الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمّه لخضر الوادي

Faculty of Technology
Department of Hydraulic and Civil Engineering

كليـــة التكنولوجيا
قســـم الري والهندسة المدنية

Cours Hydraulique Générale I

Dr Miloudi Abdelmonem

Niveau Deuxième Sciences Technologie

Spécialité Hydraulique

Semestre 4

<u>Année universitaire 2019-2020</u>

Table de matières

Page

Chapitre I Hydrostatique

La statique des fluides s'intéresse à l'étude des fluides au repos, lorsque le fluide n'est animé d'aucun mouvement. L'objectif est de calculer la pression en tout point du domaine fluide. Un deuxième objectif est le calcul des efforts exercés par ce fluide au repos sur des surfaces solides indéformables avec lequel il est en contact.

Le champ d'applications est très large et concerne par exemple le calcul de la force résultante appliquée sur un barrage ou sur un objet partiellement ou complètement immergé, ainsi que le calcul de la pression dans des réservoirs.

L'hydrostatique étudie les conditions d'équilibre des liquides au repos. Ce chapitre aborde l'étude de la répartition de la pression, notamment en fonction de la distance verticale, ainsi que les forces qui en résultent.

I.1 Equation fondamentale de l'Hydrostatique :

De Fluide au repos et les composants de vitesse dans l'espace est $V(U,\vartheta,\omega)$ donc :

$$V=0;\ \frac{dU}{dt}=0;\ \frac{d\vartheta}{dt}=0;\ \frac{d\omega}{dt}=0$$

$$\begin{pmatrix} P_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & P_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & P_{zz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$$

$$P_{xy}=O;\ P_{xz}=O;\ P_{zx}=O$$

$$P_{yx}=O;\ P_{yz}=O;\ P_{zy}=O$$

$$P_{xx}=P_{yy}=P_{zz}=-P$$

$$\frac{dU}{dt}=F_x+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial P_{zx}}{\partial z}\right)$$

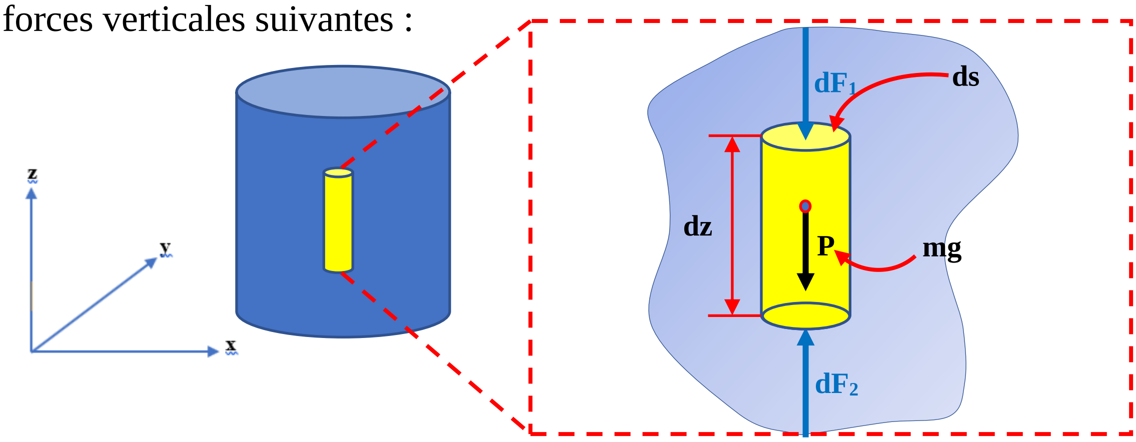
$$\frac{d\vartheta}{dt}=F_y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial P_{zy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{d\omega}{dt}=F_z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial P_{zz}}{\partial z}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{F = \frac{1}{\rho} grad\ P}$$

Equation fondamentale de l'hydrostatique

On considère dans un réservoir un fluide au repos, dont on extrait un petit parallélépipède d'eau d'axe vertical z. Soit p la pression en son centre. Il est soumis aux forces verticales suivantes :



Les forces de viscosité et de turbulence n'existent pas puisqu'il n'y a pas de vitesse relative entre les particules de fluide.

Les forces d'inertie n'existe pas puisque le fluide est au repos (vitesse nulle).

Concernant les forces de volume, il n'en existe qu'une seule la force de pesanteur. Elle s'écrit de la façon suivante :

$$F_{\text{pesanteur}} = m.g = g.\rho.dz.ds$$

Concernant les forces de surface, la pression agit sur la face supérieure et inférieure de l'élément. Ces forces s'écrivent de la façon suivante :

- ✓ Force de pression sur la surface inférieure :

$$F_{pression\ inf.} = dF_1 = \left(P - \frac{\partial P}{\partial z}.dz\right).ds$$

- ✓ Force de pression sur la surface supérieure :

$$F_{pression\ sup.} = dF_2 = -\left(P + \frac{\partial P}{\partial z}.dz\right).ds$$

Le cylindre élémentaire étant en équilibre dans le fluide, écrivons que la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle :

$$dF_2 + dF_1 + F_{\text{pesanteur}} = 0$$

L'équation de l'hydrostatique est déterminée en écrivant l'équilibre de l'ensemble des forces : Σ F = Forces d'inertie. En projetant cette équation suivant la verticale (l'axe oz), on a :

$$\left(P - \frac{\partial P}{\partial z}.dz\right).ds - \left(\left(p + \frac{\partial p}{\partial z}.dz\right).ds\right) - g.\rho.dz.ds = 0$$

Soit : $$-\frac{\partial p}{\partial z} - g.\rho = 0$$

On peut écrire de façon analogue les équations d'équilibre dans les autres directions :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0\ ;\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Ces trois équations montrent que la pression est indépendante de x et de y, c'est-à-dire que la pression ne varie pas dans les directions x et y ou encore qu'elle soit constante dans un plan horizontal. Cela est vérifié tant que l'on reste dans un même fluide (ρ constante). La pression ne dépend que de z, ce qu'on écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho.g \text{ ou } dP = -\rho.g.dz$$

I.2 <u>Pression absolue et pression relative :</u>

<u>*La pression absolue*</u> est définie par rapport à la pression dans le vide qui correspond à la pression nulle. On en déduit donc que la pression minimale possible est zéro.

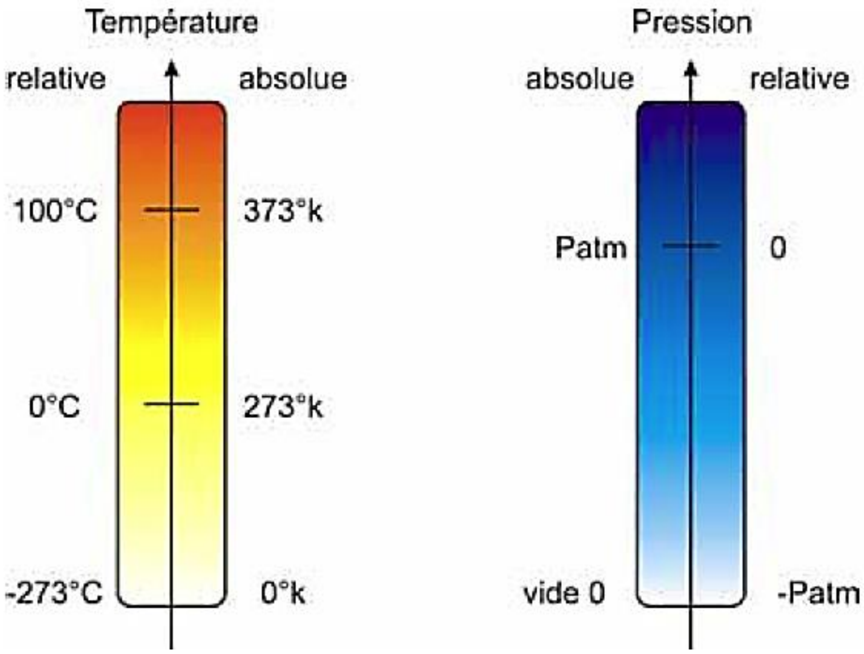
<u>*La pression relative*</u> se définit par rapport à une référence que l'on choisit le plus souvent égale à la pression atmosphérique. Cela consiste finalement à faire une translation du repère des pressions. La pression nulle est donc équivalente à la

pression atmosphérique (pa). La pression minimale correspond donc à : -pa (pression atmosphérique négative).

Donc :

Pression absolue : pression avec le vide comme référence………. vide = 0

Pression relative : pression aves P_{atm} comme référence………….. P_{atm} = 0



I.3 <u>Equation des surfaces isobares :</u>

On appelle surface isobare le lisse des points du fluide soumis à la même pression.

1. Cas d'un fluide au repos c'est-à-dire : $dP = -\rho . g . dz$……. (A)
2. Surface isobare c'est-à-dire $P = cte$ donc $dP = 0$………… (B)

D'après (A) et (B) :

$$\rho . g . dz = 0 \Longrightarrow z = cte$$

« Donc un fluide au repos les surfaces isobares sont des plans horizontales ».

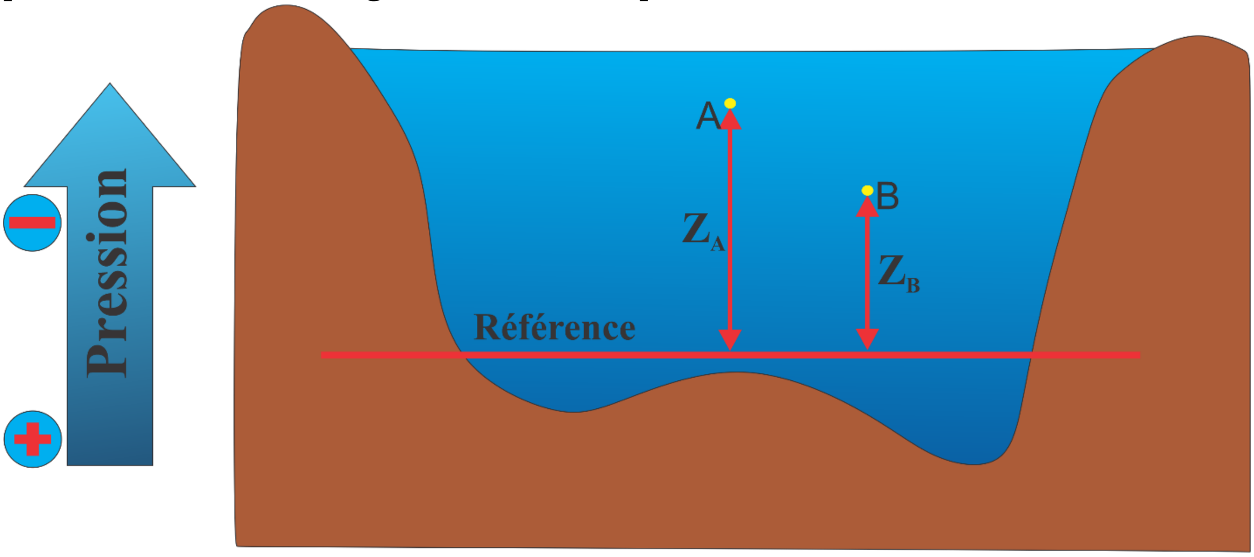
- ✓ Ce résultat est valable dans les cas des vases communiquant.
- ✓ La surface de séparation de deux liquides non mixible est horizontale.

Définition :

On appelle surface libre d'un liquide ; la surface de séparation du liquide et l'air ambiant. A cette surface la pression est constante et égale à la pression atmosphérique.

I.4 Principe de pascal :

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point se tournement intégralement en tous points du fluide.



D'prés le figure au-dessus on a :

$$P_A + \rho.g.z_A = P_B + \rho.g.z_B$$

$$P_B - P_B = \rho.g(z_A - z_B)$$

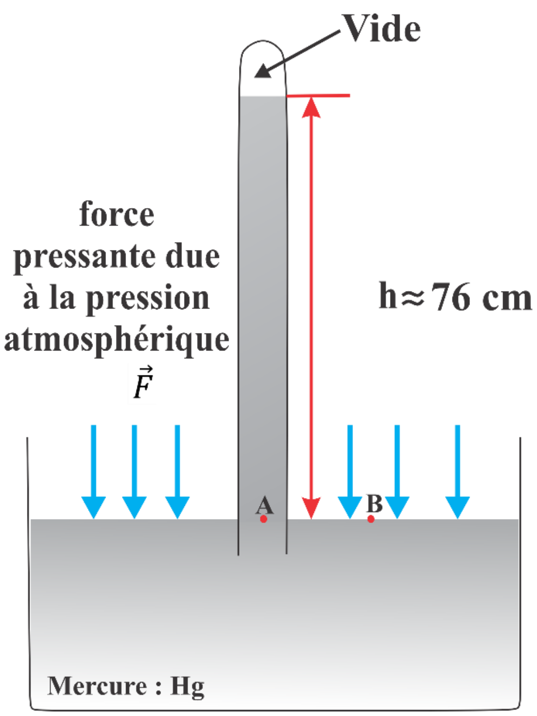
D'où :$P_B > P_A$

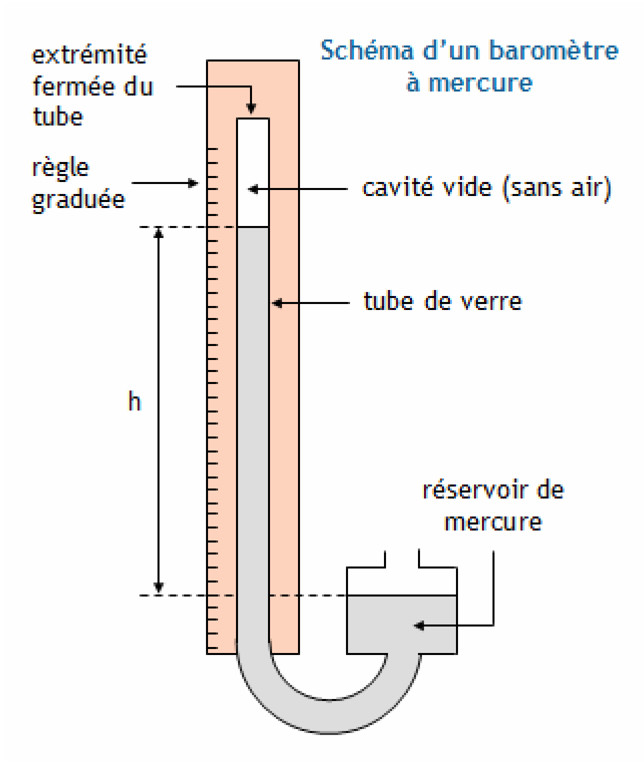
On modifie la pression en point (A) de ΔP_A sans modifier l'équilibre du système donc la pression en point (B) est modifiée de ΔP_B.

$$(P_B + \Delta P_B) - (P_A + \Delta P_A) = \rho.g(z_A - z_B) \Longrightarrow \Delta P_B = \Delta P_A$$

I.5 <u>Mesure de la pression :</u>

- **Baromètre** :





A l'équilibre (AB) surface isobare donc : Négligeable

$$P_A = P_{atm} = \rho . g . z + P_{vide}$$

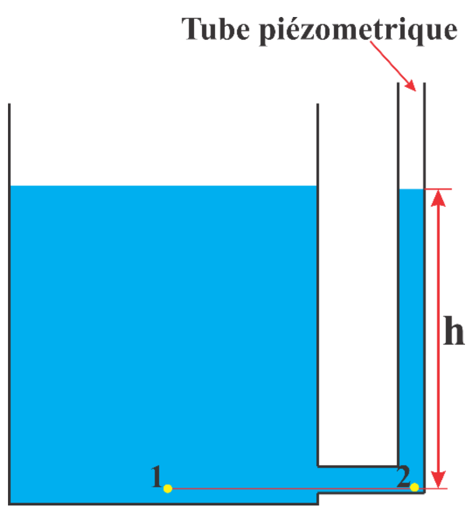
Où : $z \approx 76\ cm$ et $P_{vide} \approx 0$ (Négligeable) ; $\rho_{Hg} \approx 13600\ kg/m^3$

Donc : $P_{atm} = \rho . g . z = 13600 . 9{,}81 . 0{,}76$

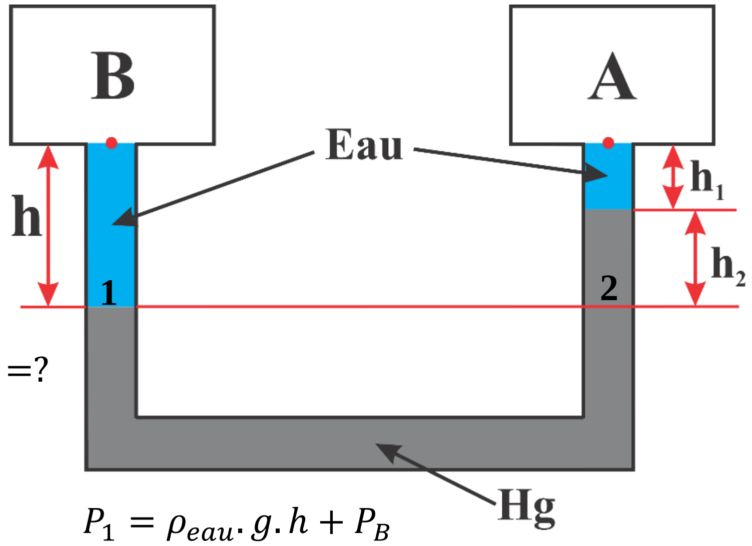
$$P_{atm} = 1{,}0136 . 10^5\ Pa$$

- **Tube piézométrique** :

$P_1 = \rho . g . h + P_{atm}$



- **Manomètre différentielle** :



$P_B - P_A = ?$

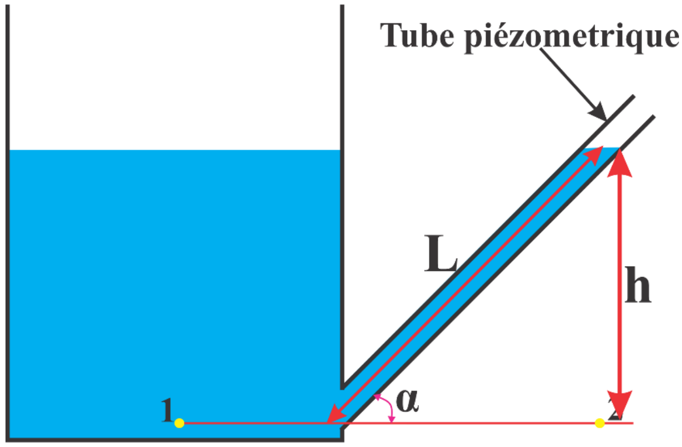
Si :

$$P_1 = \rho_{eau}.g.h + P_B$$

$$P_2 = \rho_{Hg}.g.h_2 + \rho_{eau}.g.h_1 + P_A$$

Donc : $$P_B - P_A = g.h_2(\rho_{Hg} - \rho_{eau})$$

- **Manomètre incliné** :



$P_1 = \rho.g.h + P_{atm}$

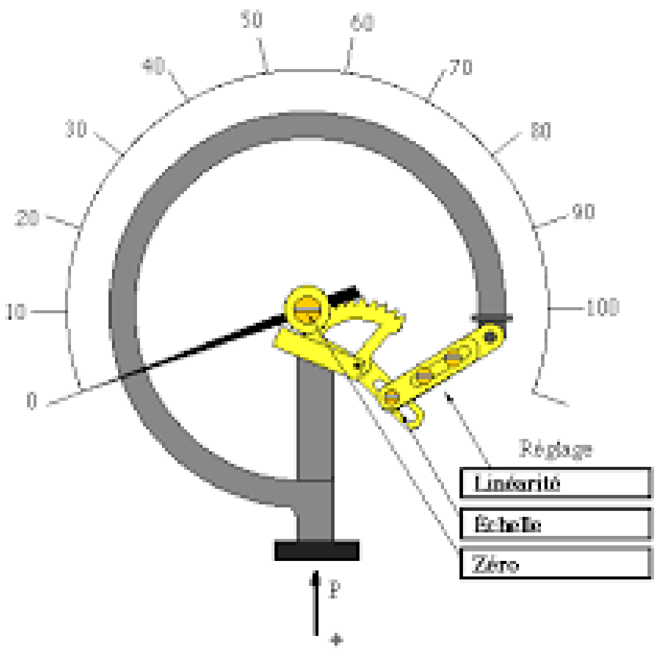
Où :

$h = L.\sin\alpha$

Donc :

$P_1 = \rho.g.L.\sin\alpha + P_{atm}$

- **Manomètre à déformation** :



I.6 Valeur maximale du vide :

Le vide apparait lorsque l'atmosphère est raréfiée. En évacuant l'air d'un espace ferme, on crée une dépression (ou vide) par rapport à la pression atmosphérique.

Le vide correspond donc à l'état d'un fluide dont la pression est inferieure a la pression atmosphérique.

Le niveau de vide peut s'exprimer en tant que :

- ✓ Niveau de dépression = valeur en pression relative, par rapport à la pression atmosphérique
- ✓ Niveau de vide en valeur absolue (défini par rapport au zéro absolu)

L'unité usuelle du vide est le millimètre de mercure (***mm Hg***).

Classification des vides

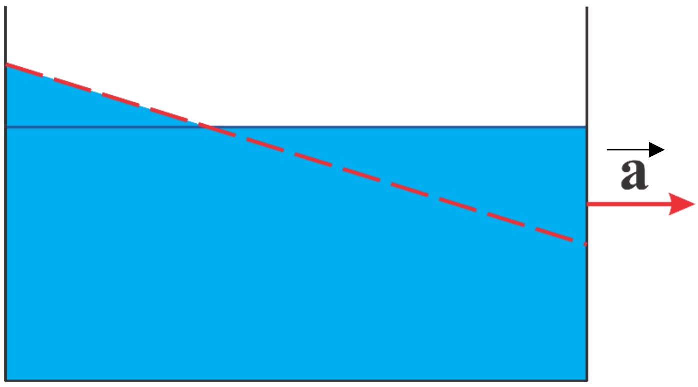
Vide moyen 1013……………………...	à 10 mbar absolus
Vide primaire 10………………………	à 10^{-3} mbar absolus
Vide secondaire 10^{-3}…………………...	à 10^{-6} mbar absolus
Vide moléculaire 10^{-6}………………….	à 10^{-9} mbar absolus
Ultravide ……………………………...	< 10^{-9} mbar absolus

I.7 Equations des équilibres relatifs :

- **Equation de mouvement**

$$dP = \rho\left(F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz\right)$$

Ou : $\begin{cases} F_x = -a \\ F_y = 0 \\ F_z = -g \end{cases}$



Donc : $dP = \rho(-a.dx + 0 - g.dz)$

La surface isobare c'est- à-dire : $P = cte \implies dP = 0$

Donc : $$-a.dx = g.dz$$

$$z = -\frac{a}{g}.x + cte$$

$$\tan a = \frac{-a}{g}$$

- **Accélération uniforme linéaire et verticale vers le haut :**

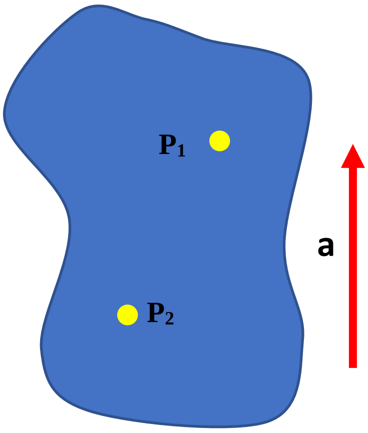
$$dP = \rho(F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz)$$

$$dP = \rho(0 + 0 + (-a - g).dz)$$

$$dP = \rho(-a - g).dz$$

La surface isobare : $$dP = 0 \Longrightarrow z = cte$$

$$P = -\rho(a + g).z + cte$$



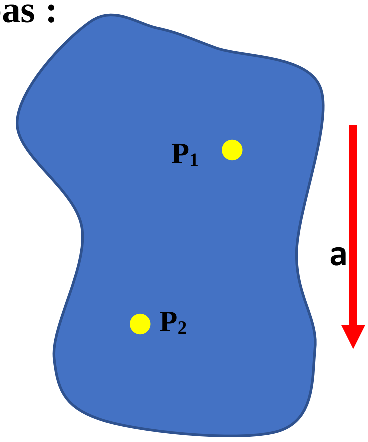
$$P_1 = -\rho(a + g).z_1 + cte$$

$$P_2 = -\rho(a + g).z_2 + cte$$

$$P_2 - P_1 = -\rho(a + g).(z_2 - z_1)$$

$$P_2 - P_1 = -\rho.g\left(1 + \frac{a}{g}\right).(z_2 - z_1)$$

- **Accélération uniforme linéaire et verticale vers le bas :**



$$dP = \rho(F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz)$$

$$dP = \rho(0 + 0 + (a - g).dz)$$

$$dP = \rho\,(a - g).dz$$

$$P_1 = \rho(a - g).z_1 + cte$$

$$P_2 = \rho(a - g).z_2 + cte$$

$$P_2 - P_1 = \rho(a - g).(z_2 - z_1)$$

$$P_2 - P_1 = \rho.g\left(\frac{a}{g} - 1\right).(z_2 - z_1)$$

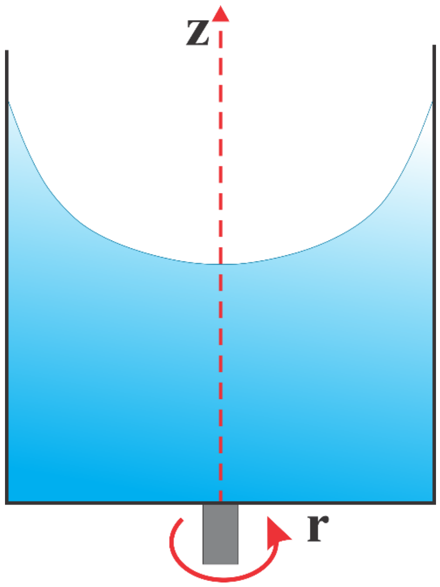
Si : $a = g \Longrightarrow P_1 = P_2$

Donc tout le fluide (liquide ; gaz) soumis à la même pression.

