسب قيـمته.

بالتوفيق و السداد   أستـــــــاذ المسؤول للمقياس

جامعة الوادي

كليـــة العلـــــــوم الدقيقـــة

الامتحان السداسي في مــادة التحليــل المركب.

السنة الثانية ماستر رياضيات

16 فيفري 2019

بقلم د.عبد الحميد رحومه

1. (4 نقاط) **.** كيف تحسب ζ

- $$\zeta = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z^4(\pi - z)^3}$$

- أثبت أن الراسب عند الصفر هو مجـــمـوع سلسلة متقاربة .
- أثبت أن كل جذور كثير الحدود $f(z)$ ذو المتغير المركب

$$f(z) = z^5 - 2z^3 + z^2 - 12z + 20$$

تقع داخل القرص الوحدة أي $D(0,1) = \{z, |z| \leq 1\}$ ثم احسب $\frac{1}{2i\pi}\int_D z^2 \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ دون استخدام طريقة حساب الاقطاب ..

3.. (6 نقاط).نعتبـــــــــــر Ω الدائرة التي مركزها المبدأ 0 و نصف قطرها r بحيث $r > 1$.

- طبق نظرية الرواسب لحساب $F(z)$ بدلالة z بحيث z يحقق $|z| < 1$:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Omega \frac{1}{(w-z)(w^3 - 27)}\exp(zw^2 + w + 1)dw$$

- هل أن الدالة $F(z)$ هولومورفية على Ω؟ برر الاجابة ثم أحسب $F'(z)$ ؟
- برهن صحة دستور فيرشتراس

- $$\cos \pi z = \prod_{n=-\infty}^{+\infty}\left(1 - \frac{2z}{2n-1}\right)\exp\left(\frac{2z}{2n-1}\right)$$

- $$\frac{1}{\tan(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

أوجـد $\rho > 0$ بحيث الجداء اللامنتـــه $P(z) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + z^{2^n}\right)$ متقارب مطلقا على القرص المفتوح $\{z, |z| < \rho\}$.

كيف تحسب $P(z)$ بدلالة z.

استخدم احدى خواص متتالية الجداءات النونيـــة :

$$P_n(z) = \prod_{n=0}^{n}\left(1 + z^{2^k}\right)$$

أحسب قيمة الجداء اللامنتـــه $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + 3^{(-2^n)}\right)$.

- 3. أثبت التقارب للجداء اللامنتــــه :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$$

- ثم أحسب قيـــمته

-

بالتوفيق و السداد

أستـــــــــاذ المسؤول للمقياس

جـــــــــامعة الشهيد حمة لخضر بالوادي

كليـــة العلوم الدقيقة　　قسم الرياضيـات　　السنة الثانية ماستر

بقلم د.عبد الحميد رحومه

الامتحان الاستدراكـــــي في التحليل المركب　　29 ماي 2019

تمرين 1 (4 نقطة).

1.أثبت بصراحـــــة أن $\left|\int_C \frac{\exp(2z)}{(1+z)^4}dz\right| \leq \frac{3\pi}{8}e^6$ بحيث C هـي كانتور الدائرة $|z|=3$ في الاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة).

2.كيف تحسب الراسب الآتـــــــي :

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)}{7z+i}\right)$$

تمرين 2 (4 نقطة).

نعتبـر التكامل العددي الحقيقي $\mathrm{I}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$.وضح أولا كيف تحسب هذا التكامل بتحويله الى تكامل مركب على دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرهـا ثم بين طبيعة كل قطب للدالة المركبة تحت التكامل و انتمائه للـــدائرة السابقة المتحصل عليها ثم استنتج بشكـــــل مفصــل قيمـــــة التكـــامل I.

تمرين 3 (5 نقطة).

1.بين باستخدام احدى النظريات المعروفة أن جميع جذور المعادلة: $z^9-5z^3+12=0$ تقع بين الدائرتين: $|z|=1$ و $|z|=3$. (الجذور تقع خارج الدائرة $|z|=1$ وداخل الدائرة $|z|=3$). يطلب التأكـــد بشكل واضح و منهجـي من انتماء وعدد جذور المعادلة $z^9-5z^3+12=0$ على نفس الدائرتين.

2.أحسب التكاملين : $\frac{1}{2i\pi}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ و $\frac{1}{2i\pi}\int_C(z^2+3z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ بحيث : $f(z)=\frac{(z^2+4)^3}{(z^2+iz+2)^7}$.نعتبر C الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها 3 .). يطلب التأكـــد بشكل واضح و منهجـي من انتماء وعدد الجذور على نفس الدائرة.

تمرين 4 (5 نقطة).

