Exercice 1. Considérons $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\| u \|_1 = \int_0^1 | u(t) | dt$ et l'application

$$\varphi : E \longrightarrow E,\ \ f \longmapsto \varphi(f) = f \int_0^1 f(t)dt.$$

1. Montrer que φ est différentiable sur E, déterminer sa différentielle.

2. Calculer $d^n\varphi(f)$ pour tout $n \geq 2$ et pour tout $f \in E$.

3. Ecrire la formule de Taylor-Young pour φ au voisinage de $f \in E$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2 - xy\ ,\ y - x)$ et l'ensemble D définie par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x - y > 0\}$.

1. Montrer que f est $C^\infty-$difféomorphisme de D vers $f(D)$.

2. Déterminer $f(D)$ puis f_D^{-1}, l'application inverse de restriction de f sur D, .

Exercice 3. Soit E un espace de Banach et $\varphi :\ L(E) \longrightarrow L(E)$ l'application définie par $\varphi(u) = u \circ u$.

1. Montrer que $\varphi \in C^1(L(E))$.

2. On désigne par I_E l'application identité de E.

Peut-on appliquer le théorème d'inversion locale à φ au voisinage de I_E pour montrer que φ est C^1-difféomorphisme ?.

Exercice 4. Soit E, F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et f une application différentiable de U vers F.

1. Montrer que si f est $k-$lipschitzienne sur U alors $\sup\limits_{x\in U} \| df(x) \| \leq k$.

2. Montrer que si $\sup\limits_{x\in U} \| df(x) \| \leq k$ alors f est $k-$lipschitzienne sur tout convexe inclut dans U.

Exercice 5. Montrer que le système

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} sin(x+y) \\ y = 1 + \frac{2}{3} arctan(x-y) \end{cases}$$

admet une unique solution en $\mathbb{R}^2$. (On prendra comme norme sur $\mathbb{R}^2$: $\| (x,y) \|_1 = | x | + | y |$).