- **Accélération uniforme au tour d'un axe vertical :**

$$dP = \rho\left(F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz\right)$$

Ou : $\begin{cases} F_x = \omega^2.x \\ F_y = \omega^2.y \\ F_z = -g \end{cases}$



$$dP = \rho(\omega^2.x.dx + \omega^2.y.dy - g.dz)$$

$$dP = \rho.\omega^2(x.dx + y.dy) - \rho.g.dz$$

$$dP = \rho.\omega^2\left((d.dr) - \rho.g.dz\right)$$

Parce que :

$x = r.\cos\theta$; $y = r.\sin\theta$

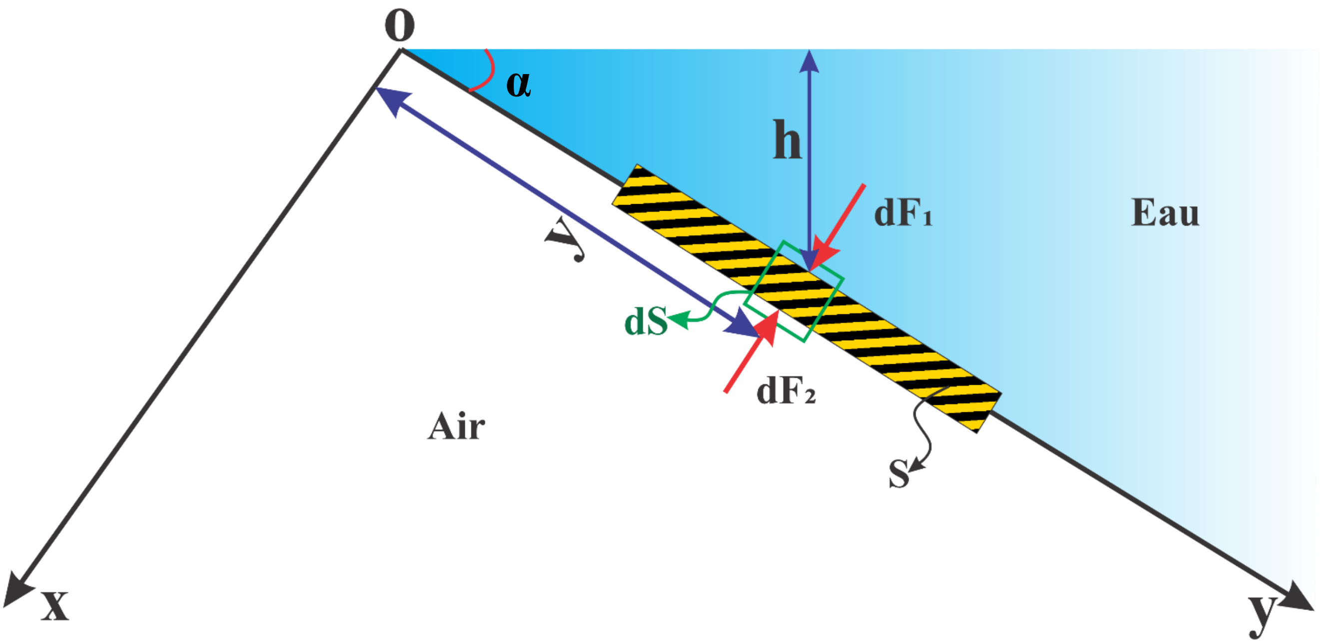
$r^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow 2.r.dr = 2.x.dx + 2.y.dy$

La surface isobre : $P = cte \Longrightarrow dP = 0$

$$\rho.\omega^2.r.dr = \rho.g.dz$$

$$\boxed{z = \frac{\omega^2}{2.g}.r^2 + cte}$$

I.8 Action des forces de pression sur les parois rigides :



Examinons une paroi plane symétrique qui retient le liquide au répos et est inclinée par rapport à l’horizon d’un angle (α).

$$dF = dF_1 - dF_2$$

Oú : $$dF_1 = (\rho . g . h + P_{atm}) . dS$$

$$dF_2 = P_{atm} . dS$$

$$dF = \rho . g . h . dS$$

$$dF = \rho . g . y . \sin\alpha . dS$$

Donc : $$F = \rho . g . \sin\alpha . \int y . dS$$

Oú : $$\int y . dS = y_G . S$$

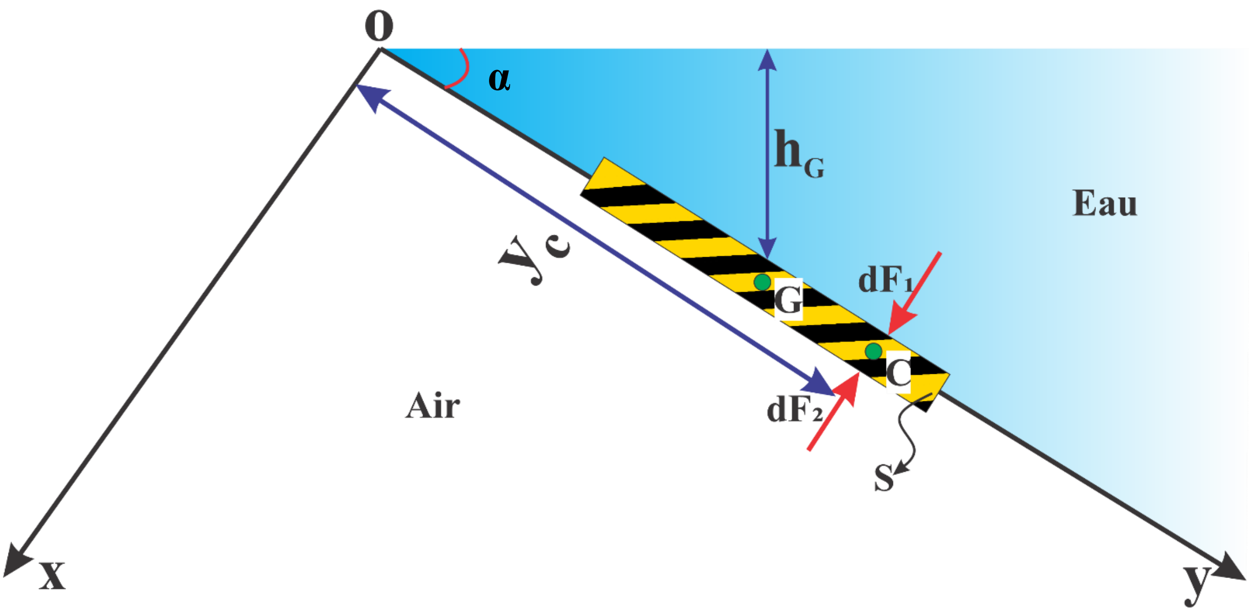
$$F = \rho . g . \sin\alpha . y_G . S$$

$$F = \rho . g . h_G . S$$

La force de pression exercée par un liquide sur une surface plane à orientation orbitraire est égale au produit de la surface (S) de la paroi par la pression que subit son centre de gravité.

- **Point d'application des forces de pression :**

Le moment de la resultante par rapport à un axe quelquonque est égale à la somme des moments de l'ensemble des forces elementaires.



$$F.y_G = \int dF.y$$

$$\rho.g.h_G.S.y_C = \int \rho.g.y.\sin\alpha.dS.y$$

$$\rho.g.y_G.\sin\alpha.S.y_C = \rho.g.\sin\alpha \int y^2.dS$$

$$\rho.g.y_G.\sin\alpha.S.y_C = \rho.g.\sin\alpha.I_{xx}$$

$$y_C = \frac{I_{xx}}{y_G.S}$$

Oú : $I_{xx} = I_0 + y_G{}^2.S$

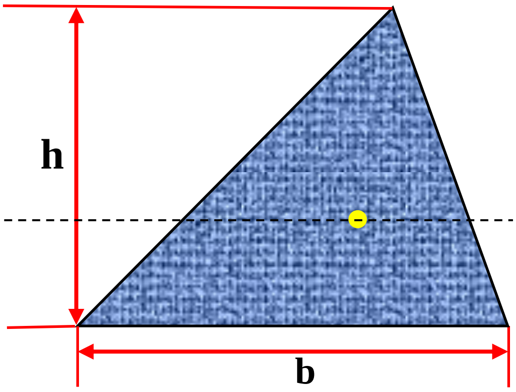
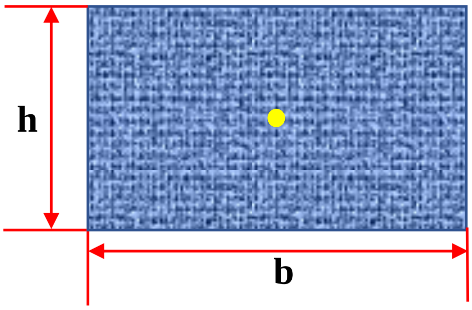
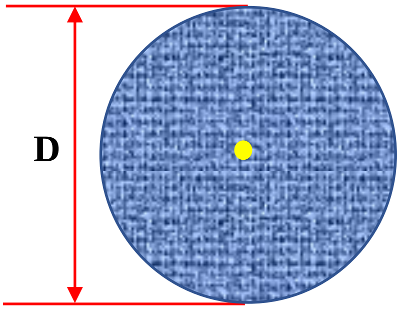
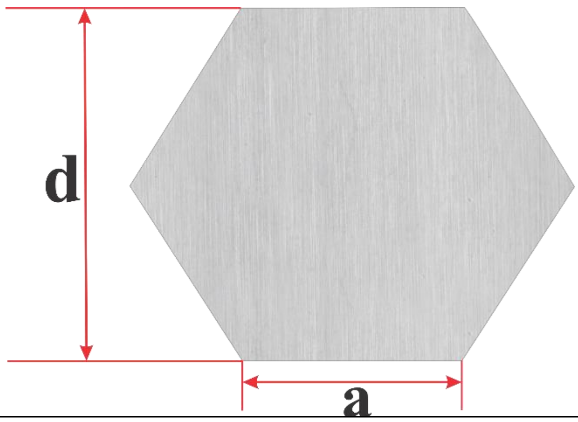
Donc :

$$y_C = y_G + \frac{I_0}{y_G.S}$$

I_{xx} : Représente l'inertie de la section suivant les axes ox.

N.B : Le centre de pousée est toujours au dessous de centre de gravité.

Le tableau suivant fournit le centre de gravité, la surface et l'inertie pour quelques formes de surface plane.

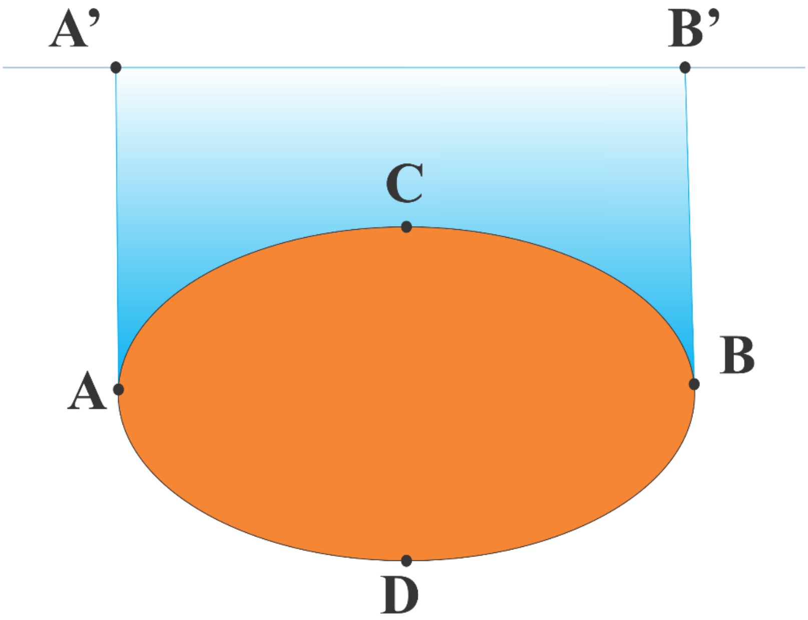
	$I_0 = \dfrac{b.h^3}{36}$
	$I_0 = \dfrac{b.h^3}{12}$
	$I_0 = \dfrac{\pi.D^4}{64}$
	$I_0 = \dfrac{5.d^4}{48\sqrt{3}}$ Ou $I_0 = \dfrac{5.a^4\sqrt{3}}{16}$

I.9 <u>Equilibre des corps flottants</u> :

Supposons qu'une surface fermée formant un corps solide de masse volumique ρ_{corps}, de volume total V et de volume immergé $V_{immergé}$, se trouve immergée entièrement ou partiellement ($V_{immergé} \leq V$) dans un liquide au repos de masse volumique ρ. Les forces verticales qui agissent sur le corps sont:

- les forces de pesanteur

- les forces de pression du liquide



Sur (ACB) :

$$F_{V_1} = \rho . g . V_{ACBB'A'A}$$

Sur (ADB) :

$$F_{V_2} = \rho . g . V_{ADBB'A'A}$$

Force résultantes :

➢ Les forces horizontales : se compensent reciproquement.

➢ Les forces verticales :

$$F_V = F_{V_2} - F_{V_1}$$

$$= \rho . g (V_{ACBB'A'A} - V_{ADBB'A'A})$$

$$F_V = \rho_{eau} . g . V_{Corps}$$

Alors **:** Les corps immergée dans le liquide est soumis à l'action de la pousée verticale égale en valeur et opposée en direction au poids du liquide déplacé par le corps.

- Le pointd'application de la poussée d'archiméde est le centre de gravité du volume d'eau déplacé.

- **Condition de flottaison :**

- Flottement en plongée :

$$\rho_{Corps}.g.V_{Corps} = \rho_{Eau}.g.V_{Corps}$$

Alors **:**

$$\rho_{Corps} = \rho_{Eau}$$

- Flottement en surface :

$$\rho_{Corps}.g.V_{Corps} = \rho_{Eau}.g.V_{immergée}$$

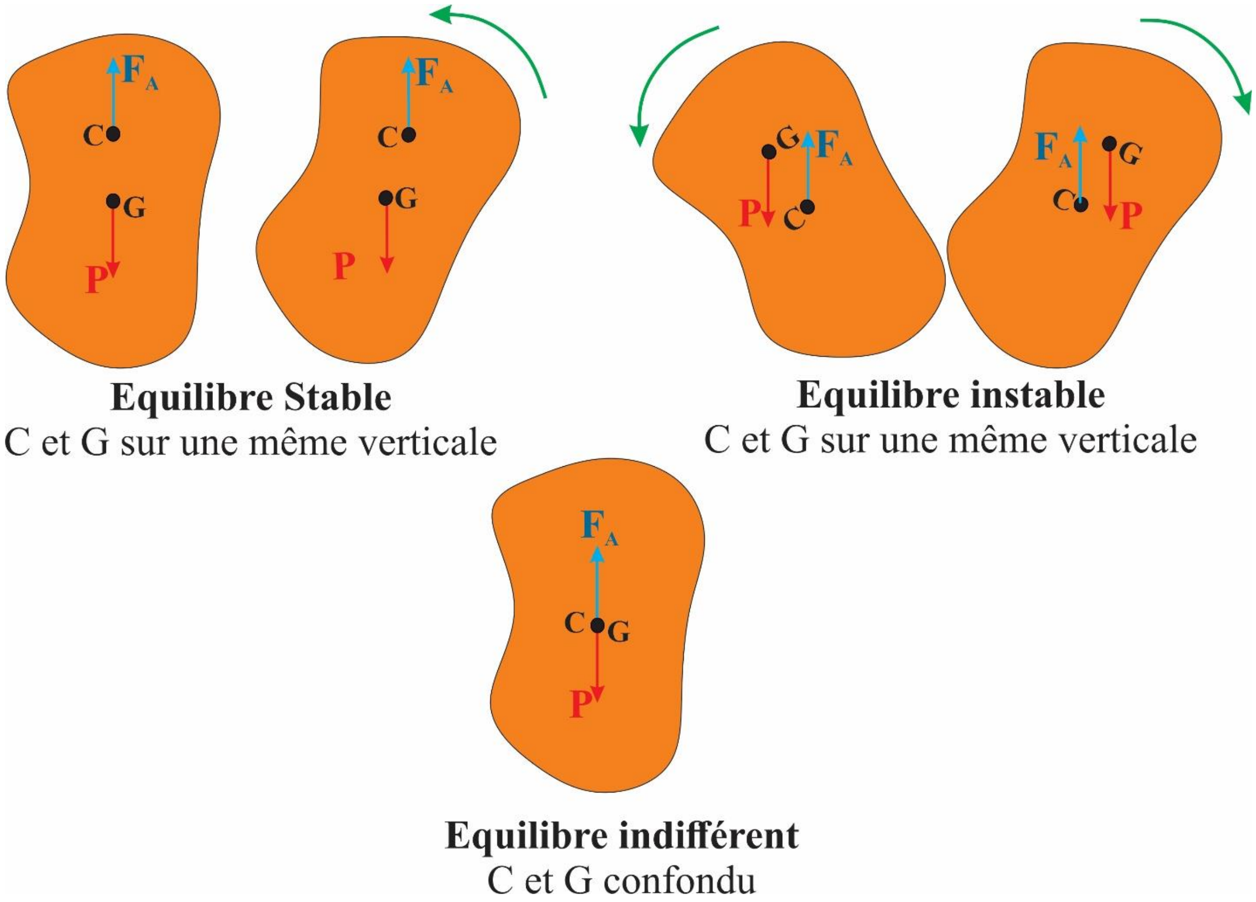
$$\frac{\rho_{Corps}}{\rho_{Eau}} = \frac{V_{immergée}}{V_{Corps}}$$

Notion :

- ✓ Le volume du liquide déplacé par le corps est applé volume de CARÉNE.
- ✓ Le centre de gravité du volume de CARÉNE par lequel passe la ligne d'action de la poussée d'archimede est le centre de CARÉNE.

- **Equilibre des corps immergées :**

Un corps est en équilibre si le poids et la force d'Archimède sont égaux, opposés et situés sur la même ligne verticale. Dans le cas contraire, il en résulte un mouvement. La stabilité peut se définir de la façon suivante : si on incline un corps d'un angle par rapport à la verticale, le corps est soumis à un couple de redressements qui le fait tourner jusqu'à ce qu'il revienne à sa position initiale.



P : Passe par le centre de gravité de solide.

F_A : Passe par le centre de gravité du volume du fluide déplacé.

<u>Alors</u> : *<u>Equilibre stable</u>* le centre de gravité est au dessous du centre de CARÉNE ; il peut également arriver que le centre de gravité soit situer au dessus de centre de CARÉNE et que cependant *<u>l'iquilibre indifférent</u>* soit stable, lorsque le corps flottant se pélace le volume immergée change de forme et le centre de CARÉNE se deplacé à l'interieur du corps immergée.

Chapitre II
CINEMATIQUE DES FLUIDES

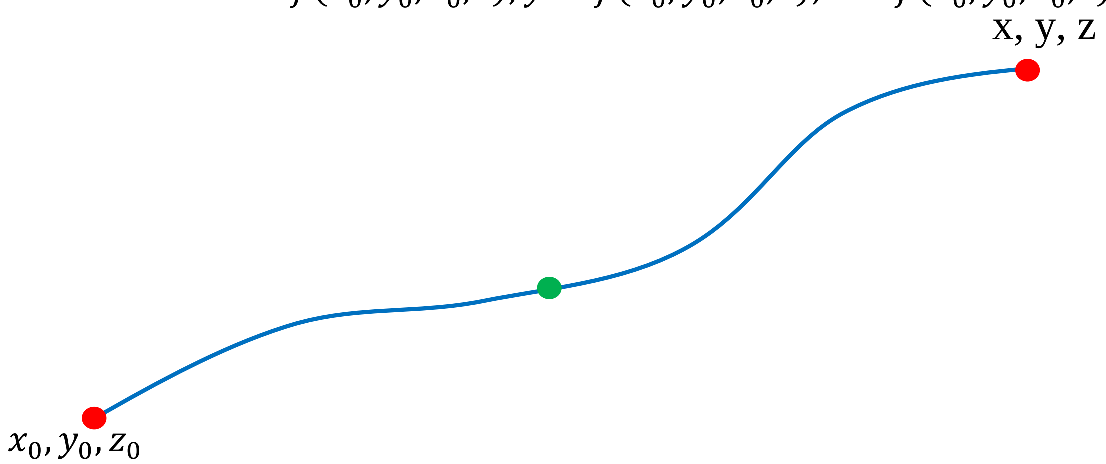
La cinématique des fluides décrit le mouvement du fluide (en utilisant les notions de lignes de courant et champ de vitesse) et ses conséquences sans considération de la nature des forces provoquant le mouvement. On prend en compte seulement les relations entre les positions des particules fluides et le temps.

II-1 <u>Méthodes d'étude du mouvement d'un fluide :</u>

- **Méthode de Lagrange :**

Il s'agit d'isoler une partie de fluide et la suivre dans son mouvement.

$$x = f(x_0, y_0, z_0, t); y = f(x_0, y_0, z_0, t); z = f(x_0, y_0, z_0, t)$$



La trajectoire est le lieu géométrique de positions successives prises par la particule au cours de son mouvement en fonction du temps.

- **Méthode d'Euler :**

Dans cette méthode on examine les champs de vitesse au point de l'espace occupé par le fluide en mouvement, et étudier la variation de la vitesse en ces points en fonction du temps (en calcul la vitesse lorsque le point que mouve passe le point (x, y, y)).

Où : $\begin{cases} U = f(x, y, z) \\ v = f(x, y, z) \\ \omega = f(x, y, z) \end{cases}$

<u>x, y, z</u> : Coordonnées de l'espace et non de la particule fluide.

II-2 Accélération d'une particule fluide :

Calculons l'accélération d'une particule de fluide à partir du champ de vitesse eulérien $\vec{V}(U, v, \omega)$. L'accélération est le taux de variation du champ de vitesse en suivant une particule de fluide. On a donc :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Où : $\begin{cases} dx = U.dt \\ dy = v.dt \\ dz = \omega.dt \end{cases}$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial x}.U.dt + \frac{\partial V}{\partial y}.v.dt + \frac{\partial V}{\partial z}.\omega.dt$$

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{U.\partial V}{\partial x} + \frac{v.\partial V}{\partial y} + \frac{\omega.\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{a} = (\vec{U} + \vec{v} + \vec{\omega}).\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\vec{a} = \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{V}.grad\vec{V}$$

$\frac{\partial V}{\partial t}$: Accélération locale elle traduit la variation de la vitesse en fonction du temps elle ne dépend pas des coordonnées de l'espace.

$\vec{V}.grad\vec{V}$: Accélération convective (entrainement), elle signifie les vitesses sont différente ; l'accélération est donc la dérivée particulaire de la vitesse.

$$\vec{a} = \frac{DV}{dt}$$

II-3 Classification des écoulements :

II-3-1 Selon la stationnarité du mouvement :

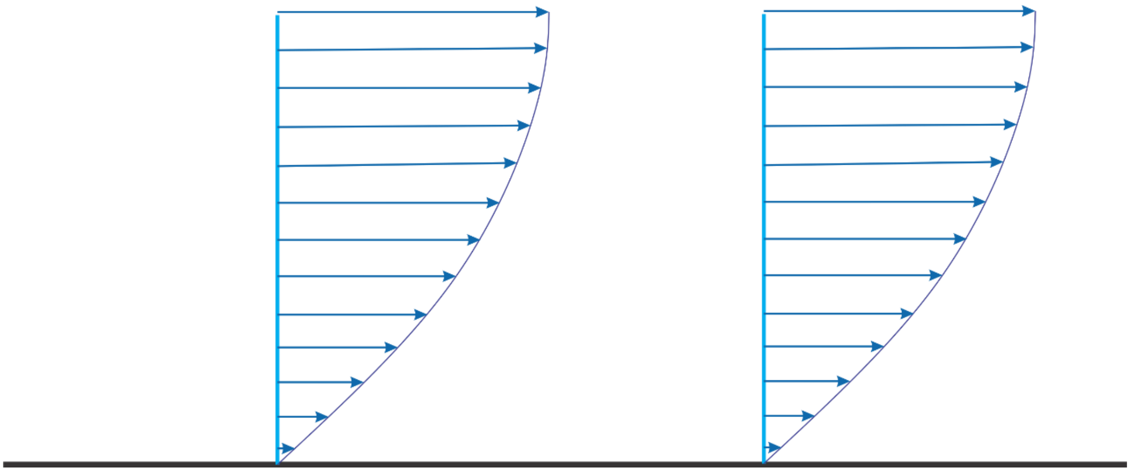
- **Ecoulement permanent :**

Lors que les propriétés du fluide et les caractéristiques du mouvement en chaque point de l'espace occupe par le fluide en mouvement ne subit aucun changement dans le temps, le mouvement est dit permanent.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0; \frac{\partial P}{\partial t} = 0; \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

A. *Ecoulement uniforme :*

Lorsque le vecteur vitesse et la forme et la surface de la section transversale ne changent de section.



B. *Ecoulement non uniforme :*

Le vecteur vitesse et la forme et la surface de la section changent avec la variation de section.

- **Ecoulement non permanent :**

Lors que les propriétés du fluide et les caractéristiques du mouvement en chaque point de l'espace occupe par le fluide en mouvement variée avec le temps, le mouvement est dit non permanent.

$$\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0; \frac{\partial P}{\partial t} \neq 0; \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0; \frac{\partial T}{\partial t} \neq 0$$

II-3-2 Selon la charge :

- **Ecoulement non charge :**

Chaque point de l'écoulement est soumis à une pression différente de la pression atmosphérique (plus grande, plus petite).

- **Ecoulement à surface libre :**

Lorsque la surface libre de l'écoulement est en contact avec l'atmosphère, l'écoulement est dit à surface libre.

II-3-3 Selon les caractéristiques :

- Ecoulement tridimensionnel.
- Ecoulement bidimensionnel.
- Ecoulement monodimensionnel à symétrie de résolution.

Pour les écoulements en charge :

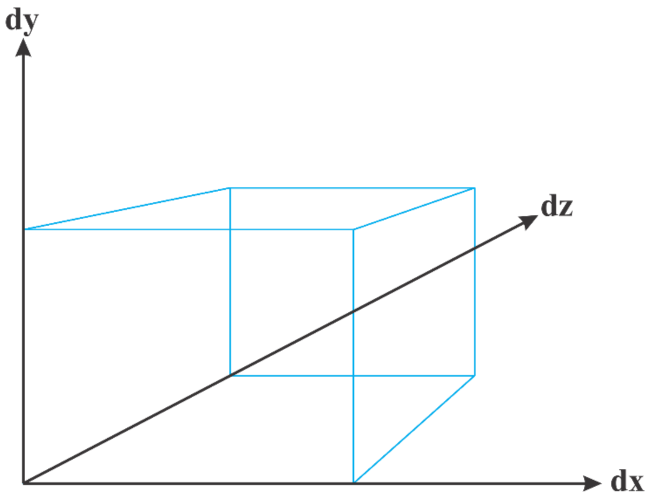
1. Ecoulement turbulent
2. Ecoulement transitoire.
3. Ecoulement laminaire.

Pour les écoulements en charge :

1. Ecoulement fluvial F < 1.
2. Ecoulement torrentiel F > 1.

II-4 Equation de continuité ;

Elle exprime le principe de conservation de la masse c'est-à-dire la continuité du fluide.



- Soit la particule fluide élémentaire du volume (dx , dy, dz) de masse volumique ρ.

$$m = \rho . dx . dy . dz$$

$$dm = 0$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} dt + \frac{\partial m}{\partial x} dx + \frac{\partial m}{\partial y} dy + \frac{\partial m}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{\partial\rho.dx.dy.dz}{\partial t}dt+\frac{\partial\rho.dx.dy.dz}{\partial x}U.dt+\frac{\partial\rho.dx.dy.dz}{\partial y}v.dt+\frac{\partial\rho.dx.dy.dz}{\partial z}\omega.dt=0$$

Donc :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}U+\frac{\partial\rho}{\partial y}v+\frac{\partial\rho}{\partial z}\omega=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho V)=0$$

- Si l'écoulement est permanent :

$$div(\rho V)=\rho.div\,\vec{V}+\vec{V}.grad\,\rho=0$$

- Ecoulement permanent incompressible :

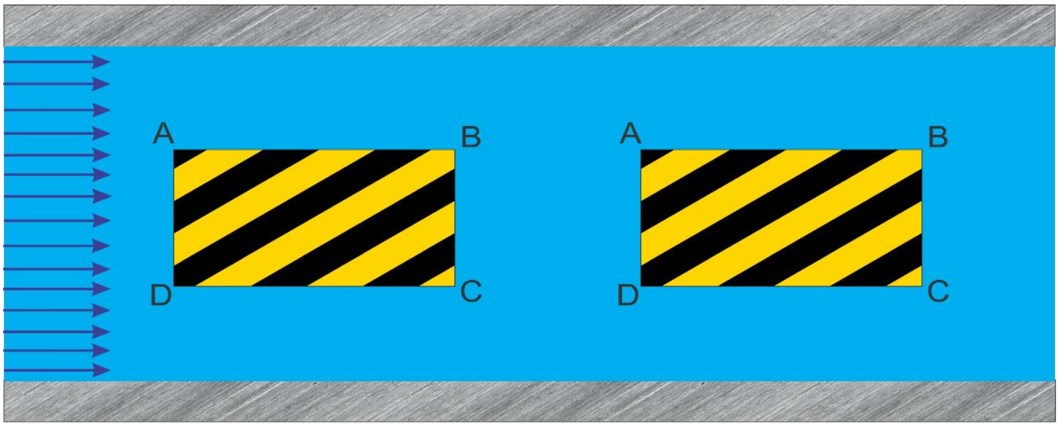
$$div(\rho V)=0$$

$$\rho.div\,\vec{V}+\vec{V}.grad\,\rho=0$$

$$div(\vec{V})=0$$

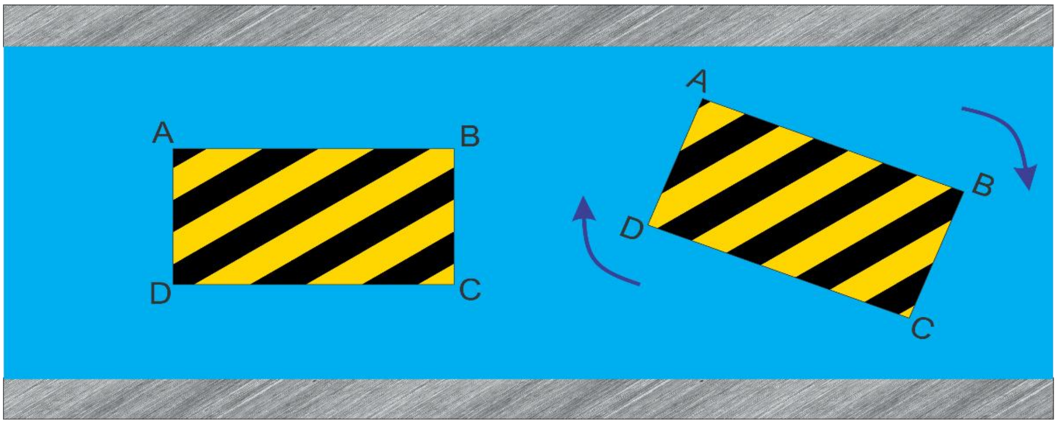
II-5 Analyse de mouvement d'une particule fluide :