1.طبق نظرية **ميتـــــــاق لوفـــلر** لا ثبات أن:

$$\frac{\pi}{\tan(\pi z)}=\frac{1}{z}+2z\left(\frac{1}{z^2-1}+\frac{1}{z^2-4}+\frac{1}{z^2-9}+\frac{1}{z^2-16}+.........\right)$$

2. باشتقـــــاق الطرفين للدستور أعلاه ماهو الدستور الناتج من ذلك

3. أثبت التقارب للجداء اللامنتـــه : $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$. ثم أحسب قيـمته.

4. استنتـــــج قيمة الجداء اللامنته الكسري الجـــذري :

$$\sqrt{\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4}{n^2\pi^2}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{9}{n^2\pi^2}\right)}}$$

تقبل اللـــه صيامكم وصبركم موفقين

جـــــــــامعة الشهيد حمة لخضر بالوادي

كليـــة العلوم الدقيقة **قسم الرياضيـــات** **السنة الثانية ماستر**

الامتحـان الاستدراكي في مـــادة التحليـل المركب 2017 / 02 / 01

بقلم د.عبد الحميد رحومه

التمريـن الأول (5 نقط)

التحويـل المركب $f(z)=2z+\frac{1}{2z}+1+i$ أوجد نطاق الهولومورفية ثم أثبت هولومورفية $f(z)$ أحسب المشتقة الأولى لها .

ليكن المستطيل المملوء : $D=\{z/1\leq \operatorname{Re} z\leq 2, 2\leq \operatorname{Im} z\leq 3\}$.أثبت أن $f(z)$ محدودة على D أي :

$$\forall z\in D:\exists M>0,|f(z)|\leq M$$

تأكد أن القيمة العظمى تنتمي فعلا الى الحافة (المستطيل D).

أثبت أن :

$$\iint_{|z|<1}\left|\frac{z}{1-z^2}\right|dxdy<4.$$

التمريـن الثاني (06 نقط)

أثبت أن معادلة الدوائر : $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ تكتب على شكلها القطبي لما $z=x+iy$ التالي : $z\bar{z}+az+\bar{a}\bar{z}+b=0$

يطلب التعبير عن a و b بدلالة A و B و C .استنتج من ذلك أن صور الدوائر السابقة بواسطة التحويل $w=f(z)=\frac{\lambda}{z}$ هي دوائر أيضا حدد العناصر المميزة لها.

بين أن صور الدوائر المارة بالصفر : $x^2+y^2+Ax+By=0$ بواسطة التحويل $w=f(z)=\frac{1}{z}$ هي مستقيمات حددها.

التمريـن الثالث (05 نقط)

نعتبر القطع الناقص Ω الذي معادلته في المستوي المركب (أي المعادلة القطبية) $|z-1|+|z+1|=6$ أثبت أن المعادلة التحليلية لـ Ω من الشكل لما $z=x+iy$ فان $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1.$ أرســـــــم Ω بعناية واهتمام مع تحديد العناصر المميزة . طبق دستور **Green** لحساب التكامل المساحي : $\iint_{\Omega}(3x^2-2y)dxdy$.

D المترابط ببساطة الذي حافته C كانتور مغلق نفرض أن $f(z)$ هولومورفية على D كيف تثبت أن

$$\oint_C f(z)dz=0$$

التمريـن الرابع (04 نقط)

صور المستقيمات الشاقولية

$$C=\{z,\operatorname{Re} z=c\}$$

بواسطة التحويل

$$w=f(z)=z^2$$

هي قطوع مكافئة يطلب تحديد معادلتها ورسمها.

صور المستقيمات الافقية

$$C=\{z,\operatorname{Im} z=d\}$$

بواسطة التحويل

$$w=g(z)=2z^2+4$$

هي قطوع مكافئة يطلب تحديد معادلتها ورسمها

بالتوفيق و السداد أستـــــــــاذ المسؤول للمقياس

جـــــــامعة الشهيد حمة لخضر بالوادي

كليـــة العلوم الدقيقة **قسم الرياضيـات** **السنة الثانية ماستر**

الامتحـان الاستدراكي في مـــادة التحليـل المركب 2020 / 02 / 01

بقلم د.عبد الحميد رحومه

التمريـن الأول (07 نقط).

1.أوجد نشر تايلر للدالة $f(z)=\log(1+z)$ على القرص المفتوح $|z|<1$: استنتج المحدودية : $\left|1-\frac{\log(1+z)}{z}\right|\leq\frac{1}{2}\frac{|z|}{1-|z|}$

أثبت أن : $|z|<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}|z|\leq|\log(1+z)|\leq\frac{3}{2}|z|$ ماذا تستنتـــــج بالنسبة للمجموعة الصورة.