- **Mouvement de translation :**

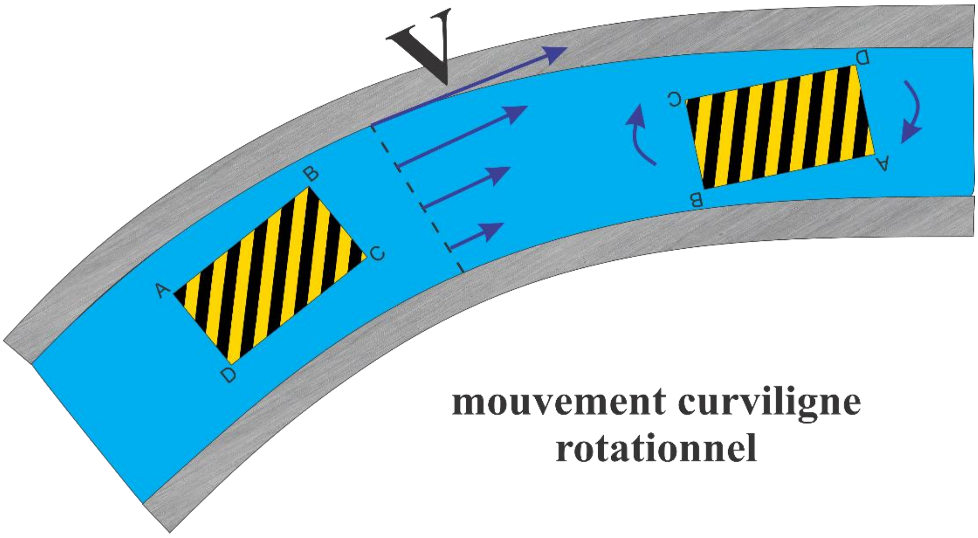


mouvement rectiligne

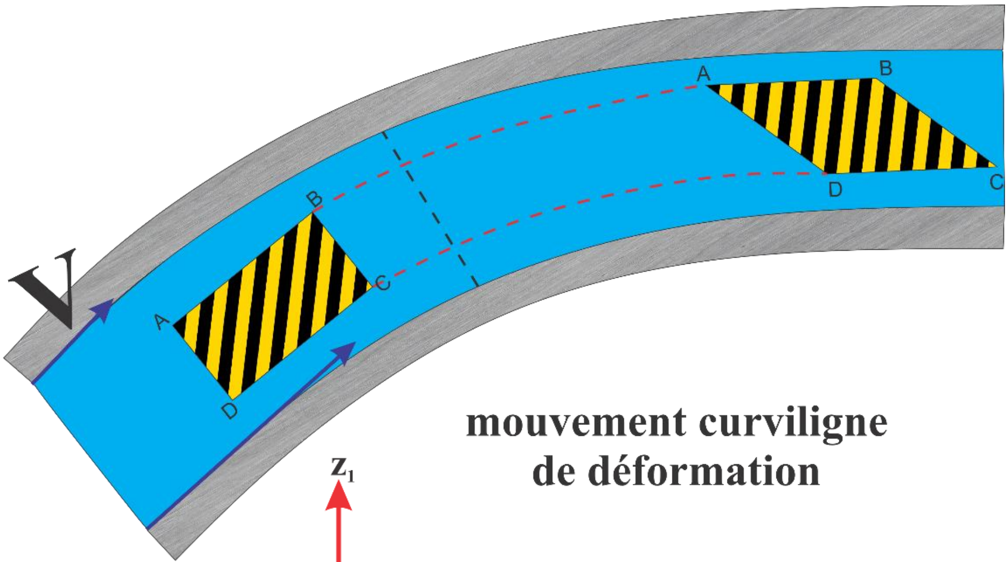
- **Mouvement de rotation :**

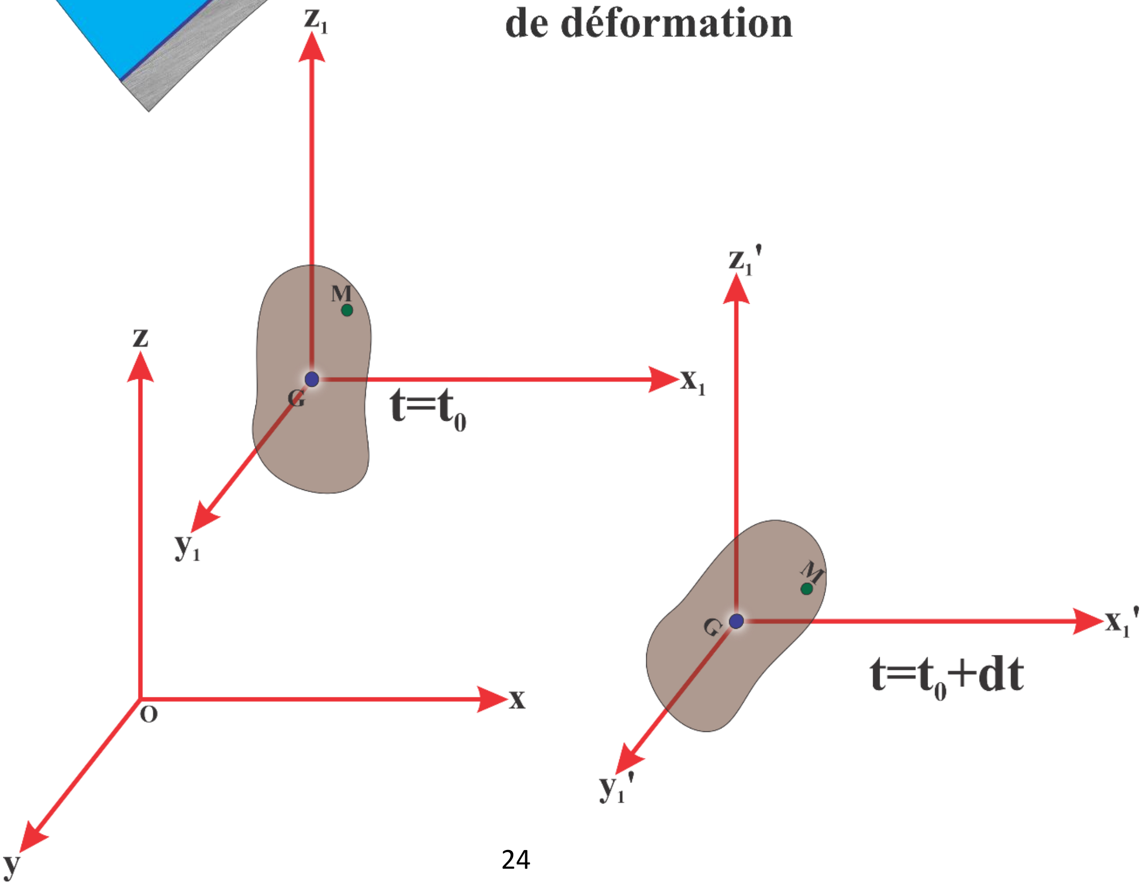


mouvement rectiligne rotationnel



➢ **Mouvement de déformation :**





Chapitre III
DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

La dynamique des fluides est la science qui s'intéresse au comportement des fluides en mouvement.

L'hydrodynamique étudie le mouvement des liquides entement compte des forces qui le donnent naissance, elle consiste à établis les relations entre les positions des particules, les temps et les forces qui interviennent le but essentiel est de déterminer les vitesses (U, ν, ω), les pressions et masse volumique.

III-1 Equation générale du mouvement d'un fluide parfait

On considère que les fluides étudiés sont parfaits et incompressibles (On ne tiendra pas compte des effets de viscosité μ = 0 et ρ = cte).

$$\frac{dU}{dx} = F_x - \frac{1}{\rho}.\frac{\partial P}{\partial x}\text{……………………..(1)}$$

$$\frac{d\nu}{dx} = F_y - \frac{1}{\rho}.\frac{\partial P}{\partial y}\text{……………………..(2)}$$

$$\frac{d\omega}{dx} = F_z - \frac{1}{\rho}.\frac{\partial P}{\partial z}\text{……………………..(3)}$$

$$div\,\vec{V} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0\text{…...(4)}$$

$$\rho = cte\text{…………………………..(5)}$$

Donc (1) devenu :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\partial U}{\partial t} + U.\frac{\partial U}{\partial x} + \nu.\frac{\partial U}{\partial y} + \omega.\frac{\partial U}{\partial z} + \nu.\frac{\partial \nu}{\partial x} + \omega.\frac{\partial \omega}{\partial x} - \nu.\frac{\partial \nu}{\partial x} - \omega.\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\partial U}{\partial t} + U.\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial x}\right) + \omega\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x}\right)$$

Si : $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U^2/_2}{\partial x}$

$$a_x = \frac{dU}{dx} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2/_2}{\partial x} + \frac{\partial \nu^2/_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega^2/_2}{\partial x} - 2\nu.Ƶ + 2\omega.\mu$$

Puisque :

$$\Omega = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U & \nu & \omega \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \mu \\ Ƶ \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \nu}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \frac{\partial \nu}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Donc : $$a_x = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial v^2/_2}{\partial x} - 2v.Ƶ + 2\omega.\mu$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + U\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \omega\frac{\partial v}{\partial z} + U\frac{\partial U}{\partial y} + \omega\frac{\partial \omega}{\partial y} - U\frac{\partial U}{\partial y} - \omega\frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \omega\frac{\partial \omega}{\partial y} + U\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \omega\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial y}\right)$$

Donc : $$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial U^2/_2}{\partial y} + 2U.Ƶ - 2\omega.\xi$$

$$a_z = \frac{\partial \omega}{\partial t} + U\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega\frac{\partial \omega}{\partial z} + U\frac{\partial U}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial z} - U\frac{\partial U}{\partial z} - v\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial \omega}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial z} + \omega\frac{\partial \omega}{\partial z} + U\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

Donc : $$a_z = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial U^2/_2}{\partial z} + 2U.\mu - 2v.\xi$$

$$a = a_x + a_y + a_z$$

$$a = \frac{\partial V}{\partial t} + grad\left(\frac{V^2}{2}\right) + 2.\vec{\Omega}\wedge\vec{V}$$

$$F - \frac{1}{\rho}\,grad\,P = \frac{\partial V}{\partial x} + grad\left(\frac{V^2}{2}\right) + 2.\vec{\Omega}\wedge\vec{V}$$

III-2 <u>Intégration des équations de mouvement :</u>

<u>Hypothèse</u> : $F = grad\,U \Longrightarrow F_x = \frac{\partial U}{\partial x};\ F_y = \frac{\partial U}{\partial y};\ F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$

Si le fluide est soumis au champ de la pesanteur : $F_x = 0;\ F_y = 0;\ F_z = -g$

- **Ecoulement permanent irrotationnelle :**

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad\qquad \vec{\Omega} = 0$$

$$grad\,U - \frac{1}{\rho}\,grad\,P = grad\,\frac{V^2}{2}$$

$$grad\left(\frac{V^2}{2} - U + \frac{1}{\rho}.P\right) = 0$$

$$grad\,(Energie) = 0 \Longrightarrow Energie = est\ constante$$

$$\frac{V^2}{2} - U + \frac{1}{\rho}.P = cte$$

Fluide soumis au champ de la pesanteur $U = -gz$

$$\boxed{\frac{V^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = cte} \text{ Equation de Bernoulli}$$

Energie cinétique par unité de la masse

Energie potentielle

- **Ecoulement non permanent irrotationnelle :**

$$\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0 \qquad \vec{\Omega} = 0$$

$$grad\ U - grad\left(\frac{P}{\rho}\right) = \frac{\partial V}{\partial t} + grad\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

$$V = grad\ Q$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial (grad\ Q)}{\partial t} = grad\ \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$grad\ U - \ grad\left(\frac{P}{\rho}\right) = grad\ \frac{\partial Q}{\partial t} + grad\ \frac{V^2}{2}$$

$$grad\left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} - U\right) = 0$$

$$grad\left(\frac{\partial Q}{\partial t} + Energie\right) = 0$$

Donc : $\boxed{\frac{\partial Q}{\partial t} + Energie = cte}$ $(est\ constant\ depand\ du\ temps)$

- **Ecoulement permanent rotationnelle :**

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad \vec{\Omega} \neq 0$$

$$grad\ U - grad\left(\frac{P}{\rho}\right) = grad\left(\frac{V^2}{2}\right) + 2.\vec{\Omega}\Lambda\vec{V}$$

$$grad\left(\frac{V^2}{2} - U + \frac{P}{\rho}\right) = -2.\vec{\Omega}\Lambda\vec{V}$$

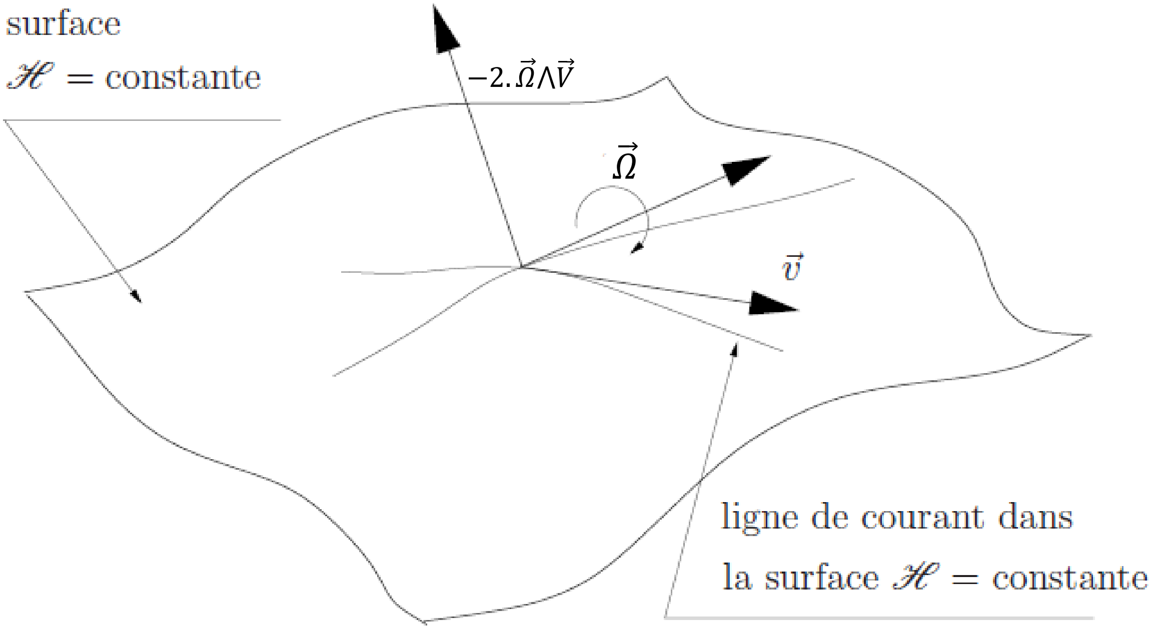
$$grad\left(\frac{V^2}{2} - U + \frac{P}{\rho}\right).\overrightarrow{d\ell} = \left(-2.\vec{\Omega}\Lambda\vec{V}\right).\overrightarrow{d\ell}$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$grad\left(\frac{V^2}{2} - U + \frac{P}{\rho}\right).\overrightarrow{d\ell} = 0$$

$$grad\left(\frac{V^2}{2} - U + \frac{P}{\rho}\right) = 0$$

$$\frac{V^2}{2} - U + \frac{P}{\rho} = cte$$



<u>Interprétation physique</u> :

Suivant la même ligne de courant, soumis du champ de pesanteur.

$$U = -gz$$

$$-U + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = cte$$

$$gz + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = cte$$

Où :

gz : Energie potentiel de position par unité de masse $\left(\frac{J}{kg}\right)$

$\frac{P}{\rho}$: Energie potentiel de pression par unité de masse $\left(\frac{J}{kg}\right)$

$\frac{V^2}{2}$: Energie cinétique par unité de masse $\left(\frac{J}{kg}\right)$

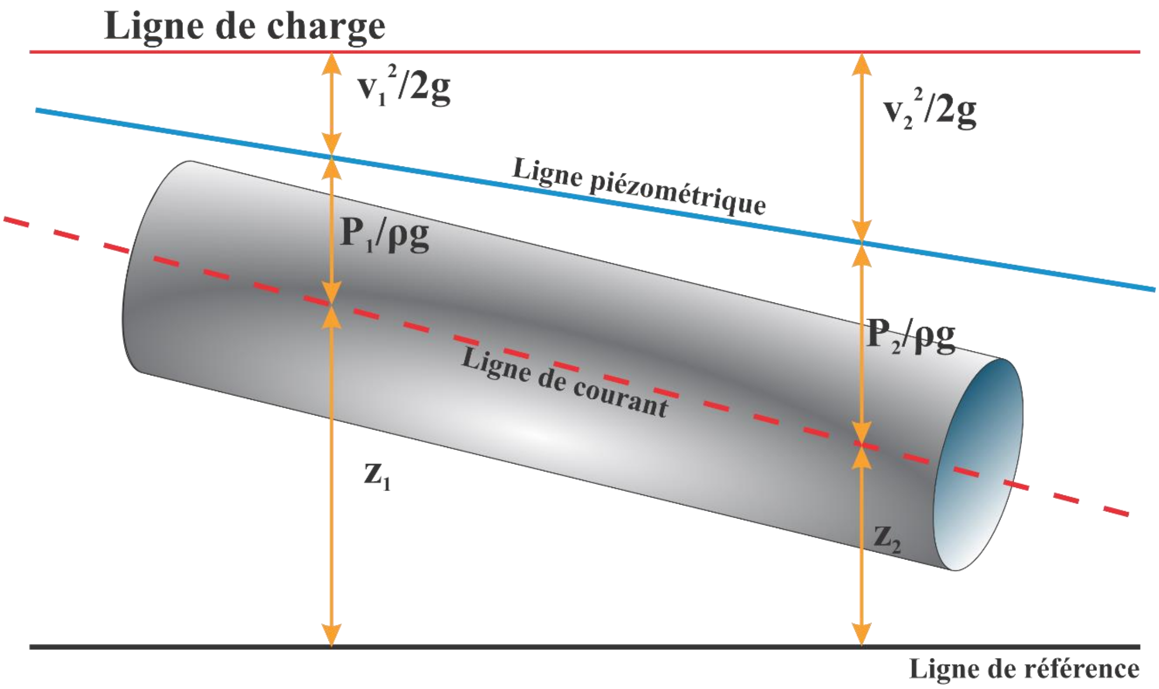
$Energie\ mécanique = Energie\ potentiel + Energie\ cinétique$

<u>*Interprétation physique*</u> :

$$gz + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = cte \xrightarrow{\text{Multiplie par } \frac{1}{g}} \boxed{z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = cte}$$

$$gz + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = cte \xrightarrow{\text{Multiplie par } \rho} \boxed{\rho g z + P + \rho\frac{V^2}{2} = cte}$$

Le charge d'écoulement est constante le long de l'écoulement.

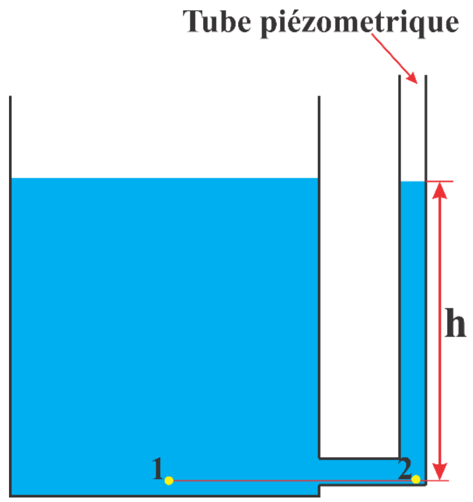


	J/kg	J/Poids	J/volume
Energie potentiel de position	gz	z	$\rho g z$
Energie potentiel de pression	$\frac{P}{\rho}$	$\frac{P}{\rho g}$	P
Energie cinétique	$\frac{V^2}{2}$	$\frac{V^2}{2g}$	$\rho\frac{V^2}{2}$

III-3 <u>Mesure de Pression :</u>

➢ **Mesure la pression statique :**

À l'aide d'un tube piézométrique on mesure la pression statique.

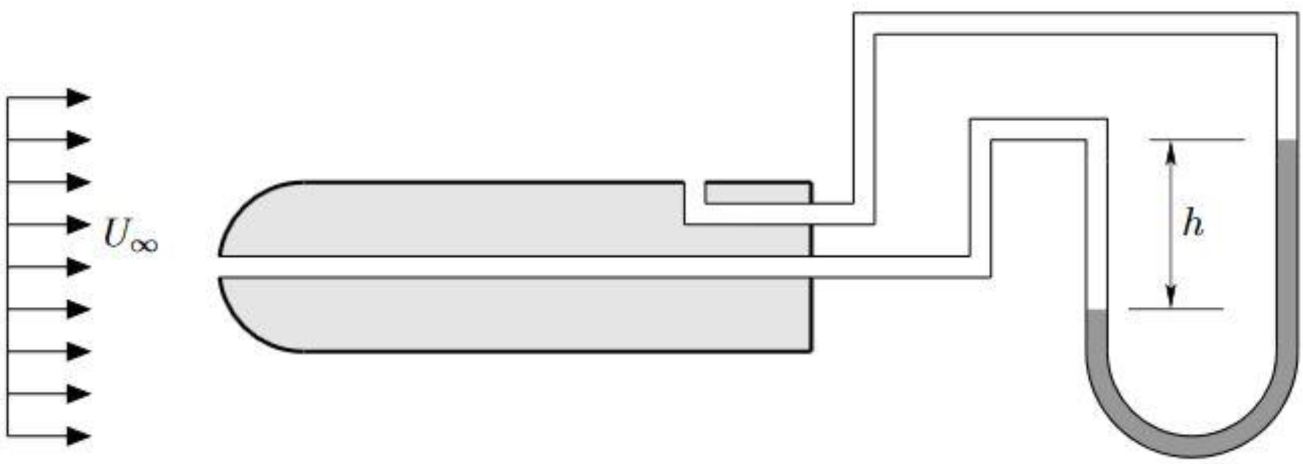


➢ **Mesure la pression dynamique :**

La pression dynamique est représentative de la vitesse d'écoulement d'un fluide. C'est la valeur lue sur un appareil de mesure de pression différentielle dont :

- L'un des points de mesure est disposé dans l'axe de l'écoulement du fluide.
- Et l'autre est disposé perpendiculairement à cet écoulement.

Cette valeur est prédite par la relation de Bernoulli. Elle est utilisée dans les débitmètres ou anémomètres à tube de Pitot. Contrairement à la pression statique, cette valeur de pression ne renseigne pas sur l'état thermodynamique du fluide.

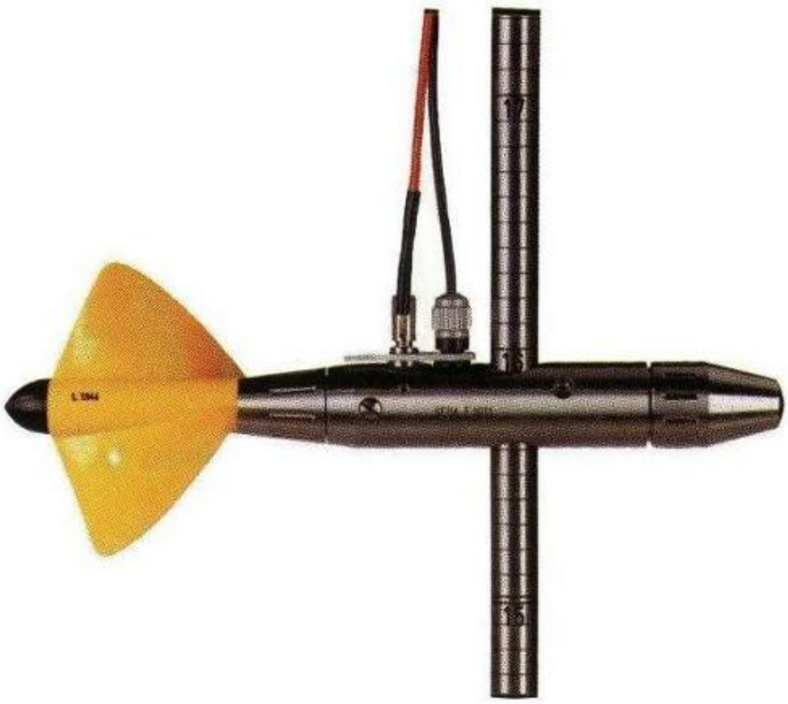


- **Mesure la pression totale**

C'est la somme de la pression statique et de la pression dynamique. Pression statique et dynamique sont égales pour un fluide au repos. De même, aux pertes par frottement près, la pression totale d'un fluide est constante quelque soit sa vitesse.

III-4 <u>Mesure la vitesse :</u>

- *<u>Tube de Prandtl</u>*
- *<u>Moulinet</u>*



- *<u>Anémomètre à fil chaud</u>*

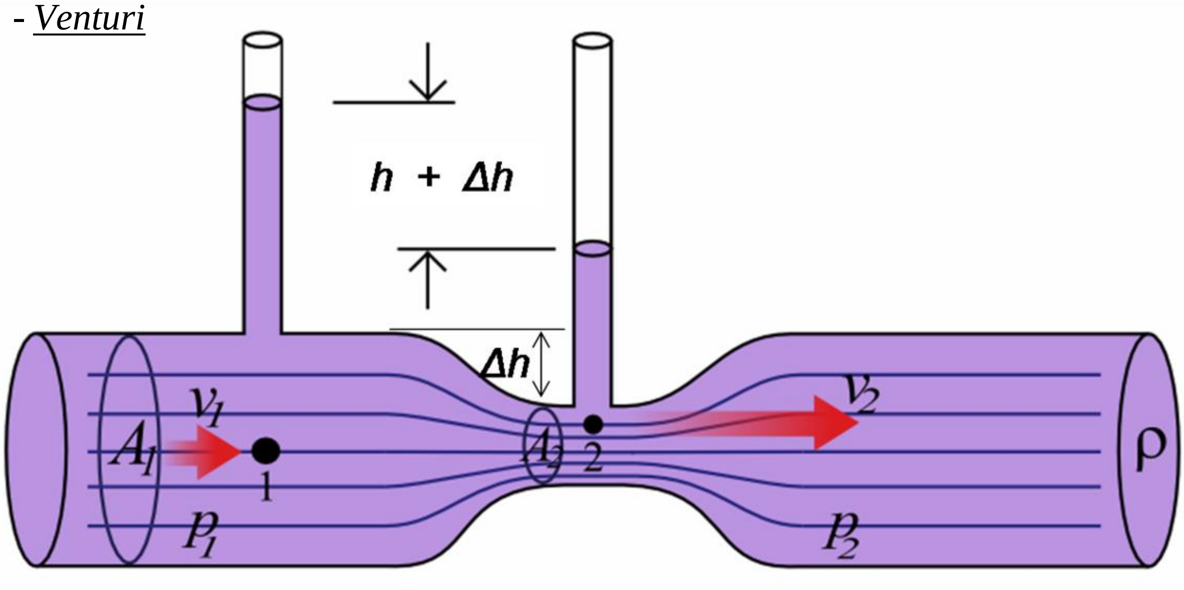
- *Vélocimètre à laser*

- *Tracer pour mesure la vitesse*
- *Sonder de déviation*

III-5 Mesure la Débit :

Le débit est la quantité de fluide écoulée pendant le temps t. La quantité peut être définie par un volume ou une masse.

- *Venturi*



$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{{V_1}^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{{V_2}^2}{2g}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} = \frac{{V_2}^2}{2g} - \frac{{V_1}^2}{2g}$$

$$\frac{\Delta P}{\rho g}=\frac{\left(Q/_{S_2}\right)^2}{2g}-\frac{\left(Q/_{S_1}\right)^2}{2g}$$

$$\frac{\Delta P}{\rho g}=\frac{Q^{é}}{2g}.\left(\frac{1}{{S_2}^2}-\frac{1}{{S_1}^2}\right)$$

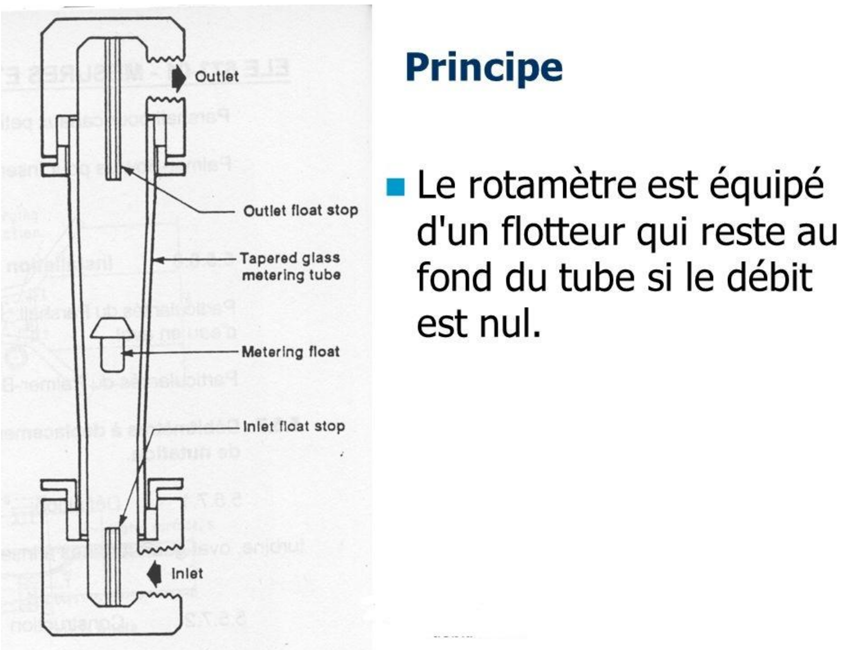
$$Q_1=k.\sqrt{2.\frac{\Delta P}{\rho}}$$

$$k=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{{S_2}^2}-\frac{1}{{S_1}^2}}}$$

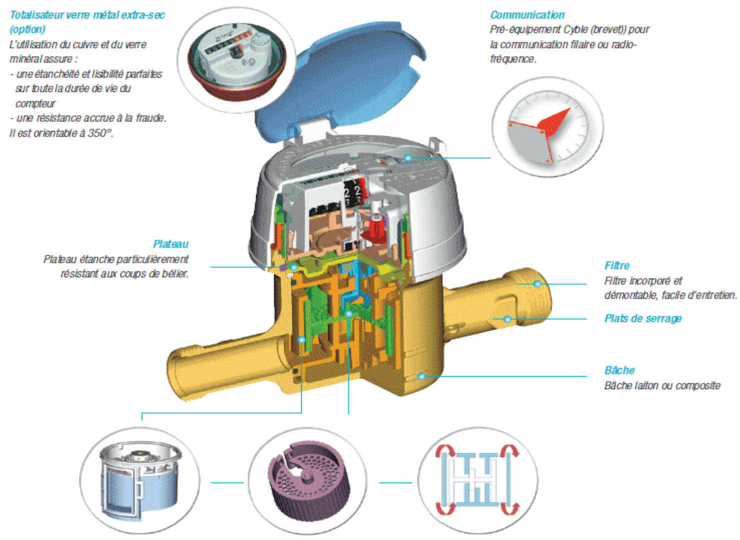
Expérimental : $Q=C_i.Q_0$

Mesure directe : $Q=\frac{Volume}{Temps}$

- *Rotamètre*



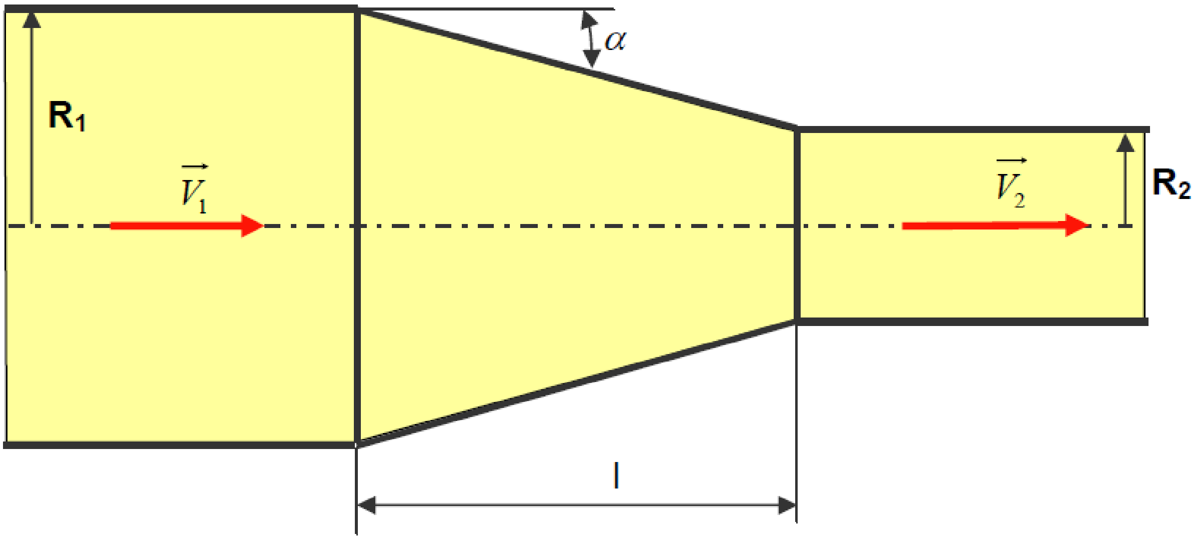
Compteur



Série des exercices

Exercice 1:

On veut accélérer la circulation d'un fluide parfait dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par 4. Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle α



1) Calculer le rapport des rayons (R_1/R_2).

2) Calculer (R_1 - R_2) en fonction de L et α. En déduire la longueur L. (R_1 = 50 mm, α = 15°).

Réponse

1) On applique l'équation de continuité :

$V_1.S_1 = V_2.S_2$ ou encore $\frac{S_1}{S_2} = \frac{V_2}{V_1}$ or $S_1 = \pi.R_1^2$ et $S_2 = \pi.R_2^2$ d'où $\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}} = 2}$

2) $tg\alpha = \frac{R_1 - R_2}{l}$ donc $\boxed{l = \frac{R_1 - R_2}{tg\alpha}}$ or $R_2 = \frac{R_1}{2}$ donc $l = \frac{R_1}{2.tg\alpha}$ A.N.: $\boxed{L = 93{,}3 \text{ mm}}$.

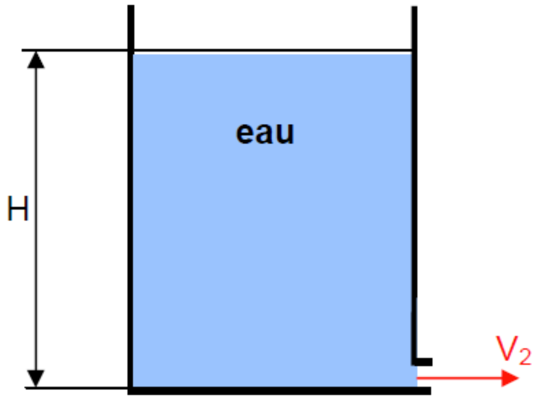
Exercice 2

On considère un réservoir remplie d'eau à une hauteur **H= 3 m** , muni d'un petit orifice à sa base de diamètre **d= 10 mm**.

1) En précisant les hypotèses prises en comptes, appliquer le théorème de Bernouilli pour calculer la vitesse V_2 d'écoulement d'eau.

2) En déduire le débit volumique Q_v en (l/s) en sortie de l'orifice.

On suppose que g=9,81 m/s.



Réponse

1) Vitesse d'écoulement V_2 ?

On applique le théorème de Bernoulli avec les hypothèses suivantes : $V_1 \approx 0$ car le niveau dans le réservoir varie lentement et $P_1=P_2=P_{atm}$,

$$\frac{V_2^2-V_1^2}{2}+\frac{P_2-P_1}{\rho}+g.(Z_2-Z_1)=0$$ On obtient :

$\boxed{V_2=\sqrt{2.g.H}}$ A.N. $\boxed{V_2=\sqrt{2.9{,}81.3}=7{,}67\ m/s}$

2) Débit volumique Q_v ?

$\boxed{Q_V=V_2.S}$ or $S=\frac{\pi.d^2}{4}=\frac{\pi.(10.10^{-3})^2}{4}=7{,}87.10^{-2}\ m^2$ A.N. $\boxed{Q_V=0{,}6\ L/s}$

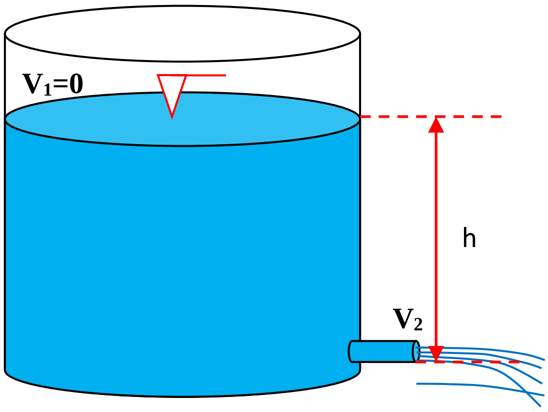
Exercice 3

Un fluide parfait incompressible s'écoule d'un orifice circulaire situé sur le coté d'un réservoir avec un débit volumique q_v=0,4 L/s. Le diamètre de l'orifice est d=10 mm.

1) Déterminer la vitesse d'écoulement au niveau de l'orifice.

2) Enoncer le théorème de Bernoulli.

3) A quelle distance de la surface libre se trouve l'orifice ?



Réponse

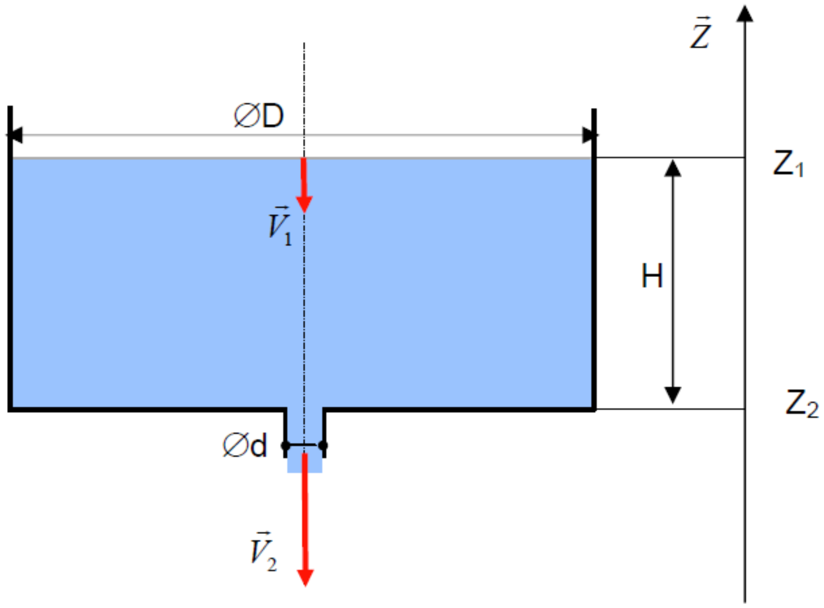
1) Vitesse d'écoulement : $\boxed{V = \frac{q_v}{S} = \frac{4.q_v}{\pi.d^2}}$ A.N. $\boxed{V = \frac{4.0,4.10^{-3}}{\pi.0,01^2} = 5,1\ m/s}$

2) Théorème de Bernoulli : $\boxed{\frac{V_1^2}{2.g} + Z_1 + \frac{P_1}{\varpi} = \frac{V_2^2}{2.g} + Z_2 + \frac{P_2}{\varpi}}$

3) On a Z_1-Z_2=h ; P_1=P_2=P_{atm} ; V_1=0 donc $\boxed{h = \frac{V_2^2}{2.g}}$ A.N. $\boxed{h = \frac{5,1^2}{2.9,81} = 1,32\ m}$

Exercice 3

On considère un réservoir cylindrique de diamètre intérieur D = 2 m rempli d'eau jusqu'à une hauteur H = 3 m. Le fond du réservoir est muni d'un orifice de diamètre d = 10 mm permettant de faire évacuer l'eau.



Si on laisse passer un temps très petit dt, le niveau d'eau H du réservoir descend d'une quantité dH. On note $V_1 = \frac{dH}{dt}$ la vitesse de descente du niveau d'eau, et V_2 la vitesse d'écoulement dans l'orifice. On donne l'accélération de la pesanteur g = 9,81 m/s^2.

1) Ecrire l'équation de continuité. En déduire l'expression de V_1 en fonction de V_2, D et d.

2) Ecrire l'équation de Bernoulli. On suppose que le fluide est parfait et incompressible.

3) A partir des réponses aux questions 1) et 2) établir l'expression de la vitesse d'écoulement V_2 en fonction de g, H, D et d.

4) Calculer la vitesse V_2. On suppose que le diamètre d est négligeable devant D. C'est-à-dire $\frac{d}{D} << 1$.

5) En déduire le débit volumique q_V.

Réponse

1) Equation de continuité : $\boxed{\frac{\pi.D^2}{4}.V_1 = \frac{\pi.d^2}{4}.V_2}$ donc la vitesse $\boxed{V_1 = \left(\frac{d}{D}\right)^2.V_2}$ (1)

2) Equation de Bernoulli : $\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g.(Z_2 - Z_1) = 0$

Or $P_1 = P_2 = P_{atm}$ donc : $\boxed{\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} - g.H = 0}$ (2)

3) On substitue l'équation (1) dans (2) on obtient : $\frac{V_2^2 - \left(\frac{d}{D}\right)^4.V_2^2}{2} = g.H$

Donc la vitesse : $\boxed{V_2 = \sqrt{\frac{2.g.H}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}}}$

4) Si $\left(\frac{d}{D}\right) << 1$ alors $\boxed{V_2 = \sqrt{2.g.H}}$ A.N. $\boxed{V_2 = \sqrt{2.9,81.3} = 7,67\ m/s}$

5) $\boxed{q_v = \frac{\pi.d^2}{4}.V_2}$ A.N. $\boxed{q_V = \frac{\pi.0,01^2}{4}.7,67 = 6.10^{-4}\ m^3/s}$

Chapitre IV DYNAMIQUE DES FLUIDES REELS

IV-1 Expérience de Reynolds :

En 1883, Osborne Reynolds (1842–1912) a mise en évidence que l'écoulement dans un tube cylindrique dépend du diamètre, du fluide et de la vitesse de l'écoulement ; il introduisit un filet d'un colorant dans l'écoulement d'eau dans un tube. Pour un tube et un liquide (en l'occurrence l'eau) données, Reynolds observa que lorsque le débit fut faible le filet resta identifiable et stable. En faisant augmentant le débit jusqu'au un seuil critique de débit, Reynolds observa ensuite que, a une certaine distance de l'entrée du tube, le filet devint ondulé (on dit aujourd'hui *instable*).

Reynolds a ensuite démontré expérimentalement que l'état de l'écoulement est caractérisé par un nombre adimensionnel, aujourd'hui appelé le *nombre de Reynolds*.

Où Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en a dimensionnant les équations de Navier-Stokes. On le définit par la formule suivante :

$$R_c = \frac{V.D_h.\rho}{\mu} = \frac{V.D_h}{\vartheta}$$

V : vitesse moyenne d'écoulement en m/s.

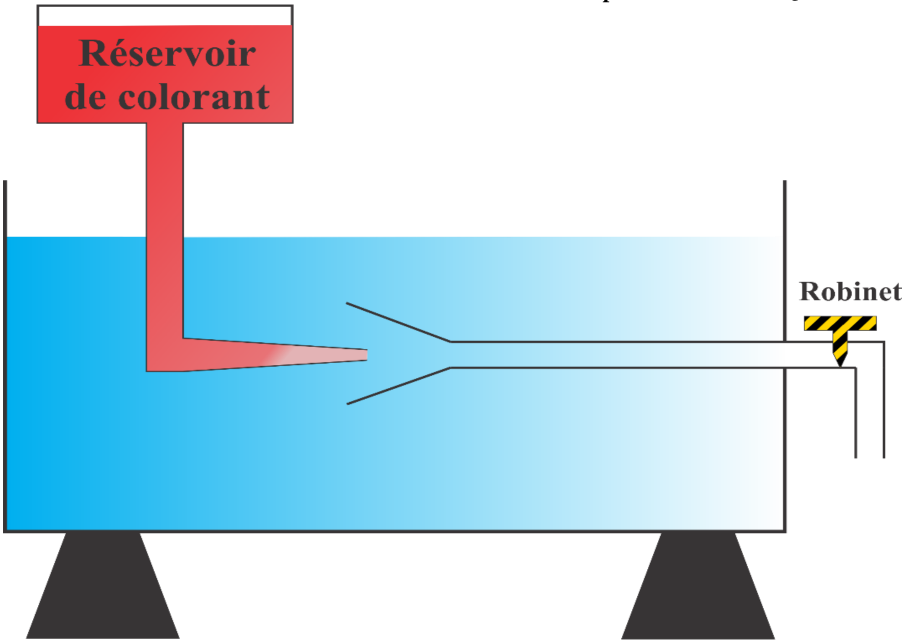
D_h: Diamètre hydraulique en m.

ϑ : viscosité cinématique en m^2/s

ρ : Masse volumique du fluide en m^3/kg

μ : Viscosité dynamique en Pa.s

Un premier réservoir d'eau de niveau constant est vidangé par un tuyau. Une vanne placée à l'extrémité du tuyau permet de faire varier le débit Q (m^3/s). Un deuxième tuyau est placé à l'intérieur du réservoir. Il contient un colorant et permet d'obtenir un mince filet fluide coloré au centre du tuyau.



En fonction des nombres de Reynolds croissants, on distingue quatre régimes principaux : régime de Stokes, régime laminaire, régime transitoire, régime turbulent.

L'écoulement de Stokes correspond aux très faibles valeurs du Reynolds (inférieures à 1). Dans ce cas les forces d'inertie liées aux vitesses étant négligeables, les forces visqueuses et les forces de pression s'équilibrent. Cette notion correspond au domaine de la micro fluidique. Pour des valeurs plus élevées, les forces d'inertie entrent en jeu : c'est le domaine de la dynamique des fluides.

Donc :

- ✓ Si $R_e<2000$, le régime est Laminaire.
- ✓ Si $R_e>2600$, le régime est turbulent.
- ✓ Si $2000<R_e<2600$, le régime est transitoire

IV-2 <u>Caractéristiques des écoulements luminaires</u> :

Un écoulement en régime laminaire est un écoulement stratifie, qui a sans brassage de particules fluides et sans pulsation de vitesse.

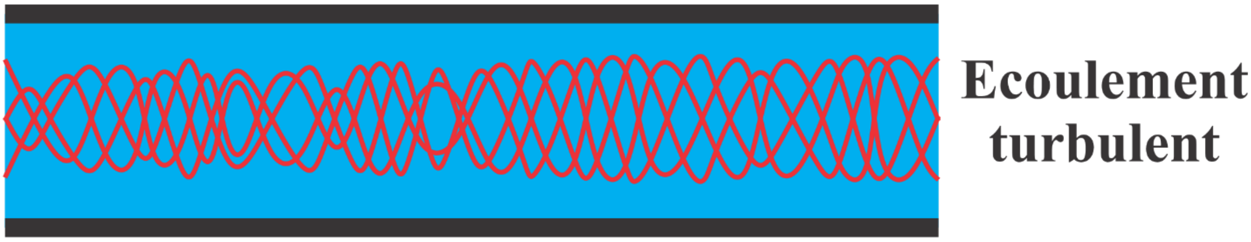
Quand la vitesse est très faible (quelques millimètres par seconde) le filet coloré reste bien défini, rectiligne et parallèle à l'axe du tuyau. Le régime est dit laminaire. L'écoulement laminaire est rare dans le domaine de l'hydraulique de l'eau potable et de l'assainissement, toutefois il n'est pas inexistant.

Les couches du fluide glissent les unes sur les autres, la viscosité du fluide élimine toute tendance à l'instabilité.

IV-3 <u>Caractéristiques des écoulements turbulents</u> :

Quand la vitesse est plus élevée, le filet devient ondulé et très instable. Il se mélange rapidement au fluide ambiant. Des tourbillons de différentes tailles apparaissent. Le régime est dit turbulent.

La turbulence se caractérise donc par la création de tourbillons. Ils mélangent les matières dissoutes dans l'eau, comme par exemple le chlore dans un réseau d'eau potable ou le rejet d'une station de traitement des eaux usées dans une rivière. La mise en place d'un agitateur dans un bassin crée de la turbulence et ainsi il tend à homogénéiser les matières dissoutes.



Un écoulement turbulent est caractérisé par un brassage intense du fluide. Le mouvement des particules fluides est des ordonnée et leur trajectoire sont des courbes aléatoires.

L'écoulement turbulent est caractérisé par un important échange transversal de quantité de mouvement.

IV-4 Intégration des équations de Navier stokes (NS) dans le cas d'un écoulement monodimensionnel :

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho . F_x + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho . F_y + \frac{\partial P_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\rho \frac{d\omega}{dt} = \rho . F_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$div\, \vec{V} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

Contrainte tangentielle :

Hypothèses de Newton : $\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \end{cases}$

Contrainte tangentielle :

$$\begin{cases} P_{xx} = -P + k_{xx} \\ P_{yy} = -P + k_{yy} \\ P_{zz} = -P + k_{zz} \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} P_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} \\ P_{yy} = -P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ P_{zz} = -P + 2\mu \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{cases}$

P_{xx} : Représente la pression dans un fluide visqueuse.

k_{xx} : Tient compte de l'influence de viscosité.

Donc la formule (1) , (2) et (3) devenu :

$$\rho\frac{dU}{dt} = \rho.F_x + \frac{\partial\left(-P + 2\mu\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right)\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)\right)}{\partial z}$$

$$\rho\frac{dv}{dt} = \rho.F_y + \frac{\partial\left(-P + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(-P + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\right)\right)}{\partial z}$$

$$\rho\frac{d\omega}{dt} = \rho.F_z + \frac{\partial\left(-P + 2\mu\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\right)\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(-P + 2\mu\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)}{\partial z}$$

Donc : $\begin{cases} \rho\frac{dU}{dt} = \rho.F_x + \mu.\Delta U - \frac{\partial P}{\partial x} \\ \rho\frac{dv}{dt} = \rho.F_y + \mu.\Delta v - \frac{\partial P}{\partial y} \\ \rho\frac{d\omega}{dt} = \rho.F_z + \mu.\Delta\omega - \frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$

$\rho\frac{dV}{dt} = \rho.F + \rho.\Delta V - grad\ P$ Equation de Navier-Stokes

Si: μ=0

$\frac{dV}{dt} = F - \frac{1}{\rho}.grad\ P$ Equation d'Euler

Si l'écoulement est permanant donc :

$\frac{dV}{dt} = 0 \Longrightarrow F = \frac{1}{\rho}.grad\ P$ Equation hydrostatique

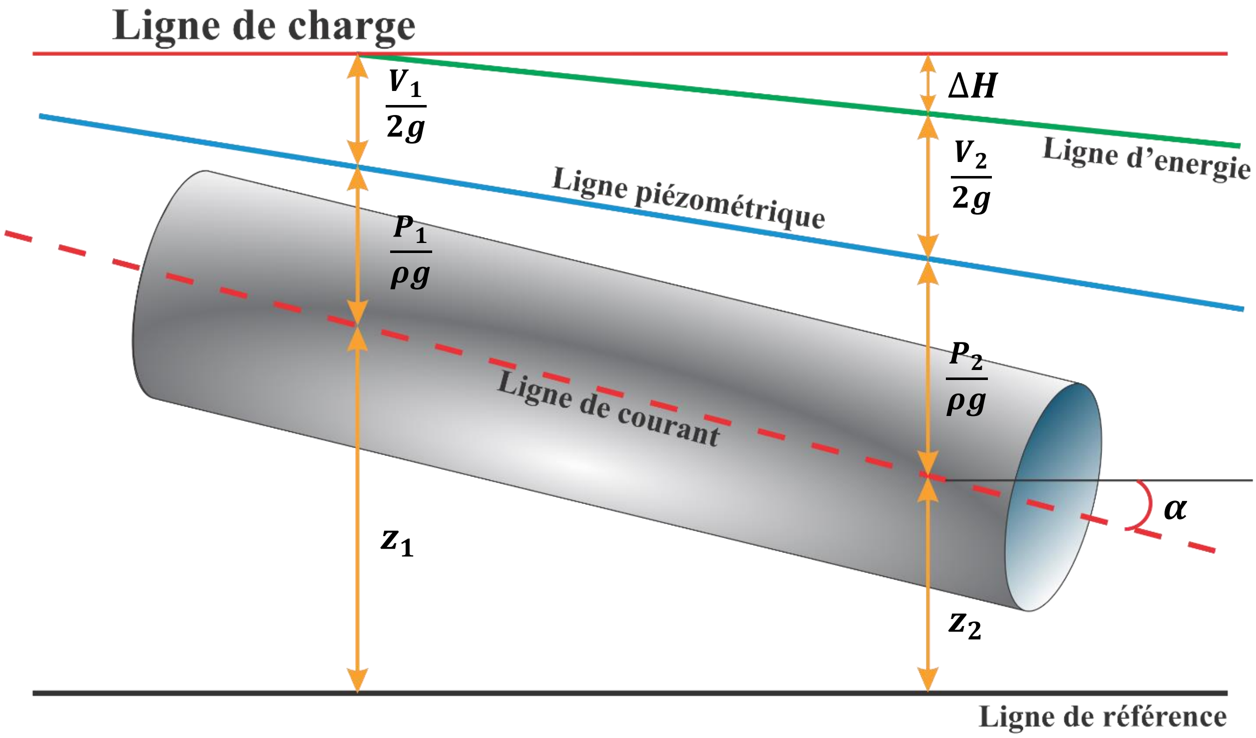
IV-5 <u>Equation de Bernoulli appliquée a un tube de courant</u> :

Lorsque le fluide est réel, la viscosité est non nulle, alors au cours du déplacement du fluide, les différentes couches frottent les unes contre les autres et contre la paroi qui n'est pas parfaitement lisse d'où il y a une perte sous forme de dégagement d'énergie ; cette perte appelée « perte de charge »

La relation de Bernoulli peut s'écrire sous la forme :

$$z_1 + \frac{{V_1}^2}{2.g} + \frac{P_1}{\rho.g} = z_1 + \frac{{V_2}^2}{2.g} + \frac{P_2}{\rho.g} + \Delta H$$

L'unité de ΔH est J/m

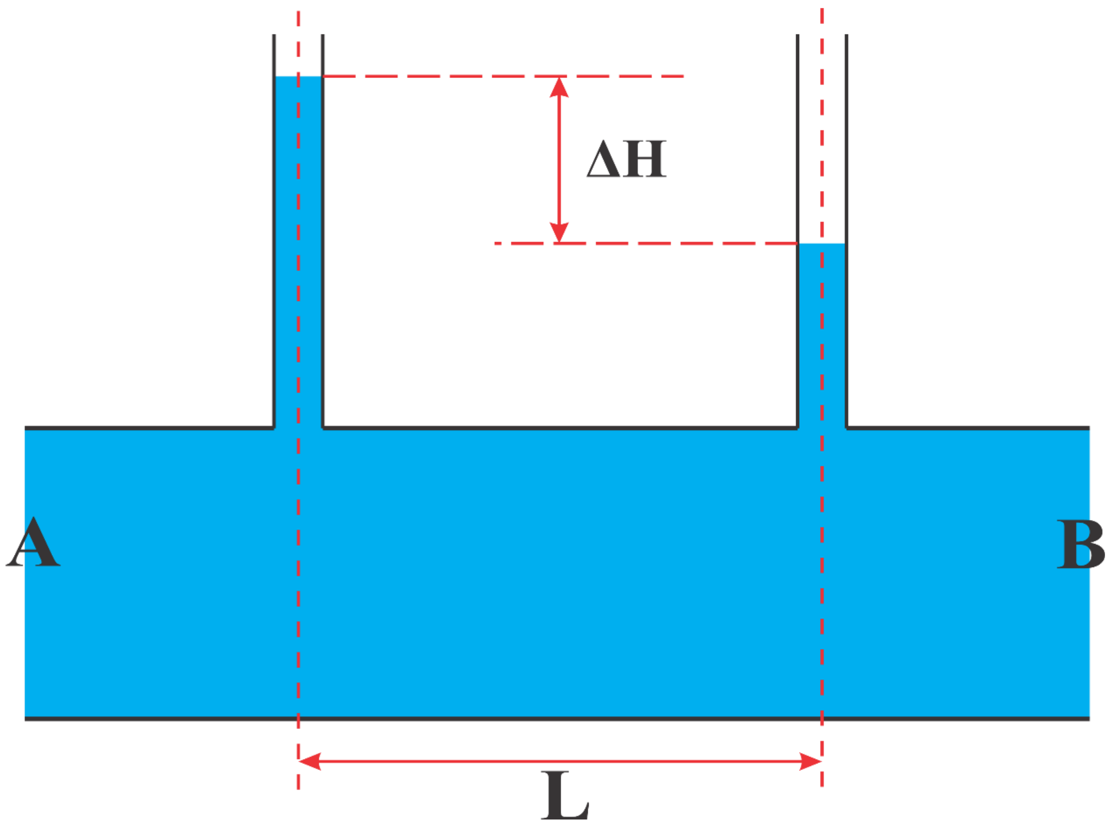


IV-6 Expression générale de pertes de charge :

$$\Delta H_T = \Delta H_e + \Delta H_s$$

ΔH_e: Perte de charge linéaire ; elle liée au frottement.

ΔH_s: Perte de charge singulière ; elle est liée au sanglante.



- ✓ Appliquons l'équation de quantité de mouvement entre les sections A et B

$$\sum F = \rho . q . V_B - \rho . q . V_A$$

$$P_1 . S_1 - P_2 . S_2 - F = 0$$

$$(P_1 - P_2) . S = F$$

Où :
$$F = \tau - 2\pi r . L$$

$$P_1 - P_2 = \tau . \frac{P}{S} . L \text{ ....(1)}$$

P : Périmètre.

On applique l'équation de Bernoulli entre les sections (A) et (B) :

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{{V_1}^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{{V_2}^2}{2g} + \Delta H$$

$$P_1 - P_2 = \rho . g . \Delta H$$

Donc :
$$\rho . g . \Delta H = \tau . \frac{P}{S} . L$$

$$\Delta H = \frac{\tau}{\rho g} . \frac{P}{S} . L$$

Rayon hydraulique :

$$R_h = \frac{S_m}{P_m}$$

S_m : Section mouillée.

P_m : Périmètre mouillée

Pour une conduite circulaire :

$$R_h = \frac{\pi \frac{D^4}{4}}{\pi D}$$

D : diamètre.

$$R_h = \frac{D}{4}$$

Diamètre hydraulique :
$$D_h = 4 . R_h$$

Pour une conduite circulaire : $D_h = 4 . R_h = 4 . \frac{D}{4} = D$

$$\Delta H = \frac{\tau}{\rho g} . \frac{4}{D_h} . L$$

Introduisons : le coefficient de frottement

$$C_f = \frac{\tau}{\rho.\frac{V^2}{2}} \Longrightarrow \tau = C_f.\rho.\frac{V^2}{2}$$

$$\Delta H = 4.\frac{C_f.V^2.L}{2.g.D} = \frac{4.C_f.V^2.L}{D.2.g}$$

Poussons : $4C_f = \lambda$

$$\Delta H = \frac{\lambda.V^2.L}{2.g.D} = \frac{\lambda.Q^2.L}{2.g.D.S^2}$$ Formule de Darcy-Weissbach

Où :

λ : Coefficient de frottement.