2. f دالة تحليليه نشوره بصيغة تايلر $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ على القرص $|z|\leq r$ وتحقق الخاصية المحدودية :

$$\exists M>0,\exists r_0>0,r_0\leq r\ ,|z|\leq r_0\Rightarrow|f(z)|\leq M$$

كيف تحسب معاملات النشر a_n .أثبت المحدودية الآتية : $|a_n|\leq M$ لكل n عدد طبيعي .

3. λ ثابت موجب أثبت أن صور الدوائر $D(0,r)=\{z,|z|=r\}$ بواسطة التحويل $f(z)=\frac{\exp(\lambda z)}{z}\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)$ هي دوائر يطلب تحديد المركز ونصف القطر. يمكن إثبات المتراجحة المساعدة الآتية :

$$z=re^{i\theta}\Rightarrow\left|\frac{\exp(\lambda z)}{z}\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)\right|=\frac{2\exp(\lambda\operatorname{Re}(z))}{r^2}\operatorname{Re}(z)$$

التمريـن الثاني (08 نقط).

1.طبق نظرية **ميثاق لوفـــلر** لا ثبات أن:

$$\frac{\pi}{\cos(\pi z)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-z^2}$$ مستنتجـــــا المجموع : $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=??$$

نفس السؤال :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)}=\frac{1}{z}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n2z}{z^2-n^2}$$ مستنتجـــــا المجموع : $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\frac{1}{4}-n^2}=??$$

2.كيف تحسب التكامل المركب : $\Gamma(f,\Omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega}z^3\frac{f'(z)}{f(z)}dz$. في حالة : $f(z)=z^5-2z^4+z^3-3z^2+2$

أحسب $\Gamma(f,\Omega)$.ماهي الدائرة Ω المناسبة للحل كيف تم تحديدها. أعـــد حساب $\Gamma(f,\Omega)$ في الحالة الآتيـــة : $f(z)=z(z^4-1)$.

التمريـن الثالث (05 نقط).

ليكن التابع $f_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega}\frac{\exp\left(\frac{1}{2}\lambda\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}{z^{n+1}}dz$ بحيث الدائرة Ω مركزها 0 ونصف قطرها 1.أثبت أن :

$$f_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta-\lambda\sin\theta)d\theta$$

*يمكن استخدام المتطابقة : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(n\theta-\lambda\sin\theta)d\theta=0$ وهي سهلة الأثبات بتعويض θ ب $2\pi-\theta$ نتحصل على – التكامل.

ماذا تمثل الكمية : $f_n(\lambda)$ بالنسبة للدالة الهولومورفية : $g(z)=\exp\left(\frac{1}{2}\lambda\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$.علل أكثر فأكثر.

بالتوفيق و السداد **أستــــــــاذ المسؤول للمقياس**

جـــــــــامعة الشهيد حمة لخضر بالوادي

كليـــة العلوم الدقيقة قسم الرياضيــات السنة الثانية ماستر

الامتحـان السداسي في مـــادة التحليـل المركب 2020/01/13

بقلم د.عبد الحميد رحومه

التمريـن الأول (06 نقط).

1. نعتبــــــــر Ω الدائرة التي مركزها المبدأ 0 و نصف قطرها 4 . أحسب التكـــــامل المركب $H(t)$ ، t عدد مركب:

$$H(t)=\int_{\Omega}\frac{z\exp(zt)}{\left(z^2-3z+2\right)^2}dz$$

2.هل أن H هولومورفيـــة , لمـــاذا ؟ أحسب $H^{(m)}(t)$ ؟ استنتـــج حسابـا لـ : $H^{(m)}(1)$ ؟

3. أثبت أن جميع جذور المعادلة $z^5-2z^3+z^2-3z+2=0$ تقع داخل دائرة أو قرص Ω يطلب تحديد مركزه ونصف قطره.

4.كيف تحسب التكامل المركب :

$$\Gamma(f,\Omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega}\left(z^2-z+1\right)\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

وهذا لمـا Ω هي نفس الدائرة المذكورة سابقا. بماذا يسمى هذا القانـــون. أحسب بالتالي $\Gamma(f,\Omega)$,في حالة :

$$f(z)=z^5-2z^3+z^2-3z+2$$

التمريـن الثاني (4 نقط)

1 . نعتبر الدالة المركبـــــة الهولومورفية f على المفتوح Uمن مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ليكن $z_0\in U$ و $r>0$ باستخدام دستـور كـــوشي بين ما يلي : $f^{(3)}(z_0)=m(r)\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+re^{it}\right)}{e^{3it}}dt$. بحيث $m(r)$ ثابت موجب يطلب تحديده.