L : longueur de conduite.

V : Vitesse moyenne $\left(V = {}^{Q}/_{S}\right)$.

ΔH : Perte d'énergie linéaire.

<u>Perte de charge singulière</u> :

$$\Delta H_s = \xi.\frac{V^2}{2.g}$$

ξ : Coefficient de perte de charge singulière.

Références bibliographiques

1 - Carlier, M., (1980). Hydraulique générale et appliquée, Collection de la direction des études et recherches d'électricité de France, Volume 14, 2eme Edition, Eyrolles, Paris, France

2 - Lencastre, A. (1999). Hydraulique générale, Editions Eyrolles, première Edition, Paris.

3 -José VAZQUEZ, (2000). Hydraulique générale, École nationale du génie de l'eau et de l'environnement de Strasbourg.

4 -Boualem REMINI, (2010). Cours de mécanique des fluides, Office des publication universitaires, Algérie.

5 - Boualem REMINI, (2011). Mécanique des fluides HDRAUSTATIQUE Cours -Exercices, Office des publication universitaires, Algérie.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمّه لخضر الوادي

Faculty of Technology
Department of Hydraulic and Civil Engineering

كليـــة التكنولوجيا
قســـم الري والهندسة المدنية

Cours Hydraulique Générale I

Dr Miloudi Abdelmonem

Niveau Deuxième Sciences Technologie

Spécialité Hydraulique

Semestre 4

<u>Promotions 2019-2020</u>

Table de matières

Chapitre I
Hydrostatique

La statique des fluides s'intéresse à l'étude des fluides au repos, lorsque le fluide n'est animé d'aucun mouvement. L'objectif est de calculer la pression en tout point du domaine fluide. Un deuxième objectif est le calcul des efforts exercés par ce fluide au repos sur des surfaces solides indéformables avec lequel il est en contact.

Le champ d'applications est très large et concerne par exemple le calcul de la force résultante appliquée sur un barrage ou sur un objet partiellement ou complètement immergé, ainsi que le calcul de la pression dans des réservoirs.

L'hydrostatique étudie les conditions d'équilibre des liquides au repos. Ce chapitre aborde l'étude de la répartition de la pression, notamment en fonction de la distance verticale, ainsi que les forces qui en résultent.

I.1 <u>Equation fondamentale de l'Hydrostatique :</u>

De Fluide au repos et les composants de vitesse dans l'espace est $V(U, \vartheta, \omega)$ donc :

$$V = 0;\ \frac{dU}{dt} = 0;\ \frac{d\vartheta}{dt} = 0;\ \frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$\begin{pmatrix} P_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & P_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & P_{zz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$$

$$P_{xy} = O;\ P_{xz} = O;\ P_{zx} = O$$

$$P_{yx} = O;\ P_{yz} = O;\ P_{zy} = O$$

$$P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = -P$$

$$\frac{dU}{dt} = F_x + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z}\right)$$

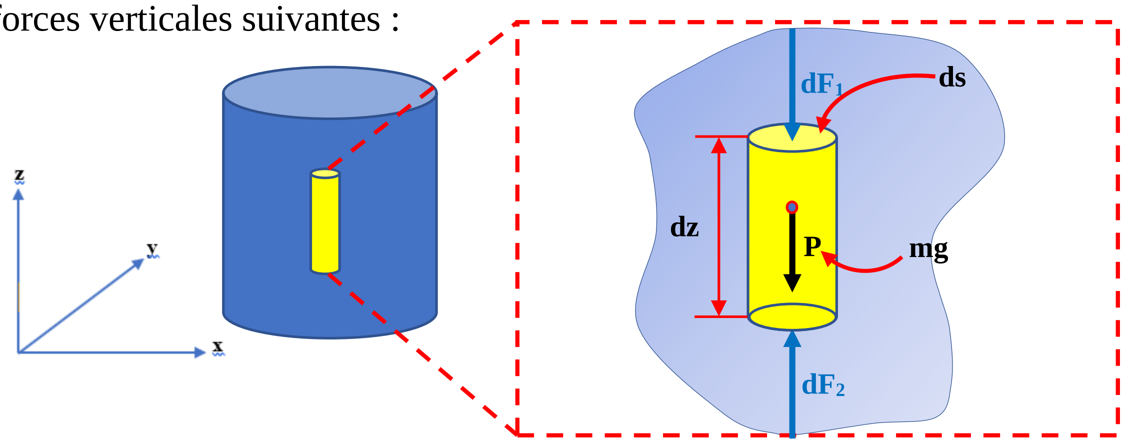
$$\frac{d\vartheta}{dt} = F_y + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = F_z + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} F_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ F_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ F_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{F = \frac{1}{\rho} grad\ P}$$

Equation fondamentale de l'hydrostatique

On considère dans un réservoir un fluide au repos, dont on extrait un petit parallélépipède d'eau d'axe vertical z. Soit p la pression en son centre. Il est soumis aux forces verticales suivantes :



Les forces de viscosité et de turbulence n'existent pas puisqu'il n'y a pas de vitesse relative entre les particules de fluide.

Les forces d'inertie n'existe pas puisque le fluide est au repos (vitesse nulle).

Concernant les forces de volume, il n'en existe qu'une seule la force de pesanteur. Elle s'écrit de la façon suivante :

$$F_{\text{pesanteur}} = m.g = g.\rho.dz.ds$$

Concernant les forces de surface, la pression agit sur la face supérieure et inférieure de l'élément. Ces forces s'écrivent de la façon suivante :

- ✓ Force de pression sur la surface inférieure :

$$F_{pression\ inf.} = dF_1 = \left(P - \frac{\partial P}{\partial z}.dz\right).ds$$

- ✓ Force de pression sur la surface supérieure :

$$F_{pression\ sup.} = dF_2 = -\left(P + \frac{\partial P}{\partial z}.dz\right).ds$$

Le cylindre élémentaire étant en équilibre dans le fluide, écrivons que la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle :

$$dF_2 + dF_1 + F_{\text{pesanteur}} = 0$$

L'équation de l'hydrostatique est déterminée en écrivant l'équilibre de l'ensemble des forces : Σ F = Forces d'inertie. En projetant cette équation suivant la verticale (l'axe oz), on a :

$$\left(P - \frac{\partial P}{\partial z}.dz\right).ds - \left(\left(p + \frac{\partial p}{\partial z}.dz\right).ds\right) - g.\rho.dz.ds = 0$$

Soit : $$-\frac{\partial p}{\partial z} - g.\rho = 0$$

On peut écrire de façon analogue les équations d'équilibre dans les autres directions :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0\ ;\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Ces trois équations montrent que la pression est indépendante de x et de y, c'est-à-dire que la pression ne varie pas dans les directions x et y ou encore qu'elle soit constante dans un plan horizontal. Cela est vérifié tant que l'on reste dans un même fluide (ρ constante). La pression ne dépend que de z, ce qu'on écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho.g \text{ ou } dP = -\rho.g.dz$$

I.2 <u>Pression absolue et pression relative :</u>

<u>La pression absolue</u> est définie par rapport à la pression dans le vide qui correspond à la pression nulle. On en déduit donc que la pression minimale possible est zéro.

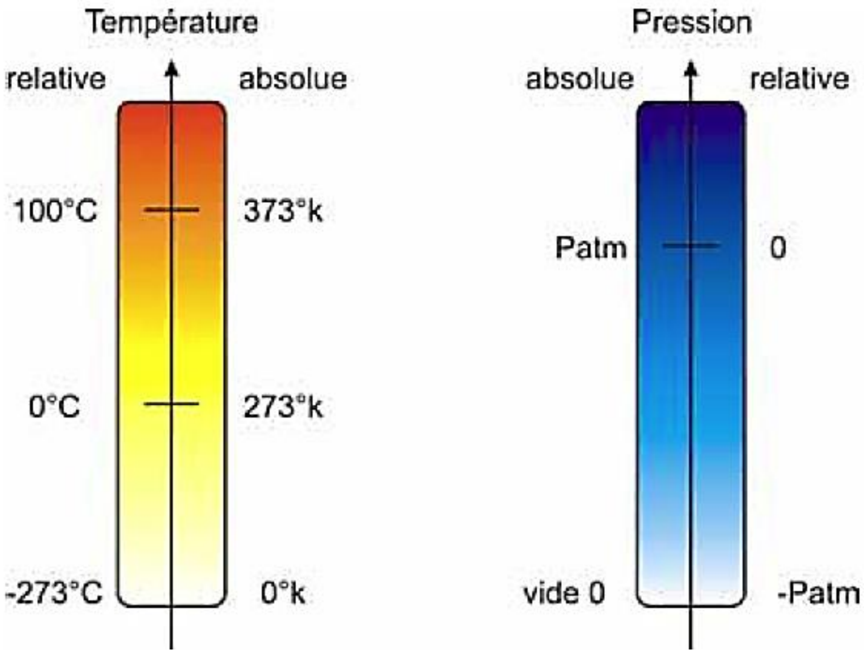
<u>La pression relative</u> se définit par rapport à une référence que l'on choisit le plus souvent égale à la pression atmosphérique. Cela consiste finalement à faire une translation du repère des pressions. La pression nulle est donc équivalente à la

pression atmosphérique (pa). La pression minimale correspond donc à : -pa (pression atmosphérique négative).

Donc :

Pression absolue : pression avec le vide comme référence………. vide = 0

Pression relative : pression aves P_{atm} comme référence………….. $P_{atm} = 0$



I.3 <u>Equation des surfaces isobares :</u>

On appelle surface isobare le lisse des points du fluide soumis à la même pression.

1. Cas d'un fluide au repos c'est-à-dire : $dP = -\rho.g.dz$……. (A)
2. Surface isobare c'est-à-dire $P = cte$ donc $dP = 0$………… (B)

D'après (A) et (B) :

$$\rho.g.dz = 0 \Longrightarrow z = cte$$

« Donc un fluide au repos les surfaces isobares sont des plans horizontales ».

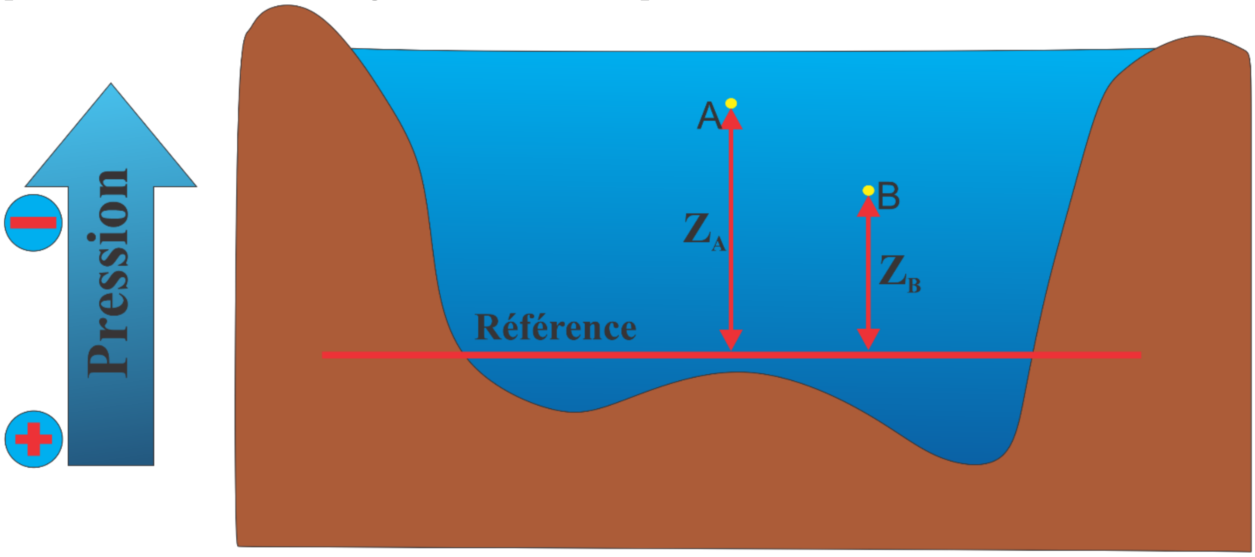
- ✓ Ce résultat est valable dans les cas des vases communiquant.
- ✓ La surface de séparation de deux liquides non mixible est horizontale.

Définition :

On appelle surface libre d'un liquide ; la surface de séparation du liquide et l'air ambiant. A cette surface la pression est constante et égale à la pression atmosphérique.

I.4 Principe de pascal :

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point se tournement intégralement en tous points du fluide.



D'prés le figure au-dessus on a :

$$P_A + \rho.g.z_A = P_B + \rho.g.z_B$$

$$P_B - P_B = \rho.g(z_A - z_B)$$

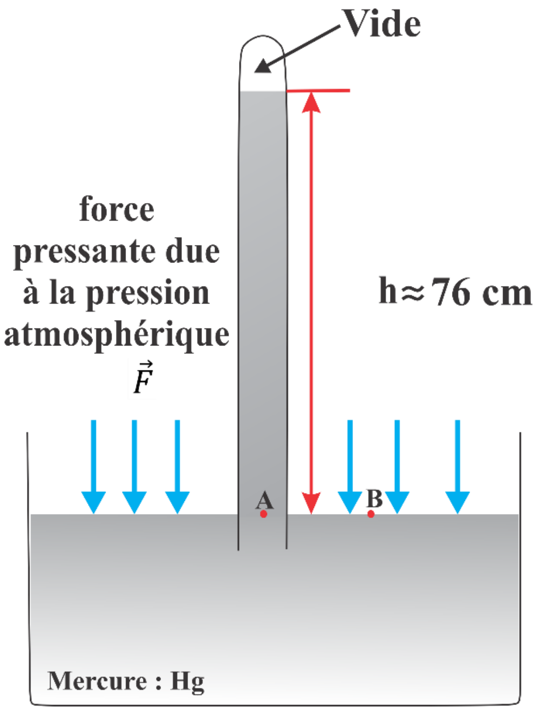
D'où :$P_B > P_A$

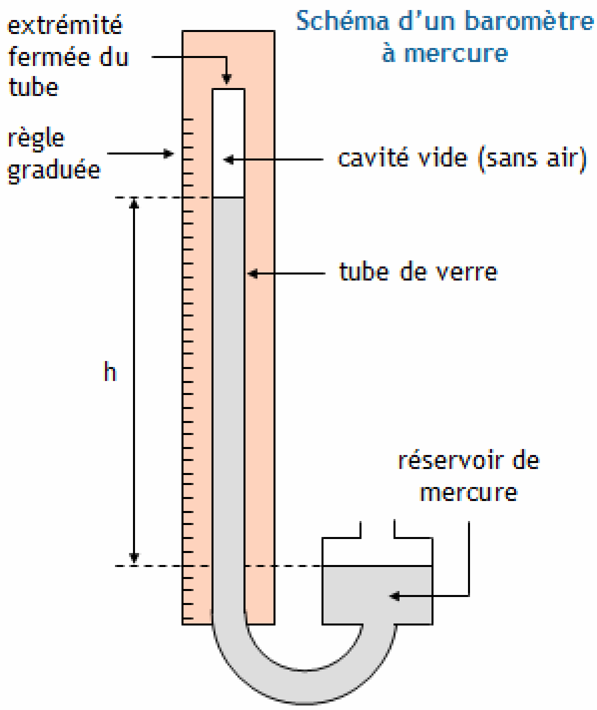
On modifie la pression en point (A) de ΔP_A sans modifier l'équilibre du système donc la pression en point (B) est modifiée de ΔP_B.

$$(P_B + \Delta P_B) - (P_A + \Delta P_A) = \rho.g(z_A - z_B) \Longrightarrow \Delta P_B = \Delta P_A$$

I.5 <u>Mesure de la pression :</u>

- **Baromètre** :





A l'équilibre (AB) surface isobare donc : Négligeable

$$P_A = P_{atm} = \rho . g . z + P_{vide}$$

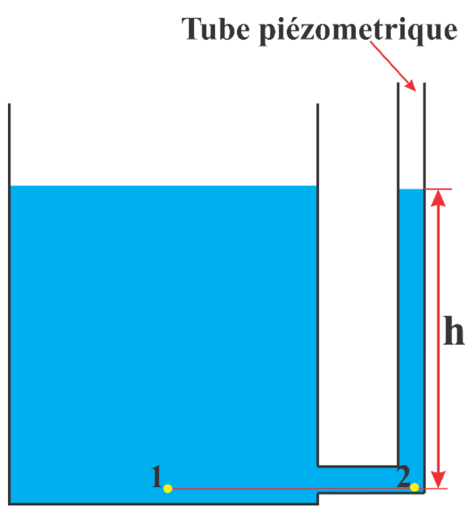
Où : $z \approx 76\ cm$ et $P_{vide} \approx 0$ (Négligeable) ; $\rho_{Hg} \approx 13600\ kg/m^3$

Donc : $P_{atm} = \ \rho . g . z = 13600\ .\ 9{,}81\ .\ 0{,}76$

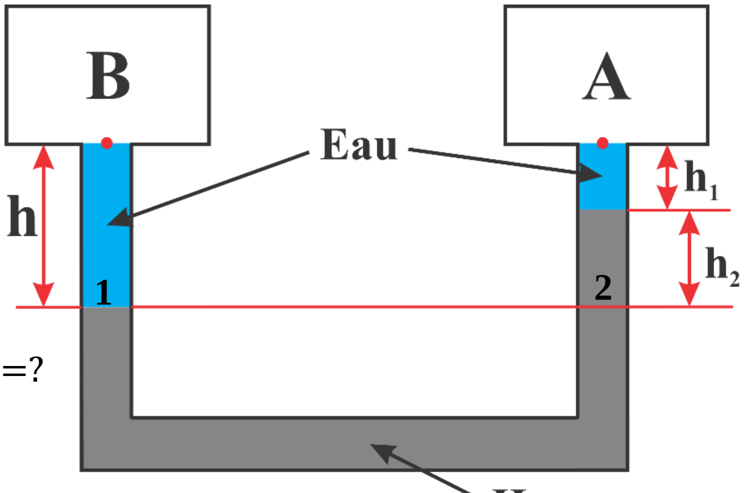
$$P_{atm} = 1{,}0136\ .\ 10^5\ Pa$$

- **Tube piézométrique** :

$P_1 = \rho . g . h + P_{atm}$



- **Manomètre différentielle** :



$P_B - P_A = ?$

Si :

$$P_1 = \rho_{eau}.g.h + P_B$$

$$P_2 = \rho_{Hg}.g.h_2 + \rho_{eau}.g.h_1 + P_A$$

Donc : $$P_B - P_A = g.h_2(\rho_{Hg} - \rho_{eau})$$

- **Manomètre incliné** :

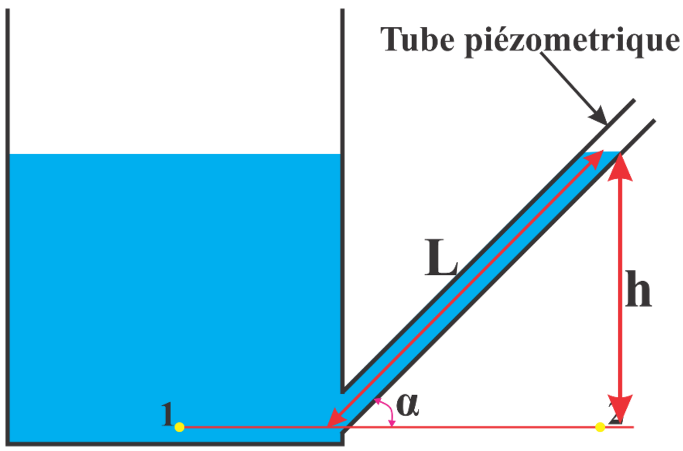
$P_1 = \rho.g.h + P_{atm}$

Où :

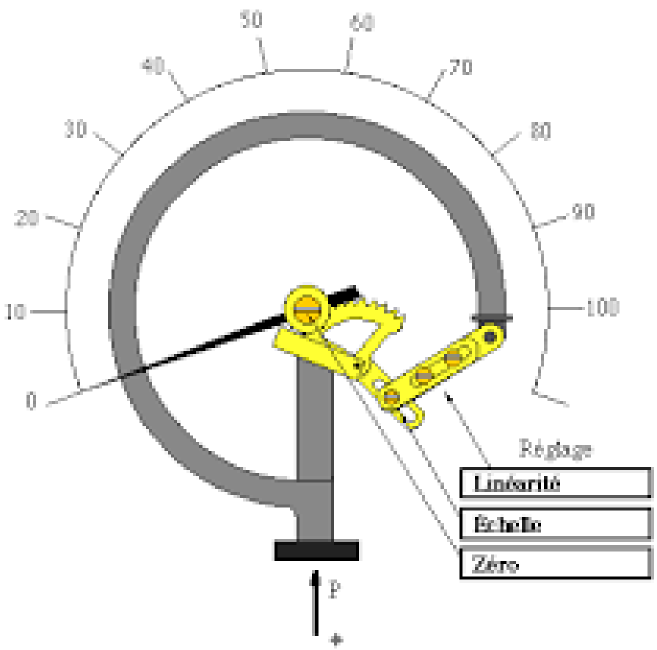
$h = L.\sin\alpha$

Donc :

$P_1 = \rho.g.L.\sin\alpha + P_{atm}$



- **Manomètre à déformation** :



I.6 Valeur maximale du vide :

Le vide apparait lorsque l'atmosphère est raréfiée. En évacuant l'air d'un espace ferme, on crée une dépression (ou vide) par rapport à la pression atmosphérique.

Le vide correspond donc à l'état d'un fluide dont la pression est inferieure a la pression atmosphérique.

Le niveau de vide peut s'exprimer en tant que :

- ✓ Niveau de dépression = valeur en pression relative, par rapport à la pression atmosphérique
- ✓ Niveau de vide en valeur absolue (défini par rapport au zéro absolu)

L'unité usuelle du vide est le millimètre de mercure (***mm Hg***).

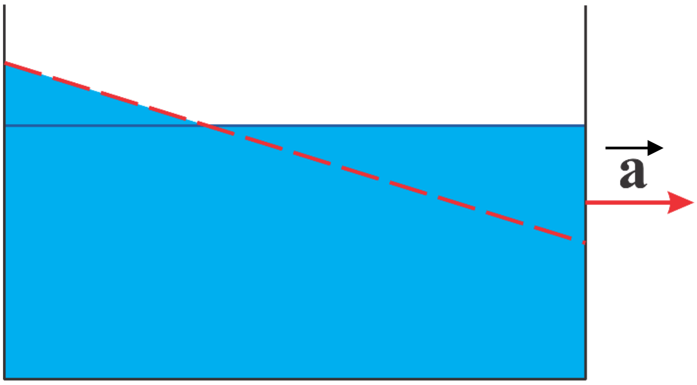
Classification des vides

Vide moyen 1013……………………..	à 10 mbar absolus
Vide primaire 10………………………	à 10^{-3} mbar absolus
Vide secondaire 10^{-3}…………………..	à 10^{-6} mbar absolus
Vide moléculaire 10^{-6}…………………	à 10^{-9} mbar absolus
Ultravide ……………………………..	< 10^{-9} mbar absolus

I.7 Equations des équilibres relatifs :

➢ **Equation de mouvement**

$$dP = \rho\left(F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz\right)$$



Ou : $\begin{cases} F_x = -a \\ F_y = 0 \\ F_z = -g \end{cases}$

Donc : $dP = \rho(-a.dx + 0 - g.dz)$

La surface isobare c'est- à-dire : $P = cte \implies dP = 0$

Donc : $$-a.dx = g.dz$$

$$\boxed{z = -\frac{a}{g}.x + cte}$$

$$\tan a = \frac{-a}{g}$$

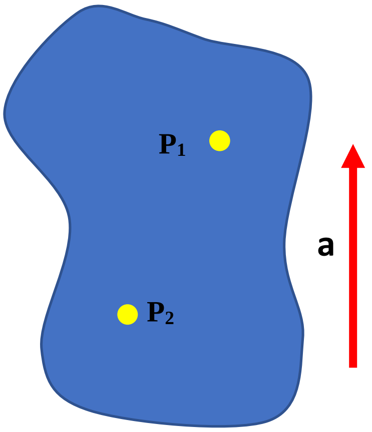
- **Accélération uniforme linéaire et verticale vers le haut :**

$$dP = \rho\left(F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz\right)$$

$$dP = \rho(0 + 0 + (-a - g).dz)$$

$$dP = \rho(-a - g).dz$$

La surface isobare : $$\boxed{dP = 0 \Longrightarrow z = cte}$$



$$P = -\rho(a + g).z + cte$$

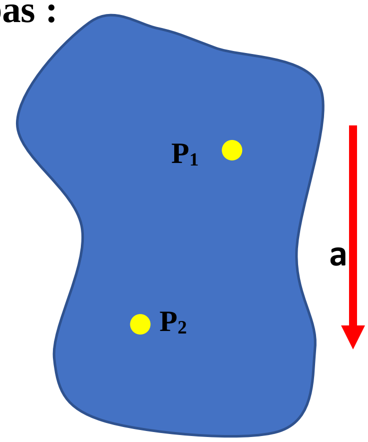
$$P_1 = -\rho(a + g).z_1 + cte$$

$$P_2 = -\rho(a + g).z_2 + cte$$

$$P_2 - P_1 = -\rho(a + g).(z_2 - z_1)$$

$$P_2 - P_1 = -\rho.g\left(1 + \frac{a}{g}\right).(z_2 - z_1)$$

- **Accélération uniforme linéaire et verticale vers le bas :**



$$dP = \rho\left(F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz\right)$$

$$dP = \rho(0 + 0 + (a - g).dz)$$

$$dP = \rho\,(a - g).dz$$

$$P_1 = \rho(a - g).z_1 + cte$$

$$P_2 = \rho(a - g).z_2 + cte$$

$$P_2 - P_1 = \rho(a-g).(z_2 - z_1)$$

$$P_2 - P_1 = \rho.g\left(\frac{a}{g} - 1\right).(z_2 - z_1)$$

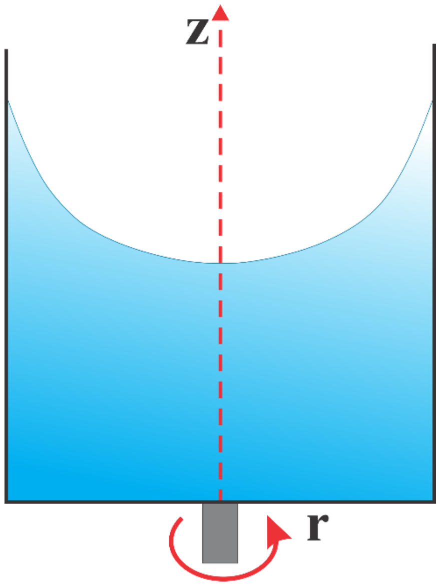
Si : $a = g \Longrightarrow P_1 = P_2$

Donc tout le fluide (liquide ; gaz) soumis à la même pression.