2. استنتـج المتباينـــة: $\left|f^{(3)}(z_0)\right|\le k(r)\underset{0\le t\le 2\pi}{Sup}\left|f\left(z_0+re^{it}\right)\right|$. بحيث $k(r)$ ثابت موجب يطلب تحديده.

التمريـن الثالث (10 نقط)

1.أوجد نشرا لورانيا للدالة : $f(z)=\cos\left(\frac{z}{z+1}\right)$ كسلسلة قوى سالبة لـ $z+1$ أي في جوار $z=-1$ بدلالة $\cos(1)$ و $\sin(1)$.ثم أحسب الراسب كمساعدة $\cos\left(\frac{z}{z+1}\right)=\cos\left(1-\frac{1}{z+1}\right)$ وأيضا : $\cos(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}u^{2n}$ و $\sin(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}u^{2n+1}$ طالما $u\to 0$.

2. بغض النظر عن التابع $f(z)=\frac{\exp(-mz)}{\left(z^2-3z+2\right)^2}$ احسب الرواسب عند الأقطاب لـلعبارة : $f(z)\frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ ثم استنتج بكيفية مفصله ومبرهنه الحصول على المجمـوع : $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{\exp(-mn)}{\left(n^2-3n+2\right)^2}$. بحيث m عدد صحيح موجب تماما.

3.طبق نظرية ميتــــاق لوفـلر بطريقة مفصله لا ثبات الدستور النشوري الآتـي:

$$\frac{\pi\tan(\pi z)}{\exp(\pi z)}=4z\sum_n\frac{\exp\left(-\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+1)(2(n-z)+1)}$$

3. أثبت التقارب المطلـق للجداء اللامنته : $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ ثم تأكد بأي طريقة ان : $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)=\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$.

استنتج قيمة المجموع : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)(z+n)}$ بدلالة z .

بالتوفيق و السداد أستـــــــاذ المسؤول للمقياس

جـــــــــامعة الشهيد حمة لخضر بالوادي

كليـــة العلوم الدقيقة **قسم الرياضيــات** **السنة الثانية ماستر**

الامتحـان السداســـــي في مـــــــادة التحليــل المركب

01 مارس 2021

بقلم د.عبد الحميد رحومه

التمرين الأول (06 نقط). نعتبر التكامل الجيب تمامي :

$$f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1-2x\cos\theta+x^2}d\theta$$

بحيث x عدد حقيقي ويحقق : $-1<x<1$.

بتحويل التكامل السابق الى تكامل لكوشي على الدائرة الوحدة أحسب $f(x)$ بدلالة x .

استنتج مباشرة ودون حساب من جديد عبارة $g(x)$ بدلالة x . بحيث :

$$g(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x-\cos\theta}{\left(1-2x\cos\theta+x^2\right)^2}d\theta$$

بحيث x عدد حقيقي ويحقق : $-1<x<1$.

التمريـن الثاني (8 نقط) (يطلب توضيح اسم النظرية في كل سؤال كمرجع لابد منه).

أثبت المحدودية على القرص $D(0,r)=\{|z|\le r\}$ فان

$$\left|1-\frac{z}{1-z^2}\right|\le C$$

و هذا لكل z يحقق $|z|\le r<1$. يطلب تحديد الثابت C بدلالة r . استنتج حـــــادا من الأعـــــــــلى للكمية الآتية .

$\left|z^2\left(1-\frac{z}{1-z^2}\right)\right|\le D$ و هذا لكل z ينتمي الى القرص $D\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ بمعنى $|z|=r\le\frac{\sqrt{2}}{2}$. يطلب تحديد الثابت D مستقل عن r .

أحسب التكامل وبما تسمى النظرية التي يحسب بها هذا التكامل :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C z^2\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

بحيث

$$f(z)=\frac{\left(z^2+1\right)^2}{\left(-z^2+3z+4\right)^3} .$$

نعتبر C الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها 5.

التمريـن الثالث (6 نقط) نريد حساب الراسب عند كل قطب للدالة :

$$f(z)=\frac{e^{z^2}}{(z+a)^2\sin(z)}$$

a عدد مركب مثبت ومعلوم .

بين أولا طبيعة وتكرارية كل قطب من الأقطاب (هناك مجموعة مرتبة وغير منتهية من الأقطاب البسيطة يطلب ترقيمها).

يطلب حساب الراسب عند كل قطب من الأقطاب للدالة نفسها .

استنتج صيغة مناسبة لمجموع كل الرواسب للدالة نفسها على شكل مجموع سلسلة مع اختبار تقارب مجموع هذه السلسلة .

بالتوفيق و السداد أستـــــــــاذ المسؤول للمقياس

جـــــــــامعة الشهيد حمة لخضر بالوادي

كليـــة العلوم الدقيقة **قسم الرياضيــات** **السنة الثانية ماستر**

الامتحان الاستدراكي في مـــــــادة التحليـــل المركب

25 أفريل 2021

بقلم د.عبد الحميد رحومه

التمرين الأول

D المترابط ببساطة الذي حافته C كانتور مغلق نفرض أن $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ هولومورفية على D كيف تثبت أن :

$$\oint_C f(z)dz=0$$

هل أن :

$$\oint_C f(z)dz=0$$

في حالة : $f(z)=z\exp(1+\bar{z})$ و. C كانتور مغلق .برر اجابتك .

التمرين الثاني

نعتبــر التكامل العددي الحقيقي :

$$\mathrm{I}(a)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\theta}{a+\cos\theta}d\theta$$

.بحيث a حقيقي يحقق $a>1$.

وضح أولا كيف تحسب هذا التكامل بتحويله الى تكامل مركب على دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

ثم أحسب قيمة التكامل $\mathrm{I}(a)$.

استنتج حسابا لقيمة التكاملين :

$$K(a)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+\cos\theta}d\theta \quad \text{و} \quad J(a)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin 2\theta}{(a+\cos\theta)^2}d\theta$$

التمرين الثالث

1.لنشر الدالة :

$$f(z)=\frac{\pi}{z^2\cos(\pi.z+1)}$$

أحسب الراسب عند الصفر لنفس الدالة f .

أحسب الرواسب لنفس الدالة f .عند بقية الأقطاب والتي هي بسيطة

كيف توفر شروط نظرية ميثاق لوفلر ثم أكتب صيغة نشر ميثاق لوفلر لنفس الدالة f ..ماذا تستنتج من هذا النشر.

2.كيف تحسب التكامل :

$$\Gamma(f,\Omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

وهذا لمــا Ω هي نفس الدائرة التي مركزها المبدأ 0 و نصف قطرها 4 .

في حالة :

$$f(z)=\frac{(z^2-4)^3}{(z^2-3z+2)^2}$$

بالتوفيق والنجاح

كليـــة العلــــــوم التكنولوجية — السنة الثانية ل.م.د رياضيات

الامتحان السداسي في مادة التحليــل العقـــدي. — 25 ماي 2014

Par : Rehouma Abdelhamid

1 .(7 نقاط) **.** كيف تحسب ζ

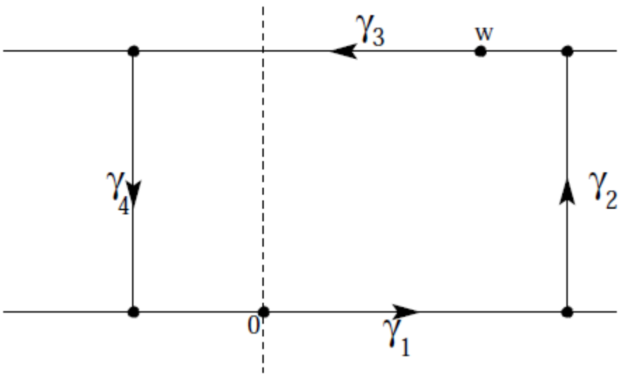
$$\zeta = \operatorname{Re}\underset{z=0}{s}\, \frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z^{3}(\pi - z)^{2}} \quad -$$

- أثبت أن الراسب عند الصفر هو مجـــموع سلسلة متقاربة .مـــــاهي .
- أثبت أن كل جذور المعادلـــــــــــة ذات المتغير المركب

$$1+z+z^{2}+...z^{n-1}-nz^{n}=0$$

تقع داخل القرص الوحدة أي $D(0,1)=\{z,|z|\le 1\}$.

2.(7 نقاط) . الكـــــــانتور Ω الذي رؤوســـــــــــه $(-a,0)$ و $(a,0)$ و (a,b) و $(-a,b)$ و مساراته الأربعة هي على الترتيب γ_1 من $(-a,0)$ نحو $(a,0)$ و γ_2 من $(a,0)$ نحو (a,b) و γ_3 من (a,b) نحو $(-a,b)$ و γ_4 من $(-a,b)$ نحو $(-a,0)$.