- **Accélération uniforme au tour d'un axe vertical :**

$$dP = \rho\left(F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz\right)$$

Ou : $\begin{cases} F_x = \omega^2.x \\ F_y = \omega^2.y \\ F_z = -g \end{cases}$



$$dP = \rho(\omega^2.x.dx + \omega^2.y.dy - g.dz)$$

$$dP = \rho.\omega^2(x.dx + y.dy) - \rho.g.dz$$

$$dP = \rho.\omega^2\left((d.dr) - \rho.g.dz\right)$$

Parce que :

$x = r.\cos\theta$; $y = r.\sin\theta$

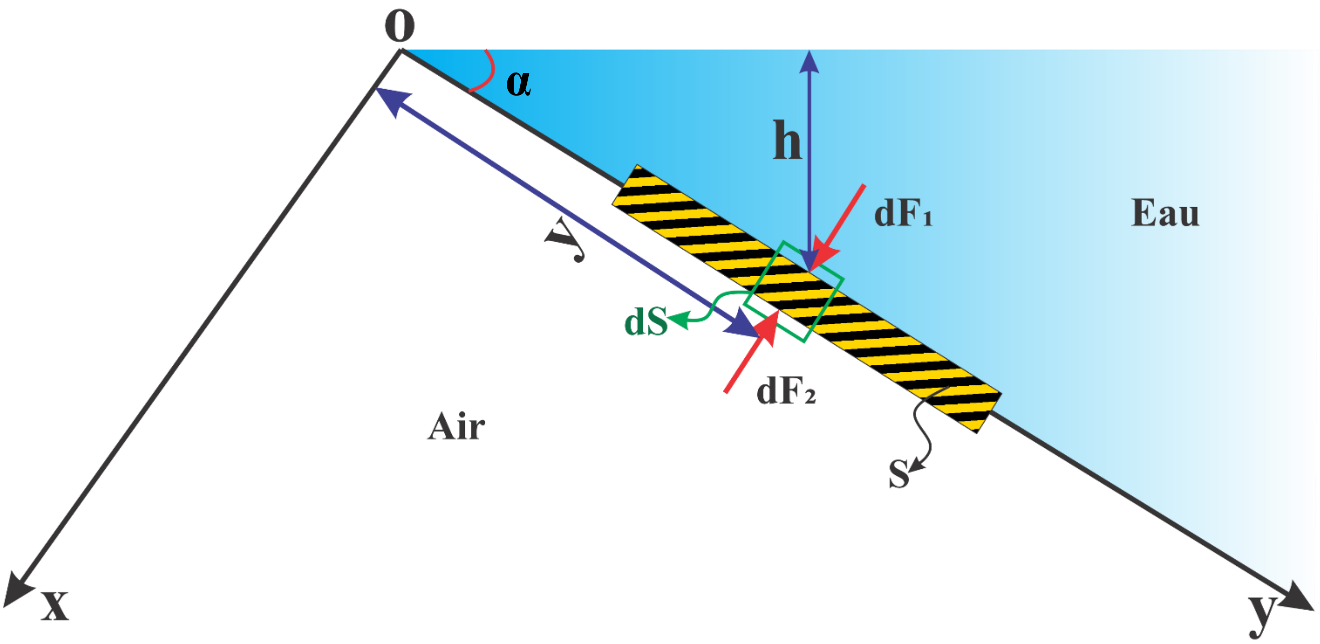
$r^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow 2.r.dr = 2.x.dx + 2.y.dy$

La surface isobre : $P = cte \Longrightarrow dP = 0$

$$\rho.\omega^2.r.dr = \rho.g.dz$$

$$z = \frac{\omega^2}{2.g}.r^2 + cte$$

I.8 Action des forces de pression sur les parois rigides :



Examinons une paroi plane symétrique qui retient le liquide au répos et est inclinée par rapport à l'horizon d'un angle (α).

$$dF = dF_1 - dF_2$$

Oú : $$dF_1 = (\rho . g . h + P_{atm}) . dS$$

$$dF_2 = P_{atm} . dS$$

$$dF = \rho . g . h . dS$$

$$dF = \rho . g . y . \sin \alpha . dS$$

Donc : $$F = \rho . g . \sin \alpha . \int y . dS$$

Oú : $$\int y . dS = y_G . S$$

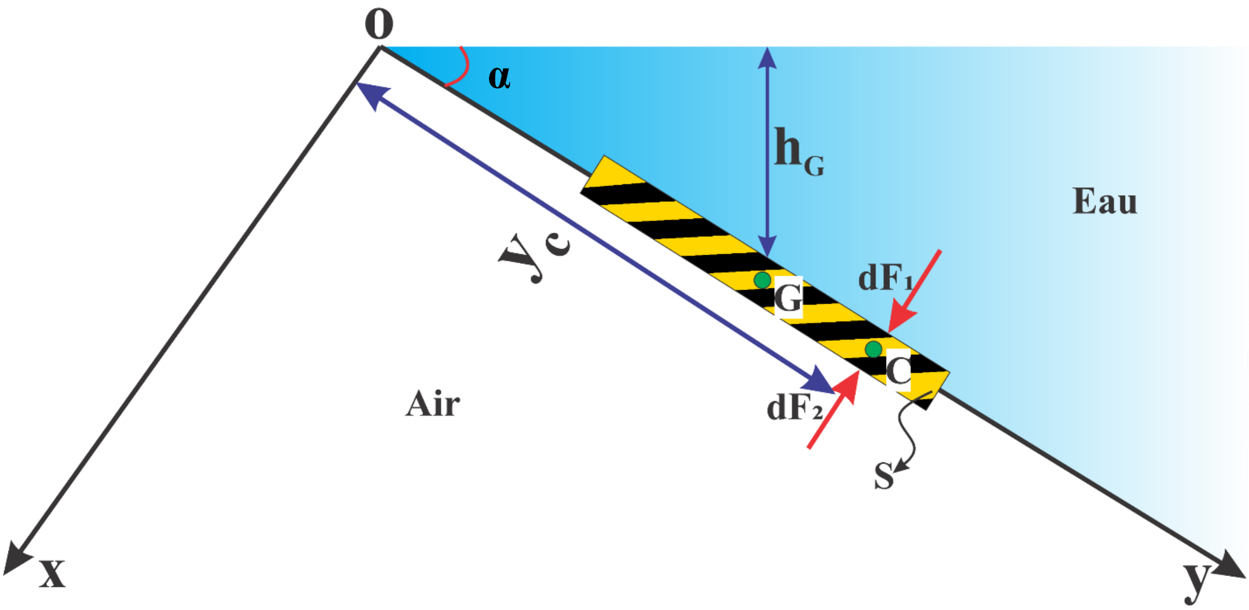
$$F = \rho . g . \sin \alpha . y_G . S$$

$$F = \rho . g . h_G . S$$

La force de pression exercée par un liquide sur une surface plane à orientation orbitraire est égale au produit de la surface (S) de la paroi par la pression que subit son centre de gravité.

- **Point d'application des forces de pression :**

Le moment de la resultante par rapport à un axe quelquonque est égale à la somme des moments de l'ensemble des forces elementaires.



$$F.y_G = \int dF.y$$

$$\rho.g.h_G.S.y_C = \int \rho.g.y.\sin\alpha.dS.y$$

$$\rho.g.y_G.\sin\alpha.S.y_C = \rho.g.\sin\alpha \int y^2.dS$$

$$\rho.g.y_G.\sin\alpha.S.y_C = \rho.g.\sin\alpha.I_{xx}$$

$$y_C = \frac{I_{xx}}{y_G.S}$$

Oú : $I_{xx} = I_0 + {y_G}^2.S$

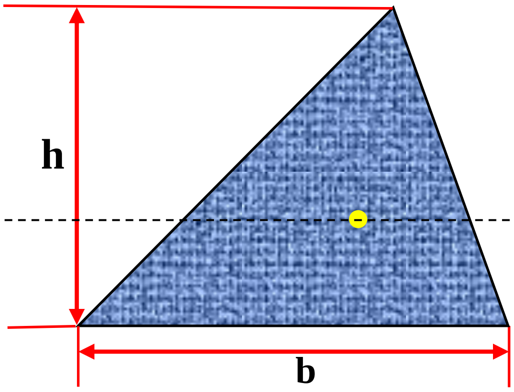
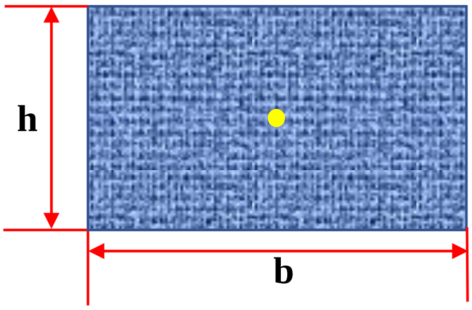
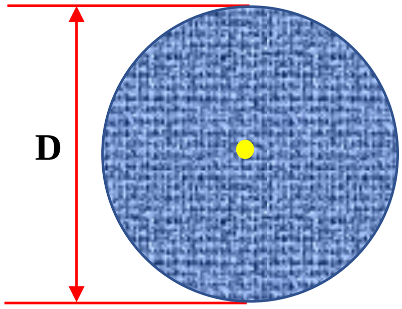
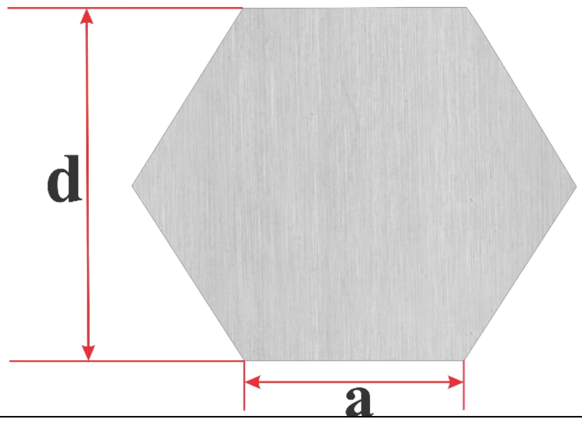
Donc :

$$y_C = y_G + \frac{I_0}{y_G.S}$$

I_{xx} : Représente l'inertie de la section suivant les axes ox.

N.B : Le centre de pousée est toujours au dessous de centre de gravité.

Le tableau suivant fournit le centre de gravité, la surface et l'inertie pour quelques formes de surface plane.

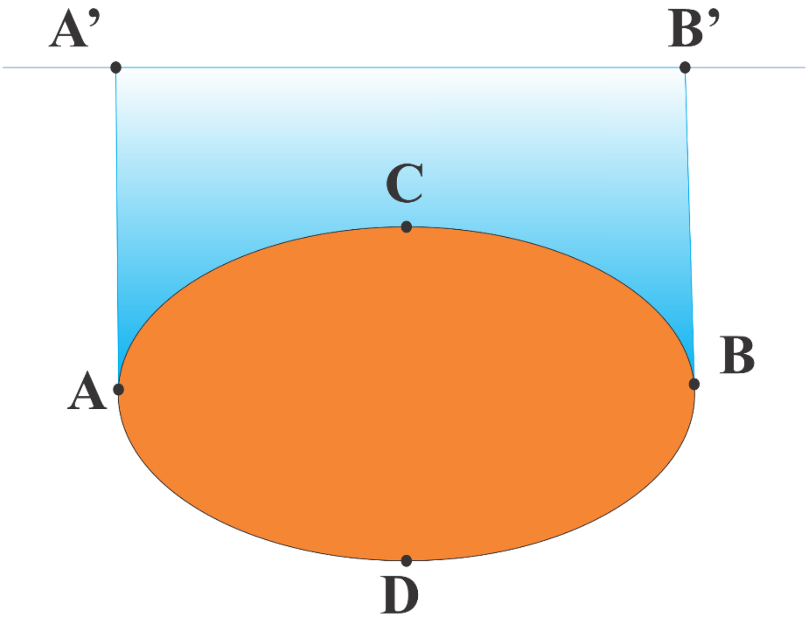
	$$I_0 = \frac{b.h^3}{36}$$
	$$I_0 = \frac{b.h^3}{12}$$
	$$I_0 = \frac{\pi.D^4}{64}$$
	$$I_0 = \frac{5.d^4}{48\sqrt{3}}$$ Ou $$I_0 = \frac{5.a^4\sqrt{3}}{16}$$

I.9 <u>Equilibre des corps flottants</u> :

Supposons qu'une surface fermée formant un corps solide de masse volumique ρ_{corps}, de volume total V et de volume immergé $V_{immergé}$, se trouve immergée entièrement ou partiellement ($V_{immergé} \leq V$) dans un liquide au repos de masse volumique ρ. Les forces verticales qui agissent sur le corps sont:

- les forces de pesanteur

- les forces de pression du liquide



Sur (ACB) :

$$F_{V_1} = \rho . g . V_{ACBB'A'A}$$

Sur (ADB) :

$$F_{V_2} = \rho . g . V_{ADBB'A'A}$$

Force résultantes :

- Les forces horizontales : se compensent reciproquement.
- Les forces verticales :

$$F_V = F_{V_2} - F_{V_1}$$

$$= \rho . g (V_{ACBB'A'A} - V_{ADBB'A'A})$$

$$F_V = \rho_{eau} . g . V_{Corps}$$

Alors **:** Les corps immergée dans le liquide est soumis à l'action de la pousée verticale égale en valeur et opposée en direction au poids du liquide déplacé par le corps.

- Le pointd'application de la poussée d'archiméde est le centre de gravité du volume d'eau déplacé.

- **Condition de flottaison :**

- Flottement en plongée :

$$\rho_{Corps}.\,g.\,V_{Corps} = \rho_{Eau}.\,g.\,V_{Corps}$$

Alors **:**

$$\rho_{Corps} = \rho_{Eau}$$

- Flottement en surface :

$$\rho_{Corps}.\,g.\,V_{Corps} = \rho_{Eau}.\,g.\,V_{immergée}$$

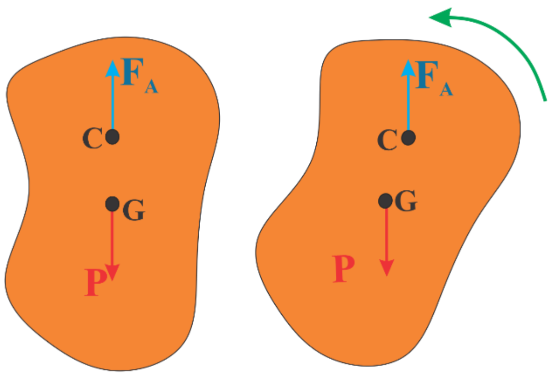
$$\frac{\rho_{Corps}}{\rho_{Eau}} = \frac{V_{immergée}}{V_{Corps}}$$

Notion :

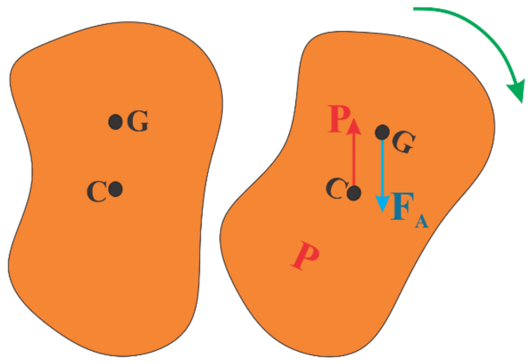
- ✓ Le volume du liquide déplacé par le corps est applé volume de CARÉNE.
- ✓ Le centre de gravité du volume de CARÉNE par lequel passe la ligne d'action de la poussée d'archimede est le centre de CARÉNE.

- **Equilibre des corps immergées :**

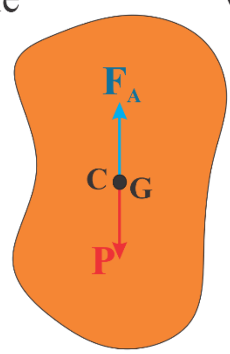
Un corps est en équilibre si le poids et la force d'Archimède sont égaux, opposés et situés sur la même ligne verticale. Dans le cas contraire, il en résulte un mouvement. La stabilité peut se définir de la façon suivante : si on incline un corps d'un angle par rapport à la verticale, le corps est soumis à un couple de redressements qui le fait tourner jusqu'à ce qu'il revienne à sa position initiale.



Equilibre Stable
C et G sur une même verticale



Equilibre instable
C et G sur une même verticale



Equilibre indifférent
C et G confondu

P : Passe par le centre de gravité de solide.

F_A : Passe par le centre de gravité du volume du fluide déplacé.

Alors : *Equilibre stable* le centre de gravité est au dessous du centre de CARÉNE ; il peut également arriver que le centre de gravité soit situer au dessus de centre de CARÉNE et que cependant *l'iquilibre indifférent* soit stable, lorsque le corps flottant se pélace le volume immergée change de forme et le centre de CARÉNE se deplacé à l'interieur du corps immergée.

Chapitre II
CINEMATIQUE DES FLUIDES

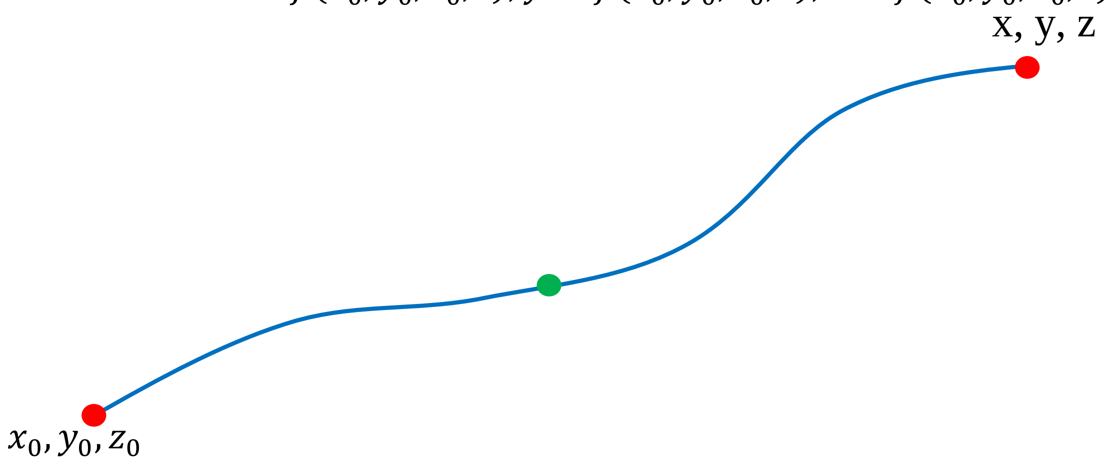
La cinématique des fluides décrit le mouvement du fluide (en utilisant les notions de lignes de courant et champ de vitesse) et ses conséquences sans considération de la nature des forces provoquant le mouvement. On prend en compte seulement les relations entre les positions des particules fluides et le temps.

II-1 <u>Méthodes d'étude du mouvement d'un fluide :</u>

- **Méthode de Lagrange :**

Il s'agit d'isoler une partie de fluide et la suivre dans son mouvement.

$$x = f(x_0, y_0, z_0, t); y = f(x_0, y_0, z_0, t); z = f(x_0, y_0, z_0, t)$$



La trajectoire est le lieu géométrique de positions successives prises par la particule au cours de son mouvement en fonction du temps.

- **Méthode d'Euler :**

Dans cette méthode on examine les champs de vitesse au point de l'espace occupé par le fluide en mouvement, et étudier la variation de la vitesse en ces points en fonction du temps (en calcul la vitesse lorsque le point que mouve passe le point (x, y, y)).

Où : $\begin{cases} U = f(x, y, z) \\ v = f(x, y, z) \\ \omega = f(x, y, z) \end{cases}$

<u>x, y, z</u> : Coordonnées de l'espace et non de la particule fluide.

II-2 Accélération d'une particule fluide :

Calculons l'accélération d'une particule de fluide à partir du champ de vitesse eulérien $\vec{V}(U, v, \omega)$. L'accélération est le taux de variation du champ de vitesse en suivant une particule de fluide. On a donc :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Où : $\begin{cases} dx = U.dt \\ dy = v.dt \\ dz = \omega.dt \end{cases}$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial x}.U.dt + \frac{\partial V}{\partial y}.v.dt + \frac{\partial V}{\partial z}.\omega.dt$$

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{U.\partial V}{\partial x} + \frac{v.\partial V}{\partial y} + \frac{\omega.\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{a} = (\vec{U} + \vec{v} + \vec{\omega}).\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\vec{a} = \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{V}.grad\vec{V}$$

$\frac{\partial V}{\partial t}$: Accélération locale elle traduit la variation de la vitesse en fonction du temps elle ne dépend pas des coordonnées de l'espace.

$\vec{V}.grad\vec{V}$: Accélération convective (entrainement), elle signifie les vitesses sont différente ; l'accélération est donc la dérivée particulaire de la vitesse.

$$\vec{a} = \frac{DV}{dt}$$

II-3 Classification des écoulements :

II-3-1 Selon la stationnarité du mouvement :

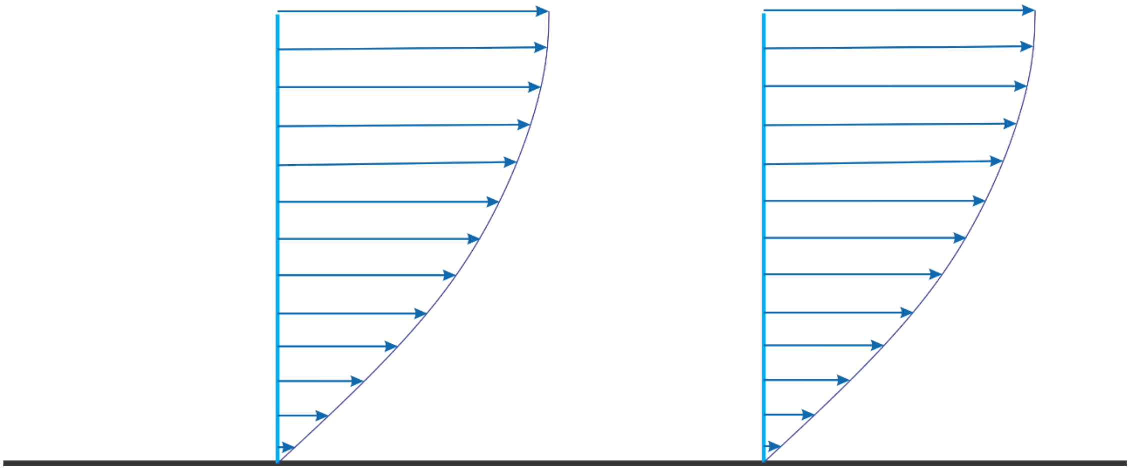
- **Ecoulement permanent :**

Lors que les propriétés du fluide et les caractéristiques du mouvement en chaque point de l'espace occupe par le fluide en mouvement ne subit aucun changement dans le temps, le mouvement est dit permanent.

$$\frac{\partial V}{\partial t}=0;\ \frac{\partial P}{\partial t}=0;\ \frac{\partial \rho}{\partial t}=0;\ \frac{\partial T}{\partial t}=0$$

A. *Ecoulement uniforme :*

Lorsque le vecteur vitesse et la forme et la surface de la section transversale ne changent de section.



B. *Ecoulement non uniforme :*

Le vecteur vitesse et la forme et la surface de la section changent avec la variation de section.

- **Ecoulement non permanent :**

Lors que les propriétés du fluide et les caractéristiques du mouvement en chaque point de l'espace occupe par le fluide en mouvement variée avec le temps, le mouvement est dit non permanent.

$$\frac{\partial V}{\partial t}\neq 0;\ \frac{\partial P}{\partial t}\neq 0;\ \frac{\partial \rho}{\partial t}\neq 0;\ \frac{\partial T}{\partial t}\neq 0$$

II-3-2 <u>Selon la charge :</u>

- **Ecoulement non charge :**

Chaque point de l'écoulement est soumis à une pression différente de la pression atmosphérique (plus grande, plus petite).

- **Ecoulement à surface libre :**

Lorsque la surface libre de l'écoulement est en contact avec l'atmosphère, l'écoulement est dit à surface libre.

II-3-3 <u>Selon les caractéristiques :</u>

- Ecoulement tridimensionnel.
- Ecoulement bidimensionnel.
- Ecoulement monodimensionnel à symétrie de résolution.

Pour les écoulements en charge :

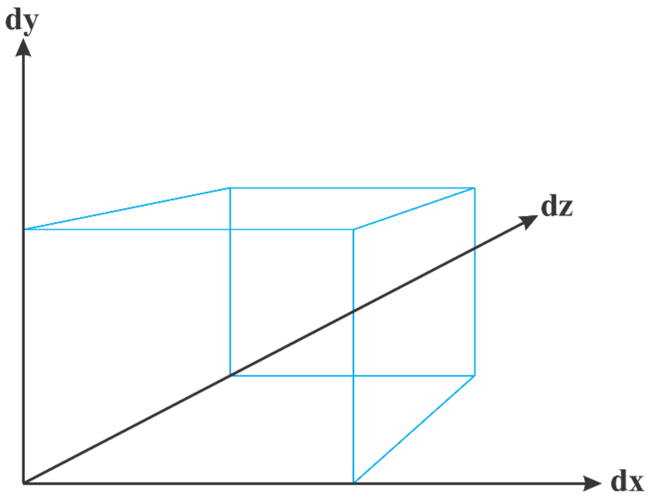
1. Ecoulement turbulent
2. Ecoulement transitoire.
3. Ecoulement laminaire.

Pour les écoulements en charge :

1. Ecoulement fluvial F < 1.
2. Ecoulement torrentiel F > 1.

II-4 <u>Equation de continuité ;</u>

Elle exprime le principe de conservation de la masse c'est-à-dire la continuité du fluide.



- Soit la particule fluide élémentaire du volume (dx , dy, dz) de masse volumique ρ.

$$m = \rho . dx . dy . dz$$

$$dm = 0$$

$$\frac{\partial m}{\partial t}dt + \frac{\partial m}{\partial x}dx + \frac{\partial m}{\partial y}dy + \frac{\partial m}{\partial z}dz = 0$$

$$\frac{\partial\rho.dx.dy.dz}{\partial t}dt+\frac{\partial\rho.dx.dy.dz}{\partial x}U.dt+\frac{\partial\rho.dx.dy.dz}{\partial y}v.dt+\frac{\partial\rho.dx.dy.dz}{\partial z}\omega.dt=0$$

Donc :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}U+\frac{\partial\rho}{\partial y}v+\frac{\partial\rho}{\partial z}\omega=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho V)=0$$

- Si l'écoulement est permanent :

$$div(\rho V)=\rho.div\,\vec{V}+\vec{V}.grad\,\rho=0$$

- Ecoulement permanent incompressible :

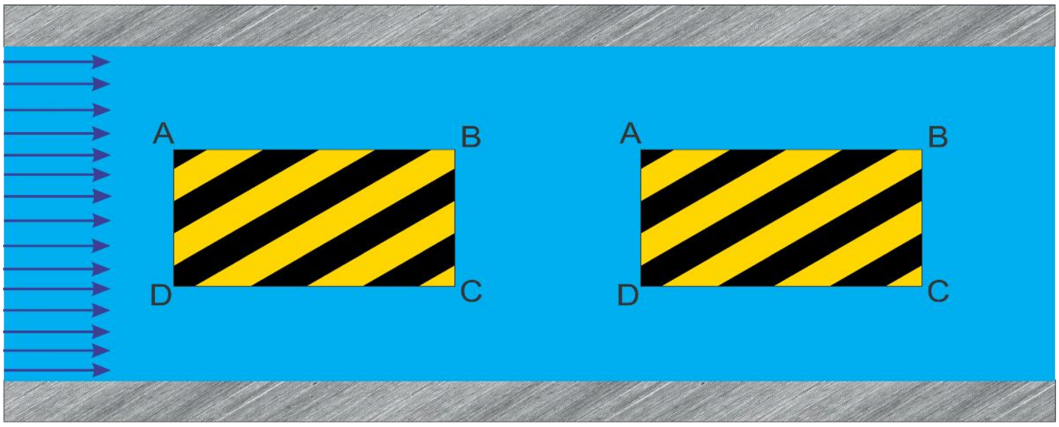
$$div(\rho V)=0$$

$$\rho.div\,\vec{V}+\vec{V}.grad\,\rho=0$$

$$div(\vec{V})=0$$

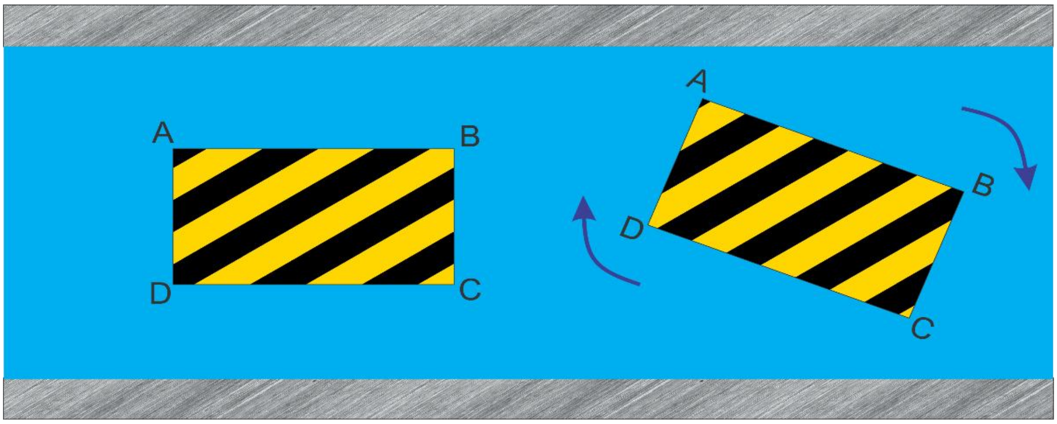
II-5 <u>Analyse de mouvement d'une particule fluide</u> :

- **Mouvement de translation :**

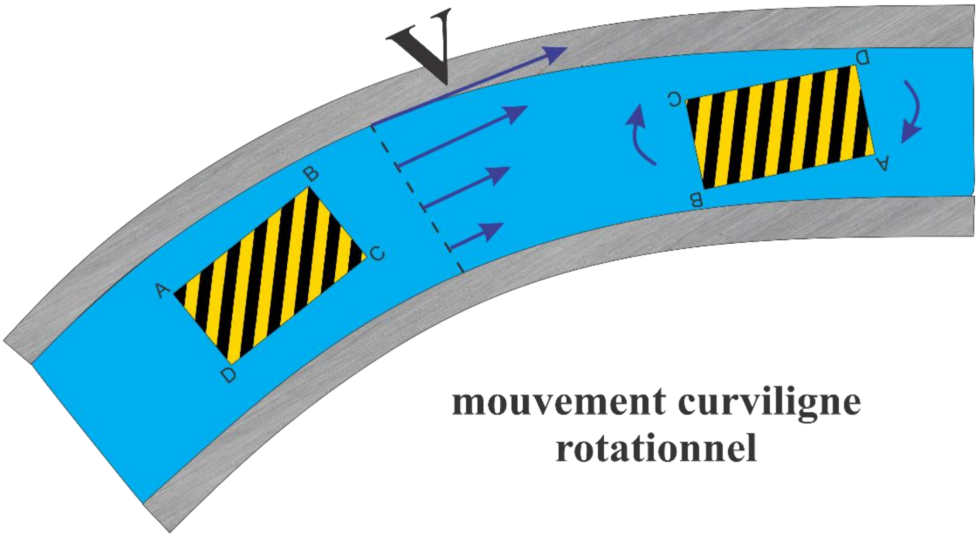


mouvement rectiligne

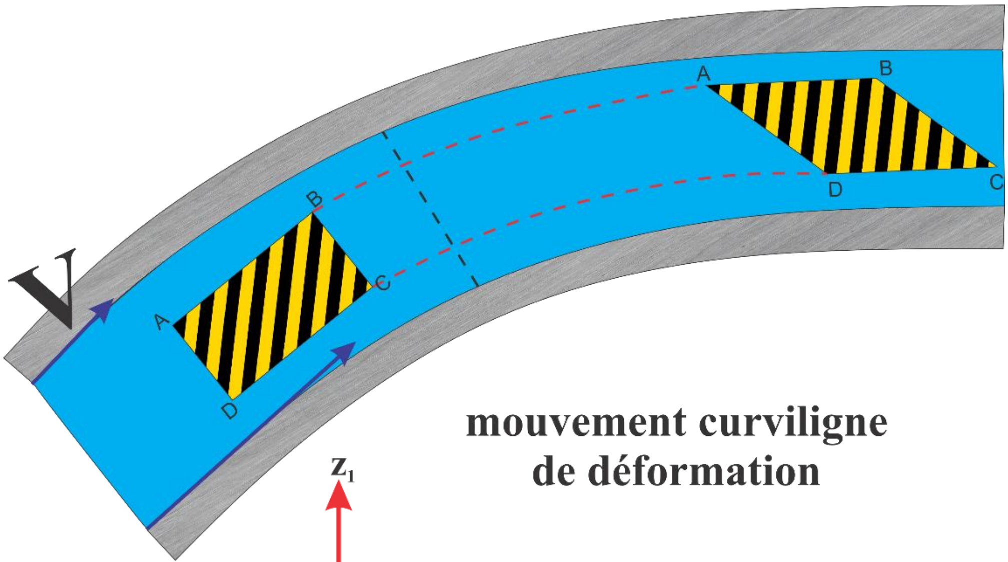
- **Mouvement de rotation :**

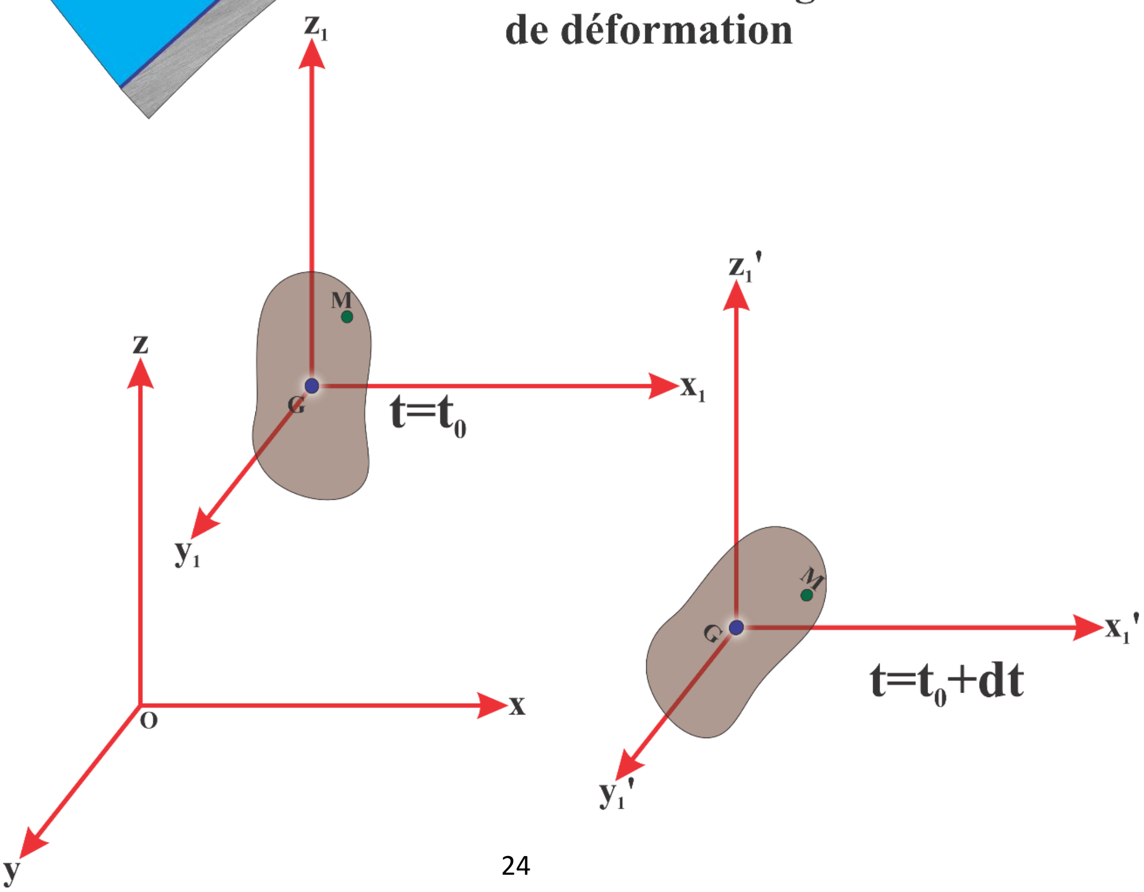


mouvement rectiligne rotationnel



➢ **Mouvement de déformation :**





Chapitre III DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

La dynamique des fluides est la science qui s'intéresse au comportement des fluides en <u>mouvement</u>.

L'hydrodynamique étudie le mouvement des liquides entement compte des forces qui le donnent naissance, elle consiste à établis les relations entre les positions des particules, les temps et les forces qui interviennent le but essentiel est de déterminer les vitesses (U, ν, ω), les pressions et masse volumique.

III-1 Equation générale du mouvement d'un fluide parfait

On considère que les fluides étudiés sont <u>parfaits</u> et <u>incompressibles</u> (On ne tiendra pas compte des effets de viscosité μ = 0 et ρ = cte).

$$\frac{dU}{dx} = F_x - \frac{1}{\rho}.\frac{\partial P}{\partial x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{d\nu}{dx} = F_y - \frac{1}{\rho}.\frac{\partial P}{\partial y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{d\omega}{dx} = F_z - \frac{1}{\rho}.\frac{\partial P}{\partial z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$div\,\vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \ldots\ldots(4)$$

$$\rho = cte \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Donc (1) devenu :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\partial U}{\partial t} + U.\frac{\partial U}{\partial x} + \nu.\frac{\partial U}{\partial y} + \omega.\frac{\partial U}{\partial z} + \nu.\frac{\partial \nu}{\partial x} + \omega.\frac{\partial \omega}{\partial x} - \nu.\frac{\partial \nu}{\partial x} - \omega.\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\partial U}{\partial t} + U.\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial x}\right) + \omega\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x}\right)$$

Si : $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U^2/_2}{\partial x}$

$$a_x = \frac{dU}{dx} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2/_2}{\partial x} + \frac{\partial \nu^2/_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega^2/_2}{\partial x} - 2\nu.Ƶ + 2\omega.\mu$$

Puisque :

$$\Omega = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U & \nu & \omega \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \mu \\ Ƶ \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \nu}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \frac{\partial \nu}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Donc : $$a_x = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial v^2/_2}{\partial x} - 2v.Ƶ + 2\omega.\mu$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + U\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \omega\frac{\partial v}{\partial z} + U\frac{\partial U}{\partial y} + \omega\frac{\partial \omega}{\partial y} - U\frac{\partial U}{\partial y} - \omega\frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \omega\frac{\partial \omega}{\partial y} + U\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \omega\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial y}\right)$$

Donc : $$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial U^2/_2}{\partial y} + 2U.Ƶ - 2\omega.\xi$$

$$a_z = \frac{\partial \omega}{\partial t} + U\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega\frac{\partial \omega}{\partial z} + U\frac{\partial U}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial z} - U\frac{\partial U}{\partial z} - v\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial \omega}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial z} + \omega\frac{\partial \omega}{\partial z} + U\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

Donc : $$a_z = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial U^2/_2}{\partial z} + 2U.\mu - 2v.\xi$$

$$a = a_x + a_y + a_z$$

$$a = \frac{\partial V}{\partial t} + grad\left(\frac{V^2}{2}\right) + 2.\vec{\Omega}\wedge\vec{V}$$

$$F - \frac{1}{\rho}\,grad\ P = \frac{\partial V}{\partial x} + grad\left(\frac{V^2}{2}\right) + 2.\vec{\Omega}\wedge\vec{V}$$

III-2 <u>Intégration des équations de mouvement :</u>

<u>*Hypothèse*</u> : $F = grad\ U \Longrightarrow F_x = \frac{\partial U}{\partial x};\ F_y = \frac{\partial U}{\partial y};\ F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$

Si le fluide est soumis au champ de la pesanteur : $F_x = 0;\ F_y = 0;\ F_z = -g$

- **Ecoulement permanent irrotationnelle :**

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad\qquad \vec{\Omega} = 0$$

$$grad\ U - \frac{1}{\rho}\,grad\ P = grad\ \frac{V^2}{2}$$

$$grad\left(\frac{V^2}{2} - U + \frac{1}{\rho}.P\right) = 0$$

$$grad\ (Energie) = 0 \Longrightarrow Energie = est\ constante$$

$$\frac{V^2}{2} - U + \frac{1}{\rho}.P = cte$$

Fluide soumis au champ de la pesanteur $U = -gz$

$$\boxed{\frac{V^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = cte}$$ Equation de Bernoulli

Energie cinétique par unité de la masse

Energie potentielle

- **Ecoulement non permanent irrotationnelle :**

$$\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0 \qquad \vec{\Omega} = 0$$

$$grad\ U - grad\left(\frac{P}{\rho}\right) = \frac{\partial V}{\partial t} + grad\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

$$V = grad\ Q$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial(grad\ Q)}{\partial t} = grad\ \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$grad\ U - \ grad\left(\frac{P}{\rho}\right) = grad\ \frac{\partial Q}{\partial t} + grad\ \frac{V^2}{2}$$

$$grad\left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} - U\right) = 0$$

$$grad\left(\frac{\partial Q}{\partial t} + Energie\right) = 0$$

Donc : $\boxed{\frac{\partial Q}{\partial t} + Energie = cte}$ $(est\ constant\ depand\ du\ temps)$

- **Ecoulement permanent rotationnelle :**

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad \vec{\Omega} \neq 0$$

$$grad\ U - grad\left(\frac{P}{\rho}\right) = grad\left(\frac{V^2}{2}\right) + 2.\vec{\Omega}\Lambda\vec{V}$$

$$grad\left(\frac{V^2}{2} - U + \frac{P}{\rho}\right) = -2.\vec{\Omega}\Lambda\vec{V}$$

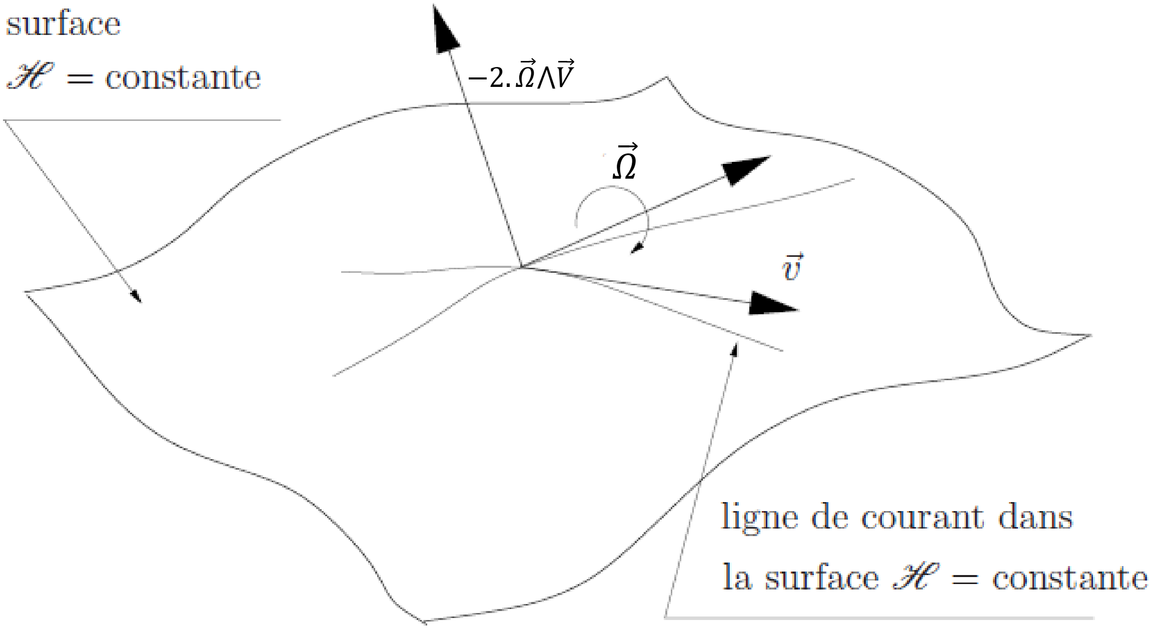
$$grad\left(\frac{V^2}{2} - U + \frac{P}{\rho}\right).\overrightarrow{d\ell} = \left(-2.\vec{\Omega}\Lambda\vec{V}\right).\overrightarrow{d\ell}$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$grad\left(\frac{V^2}{2} - U + \frac{P}{\rho}\right).\overrightarrow{d\ell} = 0$$

$$grad\left(\frac{V^2}{2} - U + \frac{P}{\rho}\right) = 0$$

$$\frac{V^2}{2} - U + \frac{P}{\rho} = cte$$



Interprétation physique :

Suivant la même ligne de courant, soumis du champ de pesanteur.

$$U = -gz$$

$$-U + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = cte$$

$$gz + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = cte$$

Où :

gz : Energie potentiel de position par unité de masse $\left(\frac{J}{kg}\right)$

$\frac{P}{\rho}$: Energie potentiel de pression par unité de masse $\left(\frac{J}{kg}\right)$

$\frac{V^2}{2}$: Energie cinétique par unité de masse $\left(\frac{J}{kg}\right)$

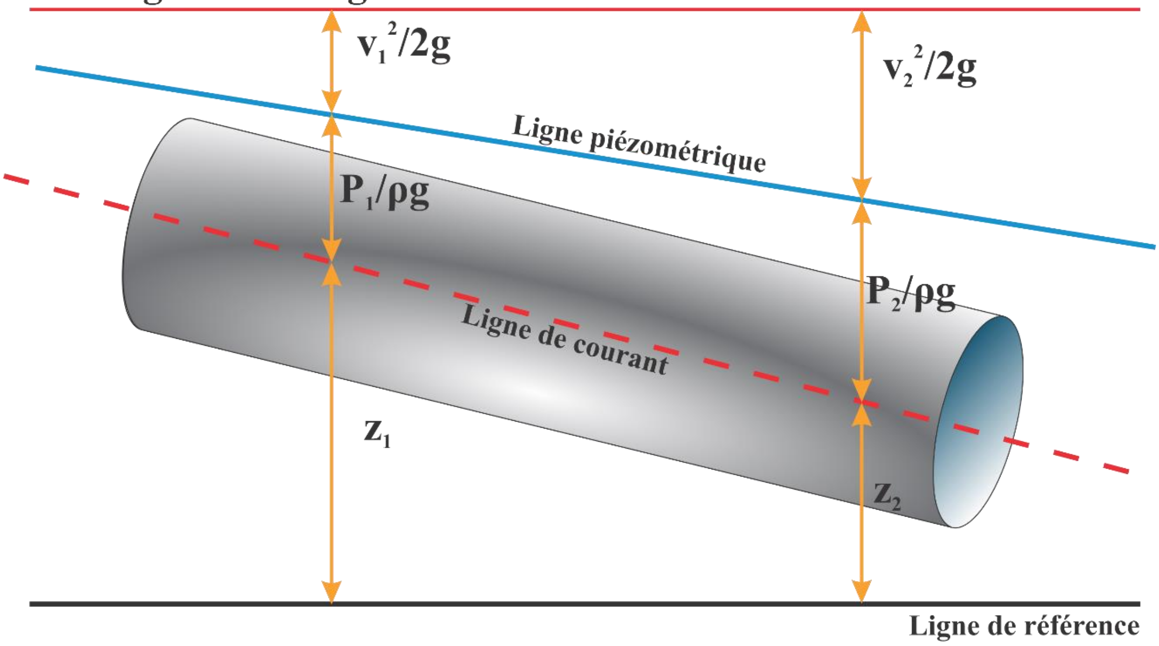
$Energie\ mécanique = Energie\ potentiel + Energie\ cinétique$

<u>Interprétation physique</u> :

$$gz + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = cte \xrightarrow{\textit{Multiplie par } \frac{1}{g}} \boxed{z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = cte}$$

$$gz + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = cte \xrightarrow{\textit{Multiplie par } \rho} \boxed{\rho g z + P + \rho\frac{V^2}{2} = cte}$$

Le charge d'écoulement est constante le long de l'écoulement.

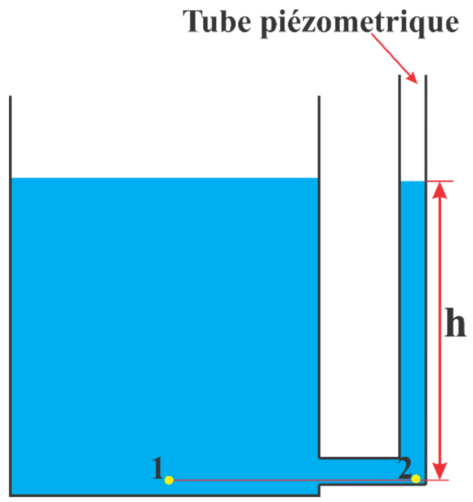


	J/kg	J/Poids	J/volume
Energie potentiel de position	gz	z	$\rho g z$
Energie potentiel de pression	$\frac{P}{\rho}$	$\frac{P}{\rho g}$	P
Energie cinétique	$\frac{V^2}{2}$	$\frac{V^2}{2g}$	$\rho\frac{V^2}{2}$

III-3 Mesure de Pression :

- **Mesure la pression statique :**

À l'aide d'un tube piézométrique on mesure la pression statique.

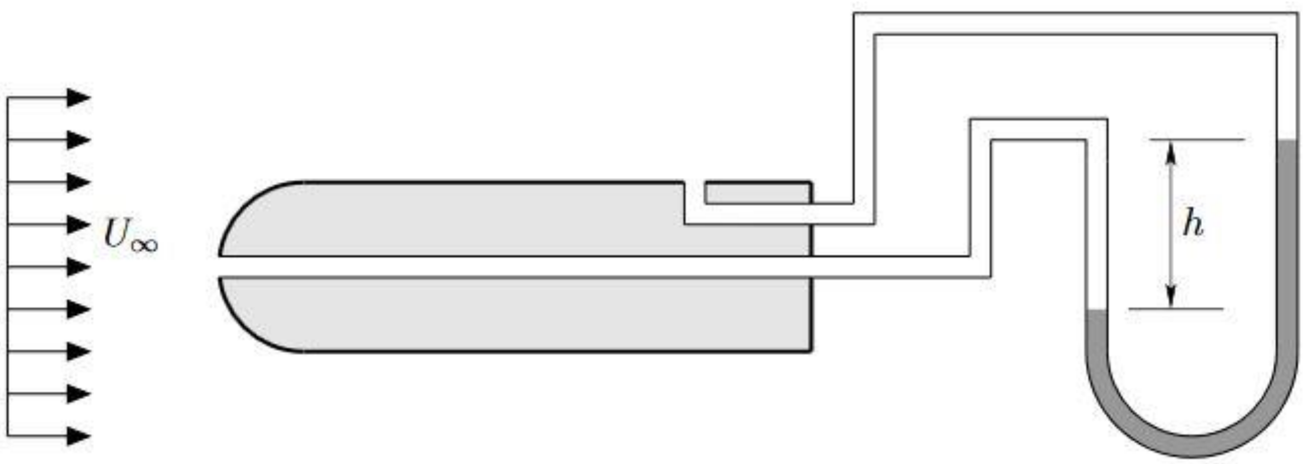


- **Mesure la pression dynamique :**

La pression dynamique est représentative de la vitesse d'écoulement d'un fluide. C'est la valeur lue sur un appareil de mesure de pression différentielle dont :

- L'un des points de mesure est disposé dans l'axe de l'écoulement du fluide.
- Et l'autre est disposé perpendiculairement à cet écoulement.

Cette valeur est prédite par la relation de Bernoulli. Elle est utilisée dans les débitmètres ou anémomètres à tube de Pitot. Contrairement à la pression statique, cette valeur de pression ne renseigne pas sur l'état thermodynamique du fluide.

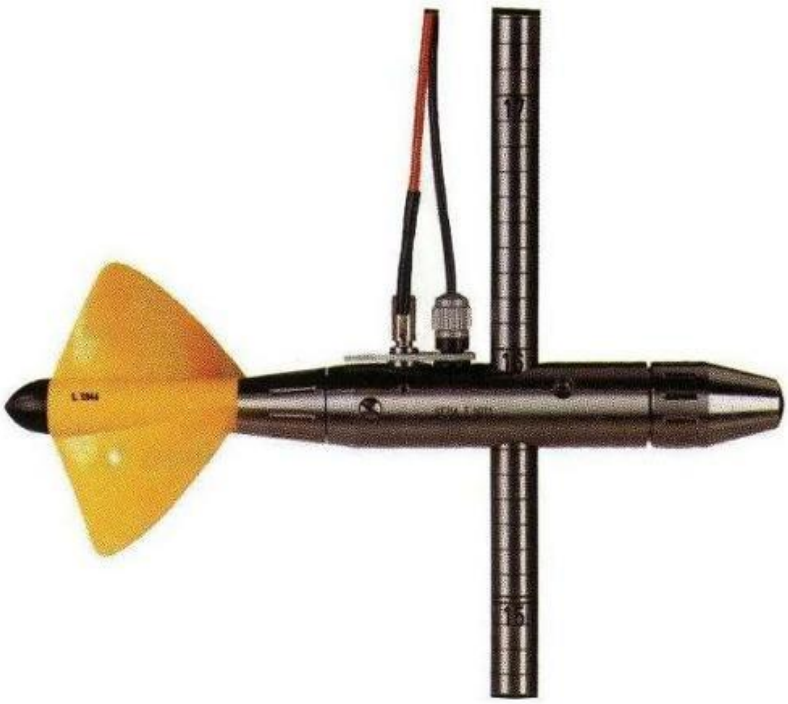


- **Mesure la pression totale**

C'est la somme de la pression statique et de la pression dynamique. Pression statique et dynamique sont égales pour un fluide au repos. De même, aux pertes par frottement près, la pression totale d'un fluide est constante quelque soit sa vitesse.

III-4 <u>Mesure la vitesse :</u>

- *<u>Tube de Prandtl</u>*
- *<u>Moulinet</u>*



- *<u>Anémomètre à fil chaud</u>*

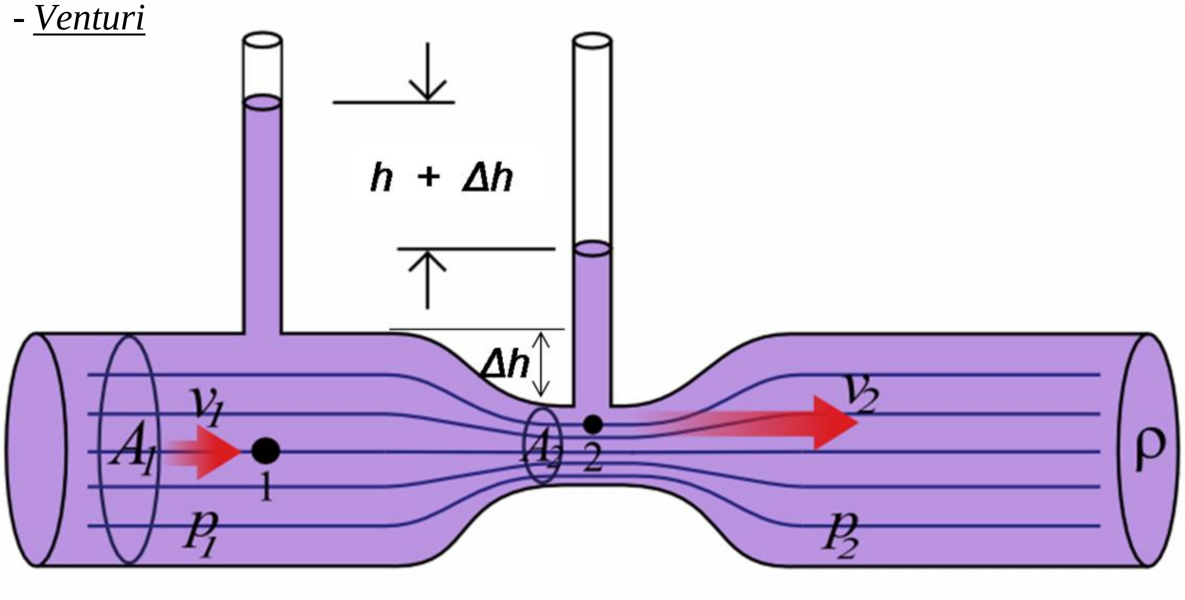
- *Vélocimètre à laser*

- *Tracer pour mesure la vitesse*
- *Sonder de déviation*

III-5 Mesure la Débit :

Le débit est la quantité de fluide écoulée pendant le temps t. La quantité peut être définie par un volume ou une masse.

- *Venturi*



$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{{V_1}^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{{V_2}^2}{2g}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} = \frac{{V_2}^2}{2g} - \frac{{V_1}^2}{2g}$$

$$\frac{\Delta P}{\rho g}=\frac{\left({Q}/{S_2}\right)^2}{2g}-\frac{\left({Q}/{S_1}\right)^2}{2g}$$

$$\frac{\Delta P}{\rho g}=\frac{Q^{é}}{2g}.\left(\frac{1}{{S_2}^2}-\frac{1}{{S_1}^2}\right)$$

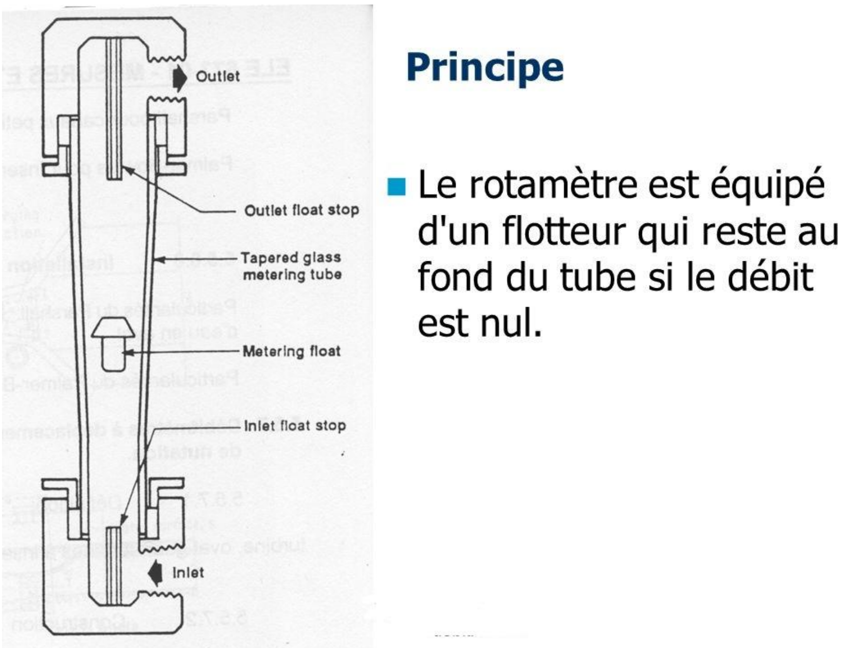
$$Q_1=k.\sqrt{2.\frac{\Delta P}{\rho}}$$

$$k=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{{S_2}^2}-\frac{1}{{S_1}^2}}}$$

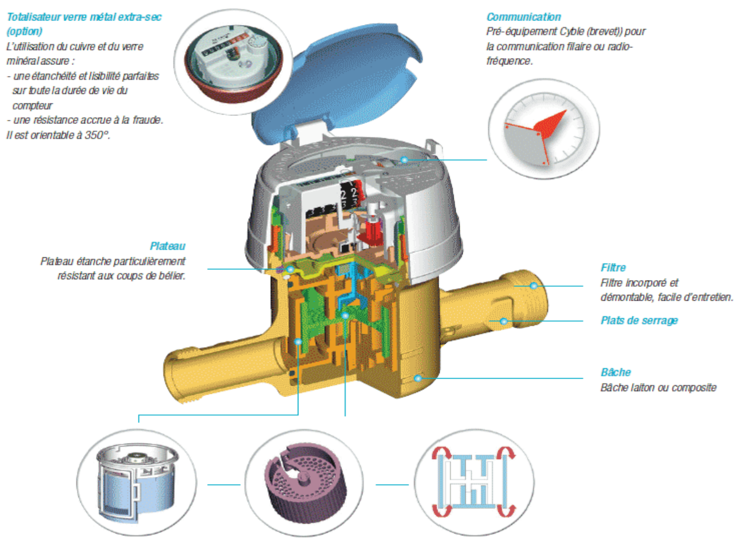
Expérimental : $Q=C_i.Q_0$

Mesure directe : $Q=\frac{Volume}{Temps}$

- *Rotamètre*



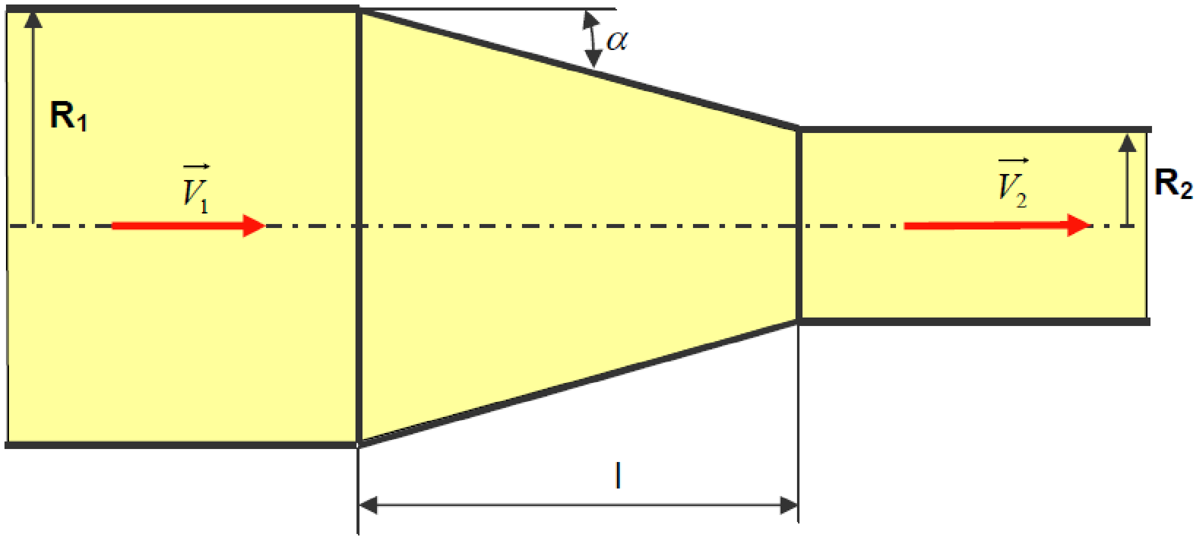
Compteur



Série des exercices

Exercice 1:

On veut accélérer la circulation d'un fluide parfait dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par 4. Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle α



1) Calculer le rapport des rayons (R_1/R_2).