- أثبت أن

$$\lim_{a\to\infty}\int_{\Omega}\exp\left(-z^{2}\right)dz=0.$$

- أحسب التكاملات الأربعة

$$\int_{\gamma_1}\exp\left(-z^{2}\right)dz \text{ و } \int_{\gamma_2}\exp\left(-z^{2}\right)dz \text{ و } \int_{\gamma_3}\exp\left(-z^{2}\right)dz \text{ و } \int_{\gamma_4}\exp\left(-z^{2}\right)dz$$

- استنتج أن

$$\lim_{a\to\infty}\int_{\gamma_2}\exp\left(-z^{2}\right)dz=\lim_{a\to\infty}\int_{\gamma_4}\exp\left(-z^{2}\right)dz=0.$$

- استنتج حسابا للتكاملات من نوع **Poisson** أو **Fresnel** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^{2}\right)\cos(bx)dx \text{ و } \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^{2}\right)\sin(bx)dx$$

3.(6 نقاط).نعتبـــــــــــر Ω الدائرة التي مركزها المبدأ 0 و نصف قطرها r بحيث $r>1$.

- طبق نظرية الرواسب لحساب $\Xi(z)$ بدلالة z بحيث :

$$\Xi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega}\frac{t^{3}-z^{3}}{(t-z)(t^{3}-1)}\exp\left(-\sqrt[3]{t}\right)dt$$

- هل هـــي هولومورفية على Ω ؟ لمـــــــــاذا ؟

جامعة الوادي كليـــة العلـــــوم التكنولوجية السنة الثانية ل.م.د رياضيات

الامتحان الاستدراكي في مادة التحليــل العقــــــدي. 27 جوان 2013

Par : Rehouma.Abdelhamid

1 .نعتبــر الدالة $u(x,y)$ المعرفـــة بالعبارة الآتية

$$u(x,y)=\frac{x^2+y^2+1}{(x+1)^2+y^2}$$

- أوجد مجال تعريفها مع الرسم.
- أثبت أنها توافقية ثم أوجد المرافقة التوافقية لهــــا $v(x,y)$ بحيث $f=u+iv$ هولومورفية .بحيث $f(1)=\frac{1}{2}$.
- الدوال الهوموغرافية الهولومورفية تتمتع بميزة هامة و التي نريد اثباتها.
- لتكن $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ احدى هذه الدوال أوجد مجال هولومورفيتها.

نسمي المشتقة لـ **شوارز** derivative **Schwarzian** لـ f هي دالة لـ z التالية :

$$L_f(z)=\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

- أثبت الآن مــــا يلي: $g(z)$ دالة هولومورفية فان

$$h=f\circ g\Rightarrow L_h(z)=L_g(z)$$

- مــــــــــا تعليقك.

2 . هـام جدا الجـــزئين A وB منفصـلين..

A.نعتبــــــــــر Ω الدائرة التي مركزها المبدأ 0 و نصف قطرها r بحيث $r\succ 0$.طبق دستور كوشي لحساب $\Xi(z)$ بدلالة z بحيث

$$\Xi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega}\frac{z^n\exp(tz)}{n!t^n}\frac{dt}{t}$$

- مستنتجـــــا المتطابقـــة الهـــــــــامة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(2z\cos\theta)d\theta$$

B.طبق نظرية الرواسب لحساب التكامل المركب.في حالة $\Gamma=\{z:|z-i|=2\}$.أحسب التكامل المركب

$$\int_{\Gamma}\frac{z^2}{(z^3+i)^2(iz^3-8)^3}dz$$

بحيث الجذر التكعيبي يحسب حسب الفرع الذي من أجــــــله $\sqrt[3]{-1}=-1$. يطلب التأكد من الانتماء و التكرارية لكل قطب.

كيف تحسب الرواسب الآتـــــــية

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{\exp\left(\frac{i}{z^2}\right)}{8z+i}\right)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{\exp\left(\frac{i}{z^2}\right)}{z^2(8z+i)}\right)$$

جامعة الوادي معـــــــــــــــــــهد العلـــــوم التكنولوجية السنة الثانية ل.م.د رياضيات

امتحان في التحليـــل المركب. **3 ماي 2012**

Formules de **Cauchy**.Area et holomorphie sur le disque unité.Théorème de résidus .Formule **Green**.

Par **: Rehouma Abdelhamid**

1.أثبت الاستلزام المنطقي **من أجل كل عدد مركب** z **يحقق** $|z|<1$

$$|t|=1 \Rightarrow \left|1-\bar{z}t\right|=|z-t|$$

طبق دستور **كوشـــــي Cauchy** لإثبات المتباينة التالية

في حالة $f(.)$ دالة هولومورفية على القرص الوحدة أي $f \in H(|z|<1)$ فانه يوجد $K>0$ يتعلق بـــ $f(.)$ فقط بحيث

$$\left(1-|z|^2\right)|f(z)| \le K$$

و هذا لكل z يحقق $|z|<1$.

استنتج حــــادا من الأعــــــــلى للكمية الآتية . ما يسمى ($f(.)$ Area of).

$$\iint_{|x+iy|\prec 1} |f(x+iy)|^2 dxdy$$

كمثال تطبيفـــي نموذجي أثبت المتباينة

$$\iint_{|z|\prec 1} \left|\frac{z}{1-z^2}\right| dxdy < 4.$$

2 .. الجــزئين أ و ب منفصلين.

الجزء أ..نعتبر القطع الناقص Ω الذي معادلته في المستوي المركب (أي **المعادلة القطبية**)

$$|z-1|+|z+1|=6$$

أثبت أن المعادلة التحليلية لـ Ω من الشكل لما $z=x+iy$ فان

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}=1.$$

أرســـــــــم Ω بعناية واهتمام مع نحديد العناصر المميزة .(أرجو الاعتناء بالرسم هذه المرة وحذار من تصور Ω أنها دائرة أي قطع ناقص منساوي الساقين.هذا خطأ فادح).

طبق دستور **Green** لحساب التكامل المساحي :

$$\iint_{\Omega} \left(4x^3-3y^2\right) dxdy$$

نعتبر القطع الناقص Ω' الموسع الذي معادلته في المستوي المركب (أي **المعادلة القطبية**) $|z-1|+|z+1|=16$

طبق نظرية الرواسب لحساب التكامل المركب

$$\int_{\Omega'} \frac{z^{66}}{\exp(2iz)-3\exp(iz)+2} dz$$

الجزء ب..في حالة $\Gamma=\{z:|z-i|=2\}$.أحسب التكامل المركب :

$$\int_{\Gamma} \frac{z^{66}}{\left(z^2+i\right)^2\left(z^3-1\right)^3} dz$$

يجب ضبط الأقطاب الخمســة مع رتبها و انتمائها أولا فالحساب ثانيا.

● المركز الجامعي بالوادي معـــــــــــــــــــهد العلـــــوم التكنولوجية السنة الثانية ل.م.د رياضيات

الامتحان السداسي في التحليـــــــــل المركب أ.رحومـة عبد الحميد

15 جوان2011

I.(6 نقط).... حساب تكامل لدالة ذات متغير مركب Calculus of one Complex Integral

نعتبر الدالة المركبة : $f : D \to C \qquad f(z) = \dfrac{1}{z^4 + (1-i)z^3 - iz^2}$,

أوجد النطاق D من C والذي عليه f هولومورفية.

أحسب

$$\int_C f(z)dz$$

بحيث $C = \{z, |z| = 2\}$. أي الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها 2 .

II.(7 نقط) حساب تكامل معمم على كانتور لدالة ذات متغير مركب Improper Complex Integral on Contour

ليكن الكانتور الذي رؤوسه الأربعة –R , R , R+iM , -R+iM.والتي تؤلف الرباعي المستطيل .بحيث R و M موجبان وكبيران بكفاية.

أرسم الشكل مع تحديد الاتجاه.

أحسب التكامل الذاتي

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\lambda x)}{x^2 + \delta^2} dx$$

بحيث λ و δ هما عددان حقيقيان مثبتان.

.يطلب شرح كافي لجميع أدوات حل هذه المسألة.

III (7 نقط)...النشور اللورانية و دستور كوشي Laurent power series and Cauchy formula

نعتبر الدالة التحليلية $z \to f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ونرفق بها الدالة التحليلية:

$$z \to F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n z^n$$

بحيث $|z| < R$ و $R > 0$.

أثبت من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما ρ بحيث $0 < \rho < R$ يوجد عدد موجب $A(\rho)$ متعلق بـ ρ بحيث

$$|F(z)| \le A(\rho) \exp\left(\frac{|z|}{\rho}\right) \qquad \forall z$$

لنفرض الآن أن $z \to F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ مع أن F تحقق فرضا المحدودية الآتية :

$$|F(z)| \le B \exp(k|z|)$$

بحيث B و k ثابتان معلومان.أثبت بالتالي أن

$$|b_n| \le B r^{-n} \exp(kr)$$

بحيث r هو نصف قطر دائرة مركزها0 ما لكوشي.استنتج ما يلي $n = 0,1,2...$

$$|b_n| \le B n^{-n} k^n \exp(n)$$

جامعة الوادي　　　كلـيـــة العلـــوم التكنولوجية　　　قسم الرياضيات　　　السنة الثانية ل.م.د

الامتحان الآستدراكي في مادة التحليـــل المركب.　　　21 ماي 2013

Enseignant chargé de cours de module : **Rehouma.Abdelhamid**

1 ... هل أن تطبيق دستور كوشــــي يحقق اثبات المتباينة التالية و المتداولة في الحساب الهولومورفي على القرص الوحدة.