2) Calculer (R_1 - R_2) en fonction de L et α. En déduire la longueur L. (R_1 = 50 mm, α = 15°).

Réponse

1) On applique l'équation de continuité :

$V_1.S_1 = V_2.S_2$ ou encore $\frac{S_1}{S_2} = \frac{V_2}{V_1}$ or $S_1 = \pi.R_1^2$ et $S_2 = \pi.R_2^2$ d'où $\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}} = 2}$

2) $tg\alpha = \frac{R_1 - R_2}{l}$ donc $\boxed{l = \frac{R_1 - R_2}{tg\alpha}}$ or $R_2 = \frac{R_1}{2}$ donc $l = \frac{R_1}{2.tg\alpha}$ A.N.: $\boxed{L = 93,3\ mm}$.

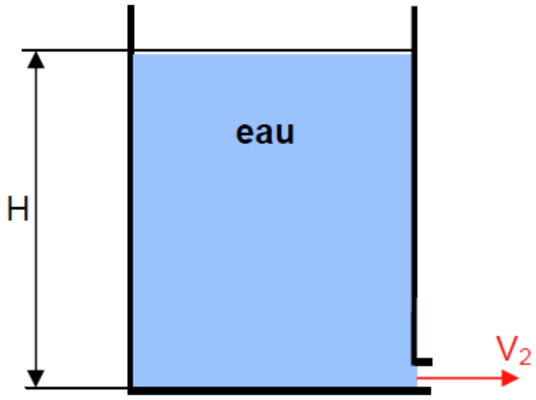
Exercice 2

On considère un réservoir remplie d'eau à une hauteur **H= 3 m** , muni d'un petit orifice à sa base de diamètre **d= 10 mm**.

1) En précisant les hypotèses prises en comptes, appliquer le théorème de Bernouilli pour calculer la vitesse V_2 d'écoulement d'eau.

2) En déduire le débit volumique Q_v en (l/s) en sortie de l'orifice.

On suppose que g=9,81 m/s.



Réponse

1) Vitesse d'écoulement V_2 ?

On applique le théorème de Bernoulli avec les hypothèses suivantes : $V_1 \approx 0$ car le niveau dans le réservoir varie lentement et $P_1=P_2=P_{atm,}$

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g.(Z_2 - Z_1) = 0$$ On obtient :

$\boxed{V_2 = \sqrt{2.g.H}}$ A.N. $\boxed{V_2 = \sqrt{2.9,81.3} = 7,67\ m/s}$

2) Débit volumique Q_v ?

$\boxed{Q_V = V_2.S}$ or $S = \frac{\pi.d^2}{4} = \frac{\pi.(10.10^{-3})^2}{4} = 7,87.10^{-2}\ m^2$ A.N. $\boxed{Q_V = O,6\ L/s}$

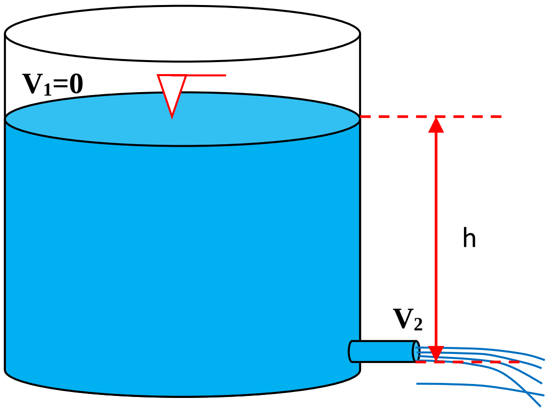
Exercice 3

Un fluide parfait incompressible s'écoule d'un orifice circulaire situé sur le coté d'un réservoir avec un débit volumique q_v=0,4 L/s. Le diamètre de l'orifice est d=10 mm.

1) Déterminer la vitesse d'écoulement au niveau de l'orifice.

2) Enoncer le théorème de Bernoulli.

3) A quelle distance de la surface libre se trouve l'orifice ?



Réponse

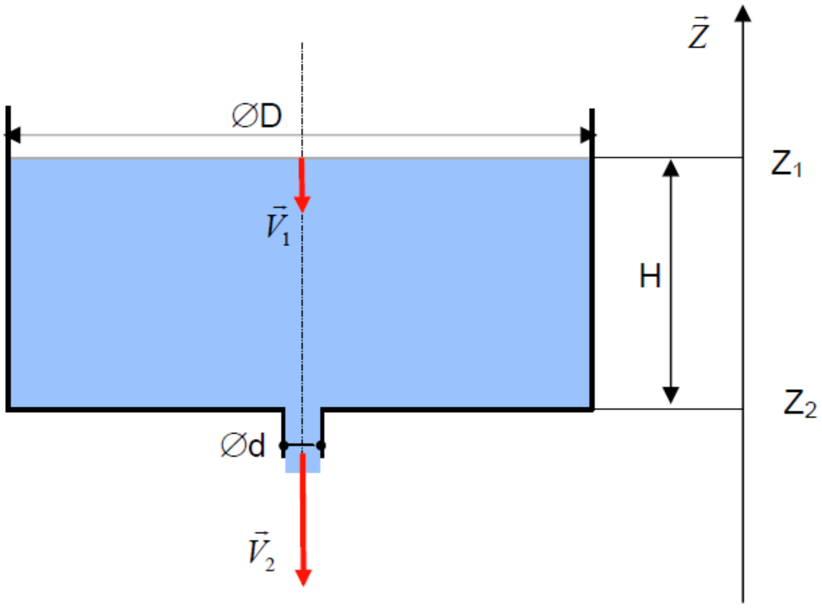
1) Vitesse d'écoulement : $\boxed{V = \frac{q_v}{S} = \frac{4.q_v}{\pi.d^2}}$ A.N. $\boxed{V = \frac{4.0,4.10^{-3}}{\pi.0,01^2} = 5,1\, m/s}$

2) Théorème de Bernoulli : $\boxed{\frac{V_1^2}{2.g} + Z_1 + \frac{P_1}{\varpi} = \frac{V_2^2}{2.g} + Z_2 + \frac{P_2}{\varpi}}$

3) On a Z_1-Z_2=h ; P_1=P_2=P_{atm} ; V_1=0 donc $\boxed{h = \frac{V_2^2}{2.g}}$ A.N. $\boxed{h = \frac{5,1^2}{2.9,81} = 1,32\, m}$

Exercice 3

On considère un réservoir cylindrique de diamètre intérieur D = 2 m rempli d'eau jusqu'à une hauteur H = 3 m. Le fond du réservoir est muni d'un orifice de diamètre d = 10 mm permettant de faire évacuer l'eau.



Si on laisse passer un temps très petit dt, le niveau d'eau H du réservoir descend d'une quantité dH. On note $V_1 = \frac{dH}{dt}$ la vitesse de descente du niveau d'eau, et V_2 la vitesse d'écoulement dans l'orifice. On donne l'accélération de la pesanteur g = 9,81 m/s^2.

1) Ecrire l'équation de continuité. En déduire l'expression de V_1 en fonction de V_2, D et d.

2) Ecrire l'équation de Bernoulli. On suppose que le fluide est parfait et incompressible.

3) A partir des réponses aux questions 1) et 2) établir l'expression de la vitesse d'écoulement V_2 en fonction de g, H, D et d.

4) Calculer la vitesse V_2. On suppose que le diamètre d est négligeable devant D. C'est-à-dire $\frac{d}{D} << 1$.

5) En déduire le débit volumique q_V.

Réponse

1) Equation de continuité : $\boxed{\frac{\pi.D^2}{4}.V_1 = \frac{\pi.d^2}{4}.V_2}$ donc la vitesse $\boxed{V_1 = \left(\frac{d}{D}\right)^2.V_2}$ (1)

2) Equation de Bernoulli : $\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g.(Z_2 - Z_1) = 0$

Or P_1=P_2= P_{atm} donc : $\boxed{\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} - g.H = 0}$ (2)

3) On substitue l'équation (1) dans (2) on obtient : $\frac{V_2^2 - \left(\frac{d}{D}\right)^4.V_2^2}{2} = g.H$

Donc la vitesse : $\boxed{V_2 = \sqrt{\frac{2.g.H}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}}}$

4) Si $\left(\frac{d}{D}\right) << 1$ alors $\boxed{V_2 = \sqrt{2.g.H}}$ A.N. $\boxed{V_2 = \sqrt{2.9,81.3} = 7,67\ m/s}$

5) $\boxed{q_v = \frac{\pi.d^2}{4}.V_2}$ A.N. $\boxed{q_V = \frac{\pi.0,01^2}{4}.7,67 = 6.10^{-4}\ m^3/s}$

Chapitre IV
DYNAMIQUE DES FLUIDES REELS

IV-1 Expérience de Reynolds :

En 1883, Osborne Reynolds (1842–1912) a mise en évidence que l'écoulement dans un tube cylindrique dépend du diamètre, du fluide et de la vitesse de l'écoulement ; il introduisit un filet d'un colorant dans l'écoulement d'eau dans un tube. Pour un tube et un liquide (en l'occurrence l'eau) données, Reynolds observa que lorsque le débit fut faible le filet resta identifiable et stable. En faisant augmentant le débit jusqu'au un seuil critique de débit, Reynolds observa ensuite que, a une certaine distance de l'entrée du tube, le filet devint ondulé (on dit aujourd'hui *instable*).

Reynolds a ensuite démontré expérimentalement que l'état de l'écoulement est caractérisé par un nombre adimensionnel, aujourd'hui appelé le *nombre de Reynolds*.

Où Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en a dimensionnant les équations de Navier-Stokes. On le définit par la formule suivante :

$$R_c = \frac{V.D_h.\rho}{\mu} = \frac{V.D_h}{\vartheta}$$

V : vitesse moyenne d'écoulement en m/s.

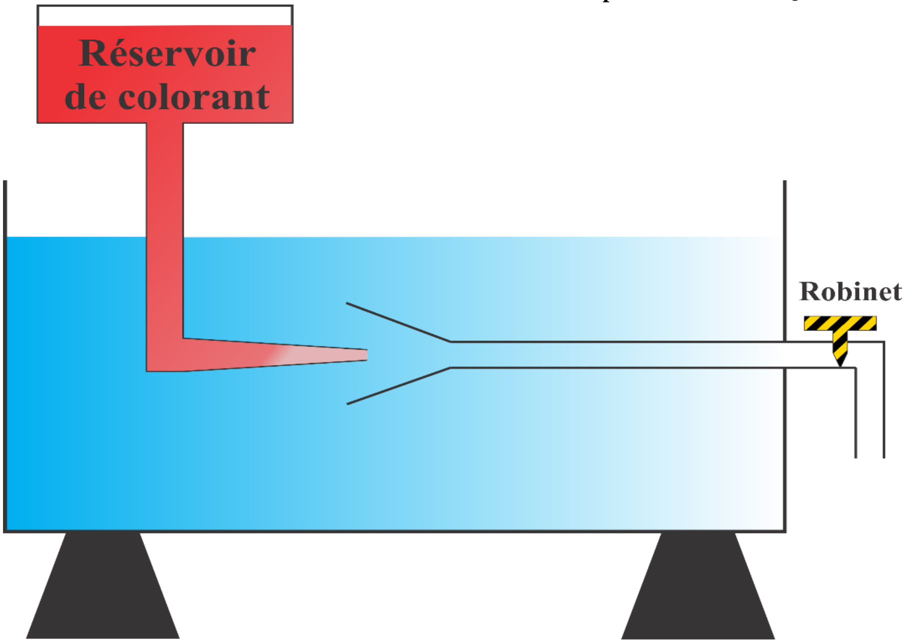
D_h: Diamètre hydraulique en m.

ϑ : viscosité cinématique en m^2/s

ρ : Masse volumique du fluide en m^3/kg

μ : Viscosité dynamique en Pa.s

Un premier réservoir d'eau de niveau constant est vidangé par un tuyau. Une vanne placée à l'extrémité du tuyau permet de faire varier le débit Q (m^3/s). Un deuxième tuyau est placé à l'intérieur du réservoir. Il contient un colorant et permet d'obtenir un mince filet fluide coloré au centre du tuyau.



En fonction des nombres de Reynolds croissants, on distingue quatre régimes principaux : régime de Stokes, régime laminaire, régime transitoire, régime turbulent.

L'écoulement de Stokes correspond aux très faibles valeurs du Reynolds (inférieures à 1). Dans ce cas les forces d'inertie liées aux vitesses étant négligeables, les forces visqueuses et les forces de pression s'équilibrent. Cette notion correspond au domaine de la micro fluidique. Pour des valeurs plus élevées, les forces d'inertie entrent en jeu : c'est le domaine de la dynamique des fluides.

Donc :

- ✓ Si $R_e<2000$, le régime est Laminaire.
- ✓ Si $R_e>2600$, le régime est turbulent.
- ✓ Si $2000<R_e<2600$, le régime est transitoire

IV-2 <u>Caractéristiques des écoulements luminaires</u> :

Un écoulement en régime laminaire est un écoulement stratifie, qui a sans brassage de particules fluides et sans pulsation de vitesse.

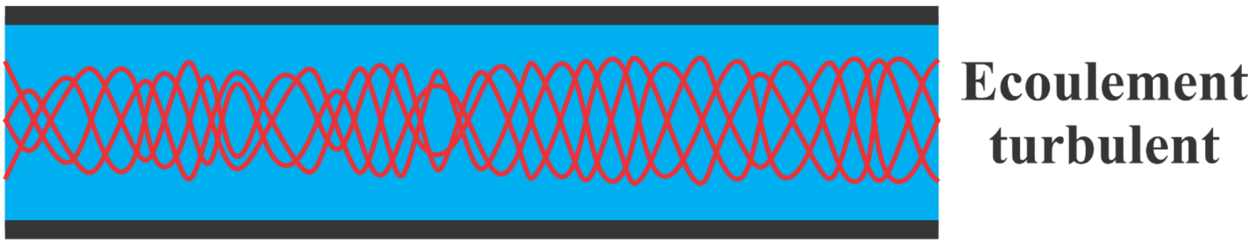
Quand la vitesse est très faible (quelques millimètres par seconde) le filet coloré reste bien défini, rectiligne et parallèle à l’axe du tuyau. Le régime est dit laminaire. L’écoulement laminaire est rare dans le domaine de l’hydraulique de l’eau potable et de l’assainissement, toutefois il n’est pas inexistant.

Les couches du fluide glissent les unes sur les autres, la viscosité du fluide élimine toute tendance à l'instabilité.

IV-3 <u>Caractéristiques des écoulements turbulents</u> :

Quand la vitesse est plus élevée, le filet devient ondulé et très instable. Il se mélange rapidement au fluide ambiant. Des tourbillons de différentes tailles apparaissent. Le régime est dit turbulent.

La turbulence se caractérise donc par la création de tourbillons. Ils mélangent les matières dissoutes dans l'eau, comme par exemple le chlore dans un réseau d'eau potable ou le rejet d'une station de traitement des eaux usées dans une rivière. La mise en place d'un agitateur dans un bassin crée de la turbulence et ainsi il tend à homogénéiser les matières dissoutes.



Un écoulement turbulent est caractérisé par un brassage intense du fluide. Le mouvement des particules fluides est des ordonnée et leur trajectoire sont des courbes aléatoires.

L'écoulement turbulent est caractérisé par un important échange transversal de quantité de mouvement.

IV-4 Intégration des équations de Navier stokes (NS) dans le cas d'un écoulement monodimensionnel :

$$\rho\frac{dU}{dt} = \rho.F_x + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\rho\frac{dv}{dt} = \rho.F_y + \frac{\partial P_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\rho\frac{d\omega}{dt} = \rho.F_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$div\,\vec{V} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

Contrainte tangentielle :

Hypothèses de Newton : $\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \end{cases}$

Contrainte tangentielle :

$$\begin{cases} P_{xx} = -P + k_{xx} \\ P_{yy} = -P + k_{yy} \\ P_{zz} = -P + k_{zz} \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} P_{xx} = -P + 2\mu\frac{\partial U}{\partial x} \\ P_{yy} = -P + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ P_{zz} = -P + 2\mu\frac{\partial \omega}{\partial z} \end{cases}$

P_{xx} : Représente la pression dans un fluide visqueuse.

k_{xx} : Tient compte de l'influence de viscosité.

Donc la formule (1) , (2) et (3) devenu :

$$\rho\frac{dU}{dt}=\rho.F_x+\frac{\partial\left(-P+2\mu\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right)}{\partial z}$$

$$\rho\frac{dv}{dt}=\rho.F_y+\frac{\partial\left(-P+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(-P+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)\right)}{\partial z}$$

$$\rho\frac{d\omega}{dt}=\rho.F_z+\frac{\partial\left(-P+2\mu\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(-P+2\mu\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)}{\partial z}$$

Donc : $\begin{cases}\rho\frac{dU}{dt}=\rho.F_x+\mu.\Delta U-\frac{\partial P}{\partial x}\\ \rho\frac{dv}{dt}=\rho.F_y+\mu.\Delta v-\frac{\partial P}{\partial y}\\ \rho\frac{d\omega}{dt}=\rho.F_z+\mu.\Delta \omega-\frac{\partial P}{\partial z}\end{cases}$

$\rho\frac{dV}{dt}=\rho.F+\rho.\Delta V-grad\ P$ Equation de Navier-Stokes

Si: μ=0

$\frac{dV}{dt}=F-\frac{1}{\rho}.grad\ P$ Equation d'Euler

Si l'écoulement est permanant donc :

$\frac{dV}{dt}=0\Longrightarrow F=\frac{1}{\rho}.grad\ P$ Equation hydrostatique

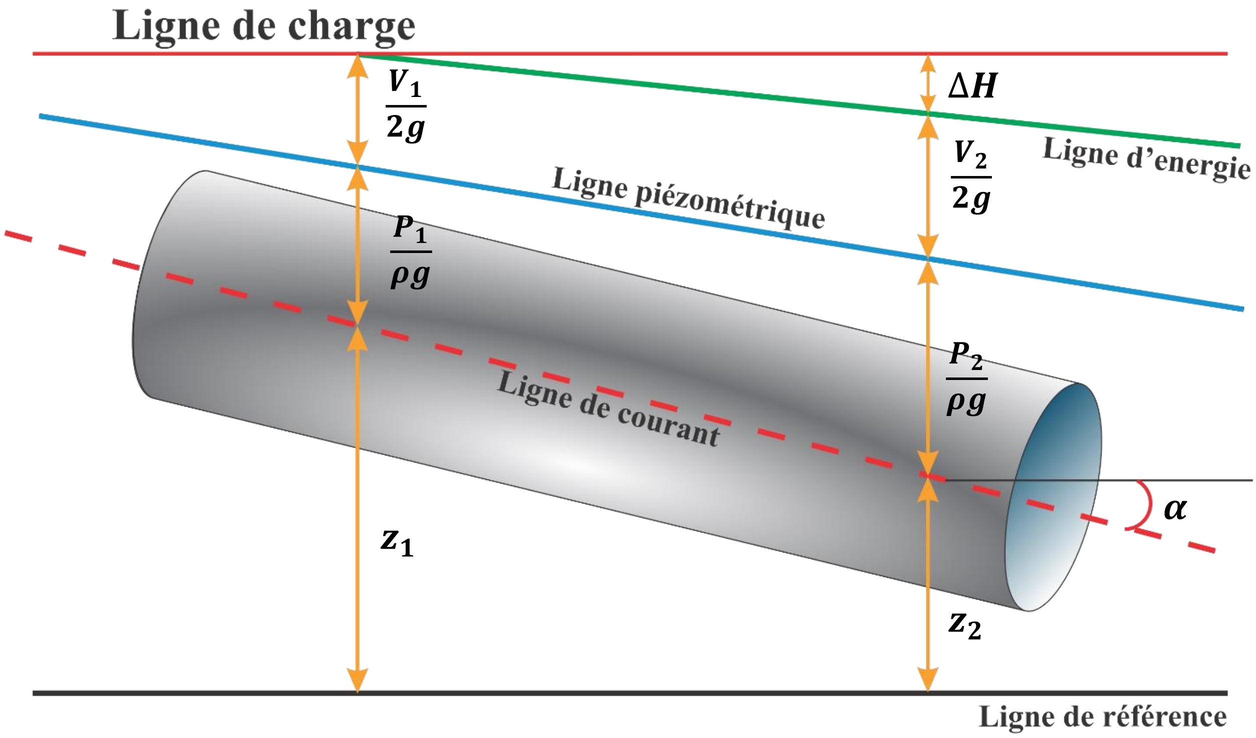
IV-5 <u>Equation de Bernoulli appliquée a un tube de courant</u> :

Lorsque le fluide est réel, la viscosité est non nulle, alors au cours du déplacement du fluide, les différentes couches frottent les unes contre les autres et contre la paroi qui n'est pas parfaitement lisse d'où il y a une perte sous forme de dégagement d'énergie ; cette perte appelée « perte de charge »

La relation de Bernoulli peut s'écrire sous la forme :

$$z_1+\frac{{V_1}^2}{2.g}+\frac{P_1}{\rho.g}=z_1+\frac{{V_2}^2}{2.g}+\frac{P_2}{\rho.g}+\Delta H$$

L'unité de ΔH est J/m

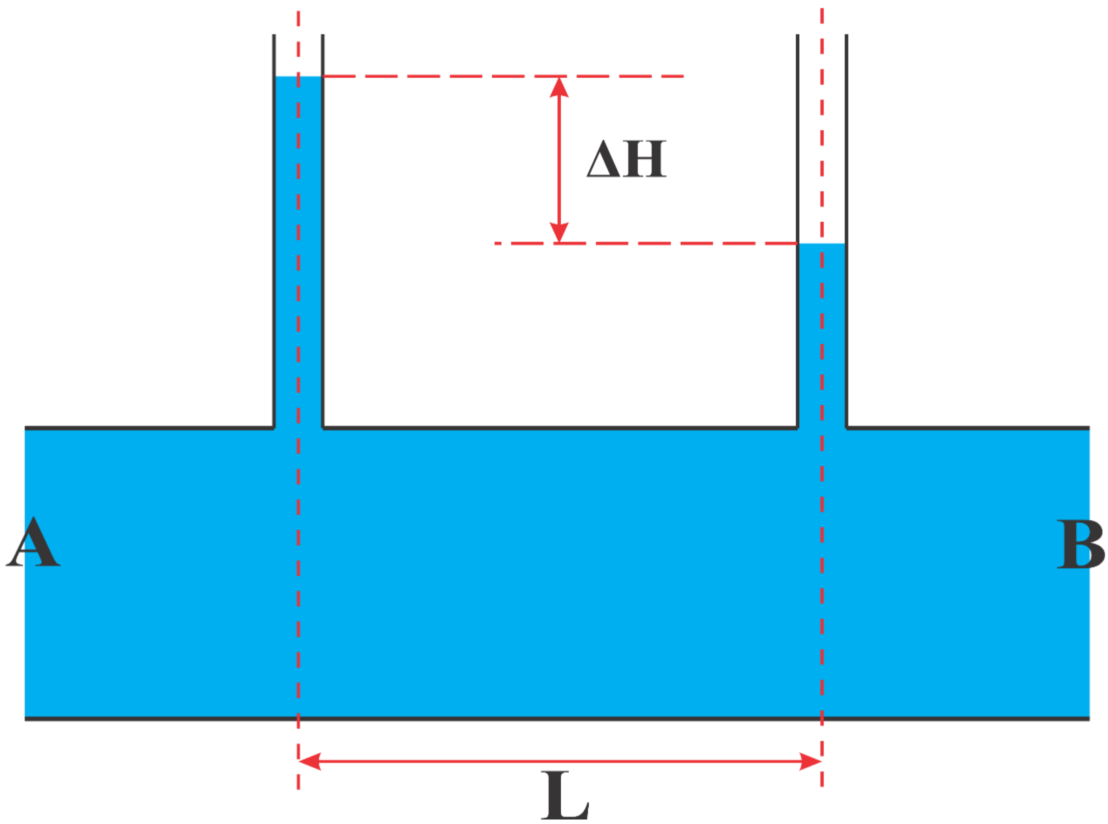


IV-6 Expression générale de pertes de charge :

$$\Delta H_T = \Delta H_e + \Delta H_s$$

ΔH_e: Perte de charge linéaire ; elle liée au frottement.

ΔH_s: Perte de charge singulière ; elle est liée au sanglante.



- ✓ Appliquons l'équation de quantité de mouvement entre les sections A et B

$$\sum F = \rho . q . V_B - \rho . q . V_A$$

$$P_1 . S_1 - P_2 . S_2 - F = 0$$

$$(P_1 - P_2) . S = F$$

Où : $$F = \tau - 2\pi r . L$$

$$P_1 - P_2 = \tau . \frac{P}{S} . L \text{ ....(1)}$$

P : Périmètre.

On applique l'équation de Bernoulli entre les sections (A) et (B) :

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{{V_1}^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{{V_2}^2}{2g} + \Delta H$$

$$P_1 - P_2 = \rho . g . \Delta H$$

Donc : $$\rho . g . \Delta H = \tau . \frac{P}{S} . L$$

$$\Delta H = \frac{\tau}{\rho g} . \frac{P}{S} . L$$

Rayon hydraulique :

$$R_h = \frac{S_m}{P_m}$$

S_m : Section mouillée.

P_m : Périmètre mouillée

Pour une conduite circulaire :

$$R_h = \frac{\pi \frac{D^4}{4}}{\pi D}$$

D : diamètre.

$$R_h = \frac{D}{4}$$

Diamètre hydraulique : $$D_h = 4 . R_h$$

Pour une conduite circulaire : $D_h = 4 . R_h = 4 . \frac{D}{4} = D$

$$\Delta H = \frac{\tau}{\rho g} . \frac{4}{D_h} . L$$

Introduisons : le coefficient de frottement

$$C_f = \frac{\tau}{\rho.\frac{V^2}{2}} \Longrightarrow \tau = C_f.\rho.\frac{V^2}{2}$$

$$\Delta H = 4.\frac{C_f.V^2.L}{2.g.D} = \frac{4.C_f.V^2.L}{D.2.g}$$

Poussons : $4C_f = \lambda$

$$\Delta H = \frac{\lambda.V^2.L}{2.g.D} = \frac{\lambda.Q^2.L}{2.g.D.S^2}$$ Formule de Darcy-Weissbach

Où :

λ : Coefficient de frottement.

L : longueur de conduite.

V : Vitesse moyenne $\left(V = {}^{Q}/_{S}\right)$.

ΔH : Perte d'énergie linéaire.

<u>Perte de charge singulière</u> :

$$\Delta H_s = \xi.\frac{V^2}{2.g}$$

ξ : Coefficient de perte de charge singulière.

Références bibliographiques

1 - Carlier, M., (1980). Hydraulique générale et appliquée, Collection de la direction des études et recherches d'électricité de France, Volume 14, 2eme Edition, Eyrolles, Paris, France

2 - Lencastre, A. (1999). Hydraulique générale, Editions Eyrolles, première Edition, Paris.

3 -José VAZQUEZ, (2000). Hydraulique générale, École nationale du génie de l'eau et de l'environnement de Strasbourg.

4 -Boualem REMINI, (2010). Cours de mécanique des fluides, Office des publication universitaires, Algérie.

5 - Boualem REMINI, (2011). Mécanique des fluides HDRAUSTATIQUE Cours -Exercices, Office des publication universitaires, Algérie.