(Univalent functions theory via **Lebedev**'s inequality). في حالة f دالة هولومورفية على القرص الوحدة أي $f \in H(|z| \prec 1)$ و تحقق $\operatorname{Re} f \geq 0$ و $f(0)=1$.(أي $f(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ بحيث $c_k \in \mathbb{C}, k=1,2....$).عندئـــــذ لكل z بحيث $|z| \prec 1$.

$$\left| f(z) - \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{2|z|}{1-|z|^2}$$

2 ....في حالة $f(\cdot)$ دالة هولومورفية على نطاق مترابط ببساطة حافته C (كانتور مغلق) أثبت دستور كوشـــي أي

$$\int_C f(z) dz = 0$$

الهدف الآن هو حساب التكامل المعمم الآتي

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

كما شرح في الدرس تكرارا ومرارا صمم لغرض ذلك كانتورا مغلقا وليكن C (طبعا C اتحاد 4 طرق واصلة مختلفة مثنى مثنى).

بين أولا أن

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

استنتج حـــــسابا مفصلا للتكامل المعمــــم أعلاه.

3.طبق نظرية الرواسب لحساب التكامل المركب في حالة كانتور مغلق متحرك (mobile contour) $\Gamma_{\varepsilon} = \{ z : |z-i| = \varepsilon \}$.

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{e^{iz}}{(z+1)^3 (z^6+1)^2} dz$$

لحساب الجذر التكعيبي نعتبر الفرع الذي من أجله $\sqrt[3]{-1} = -1$. ماهي قيمة ε الواجب تحقيقهــــــا.

(mobile contour with preferable radius and fixed center)

كيف تضبط حسابا للراسب عند الصفر الآتي

$$\operatorname*{Res}_{z_0=0} \left(\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-i} \right)$$

جامعة الوادي معـــــــــــــهد العلـــــوم التكنولوجية	السنة الثانية ل.م.د رياضيات

الامتحان الاستدراكي في التحليل العقــــــدي .	جوان 2012

Formules de Cauchy. Area et holomorphie sur le disque unité. Théorème de résidus .

Par : Rehouma Abdelhamid

1 . نسمي $\text{Area of } f(.)$ على القرص الوحدة $D(0,1)$ ما يلي

$$D(f) = \iint_{.|x+iy|<1} |f(x+iy)|^2 dxdy$$

كما نسمي تكامل **درخليه** ***Dirichlet*** $\text{Area of } f(D(0,1))$ أي

$$D(f') = \iint_{.|x+iy|<1} |f'(x+iy)|^2 dxdy \,.$$

طبق دستور **كوشــــي** ***Cauchy*** لإثبات المتباينة التالية

.في حالة $f(.)$ دالة هولومورفية على القرص الوحدة أي $f \in H(|z|<1)$ فانه يوجد $K>0$ يتعلق بـــ $f(.)$ فقط بحيث

$$\left(1-|z|^2\right)|f'(z)| \le K$$

و هذا لكل z يحقق $|z|<1$.يطلب حسابه.أي يطلب حساب K بدقـــــــــة.

.استنتج حــــــادا من الأعــــــلى لـــــــــتكامل **درخليه** ***Dirichlet*** $D(f')$.

.كمثال تطبيقـــــي نموذجي أوجد المقارنـــــــات الممكنة بين الكميات الآتية

$$D(z^m f) \text{ و } D(f) \text{ و } D(f') \text{ و } D(\frac{d}{dz}(z^m f)) \,.$$

.اعتبــــر $f(z) = \dfrac{z}{1-z^2}$.لتطبيـــــق نـواتج أو ثمار السؤال أعلاه.

2 .أحسب التكامل في الحالتيــن $k>0$ و $k<0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ikx)}{i-x} dx$$

ومن ثم استنتج من أجل كل عدد طبيعي m

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^m \exp(ikx)}{(i-x)^{m+1}} dx$$

3 .في حالة $\Gamma = \{z : |z-i| = 1\}$.أحسب التكامل المركب الآتـــــــي :

$$\int_\Gamma \frac{z^3+1}{z(z-1)(z^2+1)^2} dz$$

.استغلالا للوقت اتبــــع النصيحة الآتية :

.أوجد أولا الثوابت a,b,c,d,e,f بحيث

$$\frac{z^3+1}{z(z-1)(z^2+1)^2} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{cz+d}{z^2+1} + \frac{ez+f}{(z^2+1)^2}$$

.يجب ضبط الأقطاب الأربعة مع رتبها و انتمائها أولا فالحساب ثانيا.

فقـــــط للتسليـــــة العلميــــة الحديثة صيف 2012 ☹ أحسب

$$Lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon^2} \frac{x^3+1}{x(x-1)(x^2+1)^2} dx + \log\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)$$

بالتوفيق و السداد	أستـــاذ المسؤول للمقياس